МГУ им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Курсовая работа

Предквантование по Сурьо-Костанту симплектических многообразий с контактными особенностями.

Студент: В.И. Сидельников

Научные руководители: академик РАН А.Т. Фоменко

д.ф.-м.н. Д.Б. Зотьев

Москва

2018

§ 1. Симплектические многообразия с контактными особенностями

Квантованием симплектического многообразия (M,ω) называется линейное отображение $F \longmapsto \hat{F}$ множества $C^\infty(M;\mathbb{C})$ в пространство линейных операторов на некотором (пред)гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ [1], удовлетворяющее условиям:

1. $\hat{1} = 1$ (тождественный оператор);

2. $\widehat{\{F,G\}} = [\hat{F},\hat{G}]$, где $[\hat{F},\hat{G}] = i\hbar^{-1}\cdot(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F})$ (квантовая скобка Пуассона);

3. $\hat{F^*} = (\hat{F})^*$, где * — комплексное сопряжение или сопряженный оператор;

4. для некоторого полного набора функций $F_1,\ldots,F_m$ набор операторов $\hat{F}_1,\ldots,\hat{F}_m$ является полным. Условие полноты означает, что любая функция, коммутирующая с каждой F_j, является константой (аналогично для операторов). Если выполнено только 1, 2, 3, то говорят о предквантовании [1].

Сурьо и Костантом была предложена конструкция предквантования [2,3], которая описана в §2. В настоящей работе она распространяется на симплектические многообразия с контактными особенностями [4,5].

Определение 1. *Пусть на многообразии M определена замкнутая 2-форма ω, и непустое множество $\Theta = \{\rho\in M:\ \det\omega_\rho = 0\}$ имеет меру ноль в M. Тогда пара (M,ω) называется симплектическим многообразием с особенностью.*

Если $\rho\in\Theta$, то $\mathcal{Z}_\rho = \mathrm{Ker}(\omega_\rho)$ имеет размерность $2k\geq 2$.

Определение 2. *Пусть (M,ω) есть симплектическое многообразие с особенностью, $\dim\mathcal{Z}_\rho = 2k$ в некоторой точке $\rho\in\Theta$, и существует такая гладкая гиперповерхность $S\subset M$, что $\rho\in S\subset\Theta$ и $\dim\mathcal{Z}_y = 2k$ в каждой точке $y\in S$. Тогда точка ρ называется контактной, если $\mathcal{Z}_\rho\not\subset T_\rho S$ и $d^{2k-1}Pf(\omega)_\rho\neq 0$, где $Pf(\omega) = \pm\sqrt{\det\omega}$.*

Условие $d^{2k-1}Pf(\omega)_\rho\neq 0$ означает, что в некоторых (и тогда в любых) координатах $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{2n}$, заданных в окрестности ρ, найдется частная производная от $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ порядка $2k-1$, которая отлична от нуля в точке ρ. При этом все производные $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ порядков от 0 до $2k-2$ в точке ρ равны нулю. В случае $k=1$ определение 2 упрощается до единственного условия $dPf(\omega)(\mathcal{Z}_\rho)\neq 0$ [4].

Согласно теореме 3 [4], на некоторой окрестности контактной точки ρ существуют координаты $(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{q})\in\mathbb{R}^{2k}\times\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^{n-k}$, в которых ω имеет *канонический* вид:

$$\omega = d\Big(\frac{x_1^2}{2}\Big(dx_2+\sum_{j=2}^{k}x_{2j-1}dx_{2j}\Big)\Big)+\sum_{i=1}^{n-k}dp_i\wedge dq_i\ , \tag{1}$$

при этом $Pf(\omega) = x_1^{2k-1}/2^{k-1}$ и гамильтонова система $sgrad(f)$ на $M \setminus \Theta$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x}_1 = -\frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1^2}\left(x_3\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_5} + \ldots + x_{2k-1}\frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}}\right) \\ \dot{x}_{2j+1} = \frac{2}{x_1^2}\left(x_{2j+1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_{2j+2}}\right), \quad \dot{x}_{2j+2} = \frac{2}{x_1^2}\frac{\partial f}{\partial x_{2j+1}} \qquad (1 \le j \le k-1) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad (1 \le i \le n-k) \end{array} \right) \tag{2}$$

Если $\rho \in \Theta$ и $\lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} \mathrm{sgrad}(f)(y) = w \in T_\rho M$, то вектор w обозначается $\mathrm{sgrad}(f)(\rho)$. Для этого необходимо равенство $df(\mathcal{Z}_\rho) = 0$, которое в общем не является достаточным. Но если точка ρ является контактной, то поле $\mathrm{sgrad}(f)$, определенное на некоторой окрестности $O(\rho)$, существует тогда и только тогда, когда $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in \Theta$ достаточно близких к ρ (теорема 1 [4]).

Для любой контактной точки $\rho \in \Theta$ существует такая ее окрестность U, что каждая точка $y \in U \cap \Theta$ является контактной. Обозначим $\mathcal{X}_U$ множество всех гладких функций f на U, каждая из которых удовлетворяет условию $df(\mathcal{Z}_y) \equiv 0$. Следующее утверждение было получено в [5].

Предложение 1. *Множество $\mathcal{X}_U$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона, которая корректно определена на $\mathcal{X}_U \times \mathcal{X}_U$.*

Доказательство:

$$\begin{aligned} d\{f_1, f_2\}(\mathcal{Z}_y) &= \omega_y\big(\mathcal{Z}_y, \mathrm{sgrad}\{f_1, f_2\}(y)\big) = \omega_y\big(\mathcal{Z}_y, [\mathrm{sgrad}(f_1), \mathrm{sgrad}(f_2)](y)\big) = \\ &= \omega_y\big(\mathcal{Z}_y, L_{\mathrm{sgrad}(f_1)}\, \mathrm{sgrad}(f_2)\big) = \omega_y\big(\mathcal{Z}_y, \tfrac{d}{dt}\big(\varphi_t^* \,\mathrm{sgrad}(f_2)\big)(y)\big) = \\ &= \tfrac{d}{dt}\omega_y\big((\varphi_t^*\mathcal{Z})_y, \big(\varphi_t^*\, \mathrm{sgrad}(f_2)\big)(y)\big) = \tfrac{d}{dt}\omega_y\big(\mathcal{Z}_y, \mathrm{sgrad}(f_2)(y)\big) = 0, \end{aligned}$$

где φ_t — локальный поток гладкого поля $sgrad(f_1)$, определенного в окрестности точки ρ, сохраняющий форму ω вместе с полем ее ядер $\Box$.

Следующее утверждение из [4] вводит топологическое ограничение на класс симплектических многообразий с контактными особенностями.

Предложение 2. *Пусть симплектическое многообразие (M, ω) с особенностью замкнуто, ориентируемо и каждая точка $\rho \in \Theta$ является контактной. Если $\dim M = 2$ или $\dim \mathcal{Z}_y > 2$ $\forall y \in \Theta$, то $\mathbf{H}^2(M, \mathbb{R}) \neq 0$.*

Нам потребуется отображение $F_0: \ S^{2n-1} \times [-1;\ 1] \to D^{2n}$, заданное формулой $F_0(s,t) = st$, где $s \in S^{2n-1} = \partial D^{2n}$, $t \in [-1;\ 1]$, $D^{2n} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : |x| \le 1\}$. Обозначим Θ сферу $S^{2n-1} \times \{0\}$, тогда $F_0(\Theta) = 0$. Пусть $M = S^{2n-1} \times [-1;\ 1]$. Легко проверить, что $\mathrm{rk}(d_p F_0) = 1$ $\forall p \in \Theta$ и $\mathrm{rk}(d_p F_0) = 2n$ $\forall p \in M \setminus \Theta$.

Фиксируем на шаре D^{2n} симплектическую форму $\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$. Если $\omega_0 = F_0^*(\Omega_0)$, то $\omega_{0p} = 0$ $\forall p \in \Theta$ и $\det(\omega_{0p}) \neq 0$ $\forall p \in M \setminus \Theta$. В координатах $(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{2n-2}, t)$, где $(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{2n-2})$ – сферические координаты на S^{2n-1}, якобиан отображения F_0 равен $t^{2n-1} \cdot \cos^{2n-2}\theta_1 \cdot \ldots \cdot \cos\theta_{2n-2}$. Поэтому $Pf(\omega_0)$ имеет порядок t^{2n-1} при $t \to 0$, и, следовательно, каждая точка $p \in \Theta$ является контактной для ω_0.

Рассмотрим любую пару (N_1, Ω_1) и (N_2, Ω_2) симплектических многообразий размерности $2n \geq 2$. Если $(N_1, \Omega_1) \neq (N_2, \Omega_2)$, то обозначим N несвязное объединение $N_1 \coprod N_2$. Если $(N_1, \Omega_1) = (N_2, \Omega_2)$, то пусть $N = N_1 = N_2$. Симплектическая структура многообразия N определяется такой формой Ω, что $\Omega|_{N_j} = \Omega_j$.

Для каждого $j \in \{1, 2\}$ выберем пару замкнутых шаров D_j^{2n} и $\overline{D}_j^{2n}$, так что $D_j^{2n} \subset \mathrm{int}\big(\overline{D}_j^{2n}\big) \subset N_j$ и существуют симплектоморфизмы $f_j : \overline{D}_j^{2n} \to D^{2n}$ (теорема Дарбу). Если $(N_1, \Omega_1) = (N_2, \Omega_2)$, то шары $\overline{D}_j^{2n}$ не должны пересекаться.

Приклеим к N цилиндр $S^{2n-1} \times [-1;\ 1]$ посредством отождествлений точек:

$$(s,t) = f_1^{-1}\big(F_0(s,t)\big) \text{ при } -1 \leq t \leq -1/2\ , \quad (s,t) = f_2^{-1}\big(F_0(s,t)\big) \text{ при } 1/2 \leq t \leq 1\ .$$

Тем самым мы приклеиваем ручку, имея следующие отождествления подмножеств:

$$S^{2n-1} \times \{-1\} = \partial\overline{D}_1^{2n},\ S^{2n-1} \times [-1;\ -1/2] = \overline{D}_1^{2n} \setminus \mathrm{int}\big(D_1^{2n}\big),\ S^{2n-1} \times \{-1/2\} = \partial D_1^{2n}$$

$$S^{2n-1} \times \{1/2\} = \partial D_2^{2n},\ S^{2n-1} \times [1/2;\ 1] = \overline{D}_2^{2n} \setminus \mathrm{int}\big(D_2^{2n}\big),\ S^{2n-1} \times \{1\} = \partial\overline{D}_2^{2n}\ .$$

Выбрасывая из каждого N_j внутренность шара D_j^{2n} получаем многообразие M с гладкой, замкнутой 2-формой ω, которая совпадает с Ω_j на $N_j \setminus D_j^{2n}$ и равна $F_0^*(\Omega_0)$ на $S^{2n-1} \times [-1;\ 1]$. Форма ω невырожденна на $M \setminus \Theta$ и равна нулю во всех точках $(2n-1)$ – мерной сферы Θ, так что каждая точка $\rho \in \Theta$ является контактной.

Таким образом, пара (M, ω) является симплектическим многообразием с контактными особенностями. Породившую его конструкцию, введенную в [5], назовем приклейкой Θ – ручки к (N, Ω). В случае, когда $(N_1, \Omega_1) \neq (N_2, \Omega_2)$ многообразие M диффеоморфно связной сумме $N_1 \# N_2$.

§ 2. Предквантование по Сурьо-Костанту

Нас интересуют такие симплектические многообразия (M, ω) с контактными особенностями (т.е. каждая точка множества Θ является контактной), что $\omega_y = 0$ $\forall y \in \Theta$. Тогда для любой функции f на M условие $df(\mathrm{Ker}(\omega_y)) = 0$ эквивалентно $d_y f = 0$. Предквантование по Сурьо-Костанту применяется к множеству $\mathcal{F}_\Theta$ функций

$f : M^{2n} \to \mathbb{C}$, для которых гиперповерхность Θ является критическим подмногообразием. Из предложения 1 следует, что множество $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{X}_M$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона.

Теорема 1. *Пусть (M^{2n}, ω) — такое симплектическое многообразие, что образ класса $[\omega/h]$ при каноническом изоморфизме группы $\mathbf{H}^2_{dR}(M)$ в группу когомологий $\mathbf{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ произвольного покрытия Лере $\mathcal{U}$ является целочисленным классом, где h — постоянная Планка. Обозначим (M_0^{2n}, ω_0) симплектическое многообразие с контактными особенностями, полученное в результате приклейки Θ – ручки к (M^{2n}, ω), так что*

$$M_0^{2n} = \big(M^{2n} \setminus (D_1^{2n} \cup D_2^{2n})\big) \cup \big(S^{2n-1} \times [-1/2; 1/2]\big) \qquad \Theta = S^{2n-1} \times \{0\}.$$

Тогда существует главное расслоение $P^{2n+2}\,(M_0^{2n}, \mathbb{C}^*)$ со связностью, определяющей ковариантное дифференцирование ∇ в пространстве ассоциированного расслоения $L^{2n+2}\,(M_0^{2n}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*, P^{2n+2})$. При этом оператор

$$\hat{F} = F + \frac{h}{2\pi i}\nabla_{\mathrm{sgrad}(F)}$$

действующий на сечения расслоения L^{2n+2}, определяет предквантование по Сурьо-Костанту функций F из алгебры $\mathcal{F}_\Theta$.

Доказательство теоремы

Лемма 1. *На многообразии $M_0^{2n} \setminus \big(S^{2n-1} \times [-1/2; 1/2]\big)$ существует такое семейство открытых подмножеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, что все они, а также все непустые пересечения конечных семейств этих подмножеств гомеоморфны шару в $\mathbb{R}^{2n}$. При этом для некоторой окрестности U_0 ручки $S^{2n-1} \times [-1/2; 1/2]$ все множества семейства $\mathcal{U}$ вместе с U_0 образуют локально-конечное покрытие $\mathcal{U}_0$ многообразия M_0^{2n}, так что для каждого $\alpha \in A$ шар U_α не пересекается с U_0 или множество $U_\alpha \cap U_0 = U_\alpha \cap (U_0 \setminus S^{2n-1} \times [-1/2; 1/2])$ гомеоморфно шару в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Доказательство. Зафиксируем любые две различные точки $x_1, x_2 \in M^{2n}$. При каждом $j = 1, 2$ выберем замкнутый шар $\widetilde{D}_j^{2n}$ с центром x_j, на котором существуют канонические координаты для формы ω. Рассмотрим покрытие M^{2n} открытыми множествами

$$\mathrm{int}\big(\widetilde{D}_1^{2n}\big), \quad \mathrm{int}\big(\widetilde{D}_2^{2n}\big), \quad M^{2n} \setminus \{x_1, x_2\} \tag{3}$$

По теореме 3.7 главы IV [6] существует локально-конечное покрытие Лере $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}'}$, вписанное в покрытие (3). Любое множество U_α не содержит ни одну из точек x_1, x_2 либо является подмножеством $\mathrm{int}\big(\widetilde{D}_j^{2n}\big)$ для некоторого $j \in \{1, 2\}$.

Выберем любое множество $U_\alpha \subset \operatorname{int}\big(\widetilde{D}^{2n}_j\big)$. Предположим, что

$$\forall x \in U_\alpha \ \exists \beta \neq \alpha \ (x \in U_\beta), \quad \text{тогда}$$

$$U_\alpha = \bigcup_{\beta \in A',\ \beta \neq \alpha} U_\alpha \cap U_\beta \tag{4}$$

Из (4) следует, что множество U_α можно удалить из покрытия $\mathcal{U}'$ с сохранением всех его свойств. Повторим данный процесс с любым другим $U_\beta \subset \big(\widetilde{D}^{2n}_j\big)$. Поскольку покрытие $\mathcal{U}'$ локально-конечное, через конечное число шагов (при $j = 1, 2$) получим такое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, что:

$$\forall j \in \{1,2\} \ \exists y_j \in \widetilde{D}^{2n}_j \ \exists U_{\alpha_j} \subset \operatorname{int}\big(\widetilde{D}^{2n}_j\big) \quad y_j \in U_{\alpha_j} \ \& \ \forall \alpha \neq \alpha_j \ (y_j \notin U_\alpha).$$

Обозначим $\overline{D}^{2n}_j$ замыкание шара U_{α_j}. В силу локальной конечности покрытия существует такой замкнутый шар D^{2n}_j с центром y_j, что

$$D^{2n}_j \subset \operatorname{int}\big(\overline{D}^{2n}_j\big) \quad \& \quad \forall \alpha \neq \alpha_j \ (D^{2n}_j \cap U_\alpha = \emptyset).$$

Используя шары D^{2n}_j и $\overline{D}^{2n}_j$, приклеим Θ – ручку к (M^{2n}, ω). Получено многообразие M^{2n}_0 с формой ω_0. Искомая окрестность $U_0 = S^{2n-1} \times (-1, 1)$. Покрытие $\mathcal{U}_0$ образовано множеством U_0 и множествами семейства $\mathcal{U}$ за исключением U_{α_1} и U_{α_2} $\square$.

Лемма 2. *Для покрытия $\mathcal{U}_0$ (лемма 1) существует такой класс $m \in \mathbf{H}^2(\mathcal{U}_0, \mathbb{R})$, что для некоторого целочисленного коцикла $m_{\alpha\beta\gamma} \in m$ справедливо следующее.*

На каждом множестве U_α и U_0 заданы такие 1-формы θ_α и θ_0, и на каждом непустом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ и $U_\alpha \cap U_0$ заданы такие функции $b_{\alpha\beta}$ и $b_{0\alpha}$ соответственно $(\alpha, \beta \neq 0)$, что:

$$d\theta_\alpha = \omega_0|_{U_\alpha} = \omega|_{U_\alpha} \quad d\theta_0 = \omega_0|_{U_0} \quad (\theta_\beta - \theta_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = h db_{\alpha\beta} \quad (\theta_0 - \theta_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_0} = h db_{\alpha 0}$$

$$\forall \alpha \forall \beta \forall \gamma \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \equiv m_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$$

$$\forall \beta \forall \gamma \quad U_0 \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (b_{0\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma 0})|_{U_0 \cap U_\beta \cap U_\gamma} \equiv m_{0\beta\gamma} \in \mathbb{Z}$$

Доказательство. Формы θ_α, функции $b_{\alpha\beta}$ и $b_{0\alpha}$ существуют в силу леммы Пуанкаре, форма θ_0 — в силу относительной леммы Пуанкаре. Из доказательства следствия 2 Лекция 21 [7] следует, а в замечании 2.1.1. [3] явно указано, что при изоморфизме $\mathbf{H}^2_{dR}(M^{2n}) \to \mathbf{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, о котором идет речь в условии теоремы 1, форме ω/h соответствует коцикл

$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longmapsto b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha} \equiv const \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

Следующие две 1-формы локально определены как на M_0^{2n}, так и на M^{2n} :

$$\widetilde{\theta}_{\alpha_j} = \theta_0|_{U_{\alpha_j}\setminus D_j^{2n}} \qquad j = 1,2 \ .$$

Заменим все 1-коциклы $b_{\alpha_j\beta}$ на $\widetilde{b}_{\alpha_j\beta}$, где

$$\frac{\theta_\beta}{h} - \frac{\widetilde{\theta}_{\alpha_j}}{h} = d\widetilde{b}_{\alpha_j\beta} \qquad \beta \neq \alpha_1, \alpha_2 \ .$$

После этого коцикл (5) не изменится (значок $\widetilde{}$ опускаем).

Заметим, что $\forall U_\alpha \in \mathcal{U}_0 \quad U_\alpha \cap U_0 = U_\alpha \cap U_{\alpha_j}$ при некотором $j = 1,2$. Чтобы определить для покрытия $\mathcal{U}_0$ искомый коцикл вида (5) осталось ввести следующие обозначения. Если для некоторого $\alpha \in A$ множество $U_0 \cap U_\alpha = U_{\alpha_j} \cap U_\alpha$ не пусто, то полагаем $b_{0\alpha} = b_{\alpha_j\alpha}$, где функция $b_{\alpha_j\alpha}$ локально определена на M^{2n} $\square$.

В дальнейшем будем считать, что 0 входит в множество индексов A. Пусть

$$c_{\alpha\beta} = e^{-2\pi i b_{\alpha\beta}} \quad \forall \alpha, \beta \in A \tag{6}$$

тогда $c_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$. Из (5) следует $c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}c_{\gamma\alpha} = 1$. Следовательно, $c_{\alpha\beta}$ являются функциями склейки для некоторого, однозначно определенного, главного расслоения $P^{2n+2}\,(M_0^{2n}, \mathbb{C}^*)$. Определим связность в расслоении P^{2n+2}.

Пусть $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^*$ — локально-тривиализирующий диффеоморфизм. На U_α задано единичное сечение

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \to P^{2n+2}, \quad \forall x \in U_\alpha \ \big(\sigma_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x,1)\big).$$

Заметим, что каноническая 1-форма θ на группе $\mathbb{C}^*$ имеет вид $\theta = dz/z$. Пусть

$$\theta_{\alpha\beta} = c^*_{\alpha\beta}(\theta) = c^*_{\alpha\beta}\left(\frac{dz}{z}\right) = \frac{dc_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}} \qquad \lambda_\alpha = -\frac{2\pi i}{h}\theta_\alpha \ .$$

Проверим, что

$$\lambda_\beta - \lambda_\alpha = \frac{dc_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}} \tag{7}$$

Действительно, из леммы 2 и (6) получим:

$$\lambda_\beta - \lambda_\alpha = -\frac{2\pi i}{h}\left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) = -\frac{2\pi i}{h}\left(h db_{\alpha\beta}\right) = -2\pi i db_{\alpha\beta} = d\ln c_{\alpha\beta} = \frac{dc_{\alpha\beta}}{c_{\alpha\beta}} \ .$$

Под логарифмом понимается любая ветвь бесконечнолистной аналитической функции, определенная над односвязной областью $U_\alpha \cap U_\beta$.

Учитывая, что для коммутативной группы $\mathbb{C}^*$ имеет место $\mathrm{ad}_{c^{-1}_{\alpha\beta}} = \mathrm{id}$, из (7) и предложения 1.4 Главы 2 [6] следует, что на P^{2n+2} сущесвует связность с такой формой λ, что $\lambda_\alpha = \sigma^*_\alpha(\lambda)$ $\forall \alpha \in A$. Соответственно, в пространстве ассоциированного расслоения $L^{2n+2}\left(M_0^{2n},\mathbb{C},\mathbb{C}^*,P^{2n+2}\right)$ определена операция ковариантного дифференцирования ∇. Оператор

$$\hat{F} = F + \frac{h}{2\pi i}\nabla_{\mathrm{sgrad}(F)} \tag{8}$$

действующий на сечения L^{2n+2}, определяет предквантование по Сурьо-Костанту функций из алгебры $\mathcal{F}_\Theta$. В силу предложения 1, $\forall F\in\mathcal{F}_\Theta$ поле $\mathrm{sgrad}(F)$ корректно определено на всем многообразии M_0^{2n}.

Пусть $s_\alpha : U_\alpha \to L^{2n+2}$ — единичное сечение. Для любого сечения $s : M_0^{2n} \to L^{2n+2}$

$$\exists\ \varphi : U_\alpha \to \mathbb{C} \quad s|_{U_\alpha} = \varphi\cdot s_\alpha \quad \big(s_\alpha(x)\neq 0\ \forall x\in U_\alpha\big) \tag{9}$$

В силу (9) оператор (8) действует на функции $\varphi\in C^\infty(U_\alpha,\mathbb{C})$. Известно, что для любого векторного поля $\xi\in U_\alpha$

$$\nabla_\xi s_\alpha = \lambda_\alpha(\xi)s_\alpha = -\frac{2\pi i}{h}\theta_\alpha(\xi)s_\alpha \tag{10}$$

Из (10) следует, что

$$\nabla_\xi(s) = \nabla_\xi(\varphi s_\alpha) = \xi(\varphi)s_\alpha + \varphi\nabla_\xi s_\alpha = \Big(\xi(\varphi) - \frac{2\pi i}{h}\theta_\alpha(\xi)\varphi\Big)s_\alpha$$

Видно, что оператор $\hat{F}$ действует на функции $\varphi\in C^\infty(U_\alpha,\mathbb{C})$ следующим образом:

$$\hat{F}(\varphi) = F\varphi + \frac{h}{2\pi i}\{F,\varphi\} - \theta_\alpha(\mathrm{sgrad\ F})\cdot\varphi \tag{11}$$

Получен оператор предквантования по Сигалу – Ван-Хову [1,8].

Для проверки условия квантования $\hat{F^*} = (\hat{F})^*$, необходимо определить эрмитово произведение в пространстве финитных сечений L^{2n+2}. Следуя [3] полагаем:

$$(s_1,s_2) = \int_{M_0^{2n}} \langle s_1(x), s_2(x)\rangle_x \cdot \Omega(x) \quad \text{где} \quad \Omega = \wedge_{i=1}^n \omega\ .$$

Послойная эрмитова структура $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ определяется следующим образом:

Пусть $x\in U_\alpha$ и s_α — единичное (базисное) сечение ($s_\alpha(x)\neq 0\ \forall x\in U_\alpha$). Тогда, если $s_1(x) = f_1(x)s_\alpha(x)$ и $s_2(x) = f_2(x)s_\alpha(x)$, то

$$\langle s_1(x), s_2(x)\rangle_x = f_1(x)f_2^*(x) \tag{12}$$

Проверим корректность определения (12). Пусть $x\in U_\beta$ и $s_1(x) = g_1(x)s_\alpha(x)$, $s_2(x) = g_2(x)s_\alpha(x)$. Поскольку $s_\beta(x) = s_\alpha(x)c_{\alpha\beta}(x)$ и $|c_{\alpha\beta}| = 1$, то

$$g_1(x)g_2^*(x) = \frac{s_1(x)}{s_\beta(x)}\cdot\frac{s_2^*(x)}{s_\beta^*(x)} = \frac{s_1(x)}{s_\alpha(x)}\cdot\frac{s_2^*(x)}{s_\alpha^*(x)}\cdot\frac{1}{|c_{\alpha\beta}(x)|^2} = f_1(x)f_2^*(x)\ .$$

Для проверки свойства $\hat{F^*} = (\hat{F})^*$ достаточно доказать, что для вещественной функции F оператор $\hat{F}$ — самосопряженный. Ограничимся случаем сечений, носители которых лежат в некоторой карте U_α. Нужно проверить, что оператор вида (11) является самосопряженным. Достаточно доказать, что

$$\int_{M_0^{2n}} \frac{h}{2\pi i} \operatorname{sgrad} F(\varphi) \cdot \psi^* \cdot \Omega = \int_{M_0^{2n}} \varphi \cdot \left(\frac{h}{2\pi i} \operatorname{sgrad} F(\psi) \right)^* \cdot \Omega \ ,$$

что равносильно

$$\int_{M_0^{2n}} \operatorname{sgrad} F(\varphi\psi^*) \cdot \Omega = 0 \tag{13}$$

Пусть $a(t)$ — (локальная) однопараметрическая подгруппа поля $\operatorname{sgrad} F$. Так как поток $\operatorname{sgrad} F$ сохраняет форму ω, а значит и ее степень Ω, интеграл (13) равен:

$$\int_{M_0^{2n}} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\varphi\psi^*)(a_t x) \cdot \Omega = \frac{d}{dt} \int \varphi\psi^*(a_t x) a_t^* \Omega = \frac{d}{dt} \int \varphi\psi^* \Omega = 0 \ .$$

Теорема 1 доказана.

Эта теорема расширяет предметную область теории геометрического квантования (по Сурьо-Костанту) симплектическими многообразиями с контактными особенностями, которые не имеют никакой симплектической структуры. К ним относятся связные суммы некоторых, по-видимому многих, симплектических многообразий. Примеры таких связных сумм можно извлечь из работы [9].

Согласно п.4 теоремы 3.8 [9], если 4-мерное многообразие X разлагается в связную сумму $X = Y\#Z$, где $b_+^2(Y) > 0$ и $b_+^2(Z) > 0$, то все инварианты Зайберга-Виттена многообразия X равны нулю (т.е. $SW_X \equiv 0$). Отсюда и из теоремы 4.1 [9] следует, что если X — замкнутое, симплектическое 4-многоообразие, то оно не может быть связной суммой многобразий, у которых $b_+^2 > 0$. Число b_+^2 равно размерности максимального подпространства в $\mathbf{H}^2(X, \mathbb{R})$, на котором билинейная форма $Q([\omega_1], [\omega_2]) = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2$ является положительно-определенной [9].

Учитывая, что инвариант b_+^2 аддитивен относительно связной суммы [9], отсюда следует, что на любом многобразии $\mathbb{C}P^2\#\ldots\#\mathbb{C}P^2$ не существует симплектической структуры (теорема 3.10 [9]). При этом любое $\mathbb{C}P^N$ имеет стандартную симплектическую структуру с целочисленными периодами [10].

Другой пример связан с поверхностью $K3$ в $\mathbb{C}P^3$, определяемой уравнением $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$, у которой $b_+^2 = 3$ [9]. Тогда $b_+^2(K3\#\ldots\#K3) = 3m > 0$ (где m — число слагаемых), следовательно связная сумма любого числа экземпляров $K3$ не является симплектическим многообразием. При этом $K3$ есть 4-мерное симплектическое многообразие (комплексное подмногообразие в кэлеровом многообразии $\mathbb{C}P^3$, в силу чего $K3$ — кэлерово [11]). Перемешивая в связной сумме слагаемые $K3$ и $\mathbb{C}P^2$, получим другие примеры того же рода.

Таким образом, применительно к связным суммам симплектических многообразий задача квантования по Сурьо-Костанту, вообще говоря, не имеет смысла. Но ее модификация, описанная в теореме 1, применима к связной сумме любых многообразий, каждое из которых допускает (пред)квантование по Сурьо-Костанту.

Примером служит любая связная сумма $\mathbb{C}P^N\#\ldots\#\mathbb{C}P^N$, если зафиксировать на $\mathbb{C}P^N$ форму $\omega = h\Omega_0$, где Ω_0 — стандартная симплектическая структура на $\mathbb{C}P^N$, которая в однородных координатах $(z_0:\ldots:z_N)$ задается выражением [10]:

$$\Omega_0 = \frac{i\Big(\sum_{k=0}^N z_k z_k^* \sum_{k=0}^N dz_k\wedge dz_k^* - \sum_{k=0}^N z_k^* dz_k \wedge \sum_{k=0}^N z_k dz_k^*\Big)}{2\pi\Big(\sum_{k=0}^N z_k z_k^*\Big)^2}$$

Поскольку Ω_0 — целочисленная форма [10], из теорем 2.1, 2.2 [1] следует, что на $(\mathbb{C}P^N,\omega)$ существует предквантование по Сурьо-Костанту. В силу теоремы 1 оно существует и на симплектическом многообразии $\mathbb{C}P^N\#\ldots\#\mathbb{C}P^N$ с контактными особенностями. При этом, как показано выше, при $N=2$ оно не имеет симплектической структуры.

Замечание. Покажем, что условие $d_yF = 0\ \forall y\in\Theta$ на функции $F\in\mathcal{F}_\Theta\subset C^\infty(M_0^{2n};\mathbb{C})$, которые квантуются в силу теоремы 1, не является физически ограничительным. Для любой, как угодно малой, трубчатой окрестности U гиперповерхности Θ существует такая гладкая функция $\chi: M_0^{2n}\to[0;1]$, что $\chi(\Theta)=0$ и $\chi(M_0^{2n}\backslash U)\equiv 1$. При этом $d_y\chi = 0$ в каждой точке $y\in\Theta$ (поскольку χ достигает глобального минимума на Θ). Тогда для любой $f\in C^\infty(M_0^{2n};\mathbb{C})$ функция $F=f\chi$ принадлежит алгебре $\mathcal{F}_\Theta$ и отличается от f лишь в бесконечной близости от гиперповерхности Θ.

При этом функция F (локально) делится на x_1^2, где $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{2n}$ — канонические координаты (1). Поэтому из (2) следует, что поле $\mathrm{sgrad}(F)$ соприкасается с гиперповерхностью Θ.

Пример к теореме 1. Введем на сфере S^2 симплектическую структуру $\omega = h\sigma$, где σ — форма площади. Фиксируем покрытие Лере $\mathcal{U}$ картами U_k при $k=1,2,\ldots,7$, изображенными на рисунках 1 и 2 (серый прямоугольник на рис. 2 соответствует множеству $U_4\cap U_5\cap U_6\cap U_7$).

Если $\omega|_{U_k} = d\theta_k$, то образ класса $[\omega/h]$ при каноническом изоморфизме $\mathbf{H}^2_{dR}(M)\to\mathbf{H}^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$ является классом когомологий $[C]$ с представляющим его 2-

коциклом:

$$U_k \cap U_l \cap U_m \longmapsto C_{klm} \in \mathbb{R}, \quad k, l, m \in \{1, 2, \ldots, 7\}, \quad U_k \cap U_l \cap U_m \neq \emptyset,$$

$$\text{где} \quad (b_{kl} + b_{lm} + b_{mk})|_{U_k \cap U_l \cap U_m} \equiv C_{klm} \quad \text{и} \quad (\theta_k - \theta_l)|_{U_k \cap U_l} = hdb_{kl}$$

Этот коцикл можно выбрать так, чтобы все числа C_{klm} были равны нулю. Для этого необходимо подобрать функции b_{kl}, прибавляя к ним произвольные вещественные константы, чтобы тождественно выполнялись уравнения (14):

$$\begin{array}{lll} b_{13} + b_{34} + b_{41} = 0 & b_{13} + b_{35} + b_{51} = 0 & b_{14} + b_{45} + b_{51} = 0 \\ b_{23} + b_{36} + b_{62} = 0 & b_{23} + b_{37} + b_{72} = 0 & b_{26} + b_{67} + b_{72} = 0 \\ b_{34} + b_{46} + b_{63} = 0 & b_{35} + b_{57} + b_{73} = 0 & b_{45} + b_{57} + b_{74} = 0 \\ b_{45} + b_{56} + b_{64} = 0 & b_{46} + b_{67} + b_{74} = 0 & b_{56} + b_{67} + b_{75} = 0 \end{array} \tag{14}$$

Поскольку ограничение формы ω на экватор S^1_0 сферы S^2 равно нулю, в силу относительной леммы Пуанкаре [11] $\omega = d\theta$ для некоторой 1-формы θ, определенной на окрестности S^1_0. Из доказательства леммы 1.5 [12] следует, что в качестве этой окрестности можно выбрать множество $U_3 \cup U_4 \cup U_5 \cup U_6 \cup U_7$, поскольку оно стягивается на S^1_0. Таким образом можно считать, что $\theta_k - \theta_l \equiv 0$ и $b_{kl} \equiv 0$ при $k, l \geq 3$. Следовательно (14) сводится к системе уравнений:

$$\begin{array}{ll} b_{13} + b_{51} = 0 & b_{14} + b_{51} = 0 \\ b_{23} + b_{72} = 0 & b_{26} + b_{72} = 0 \end{array} \tag{15}$$

Произвольно зафиксируем функции b_{51}, b_{72} и подберем свободные константы — слагаемые в b_{13}, b_{23} так, чтобы уравнения (15) стали тождествами на соответствующих множествах $U_k \cap U_l \cap U_m$.

Таким образом можно считать, что все $C_{klm} \equiv 0$. Поскольку класс $[C]$ является целочисленным [3], на многообразии (S^2, ω) существует предквантование по Сурьо-Костанту. Поэтому к (S^2, ω) можно любое число раз применить теорему 1, приклеивая ручки к множеству $(U_1 \cup U_2) \setminus (U_3 \cup U_4 \cup U_5 \cup U_6 \cup U_7)$. Доказано утверждение.

Теорема 2. *На любом замкнутом, ориентируемом многообразии M^2 рода $g \geq 0$ существует такая симплектическая структура с контактными особенностями, что множество Θ является несвязным объединением g вложенных окружностей, и для функций из алгебры $\mathcal{F}_\Theta$ определено предквантование по Сурьо-Костанту (при $g = 0$ особенностей нет и $\mathcal{F}_\Theta = C^\infty(M^2; \mathbb{C})$).*

Нам потребуется понятие нормальных координат на римановом многообразии M [6]. Координаты $x_1, \dots x_m$ в карте $V \ni p$ называются нормальными, если они индуцированы диффеоморфизмом $\tau_p : O \to V$ некоторого шара O в $\mathbb{R}^m$ с центром в точки ноль, который для некоторого, фиксированного базиса $e_1, \dots, e_m$ в T_pM ставит в соответствие произвольному вектору $x = (x_1, \dots, x_m) \in O$ точку $\tau_p(x) = \gamma(1) \in V$, где $\gamma(t)$ — такая геодезическая в M, что $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = \sum_{i=1}^m x_i e_i$. Тогда базис $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m$ в точке p совпадает с базисом $e_1, \dots, e_m$, который можно считать ортонормальным. При этом p имеет координаты $(0, \dots, 0)$ и называется центром V.

Предложение 3. *Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие с контактными особенностями. Существуют такая трубчатая окрестность U_0 гиперповерхности Θ и покрытие Лере $\mathcal{U}$ множества $M^{2n} \setminus U_0$, что $\forall U_\alpha \in \mathcal{U}$ если множество $U_\alpha \cap U_0$ не пусто, то оно не пересекается с Θ и гомеоморфно шару в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Доказательство. Зафиксируем на M^{2n} какую-нибудь риманову метрику. В качестве U_0 возьмем любую трубчатую окрестность Θ с гладкой границей $P^{2n-1} = \partial U_0$. Из доказательства теоремы 3.7 Главы 4 [6] видно, что существует покрытие Лере множества $M^{2n} \setminus U_0$ картами U_α с нормальными координатами. Это покрытие можно выбрать так, чтобы центры всех множеств U_α, пересекающихся с P^{2n-1}, лежали на этой гиперповерхности, а сами U_α не пересекались с Θ. Теперь нам нужно выбрать эти карты так, чтобы их пересечения с U_0 были гомеоморфны шару в $\mathbb{R}^{2n}$.

Рассмотрим любое множество U_α с центром $p \in P^{2n-1}$ и нормальными координатами $x_1, \dots, x_{2n}$. Соответствующий базис $e_1, \dots, e_{2n}$ в T_pM можно выбрать так, чтобы векторы $e_1, \dots, e_{2n-1}$ касались поверхности P^{2n-1}, а вектор e_{2n} был ей ортогонален. Тогда геодезический диск $D^{2n-1} \subset U_\alpha$, определяемый уравнением $x_{2n} = 0$, делит U_α на два выпуклых подмножества, каждое из которых гомеоморфно шару в $\mathbb{R}^{2n}$. Поскольку D^{2n-1} и P^{2n-1} соприкасаются в точке p, выбирая U_α достаточно малым можно добиться того, чтобы $U_\alpha \cap U_0$ было диффеоморфно тому выпуклому подмножеству U_α, которое ограничено диском D^{2n-1} $\square$.

В обозначениях предложения 3 можно сформулировать условие, при котором на (M^{2n}, ω) существует предквантование по Сурьо-Костанту. Сначала заметим, что на каждом множестве U_α и U_0 заданы такие 1-формы θ_α и θ_0, и на каждом непустом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ и $U_\alpha \cap U_0$ заданы такие функции $b_{\alpha\beta}$ и $b_{0\alpha}$ $(\alpha, \beta \neq 0)$, что:

$$d\theta_\alpha = \omega|_{U_\alpha} \quad d\theta_0 = \omega|_{U_0} \quad (\theta_\beta - \theta_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = hdb_{\alpha\beta} \quad (\theta_0 - \theta_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_0} = hdb_{\alpha 0}$$

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{R}$$

$$\forall\beta\forall\gamma \quad U_0\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\emptyset \quad \Rightarrow \quad (b_{0\beta}+b_{\beta\gamma}+b_{\gamma 0})|_{U_0\cap U_\beta\cap U_\gamma}\equiv C_{0\beta\gamma}\in\mathbb{R}$$

Первообразные функции $b_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha 0}$ определены с точностью до произвольных слагаемых — констант. Если эти константы можно подобрать так, чтобы все числа $C_{\alpha\beta\gamma}$ и $C_{0\beta\gamma}$ оказались целыми, то существует предквантование функций из алгебры $\mathcal{F}_\Theta$.

Поскольку множество

$$U_0\cup\bigcup_{U_\alpha\cap U_0\neq\emptyset}U_\alpha \tag{16}$$

стягивается на гиперповерхность Θ, соответствующие формы θ_0 и θ_α можно считать ограничениями на U_0 и U_α некоторой формы θ, заданной на множестве (16) и являющейся первообразной для ω. Таким образом, все функции $b_{0\alpha}$, а также все $b_{\alpha\beta}$, отвечающие парам непустых пересечений $U_\alpha\cap U_0$ и $U_\beta\cap U_0$, можно считать равными нулю. Отсюда вытекает утверждение.

Теорема 3. *Пусть (M^{2n},ω) — симплектическое многообразие с контактными особенностями. Если существует такая трубчатая окрестность U_0 гиперповерхности Θ, что симплектическое многообразие $(M^{2n}\setminus\overline{U}_0,\omega)$ допускает предквантование по Сурьо-Костанту, то и на (M^{2n},ω) существует предквантование по Сурьо-Костанту функций из алгебры $\mathcal{F}_\Theta$.*

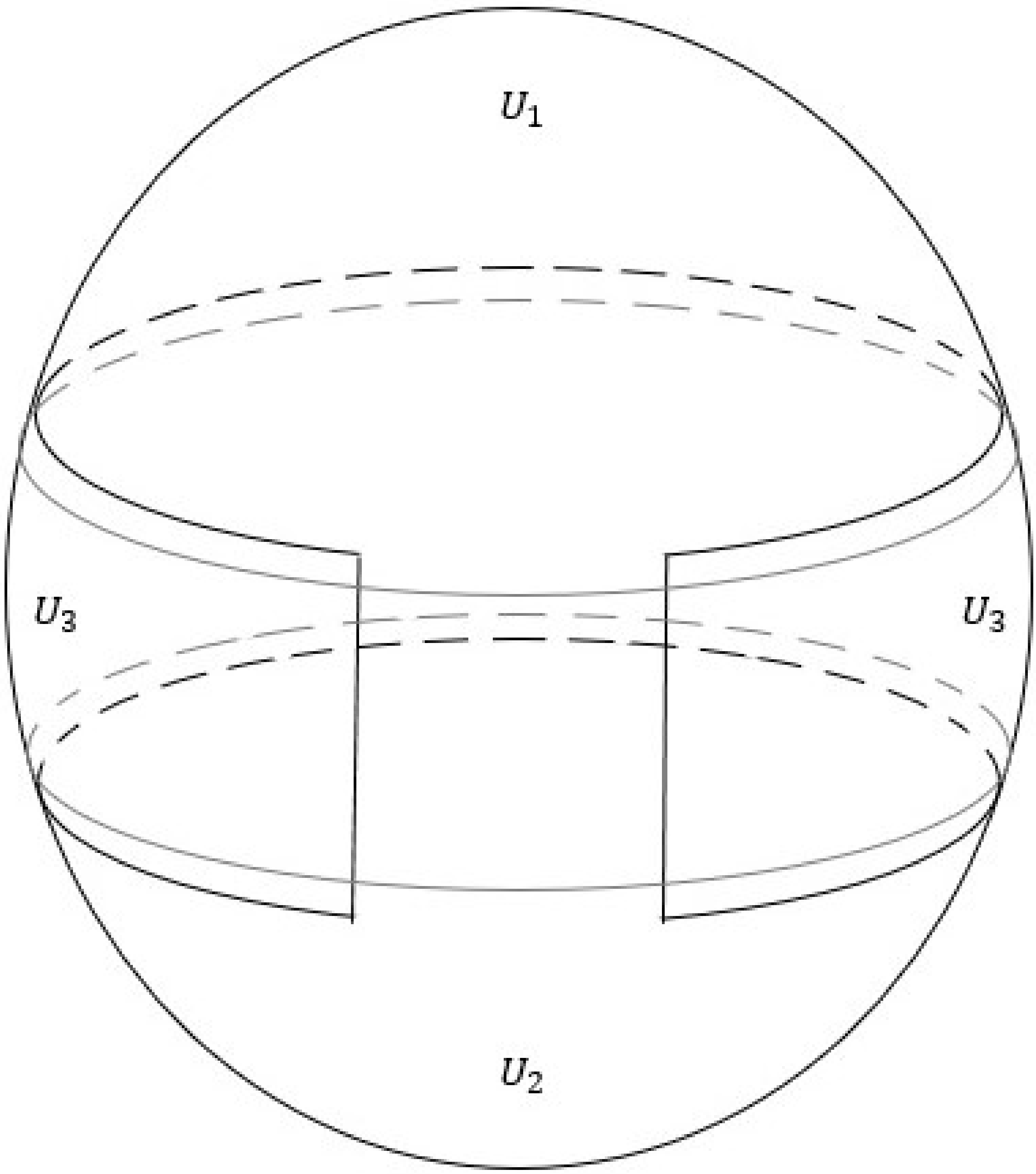

Рис. 1:

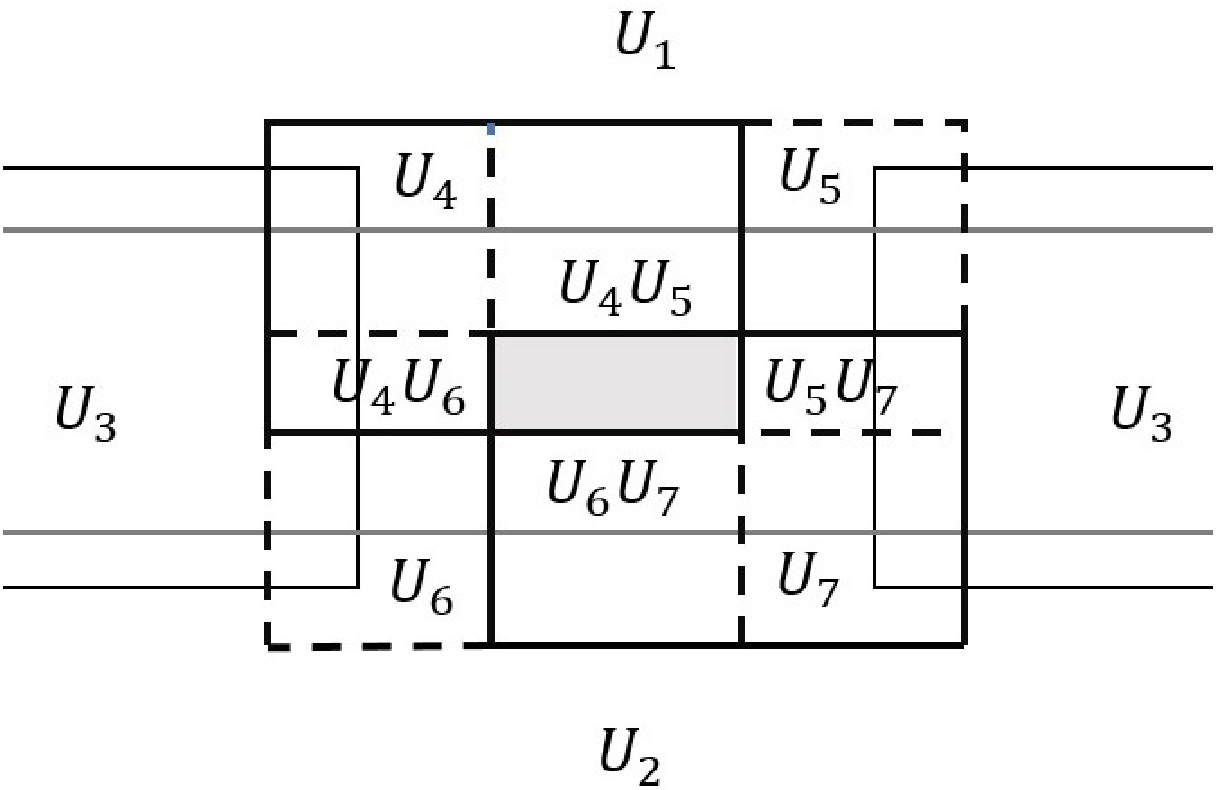

Рис. 2:

Список литературы

[1] А.А. Кириллов. "Геометрическое квантование" , *Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, **4** (1985), 141-178.

[2] J.M. Souriau, "Quantification geometrique" , Commun. Math. Phys.,**374** (1966), 374-398.

[3] Б. Костант. "Квантование и унитарные представления" , УМН, **28** (1973), 163–225.

[4] Д.Б. Зотьев, "Контактные вырождения замкнутых 2-форм" , Математический сборник, **198** (2007), 47-78.

[5] Д.Б. Зотьев, *Симплектические многообразия с контактными особенностями*, диссертация на соискание ст. д.ф.-м.н., МГУ, мех-мат, 2011.

[6] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, М.: "Наука" , 1981.

[7] М.М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия*, М.: "Наука" , 1987.

[8] I.E. Segal, "Quantization of non-linear systems" , Journal of Mathematical Physics, **50** (1960), 468-488.

[9] М. Хатчинс, К.Г. Таубс, "Введение в теорию Зайберга-Виттена для симплектических многообразий" , в сборнике *Симплектическая геометрия и топология*, под ред. Я. Элиашберг, Л. Трейнор, М.:МЦНМО, 2008.

[10] А.Т. Фоменко, *Симлектическая геометрия. Методы и приложения*, М.: Изд-во МГУ, 1988.

[11] В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь, *Симплектическая геометрия, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, М.: ВИНИТИ, **4**, 1985, 7-139.

[12] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация. I том*, Ижевск: Удмуртский университет, 1999.