МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Григорьев Дмитрий Сергеевич

Курсовая работа

Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа до симплекса.

Руководитель курсовой работы: профессор А. А. Тужилин

Москва, 2018 г.

Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа было определено Д. Эдвардсом [1], а затем переоткрыто и обобщено М. Громовым [2], [3]. Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет различие между двумя произвольными метрическими пространствами и является одним из красивейших понятий метрической геометрии. С момента своего появления оно использовалось математиками в изучении топологических свойств. Вычисление расстояний Громова–Хаусдорфа от метрических пространств до конечных симплексов, то есть бесконечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой, было описано в [4]. Цель данной работы — обобщить результаты [4] на случай бесконечных симплексов. Было доказано, что, когда мощность метрического пространства меньше мощности симлекса, расстояние останится таким же, как и при конечном симплексе. Также был описан частный случай ситуации, когда мощности равны и метрическое пространство имеет специальный вид.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть A — произвольное множество, через $\#A$ будем обозначать его мощность.

Пусть X — метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Через $\mathrm{diam}X$ будем обозначать диаметр X.

Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, определим расстояние между ними как $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$, при этом, если $A = \{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr|$ будем писать $|aB|$.

Для любой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \bigcup_{\alpha\in A} U_r(a)$.

Определение 1.1. Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \ \&\ B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\bigl\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\bigr\}.$$

Полученная величина назвается *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Определение 1.2. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, назовем *реализацией пары* (X, Y).

Определение 1.3. *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Определение 1.4. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. *Отношением между множествами X и Y* называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы $\sigma(x)$ и $\sigma(A)$, а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы $\sigma^{-1}(y)$ и $\sigma^{-1}(B)$.

Определение 1.5. Отношение $R \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X : (x, y) \to x$ и $\pi_Y : (x, y) \to y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Определение 1.6. Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big|,\ (x, y),\ (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Утверждение 1.7 ([5])**.** *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Определение 1.8. Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Произвольный единичный симплекс обозначим через Δ.

Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ.

Утверждение 1.9 ([4])**.** *Пусть M — конечное метрическое пространство, $n = \#M$. Тогда для каждого $m \in N$, $m > n$, и $\lambda > 0$ имеем*

$$d_{GH}(X, \lambda\Delta) = \frac{1}{2}\max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

2 Основные результаты

Предложение 2.1. *Пусть X — метрическое пространство, Δ — единичный симплекс. Тогда, если $\#X < \#\Delta$ и $\lambda > 0$, то*

$$d_{GH}(X, \lambda\Delta) = \frac{1}{2}\max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, \lambda\Delta)$. Поскольку $\#X < \#\Delta$, то существует точка $x \in X$ такая, что $\#R(x) \geq 2$. Значит,

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big|,\, (x,y) \in R,\, (x',y') \in R\Big\} \geq \big||xx| - \lambda\big| = \lambda,$$

и следовательно $d_{GH}(X, \lambda\Delta) \geq \frac{1}{2}\lambda$.

Теперь рассмотрим соответствие $R_1 \in \mathcal{R}(X, \lambda\Delta)$ такое, что для любой точки $y \in \lambda\Delta$ выполняется $\#R_1^{-1}(y) = 1$. Тогда, при $(x,y) \in R_1, (x',y') \in R_1$, если $|yy'| = 0$, то и $|xx'| = 0$. Следовательно, при $|yy'| = 0$ супремум не может достигаться. Но значит, он должен достигаться при $|yy'| = \lambda$.

Таким образом, $\operatorname{dis} R_1 = \sup\Big\{\big||xx'| - \lambda\big|, x, x' \in X\Big\} = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}$. Отсюда следует, что $d_{GH}(X, \lambda\Delta) \leq \frac{1}{2}\max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}$.

Пусть $\operatorname{diam} X \leq 2\lambda$, тогда $\max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \lambda$, то есть утверждение доказано.

Пусть $\operatorname{diam} X \geq 2\lambda$, тогда $\max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \operatorname{diam} X - \lambda$. В таком случае, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем точки $x, x' \in X$ такие, что $\big||xx'| - \operatorname{diam} X\big| < \varepsilon$, и рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, \lambda\Delta)$. Для него должно выполняться одно из двух условий:

(1) существует $y \in \lambda\Delta$ такой, что $(x,y), (x',y) \in R$. Тогда $\operatorname{dis} R \geq \operatorname{diam} X - \varepsilon > \operatorname{diam} X - \varepsilon - \lambda$;

(2) существуют разные $y, y' \in \lambda\Delta$ такие, что $(x,y), (x',y') \in R$. Тогда $\operatorname{dis} R \geq \operatorname{diam} X - \varepsilon - \lambda$.

В силу произвольности ε, можем устремить его к нулю и получить, что для любого $R \in \mathcal{R}(X, \lambda\Delta)$ выполняется неравенство $\operatorname{dis} R \geq \operatorname{diam} X - \lambda$. Следовательно, $d_{GH}(X, \lambda\Delta) = \frac{1}{2}(\operatorname{diam} X - \lambda)$. □

Предложение 2.2. *Пусть X — метрическое пространство, содержащее конечное число точек $x_1, ..., x_n \in X$ таких, что для каждого $r > 0$ выполняется $\#U_r(x_k) = \infty$ для любого $k = 1, ..., n$. Тогда, если Δ — единичный симплекс, $\lambda > 0$, $\operatorname{diam} X \leq 2\lambda$ и $\#X = \#\Delta$, то*

$$d_{GH}(X, \lambda\Delta) = \frac{1}{2}\lambda.$$

.

Доказательство. Так как $\#X = \#\Delta$, то в $\mathcal{R}(X, \lambda\Delta)$ есть биекция и для нее $\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - \lambda\big|,\, x, x' \in R\Big\} \leq \lambda$. Следовательно, $d_{GH}(X, \Delta) \leq \frac{1}{2}\lambda$. Рассмотрим теперь произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, \lambda\Delta)$. Тогда имеет место одно из условий.

(1) Для любой точки x_k, $k = 1, ..., n$, существует точка $y_k \in \lambda\Delta$ такая, что $(x_k, y_k) \in R$, и окрестность $U(x_k)$, для которой выполняется $U(x_k) \times \{y_k\} \subset R$. В таком случае, для сюръективности R, необходимо существовние точки $x \in X$ такой, что $\#R(x) \geq 2$. Из этого следует, что $\operatorname{dis} R \geq \lambda$.

(2) Найдется хотя бы одна точка x_k такая, что $(x_k, y) \in R$ для $y \in \lambda\Delta$, и не существует окрестности $U(x_k)$, для которой выполнялось бы $U(x_k) \times \{y\} \subset R$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x' \in X$ такая, что $|x_k x'| < \varepsilon$ и $(x', y) \notin R$. Тогда существует $y' \in \lambda\Delta$, отличная от y, такая, что $(x', y') \in R$ и тогда $\operatorname{dis} R \geq \lambda$.

Таким образом, в обоих случаях получаем $d_{GH}(X, \lambda\Delta) \geq \frac{1}{2}\lambda$ и выполняется искомое равенство. $\square$

Список литературы

[1] Edwards D.A. *"The Structure of Superspace." In: Studies in Topology*, Academic Press, 1975.

[2] Gromov M.L. *Structures metriques pour les varietes riemanniennes*, Textes mathematiques. Recherche (v. 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.

[3] Gromov M.L. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps*, Publications mathematiques I.H.E.S., v. 53, 1981.

[4] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655.

[5] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.