**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

# КУРСОВАЯ РАБОТА
# Некомпактность сегмента в пространстве Громова–Хаусдорфа
# The noncompactness of a segment in the Gromov-Hausdorff space

Выполнила студентка 3 курса
Борисова О.Б.
Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. А.А.Тужилин

Москва 2018

# Введение

В данной работе исследуются свойства сегмента, множества точек, лежащих между двумя данными, в метрическом пространстве Громова–Хаусдорфа. Для пространства всех замкнутых непустых компактов ограниченно компактного метрического пространства с метрикой Хаусдорфа легко показать, что сегмент любых двух точек всегда является компактным. Есть предположение, что в пространстве Громова–Хаусдорфа это свойство уже не выполняется, и даже более сильно, любой сегмент является некомпактным множеством, на что указывают разобранные здесь частные случаи. А именно, мы покажем, что сегмент двух различных конечных метрических пространств и сегмент, в котором одна из данных точек является одноточечным метрическим пространством, а другая — нет, не являются компактами.

# 1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть $X$ — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств $X$. Для $A, B \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ab|\}.$$

Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между $A$ и $B$*.

Пусть $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств $X$.

**Предложение 1.1.** ([1]) *Ограничение $d_H(A,B)$ на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства. Тройку $(X', Y', Z')$, состоящую из метрического пространства $Z'$ и его двух подмножеств $X'$ и $Y'$, изометричных соответственно $X$ и $Y$, назовем *реализацией пары (X, Y)*. Положим

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\{r : \exists (X', Y', Z'), d_H(X', Y') \le r\}.$$

Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова-Хаусдорфа между $X$ и $Y$*.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

**Предложение 1.2.** ([1]) *Ограничение $d_{GH}(A,B)$ на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Расстояние Громова-Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий.

Пусть $X$ и $Y$ — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(X\times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}(X,Y)$ называются *отношениями между $X$ и $Y$*. Если $X' \subset X$ и $Y' \subset Y$ — непустые множества, а $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$, то положим

$$\sigma|_{X'\times Y'} = \{(x,y) \in \sigma : x \in X', y \in Y'\}.$$

Отметим, что $\sigma|_{X'\times Y'}$ может оказаться пустым и, тем самым, не принадлежащим $\mathcal{P}(X',Y')$.

Пусть $\pi_X : (x,y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x,y) \mapsto y$ — канонические проекции. Отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если ограничения $\pi_X$ и $\pi_Y$ на $\sigma$ сюръективны. Множество всех соответствий между $X$ и $Y$ обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Если $X$ и $Y$ — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ определено *искажение*.

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big| : (x,y),(x',y')\in\sigma\Big\}$$

**Предложение 1.3.** ([1]) *Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R\in\mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальным соответствий между $X$ и $Y$ обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$.

**Предложение 1.4.** ([1]) *Для $X,Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)\neq\emptyset$.*

Обозначим через $\mathcal{R}_{\rm c}(X,Y)$ множество все замкнутых соответствий между $X$ и $Y$.

**Предложение 1.5.** ([3]) *Для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)\cap\mathcal{R}_{\rm c}(X,Y)\neq\emptyset$.*

Следующие утверждения упрощают подсчет расстояния Громова–Хаусдорфа для некоторых метрических пространств.

Метрическое пространство $X$ назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс $X$ компактен, если и только если он конечен. Симплекс, имеющий $n$ вершин, расстояния между которыми равны $\lambda$, обозначим через $\lambda\Delta_n$. При $\lambda=1$ пространство $\lambda\Delta_n$ будем для краткости обозначать через $\Delta_n$.

**Предложение 1.6.** ([1]) *Для любого метрического пространства $X$ имеем $d_{GH}(\Delta_1,X)=\frac{1}{2}\operatorname{diam} X$.*

Через $\#X$ обозначим количество элементов в пространстве $X$.

**Предложение 1.7.** ([2]) *Пусть $X$ - компактное метрическое пространство, $n=\#X$. Тогда для каждого $m\in\mathbb{R}, m>n$ и $\lambda>0$ имеем*

$$d_{GH}(\lambda\Delta_m,X)=\frac{1}{2}\max\{\lambda,\operatorname{diam} X-\lambda\}.$$

Для множества $X$ через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества $X$ на $m$ его непустых подмножеств. Пусть теперь $X$ — метрическое пространство и $D=\{X_1,\ldots,X_m\}\in\mathcal{D}_m(X)$. Положим $\operatorname{diam} D=\max\{\operatorname{diam} X_1,\ldots,\operatorname{diam} X_m\}$, и $d_m(X)=\inf\{\operatorname{diam} D : D\in\mathcal{D}_m(X)\}$, если $\mathcal{D}_m(X)\neq\emptyset$, и $d_m(X)=\infty$ в противном случае.

**Предложение 1.8.** ([2]) *Пусть $X$ — компактное метрическое пространство. Тогда для произвольного $m\in\mathbb{N}, m\le\#X$, и $0<\lambda\ \le(\operatorname{diam} X)/2$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m,X)=\max\{d_m(X),\operatorname{diam} X-\lambda\}.$$

Пусть $X,Y$ — произвольные метрические пространства. При каждом $t\in(0,1)$ определим на $X\times Y$ функцию расстояния, положив

$$|(x,y)(x',y')|_t=(1-t)|xx'|+t|yy'|.$$

**Предложение 1.9.** ([3]) *Определенная выше функция $|\cdot|_t$ является метрикой при всех $t \in (0,1)$, а порожденная ей метрическая топология на $X \times Y$ совпадает с топологией декартового произведения.*

Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$, метрическое пространство $(\sigma, |\cdot|_t)$ обозначим через $\sigma_t$.

**Предложение 1.10.** ([3]) *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого замкнутого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ имеем $\sigma_t \in \mathcal{M}$ при каждом $t \in (0,1)$.*

Выберем произвольное $r \in \mathcal{R}(X,Y)$ и доопределим семейство $R_t, t \in (0,1)$, в точках $t = 0, 1$, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

**Предложение 1.11.** ([3]) *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y) \cap \mathcal{R}_{\mathrm{c}}(X,Y)$ отображение $t \mapsto R_t$, $t \in [0,1]$, задает кривую, соединяющую $X$ и $Y$. Это кривая является кратчайшей, причем ее длина равна $d_{GH}(X,Y)$. Тем самым метрика пространства $\mathcal{M}$ — строго внутренняя.*

# 2 Основные результаты

*Сегментом* для двух точек $A, B \in X$ метрического пространства называется подмножество $[A,B] = \{C \in X : |AC| + |CB| = |AB|\}$.

**Теорема 1.** *Пусть $X$ — конечное неодноточечное метрическое пространство. Тогда в пространстве Громова–Хаусдорфа сегмент $[\Delta_1, X]$ не является компактом.*

**Доказательство.** Пусть $\#X = k$. Тогда по предложению 1.7 для $n > k$ выполняется $d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \frac{1}{2}\max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}$. Выберем $\lambda$ так, чтобы $\operatorname{diam} X - \lambda > \lambda$. Имеем

$$d_{GH}(\Delta, \lambda\Delta_n) + d_{GH}(\lambda\Delta_n, X) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\operatorname{diam} X - \lambda}{2} = \frac{\operatorname{diam} X}{2} = d_{GH}(\Delta, X).$$

Поэтому $\{\lambda\Delta_n\}_{n=k+1}^{\infty} \subset [\Delta_1, X]$. Но $d_{GH}(\lambda\Delta_p, \lambda\Delta_q) = \frac{\lambda}{2}$ для любых $p, q \in \mathbb{N}, p \neq q$. Тогда всякая подпоследовательность $\{\lambda\Delta_n\}_{n=k+1}^{\infty}$ не будет фундаментальной и тем более сходящейся. Значит $[\Delta_1, X]$ — некомпактное множество.

**Теорема 2.** *Пусть $X$ — компактное бесконечное метрическое пространство. Тогда в пространстве Громова–Хаусдорфа сегмент $[\Delta_1, X]$ не является компактом.*

**Доказательство.** Построим последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_{m_k}(X) = 0$. Заметим, что для любого метрического пространства существование конечной $\varepsilon$-сети $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ равносильно существованию конечного покрытия открытыми шарами $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^{N}$. Тогда для компакта $X$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ найдем такое покрытие открытыми шарами с радиусом $\frac{1}{k}$. Обозначим его через $\big\{U_{\frac{1}{k}}(x_i^k)\big\}_{i=1}^{N_k}$. Построим по нему разбиение множества $X$ следующим образом: первый элемент разбиения будет $U_{\frac{1}{k}}(x_1^k)$, $n$-й — $U_{\frac{1}{k}}(x_n^k) \cap \big(X \setminus \cup_{i=1}^{n-1} U_{\frac{1}{k}}(x_i^k)\big)$ (если какой-то элемент окажется пустым, выкидываем его из разбиения). Количество элементов полученного разбиения обозначим через $m_k$, а само разбиение через $D_{m_k}(X)$. Тогда $\operatorname{diam} D_{m_k}(X) \le \frac{2}{k}$ и $d_{m_k}(X) \le \frac{2}{k}$.

Докажем от противного, что в $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует бесконечно много различных чисел. Пусть во множестве $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть только конечное число различных элементов. Тогда существует бесконечная подпоследовательность $\{m_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $k_i \neq k_j$, при $i \neq j$ таких, что $m_{k_i} = m_{k_j} = q$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$. Выберем из бесконечного множества $X$ произвольным образом $q+1$ различных точек $\{x_1, x_2, ..., x_{q+1}\}$. Обозначим через $S(x_1, x_2 ... x_{q+1})$ минимальное расстояние между этими фиксированными точками. Найдем такое $I$, что $\frac{2}{k_I} < S(x_1, x_2, ..., x_{q+1})$. Тогда diam $D_{m_{k_I}}(X) < S(x_1, x_2, ..., x_{q+1})$, и $D_{m_{k_I}}(X)$ состоит из $q$ элементов

$$\{D^1_{m_{k_I}}(X), D^2_{m_{k_I}}(X), ..., D^q_{m_{k_I}}(X)\}.$$

Каждый элемент $D^i_{m_{k_I}}(X)$, $i \in \{1, 2, ..., q\}$, может содержать не более одной точки из $\{x_1, x_2, ..., x_{q+1}\} \in X$, так как в противном случае существуют $x_i, x_j, i \neq j$ такие, что $x_i, x_j \in D^t_{m_{k_I}}(X)$. Тогда diam $D_{m_{k_I}}(X) \geq$ diam $D^t_{m_{k_I}}(X) \geq |x_i x_j| \geq S(x_1, x_2, ..., x_{q+1})$, что противоречит условию diam $D_{m_{k_I}}(X) < S(x_1, x_2, ..., x_{q+1})$. Значит в разбиении $D_{m_{k_I}}(X)$ лежат только $q$ точек из $\{x_1, x_2, ..., x_{q+1}\} \in X$. Поэтому $D_{m_{k_I}}(X)$ не может быть разбиением $X$. Получили противоречие.

Теперь выберем число $\lambda > 0$ так, чтобы $\lambda \leq \frac{\operatorname{diam} X}{2}$. Найдем $K \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k > K$ выполняется $d_{m_k}(X) < \operatorname{diam} X - \lambda$. Тогда по предложению 1.8.

$$d_{GH}(\Delta_1, \lambda\Delta_{m_k}) + d_{GH}(\lambda\Delta_{m_k}, X) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\operatorname{diam} X - \lambda}{2} = \frac{\operatorname{diam} X}{2} = d_{GH}(\Delta_1, X).$$

Поэтому $\{\lambda\Delta_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset [\Delta_1, X]$. Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 1, показывают, что $[\Delta_1, X]$ не является компактом.

**Теорема 3.** *Пусть $X$, $Y$ — конечные различные метрические пространства. Тогда в пространстве Громова–Хаусдорфа сегмент $[X, Y]$ не является компактом.*

**Доказательство.** Пусть $R_t$, $t \in [0, 1]$, — кратчайшая геодезическая, соединяющая $X$ и $Y$, которую мы описали в предложении 1.11. Выберем произвольное $t \in (0, 1)$ и положим $Z = R_t$. По построению, $Z$ — конечное метрическое пространство. Зафиксируем число $\mu$ такое, что $0 < \mu < \min\big\{d_{GH}(X, Z), d_{GH}(Z, Y), S(Z)\big\}$, где $S(Z)$ — минимальное расстояние между точками из $Z$. Выберем произвольную точку $z_0 \in Z$. Для множества $W(\mu, m) = \mu\Delta_m \cup \big(Z \setminus \{z_0\}\big)$ зададим функцию расстояния следующим образом. Пусть $w_1, w_2 \in W$, тогда

$$|w_1 w_2|_W = \begin{cases} |w_1 w_2|_Z & \text{при } w_1, w_2 \in Z, \\ |w_i z_0|_Z & \text{при } w_i \in Z, w_{3-i} \in \mu\Delta_m, i \in \{1, 2\}, \\ \mu & \text{при } w_1, w_2 \in \mu\Delta_m, w_1 \neq w_2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Данная функция расстояния является метрикой. Аксиома тождества и симметрии очевидны. Проверим неравенство треугольника для различных точек $W$. Если все три точки $w_1, w_2, w_3$ лежат в $Z \setminus \{z_0\}$, то неравенство треугольника сохраняется. Если $w_1, w_2 \in Z \setminus \{z_0\}$, а $w_3 \in \mu\Delta_m$, то расстояния между этими точками соответственно равны расстояниям между $w_1, w_2, z_0 \in Z$, значит опять неравенство выполняется. Если же $w_1 \in Z \setminus \{z_0\}$, а $w_2, w_3 \in \mu\Delta_m$, то $|w_2 w_3| = \mu \leq S(Z) \leq |z_0 w_1| + |w_1 z_0| = |w_2 w_1| + |w_1 w_3|$ и $|w_1 w_2| = |w_1 z_0| \leq |w_1 z_0| + \mu = |w_1 w_3| + |w_3 w_2|$ аналогично с $|w_1 w_3|$. В последнем случае: $w_1, w_2, w_3 \in \mu\Delta_m$, тоже выполняются все аксиомы метрики.

Докажем теперь, что $d_{GH}(X,W) \le d_{GH}(X,Z)$. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Z)$ и построим по нему соответствие $V \in \mathcal{R}(X,W)$ следующим образом: если $(x,z) \in R$ и $z \ne z_0$, то $(x,z) \in V$, если же $(x,z_0) \in R$, то $\big\{(x,w_i) : w_i \in \mu\Delta_m, i \in \{1,2,...,m\}\big\} \subset V$.

Так как множество $V$ конечное, в формуле подсчета искажения $V$ можем заменить sup на max

$$\operatorname{dis} V = \max\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x,w),(x',w') \in V\Big\}.$$

Рассмотрим 2 случая разбиения на пары элементов $V$. Пусть

$$v_1 = \max\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x,w),(x',w') \in V; w \in Z \setminus \{z_0\}, w' \in W\Big\},$$

$$v_2 = \max\Big\{\big||xx'| - |ww'|\big| : (x,w),(x',w') \in V; w, w' \in \mu\Delta_m\Big\}.$$

Тогда

$$\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\}.$$

Отметим, что для каждой пары $\{(x,w),(x',w')\} \subset V, w \in Z \setminus \{z_0\}, w' \in W$, ее вклад в величину $v_1$ такой же, как у пары $\{(x,w),(x',z_0)\} \subset R$ в $\operatorname{dis} R$ при $w' = z_0$, или как у пары $\{(x,w),(x',w')\} \subset R$ при $w' \ne z_0$. Поэтому $v_1 \le \operatorname{dis} R$.

Во втором случае вклад каждой пары $\{(x,w),(x',w')\} \subset V$, $w, w' \in \mu\Delta_m$ в $v_2$ будет $\big||xx'| - \mu\big|$, что не превосходит $\max\{|xx'|, \mu\}$, но $|xx'| \le \operatorname{dis} R$, так как $\{(x,z_0),(x'z_0)\} \subset R$, а неравенство $\mu \le \operatorname{dis} R$ следует из условия $\mu < d_{GH}(X,Z)$.

Таким образом доказано, что

$$\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\} \le \operatorname{dis} R.$$

Следовательно

$$d_{GH}(X,Z) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Z)\} \ge \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} V : V \in \mathcal{R}(X,W)\} \ge d_{GH}(X,W).$$

Аналогично $d_{GH}(Z,Y) \ge d_{GH}(W,Y)$. Тогда

$$d_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Z) + d_{GH}(Z,Y) \ge d_{GH}(X,W) + d_{GH}(W,Y).$$

И, применяя неравенство треугольника, имеем

$$d_{GH}(X,Y) \le d_{GH}(X,W) + d_{GH}(W,Y).$$

Отсюда следует, что $W(\mu,m) \in [X,Y]$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Посчитаем $d_{GH}\big(W(\mu,m), W(\mu,n)\big)$ для $n > m$. Так как $\#W(\mu,m) < \#W(\mu,n)$, то для произвольного соответствия $R \in \mathcal{R}\big(W(\mu,m), W(\mu,n)\big)$ существует пара элементов $(w^m, w_1^n), (w^m, w_2^n)$ такая, что $(w^m, w_1^n), (w^m, w_2^n) \in R$. Поэтому

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||w_1^m w_2^m| - |w_1^n w_2^n|\big| : (w_1^m, w_1^n), (w_2^m, w_2^n) \in R\Big\} \ge S\big(W(\mu,n)\big) \ge \mu.$$

Это означает, что

$$d_{GH}\big(W(\mu,m), W(\mu,n)\big) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\} \ge \frac{\mu}{2}$$

Тогда всякая подпоследовательность $\{W(\mu,m)\}_{m=1}^{\infty}$ не будет фундаментальной и тем более сходящейся. Значит $[X,Y]$ — некомпактное множество.

## Список литературы


[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655 (2016).

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A., *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance*, ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850 (2016).