ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«Сравнение классов интегрируемых гамильтоновых систем на разрешимых борелевских алгебрах Ли»

«Comparison of the classes of integrable Hamiltonian systems on Borel solvable Lie algebras»

Выполнила студентка
607 группы
Требитш София Валерьевна

подпись студента

Научный руководитель:
академик, проф. Фоменко Анатолий Тимофеевич

подпись научного руководителя

Москва
2018 г.

"Сравнение классов интегрируемых гамильтоновых систем на разрешимых борелевских алгебрах Ли".

С.В. Требитш
(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова; *ryzhikova.sv@gmail.com*)

Введение.

Известно, что если мы можем вложить гамильтонову систему, заданную на пуассоновом многообразии, в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, то её интегрирование сводится к поиску функций на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, коммутирующих с образом гамильтониана при вложении. В связи с этим возник вопрос: на любой ли коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор, то есть набор функций, коммутирующих между собой относительно скобки Пуассона-Ли, количество которых было бы максимально, то есть равнялось бы полусумме размерности алгебры и её индекса? Особый интерес представляли полные коммутативные наборы полиномов. Впервые даннная проблема была сформулирована в работе [1] А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко и решена ими для всех редуктивных (в том числе полупростых) алгебр Ли.

Существование таких наборов для произвольных конечномерных алгебр нулевой характеристики было доказано С.Т. Садэтовым в 2004 году, доказательством теоремы служит алгоритм построения данных наборов. Другими математиками до работы Садэтова и позднее также были построены полные коммутативные наборы полиномов на различных сериях алгебр Ли. В том числе, в работе Трофимова [2] были найдены такие наборы для вещественных представлений борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли.

Таким образом, возник следующий интересный вопрос о совпадении или несовпадении наборов, построенных разными методами, чему и посвящена данная работа.

В работе будут подробно разобраны методы построения полных коммутативных наборов полиномов, указанные в работах Трофимова и Садэтова, в общем виде на алгебрах серии $B\mathfrak{so}(4s)$, а также приведено детальное построение и сравнение указанных наборов на алгебре $B\mathfrak{so}(8)$, имеющей размерность шестнадцать. Для этой алгебры наборы функционально совпадают, что даёт нам возможность высказать гипотезу о совпадении полиномиальных наборов на всей серии $B\mathfrak{so}(4s)$.

Автор благодарит научного руководителя академика А.Т.Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

История вопроса и основные понятия.

Пусть (M^n, Π^{ij}) - пуассоново многообразие, и на нем задана гамильтонова система с гамильтонианом H, т.е. фиксировано векторное поле $v = sgradH$, которое в локальных координатах имеет вид

$$v^i = sgradH^i = \Pi^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

. *Первыми интегралами* гамильтоновой системы называются функции, которые постоянны вдоль интегральных траекторий данной системы. Хорошо известно, что функция F является первым интегралом тогда и только тогда, когда она коммутирует с гамильтонианом, т.е. выполнено равенство $\{F, H\} = 0$, где $\{\cdot, \cdot\}$ - скобка Пуассона, соответствующая тензору Пуассона Π_{ij} . Для того чтобы проинтегрировать гамильтонову систему достаточно найти нужное количество функционально независимых первых интегралов. Такой набор первых интегралов существует далеко не у всех систем.

Пусть $\mathfrak{g}$ - произвольная конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$, а $\mathfrak{g}^*$ - соответствующая ей коалгебра. Тогда пространство $\mathfrak{g}^*$ наделяется естественной структурой пуассонова многообразия при помощи скобки Пуассона - Ли. Пусть $f, g : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{K}$ - произвольные гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$, тогда их дифференциалы $d_x f, d_x g$ в произвольной точке x $\in \mathfrak{g}^*$ можно рассматривать как элементы алгебры $\mathfrak{g}$.

Определение 1. Скобкой Пуассона-Ли двух гладких функций f и g на $\mathfrak{g}^*$ называется функция

$$\{f, g\}(x) =< x, [d_x f, d_x g] >$$

где $[\cdot, \cdot]$ - коммутатор двух элементов алгебры Ли, а $< \cdot, \cdot >$ - значение ковектора на векторе.

Таким образом, тензор Пуассона Π_{ij}, соответствующий скобке Пуассона-Ли на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ имеет вид $\Pi_{ij} = c_{ij}^k x^k$ где c_{ij}^k - структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Заметим, что скобка Пуассона-Ли также корректно определена на множестве всех полиномов на $\mathfrak{g}^*$, которые относительно данной операции образуют подалгебру $P(\mathfrak{g})$ в алгебре всех функций на $\mathfrak{g}^*$. Подалгебра $P(\mathfrak{g})$ называется пуассоновой алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 2. Говорят, что гамильтонова система $v = sgradH$, заданная на пуассоновом многообразии (M^n, Π^{ij}) допускает вложение *в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, если M_n можно отождествить с некоторым инвариантным относительно коприсоединенного представления группы Ли G, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, подмногообразием $N \subset \mathfrak{g}^*$ так, что будут выполнены следующие условия:*

1) поле v после отождествления будет касаться орбит коприсоединенного представления группы G;

2)после отождествления векторное поле v на N будет гамильтоновым на орбитах относительно канонической симплектической структуры.

Предложение 1. *Пусть $f : M^n \to N \subset \mathfrak{g}^*$ – вложение гамильтоновой системы на пуассоновом многообразии (M^n, Π^{ij}) в алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Тогда если функции $F, H : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{K}$ коммутируют на всех орбитах присоединенного представления соответствующей группы Ли G, то функции $F \circ f, H \circ f : M^n \to \mathbb{K}$ будут коммутировать на M^n.*

Таким образом, интегрирование вложенной гамильтоновой системы сводится к поиску функций на коалгебре $\mathfrak{g}^*$, коммутирующих с образом гамильтониана при вложении. Возникает вопрос: на любой ли коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ существует максимально возможный набор коммутирующих функций? Более точно, интерес представляют полные коммутативные наборы.

Определение 3. *Индексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется число* $\mathrm{ind}\mathfrak{g} = \min_{\xi \in \mathfrak{g}^*} \dim Ann(\xi)$

Определение 4. *Набор функций $f_1, ..., f_n$ на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ называется полным коммутативным набором, если выполнены следующие свойства:*

1) Функции $f_1, ..., f_n$ попарно коммутируют относительно скобки Пуассона-Ли, т.е. $\{f_i, f_j\} = 0, i, j = 1, ..., k$;

2) Функции $f_1, ..., f_n$ почти всюду на $\mathfrak{g}^*$ функционально независимы.

3) Данный набор состоит из максимально возможного числа функций, т.е. $k = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} + ind\mathfrak{g})$.

Легко видеть, что каждый полный коммутативный набор функций на коалгебре Ли задает на пуассоновском многообразии интегрируемую гамильтонову систему. Действительно, если в качестве гамильтониана взять одну функцию из набора, то остальные функции будут функционально независимыми первыми интегралами.

В случае, когда наборы ищутся в классе всех гладких функций, ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема (А.В.Браилов, см.[4]) *На любом симплектическом многообразии M^{2n} существует набор из гладких, попарно коммутирующих, почти всюду функционально независимых функций.*

Тем не менее, для приложений в механике и физике больший интерес представляют наборы состоящие не из произвольных гладких функций, а из полиномов. В связи с чем был поставлен вопрос о существовании полного коммутативного полиномиального набора на произвольной конечномерной алгебре Ли.

Гипотеза (А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, см. [1], [5]) *Пусть $\mathfrak{g}$ - вещественная или комплексная конечномерная алгебра Ли. Тогда на $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Гипотеза была доказана авторами для случая редуктивной алгебры Ли(см.[3]). Также ими был предложен метод сдвига аргумента, позволяющий строить коммутативные наборы на алгебрах Ли.

В более поздних работах А.В. Браилова, А.В. Болсинова, В.В. Трофимова, Т.А. Певцовой, О.И. Богоявленского, А.А. Архангельского, Ле Нгок Тьеуена, С. Сярова, М.М. Деркач, А.М. Переломова, А.Г. Реймана, А.В. Беляева, М. Вернь, В.А. Гинзбурга, К. Шваи и А.А. Короткевича были построены полные коммутативные наборы полиномов на различных сериях алгебр Ли: вещественных нильпотентных, вполне разрешимых, борелевских подалгебрах простых алгебр Ли, многих полупрямых суммах, алгебрах малой размерности и т.д.(см.[2],[6],[7],[16],[17],[18],19)

Полностью гипотеза Мищенко-Фоменко была доказана С.Т. Садэтовым в 2004 году для случая произвольной конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики [8].

Теорема (С.Т.Садэтов)*Пусть $\mathfrak{g}$ - произвольная конечномерная алгебра Ли над полем нулевой характеристики, тогда на $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Доказательством теоремы служит алгоритм построения полных коммутативных наборов. Построение сводится либо к методу сдвигов, либо к построению полного коммутативного набора полиномов на алгебре Ли меньшей размерности, но, возможно, над расширенным полем. Чтобы непосредственно использовать эту теорему для построения полных инволютивных наборов полиномов на конкретных алгебрах Ли, её оригинальное доказательство удобно изложить на более наглядном языке геометрических структур. В статье [9] Болсиновым была проделана большая работа по описанию конструкции Садэтова на языке пуассоновой геометрии. Для наших целей этот подход более удобен, поэтому будем ссылаться одновременно на статьи [8] и [9].

Как уже упоминалось выше, другими авторами также были построены полные коммутативные наборы на различных сериях алгебр Ли. Большой интерес представляет работа В.В.Трофимова, который построил полиномиальные наборы на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли.

Теорема (В.В.Трофимов, см.[2])*Пусть $\mathfrak{g}$ - полупростая комплексная алгебра Ли типа, отличного от E_7 и E_8, тогда строится набор функций $f_1, ..., f_s$ на пространстве дуальном к борелевской подалгебре простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой, что*

1) функции $f_i, (i = 1, ..., s)$ предъявлены в явном виде;

2) функции $f_i, (i = 1, ..., s)$ являются полином/ами на $B\mathfrak{g}^*$;

3) их количество s равняется половине размерности орбиты максимальной размерности представления Ad^* группы, отвечающей подалгебре Бореля.

4) функции $f_i, (i = 1, ..., s)$ функционально независимы на орбитах общего положения.

В работе Трофимовым для построения полных инволютивных семейств был предложен новый метод построения функций в инволюции. Метод связан с рассмотрением цепочек подалгебр. Строя достаточно большой запас функций в инволюции на дуальных простанствах к подалгебрам и поднимая их на $\mathfrak{g}^*$, мы получаем в совокупности с полуинвариантами коприсоединенного представления достаточное количество функций в инволюции. Этот метод был применен к классическим алгебрам Ли.

Таким образом на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли мы получаем два инволютивных полиномиальных набора, построенных различными методами. Большой интерес представляет вопрос существования двух функционально независимых наборов, то есть неэквивалентных интегрируемых гамильтоновых систем на некоторых алгебрах Ли.

К примеру, похожая работа была проделана М.М.Деркач (см.[17]) для некоторых полупрямых сумм, в результате было показано, что наборы инволютивных функций построенные методами Тэна, Браилова и Садэтова на данных алгебрах совпадают.

Ранее мной было показано, что на алгебрах малой размерности (4, 5 и 6) наборы, построенные методом Трофимова и методом Садэтова совпадают. Рассмотрим подробнее методы построения полиномиальных наборов у Садэтова и Трофимова.

Метод Садэтова.

Ключевую роль в доказательстве теоремы Садэтова играет следующая лемма.

Лемма 1 (С.Т. Садэтов, А.В. Болсинов, см. [8], [9]) Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль удовлетворяет одному из следующих условий:
1) $\mathfrak{g}$ имеет коммутативный идеал $\mathfrak{h}$, не являющийся одномерным центром алгебры;
2) $\mathfrak{g}$ имеет идеал $\mathfrak{h}_m$, изоморфный алгебре Гейзенберга, и при этом центр $\mathfrak{g}$ совпадает с центром идеала $\mathfrak{h}_m$;
3) $\mathfrak{g} = L \oplus \mathbb{K}$, где L - полупроста;
4) $\mathfrak{g}$ полупроста.

Случай, который я хочу рассмотреть в этой работе, удовлетворяет первому условию, поэтому доказательство в этом случае мы рассмотрим подробно, а остальные рассматривать не будем, лишь упомянем, что в случаях 3) и 4) полный коммутативный набор получается методом сдвига аргумента.

Случай 1 Пусть $\mathfrak{h}-$ - коммутативный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, не совпадающий с одномерным центром. В силу коммутативности идеала $\mathfrak{h}$, на $\mathfrak{h}^*$ существует полный коммутативный набор линейных полиномов. Таким, например, является набор координат на $\mathfrak{h}^*$ относительно произвольного фиксированного базиса. Дополним полный коммутативный набор полиномов на $\mathfrak{h}^*$ до полного коммутативного набора полиномов на всей коалгебре $\mathfrak{g}^*$. Для этого выясним, как устроено множество функций на $\mathfrak{g}^*$, коммутирующих со всеми функциями на $\mathfrak{h}^*$. Присоединенное представление алгебры ad можно ограничить на идеал $\mathfrak{h}$. Обозначим это ограничение через $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}}$. Рассмотрим двойственное к нему представление

$$(\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}})^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{h}^*)$$

Для каждого элемента $x \ni \mathfrak{g}^*$ определен образ $h = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^*}(x)$ при естественной проекции $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^*} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$. в свою очередь, каждому элементу $h \in \mathfrak{h}^*$ соответствует стационарная подалгебра $\mathrm{St}(h) \subset \mathfrak{g}$ относительно представления $(\mathrm{ad}\,|_{\mathfrak{h}})^*$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2(С.Т.Садэтов, А.В.Болсинов; см.[8],[9]). *Функция коммутирует с любой функцией $g : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда*

$$df_x \in \mathrm{St}(h),\ x \in \mathfrak{g}^*$$

. После того, как получен критерий принадлежности функции на $\mathfrak{g}^*$ множеству функций, коммутирующих со всеми функциями на $\mathfrak{h}^*$, построим "базисные"функции в этом множестве. Рассмотрим множество всевозможных рациональных функций $\Psi : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}$ таких, что $\Psi(h) \in \mathrm{St}(h)$, $h \in \mathfrak{h}^*$, т.е. множество всех рациональных сечений расслоения рациональных подалгебр. По каждому такому рациональному сечению построим функцию на коалгебре следующим образом:

$$f_\Psi(x) = \langle \Psi(\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^*}(x)), x \rangle$$

. Легко проверяется, что данные функции удовлетворяют условию приведенной выше леммы. Следовательно, они коммутируют с любой функцией $g : \mathfrak{h}^* \to \mathbb{K}$, и, более того, они образуют подалгебру L в влгебре Ли всех функций на $\mathfrak{g}^*$. Алгебра Ли L, вообще говоря, бесконечномерна над полем $\mathbb{K}$, но она конечномерна над расширенным полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$ - полем рациональных функций на $\mathfrak{h}^*$.

<u>*Лемма 3*</u>(С.Т.Садэтов, А.В.Болсинов; см.[8],[9]) *Имеет место следующая формула:*

$$\dim_{\mathbb{K}(\mathfrak{h})} L = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{St}(h) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h}) + 1$$

*где $St(h)$ - стационарная подалгебра элемента h общего положения относительно действия $(ad\,|_{\mathfrak{h}})^*$.*Таким образом, размерность алгебры Ли L над полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$ строго меньше размерности первоначальной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$, и оказывается, что построение полного коммутативного набора полиномов на алгебре $\mathfrak{g}$ сводится к построению полного коммутативного набора полиномов на L.

<u>*Лемма 4*</u>(С.Т.Садэтов, А.В.Болсинов; см.[8],[9]) *Объединение полного коммутативного набора полиномов на $\mathfrak{h}^*$ и полного коммутативного набора полиномов на L является полным коммутативным набором функций на $\mathfrak{g}^*$.*

Заметим, что полный коммутативный набор полиномов на L состоит из полиномов над расширенным полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$, которые, вообще говоря, не являются полиномами над первоначальным полем $\mathbb{K}$. Тем не менее, полученный полный коммутативный набор функций на $\mathfrak{g}^*$ легко преобразовать в полный коммутативный набор полиномов. Действительно, полиномы над $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$ будут рациональными функциями над исходным полем, причем знаменателями будут исключительно полиномы на $\mathfrak{h}$. Поэтому каждую рациональную функцию можно умножить на некоторый полином на $\mathfrak{h}$ так, чтобы она стала полиномом на $\mathfrak{g}$; при этом набор останется полным и коммутативным в силу того, что координаты на $\mathfrak{h}$ входят в наш коммутативный набор.

Метод Трофимова.

В работе Трофимова (см.[2]) для построения полных инволютивных семейств был предложен новый метод - метод цепочек подалгебр. Строится цепочка подалгебр $G \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset ...$ такая, что $G \supset G' \supset H_1 \supset {H_1}' \supset H_2 \supset ...$, где G' - производная алгебры G.

Строя достаточно большой запас функций в инволюции на H^*, поднимая их на G^* и прибавляя на каждом шаге полуинварианты мы получим достаточно богатый запас функций на G^*, которые находятся в инволюции на всех орбитах . Этот метод был применен к борелевским подалгебрам классических алгебр Ли. Нас интересуют борелевские подалгебры алгебры $\mathfrak{so}(n)$. При применении метода цепочек подалгебр на $\mathfrak{so}(n)$ возникает 4 разных случая:
1) для размерности $n = 4s$ мы берем одну подалгебру H (максимальную коммутативную подалгебру), тогда полный инволютивный набор на H^* будут составлять базисные элементы в H. Добавив полуинварианты, получим полный инволютивный набор на G^*.
2) Аналогично поступаем в случае $n = 4s + 2$.
3) Для размерностей $n = 4s+1$ и $4s+3$ одной подалгебры мало и строится цепочка из двух подалгебр. Т.к. эти случаи не понадобятся в данной работе, подробно описывать их не будем.

В данной работе будут построены в явном виде полные коммутативные наборы на алгебре Ли $B\mathfrak{so}(8)$ методами Садэтова и Трофимова и показано, что эти наборы совпадают.

Построение и сравнение полных инволютивных наборов на алгебре $B\mathfrak{so}(8)$.

Теорема *На алгебре* $B\mathfrak{so}(8)$ *полиномиальные наборы, построенные методом Садэтова и методом Трофимова совпадают.*
Доказательство проведём путём построения и сравнения наборов в явном виде.
Доказательство :

Рассмотрим алгебру $B\mathfrak{so}(8)$ и её представление в виде верхнетреугольных, кососимметрических относительно побочной диагонали матриц. Она будет иметь размерность 16. Тогда сопряженное пространство мы можем отождествить с нижнетреугольными кососимметрическими относительно побочной диагонали матрицами (см. [2]).

Её коммутативный идеал $\mathfrak{h}$, (она же максимальная коммутативная подалгебра) представим в виде матриц такого вида: везде, кроме верхнего правого угла размера 4×4 стоят нули, в верхнем правом углу всё без изменений. Легко увидеть, что размерность этой подалгебры равна 6.

На нашей алгебре мы должны построить полный коммутативный набор из восьми полиномов, т.к размерность нашейалгебры равна шестнадцати, а индекс равен нулю (см. [2]). Шесть из них - базисные элементы подалгебры $\mathfrak{h}$, как уже было сказано выше - они будут образовывать полный коммутативный набор на $\mathfrak{h}^*$ и соответственно на $\mathfrak{g}^*$. Остаётся ещё два полинома, которые в разных методах строятся по-разному. Рассмотрим построение полиномов у Трофимова(см.[2]).

Для алгебры $B\mathfrak{so}(8)$ мы строим два полуинварианта J_1 и J_3, которые строятся по формуле $J_s = \sum\limits_{p=s+1}^{k} \mathfrak{O}_{pp}(s)$, где $\mathfrak{O}_{ij}(s)$ - окаймление минора $\Delta_s(X)$, соответствующее элементу x_{ij}, $n = 2k$, $\Delta_s(X)$ - минор в нижнем левом углу матрицы X размерности s.

Опустим вычисления, напишем только итог:

$$J_1 = -(x_1x_8 + x_2x_9 + x_3x_{10});$$

$$J_3 = (x_3x_4 - x_2x_5 + x_1x_6)(x_{10}x_4 - x_2x_{13} + x_1x_{15}).$$

Для того, чтобы найти недостающие полиномы методом Садэтова напишем систему уравнений на стабилизатор элемента h.(подробно см.[16]) Для нашей матрицы система будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x_7h_1 + x_{11}h_1 = 0; \\ x_7h_2 + x_{12}h_1 + x_{14}h_2 = 0; \\ x_7h_3 + x_{13}h_1 + x_{15}h_2 + x_{16}h_3 = 0; \\ x_8h_1 - x_{10}h_3 - x_{11}h_4 + x_{15}h_5 + x_{16}h_4 = 0; \\ x_8h_2 - x_9h_3 + x_{11}h_5 + x_{14}h_5 = 0; \\ x_9h_1 - x_{10}h_2 + x_{12}h_4 - x_{13}h_5 + x_{14}h_6 + x_{16}h_6 = 0; \end{cases}$$

Это система уравнений относительно x_i, где $i = 7, ..., 16$, ранг матрицы коэффициентов равен 6, таким образом у нас будет четыре свободные переменные и шесть основных.

Возьмём за базисные элементы x_7, x_9, x_{10} и x_{14}. Тогда решение нашей системы запишется в таком виде:

$$\begin{cases} x_{11} = -x_7; \\ x_{16} = -x_{14}; \\ x_{12} = -\frac{h_2}{h_1}x_7 - \frac{h_2}{h_1}x_{14}; \\ x_8 = \frac{h_4}{h_2}x_7 + \frac{h_1}{h_2}x_9 - \frac{h_4}{h_2}x_{14}; \\ x_{13} = \frac{h_2h_5}{h_1h_4}x_7 + \frac{h_3}{h_4}x_9 - \frac{h_2}{h_4}x_{10} - \frac{h_2h_5}{h_1h_4}x_{14}; \\ x_{15} = \left(\frac{h_5}{h_4} - \frac{h_3}{h_2}\right)x_7 - \frac{h_1h_3}{h_2h_4}x_9 + \frac{h_1}{h_4}x_{10} + \left(\frac{h_3}{h_2} + \frac{h_5}{h_4}\right)x_{14}. \\ \end{cases}$$

Построим теперь рациональные сечения Ψ_i нашей стационарной подалгебры. Их количество должно быть равно $dim_{\mathbb{K}}St(\mathfrak{h}) - dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{h} + 1$ (для примера см.[16]) В нашем случае $dim_{\mathbb{K}}St(\mathfrak{h}) = 10, dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{h} = 6$, Так что у нас должно получиться пять сечений, по которым мы будем строить базисные функции в подалгебре L (алгебре рациональных сечений расслоения стационарных подалгебр над расширенным полем $\mathbb{K}(\mathfrak{h})$). Рассмотрим такие сечения: Ψ_0- тривиальное сечение, когда $x_1 = 1$, а все остальные $x_i = 0$; сечения $\Psi_7, \Psi_9, \Psi_{10}, \Psi_{14}$, которые мы строим, исходя из нашей системы уравнений.

$$\Psi_7 : \begin{cases} x_1 = 0; \\ . \\ . \\ . \\ x_6 = 0; \\ x_7 = 1; \\ x_8 = \frac{h_4}{h_2}; \\ x_9 = 0; \\ x_{10} = 0; \\ x_{11} = -1; \\ x_{12} = -\frac{h_2}{h_1}; \\ x_{13} = -\frac{h_2h_5}{h_1h_4}; \\ x_{14} = 0; \\ x_{15} = \frac{h_5}{h_4} - \frac{h_3}{h_2}; \\ x_{16} = 0; \end{cases} \quad \Psi_9 : \begin{cases} x_1 = 0; \\ . \\ . \\ . \\ x_6 = 0; \\ x_7 = 0; \\ x_8 = \frac{h_1}{h_2}; \\ x_9 = 1; \\ x_{10} = 0; \\ x_{11} = 0; \\ x_{12} = 0; \\ x_{13} = \frac{h_3}{h_4}; \\ x_{14} = 0; \\ x_{15} = -\frac{h_1h_3}{h_2h_4}; \\ x_{16} = 0; \end{cases} \quad \Psi_{10} : \begin{cases} x_1 = 0; \\ . \\ . \\ . \\ x_6 = 0; \\ x_7 = 0; \\ x_8 = 0; \\ x_9 = 0; \\ x_{10} = 1; \\ x_{11} = 0; \\ x_{12} = 0; \\ x_{13} = -\frac{h_2}{h_4}; \\ x_{14} = 0; \\ x_{15} = \frac{h_1}{h_4}; \\ x_{16} = 0; \end{cases} \quad \Psi_{14} : \begin{cases} x_1 = 0; \\ . \\ . \\ . \\ x_6 = 0; \\ x_7 = 0; \\ x_8 = -\frac{h_4}{h_2}; \\ x_9 = 0; \\ x_{10} = 0; \\ x_{11} = 0; \\ x_{12} = -\frac{h_2}{h_1}; \\ x_{13} = -\frac{h_2h_1}{h_5h_4}; \\ x_{14} = 1; \\ x_{15} = \frac{h_3}{h_2} + \frac{h_5}{h_4}; \\ x_{16} = -1; \end{cases}$$

По этим сечениям построим функции ϕ_i, образующие базис в алгебре L.

Я буду сразу записывать функции, домноженные на многочлены от e_i. Почему мы имеем право так делать описано выше.

$\phi_0 = e_1;$
$\phi_7 = e_1e_2e_4(e_7 - e_{11}) + e_1{e_4}^2e_8 - {e_2}^2e_4e_{12} - {e_2}^2e_5e_{13} + (e_1e_2e_5 - e_1e_3e_4)e_{15};$
$\phi_9 = e_2e_4e_9 + e_2e_3e_{13} + e_1e_4e_8 - e_1e_3e_{15};$
$\phi_{10} = e_4e_{10} - e_2e_{13} + e_1e_{15};$
$\phi_{14} = -e_1{e_4}^2e_5e_8 - {e_2}^2e_4e_5e_{12} - {e_2}^2{e_1}^2e_{13} + e_1e_2e_4e_5e_{14} + e_1e_5(e_2e_5 + e_3e_4)e_{15}$
$-e_1e_2e_4e_5e_{16};$

Полный коммутативный набор на алгебре L будут образовывать функции ϕ_9 и ϕ_{10}. Покажем зависимость многочленов ϕ_9, ϕ_{10} и J_1, J_3.

Напомним, что многочлены J_1 и J_3 выглядят в данном базисе, как $e_1e_8+e_2e_9+e_3e_{10})$ и $(e_3e_4-e_2e_5+e_1e_6)(e_{10}e_4-e_2e_{13}+e_1e_{15})$ соответственно. Заметим, что первая скобка в J_3 зависит только от элементов нашего идеала $\mathfrak{h}(e_1, ...e_6)$. Обозначим этот полином, как h, тогда

$$J_3 = h\phi_{10};$$
$$\phi_{10}e_3 + \phi_9 = J_1e_4.$$

Что и требовалось доказать.

Заключение.

Таким образом, обнаруживая много общего в указанных построениях, убедившись, что наборы совпадают на алгебрах малой и не только малой размерности мы можем выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза. Полные коммутативные наборы, построенные методом Садэтова и методом Трофимова на алгебрах серии $B\mathfrak{so}(n)$, функционально зависимы.

У нас есть серьёзные основания полагать, что указанные наборы всегда совпадают, по крайней мере, на алгебрах серии $B\mathfrak{so}(4s)$.

Помимо этого, можно сделать интересное наблюдение, что указанный в явном виде набор полиномов сводится к набору полиномов степени не выше двух. Что служит подтверждением гипотезы Милованова на данной алгебре.

Гипотеза.(Милованов, см.[19]) *На любой разрешимой алгебре Ли существует полный коммутативный набор полиномов не более чем второй степени.*

Литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. – Изв. АН СССР Сер. Мат. 1978, 42, №2. стр. 396-415.

2. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли. – Изв. АН СССР Сер. Мат. 1979, 43, №3. стр. 160-174.

3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли. – Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.; изд-во МГУ, 1979, вып. 19. стр. 3-94.

4. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. – Факториал, М.; Просперус, Ижевск, 1995.

5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем. – Функц.анализ и его прил., 1978, 12, №2. стр. 46-56.

6. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли. УМН, 1984, 39, №2, стр. 3–56.

7. Браилов А. В., Фоменко А.Т. Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Матем. сб., 1987, 134(176), №3(11), стр. 375–385.

8. Садэтов С.Т. Доказательство гипотезы Мищенко - Фоменко. – Доклады РАН. 2004, 397, №6. стр. 751-754.

9. Болсинов А.В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. – Тр.сем. по вект. и тенз. анализу. М., Изд-во МГУ, 2005, 26, стр. 87-109.

10. Фоменко А.Т. Групповые симплектические структуры на однородных пространствах. – Доклады АН СССР, 1980, 253, №5, стр. 1062-1067.

11. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями. – Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., изд-во МГУ, 1981, 20, стр. 5-54.

12. Фоменко А.Т. О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах. – Математический Сборник, 1981, 115, №2, стр. 263-280.

13. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. (Монография). - М., изд-во МГУ, 1988.

14. Fomenko A.T. Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics. (Монография). – Kluwer Academic Publishers. 1988.

15. A.T.Fomenko. Symplectic Geometry. Second revised edition. (Монография). – Gordon and Breach, 1995.

16. Короткевич А.А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности. – Матем. сб. 2009, 200, №12. стр. 3-40.

17. Деркач М. М. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на полупрямых суммах алгебр Ли. – Матем. сборник, 2009, 200, №5. с. 3–32.

18. Короткевич А.А. Полные наборы полиномов на борелевских подалгебрах. – Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика., 2006, №5, стр. 20-25.

19. Балабанова Н.А. Интегралы малых степеней гамильтоновых систем на разрешимых алгебрах Ли. МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. ф-т, каф. Дифф. геометрии и приложений, М., 2017.