МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Полиномиальные преобразования прямой и связанные с ними нильмногообразия

Дипломная работа
студента 6 курса
Климова Романа

Научные руководители:
доктор физ.-мат. наук В. М. Бухштабер
доктор физ.-мат. наук А. Т. Фоменко

Москва, 2018 г.

Содержание

1 Введение

История вопроса. В 1970 году И. М. Гельфандом и Д. Б. Фуксом была сформулирована гипотеза о числах Бетти когомологий бесконечномерных алгебр Ли L_k полиномиальных векторных полей на $\mathbb{R}$ с коммутационными соотношениями вида

$$[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}, \;\; i, j \geq k.$$

Гипотеза 1 (Гельфанд-Фукс)**.** $\dim H^q(L_i) = C^{i-1}_{q+i-1} + C^{i-1}_{q+i-2}$.

Гипотеза была доказална Л. В. Гончаровой [4] и положила начало исследованиям конечномерного аналога, а именно изучениям когомологий алгебр $\mathfrak{l}^n = L_1/L_{n+1}$ с соотношениями

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & i+j \leq n \\ 0, & i+j > n. \end{cases}$$

Здесь стоит выделить работы В. М. Бухштабера [1],[2] и Д. В. Миллионщикова [3]. В [1] В. М. Бухштабер построил класс нильмногообразий M^n, когомологии де Рама $H^*(M^n, \mathbb{R})$ которых изоморфны когомологиям $H^*(\mathfrak{l}^n)$. Изучению нильмногообразий M^n посвящена настоящая работа.

Структура работы. Во втором разделе, следуя [1], определяются нильмногообразия M^n. Третий раздел содержит определение когомологий де Рама нильмногообразий M^n через когомологии соответствующих алгебр Ли. В этом разделе автором устанавливается соответствие между естественными расслоениями нильмногообразий и одномерными расширениями алгебр Ли (**Теорема 4**), вычисляются числа Бетти нильмногообразий для размерностей $n \leq 17$ (**Теорема 5**) и исследуются обратные гомоморфизмы в когомологиях, индуцированные башней расслоений

$$M^n \to M^{n-1} \to ... \to M^2 \to M^1$$

в размерностях $n \leq 12$ (**Теорема 6**). В четвертом разделе обсуждаются комплексные структуры на M^{2n}. Доказыватеся существование почти комплексных структур (**Следствие 4**) и отсутствие интегрируемых почти комплексных структур (**Следствие 5**) на M^{2n} для всех $n \geq 2$.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям – В. М. Бухштаберу и А. Т. Фоменко за постановку задачи, за плодотворные консультации, а также за развитие интереса автора в области алгебраической топологии и теории групп Ли.

2 Предварительные сведения

Обозначим через L^n следующее множество многочленов с действитвельными коэффициентами: $L^n = \{p_x(t) = t + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k t^{k+1}, x_k \in \mathbb{R}\}$. Введем на L^n групповую операцию по правилу

$$z = x * y,$$
$$p_z(t) = (p_x * p_y)(t) = p_y(p_x(t)) \mod t^{n+2}. \tag{2.1}$$

Предложение 1. *Введенное множество L^n является группой Ли.*

Доказательство. Существет естественный диффеоморфизм

$$L^n \cong \mathbb{R}^n : p_x(t) \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

сопоставляющий многочлену его набор коэффициентов. Групповая операция 2.1 является полиномиальной, и поэтому гладкой. Из теоремы об обратной функции следует, что операция $inv : x \to x^{-1}$ взятия обратного элемента также гладкая. □

Пример 1. Вычисления для $n = 3:$

$p_z(t) = t + \sum\limits_{k=1}^{3} z_k t^{k+1} = p_x(t) + \sum\limits_{k=1}^{3} y_k p_x^{k+1}(t) \mod t^5$, где
$z_1 = x_1 + y_1,$
$z_2 = x_2 + 2x_1y_1 + y_2,$
$z_3 = x_3 + (2x_2 + x_1^2)y_1 + 3x_1y_2 + y_3.$

Замечание 1. Отсюда, в частности, видно, что $L^n, n = 1, 2$ – абелева группа. $L^n, n \geq 3$ – неабелева.

Определение 1. Группа Ли G называется *нильпотентной*, если обладает последовательностью нормальных подгрупп

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft ... \triangleleft G_i \triangleleft ... \triangleleft G_n = G$$

такой, что

$$G_{i+1} = \{x \in G \mid \forall y \in G : [x, y] \in G_i\}.$$

В этом случае G_1 является цетром группы G, а G_{i+1}/G_i – центр G/G_i. Последовательность $G_0, G_1 ..., G_n$ называют *верхним центральным рядом.*

Предложение 2. *Группа Ли L^n обладает структурой нильпотентной группы.*

Доказательство. Рассмотрим следующие подгруппы группы L^n:

$$L^n_{n-q} = \{p_x(t) = t + \sum_{k=q+1}^{n} x_k t^{k+1}\}, \;\; q \in \{0, .., n-1\},$$
$$L^n_0 = \{e\}.$$

Нетрудно заметить, что для $\forall i \in \{0, ..., n-1\}$ выполнено следующее:

$$L^n_{i+1} = \{x \in L^n \;\mid\; \forall y \in L^n : [x, y] \in L^n_i\},$$
$$L^n_i \subset L^n_{i+1},$$

то есть L^n_i образуют верхний центральный ряд. □

Рассмотрим действие группы L^n на себе. Нас будут интересовать действия левыми и правыми сдвигами.

Предложение 3. *Действие группы L^n на себе левыми сдвигами является линейным и осуществляет представление $\rho : L^n \to GT(n+1)$ группы в группу нижнетреугольных матриц размера $(n+1) * (n+1)$ с единицами на диагонали.*

Доказательство. Линейность явно следует из формулы 2.1. Определим представление следующим образом: операции левого сдвига $x : v \to x * v$ сопоставим матрицу $\rho(p_x(x)) = X = (x_{i,k}) \in GT(n+1)$, где $x_{i,k} = [p_x(t)^{k+1}]_{i+1}$ – коэффициент при t^{i+1} в разложении полинома $p_x(t)^{k+1}$, и все $x_{j,j} = 1$. Легко видеть, что тогда

$$\rho(p_x(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x * v \end{pmatrix}$$

□

Пример 2. $n = 3:$

$$\rho(p_x(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ x * v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 2x_1 & 1 & 0 \\ x_3 & 2x_2 + x_1^2 & 3x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Отметим, что действие L^n на себе справа нелинейно.

Замечание 3. Можно заметить, что групповая операция на L^n имеет в векторной записи следующий вид:

$$x * y = x + y + A(x)y, \tag{2.2}$$

где $A(x) = a_{i,k}(x)$ – нижнетреугольная матрица с нулями на диагонали и $a_{i,k}(x) = [p_x(t)^{k+1}]_{i+1}, k \neq i$.

Рассмотрим каноническую решетку $\Gamma^n \subset L^n$:

$$\Gamma^n = \{p_x(t) \in L^n, x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Как множество, Γ^n изоморфно $\mathbb{Z}^n$. Аналогично предложению 1 можно показать, что групповая операция, индуцированння операцией с L^n, наделяет Γ^n структурой нильпотентной группы с верхним центральным рядом $\Gamma^n_{n-q} = \{p_x(t) = t + \sum\limits_{k=q+1}^{n} x_k t^{k+1}, x_k \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 2. Компактным *нильмногообразием* M называется факторпространство односвязной нильпотентной группы Ли по правому кокомпактному действию ее дискретной подгруппы.

Рассмотрим правое действие решетки Γ^n на группе L^n. Из вида групповой операции 2.2 следует, что действие является свободным (без неподвижных точек) и кокомпактным. Взяв факторпространство группы L^n по правому действию решетки Γ^n, получаем следующее предложение:

Предложение 4. *Факторпространство $M^n = L^n/\Gamma^n$ является замкнутым нильмногообразием.*

Замечание 4. Отметим, что не любая нильпотентная группа Ли допускает существование в ней кокомпактной решетки. Следующая теорема описывает критерий существования:

Теорема 1 (Мальцев [5])**.** *Нильпотентная группа Ли G допускает кокомпактную решетку Γ тогда и только тогда, когда существует базис ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с рациональными структурными константами.*

Изучим основную топологическую конструкцию определенных нильмногообразий.

Определение 3. *Главное G-расслоение* – это локально тривиальное расслоение $\pi : E \to B$ с эффективным (свободным и транзитивным) действием группы G на E. Слои такого расслоения гомеоморфны самой G.

Предложение 5. *Существует главное S^1 расслоение нильмногообразий M^n над M^{n-1}.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $i : L^n \to L^{n-1}$, "забывающее" последнюю координату:

$$i : (x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1, x_2, ...x_{n-1}).$$

Возникают следующие башни групп:

$$L^n \to L^{n-1} \to ... \to L^1.$$

Аналогично для Γ^n :

$$\Gamma^n \to \Gamma^{n-1} \to ... \to \Gamma^1.$$

Индуцированная башня расслоений

$$M^n \to M^{n-1} \to ... \to M^1 = S^1,$$

$$\pi_{n-1} : M^n = L^n/\Gamma^n \to M^{n-1} = L^{n-1}/\Gamma^{n-1} \tag{2.3}$$

будет искомым расслоением со слоем $S^1 = L^n_{n-1}/\Gamma^n_{n-1}$. Используя тот факт, что L^n_{n-1} является центром L^n, получаем структуру главного S^1-расслоения отображения $\pi_{n-1} : M^n \to M^{n-1}$. □

Следствие 1. $\chi(M^n) = 0$, *где χ – эйлерова характеристика топологического пространства.*

Доказательство. Из формулы эйлеровой характеристики для расслоения 2.3 имеем:

$$\chi(M^{n+1}) = \chi(S^1)\chi(M^n).$$

Осталось вспомнить, что $\chi(S^1) = 0$.

□

Предложение 6. *Нильмногообразие M^n является пространством Эйленберга-Маклэйна $K(\Gamma^n, 1)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\pi_1(M^n) = \Gamma^n, \pi_i(M^n) = 0$, $i \geq 2$. Рассмотрим проекцию $L^n \cong \mathbb{R}^n \to L^n/\Gamma^n = M^n$. Поскольку $\mathbb{R}^n$ стягиваемо, это отображение является универсальным накрытием, индуцирующим изоморфизм высших гомотопических групп, поэтому $\pi_i(M^n) = \pi_i(\mathbb{R}^n) = 0$, $i \geq 2$. Из вида проекции также следует, что $\pi_1(M^n) = \Gamma^n$ как группа перестановок слоев универсального накрытия. □

Следствие 2. $M^n = B\Gamma^n$ *– классифицирующее пространство группы Γ^n.*

3 Когомологии нильмногообразий

В этом параграфе изучаются когомологии де Рама определенных ранее нильмногообразий относительно комплекса левоинвариантных дифференциальных форм. Оказывается, для компактных нильмногообразий справедлива следующая теорема, связывающая их когомологии де Рама с когомологиями соответствующих алгебр Ли.

Теорема 2 (Nomizu [6])**.** *Кольцо когомологии де Рама $H^*(M, \mathbb{R})$ компактного нильмногообразия $M = G/\Gamma$ изоморфно кольцу когомологий $H^*(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G.*

Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, которой соответствует некоторая группа Ли G. Рассмотрим действие G на себе левыми сдвигами:

$$L_g : G \to G, \;\; g \in G,$$

$$L_g(h) = gh.$$

Это отображение индуцирует линейное отображения касательных расслоений

$$(L_g)_* : T_h G \to T_{gh} G.$$

Определение 4. Одномерной *формой Мауэра-Картана* называют форму следующего вида:

$$\omega_g : T_g G \to T_e G,$$

$$\omega_g(v) = (L_{g^{-1}})_* v, \;\; v \in T_g G$$

Отождествляя $T_e G \cong \mathfrak{g}$, получаем 1-форму, принимающую значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В частности, при $g = e$ имеем $\omega_e = id : T_e G \to \mathfrak{g}$.

Базой для определения когомологий алгебр Ли является известное уравнение Мауэра-Картана:

Теорема 3 (Уравнение Мауэра-Картана)**.** *Пусть ω_g – форма Мауэра-Картана. Тогда $\forall g \in G$ справедливо:*

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{3.1}$$

Здесь $[\omega, \omega](X_1, X_2) = [\omega(X_1), \omega(X_2)]$ – скобка на алгебре Ли.

Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с алгеброй левоинвариантных векторных полей группы G. Выберем $(e_1, ..., e_n)$ – базис $\mathfrak{g}$. Рассмотрим $(\omega_1, ...\omega_n) \in g^*$ – дуальный базис левоинвариантных 1-форм: $(\omega_i)_e(e_j) = \delta_{ij}$. Тогда в базисе (w_i) форму Мауэра-Картана можно записать в следующем виде:

$$w = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \omega_i.$$

Пусть скобка Ли базисных векторов алгебры выглядит следующим образом:

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k. \tag{3.2}$$

Используя 3.1 и 3.2 легко показать, что в базисе (w_i) дифференциал примет вид

$$d\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k. \tag{3.3}$$

Зная, как действует дифференциал на 1-формах, можно распространить его действие на произвольную n-форму по формуле Луйбница:

$$d \sum_{i_1,...,i_n} c_{i_1,...,i_n} \omega_{i_1} \wedge ... \wedge \omega_{i_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1,...,i_n} c_{i_1,...,i_n} \omega_{i_1} \wedge ... \wedge d\omega_{i_k} \wedge ... \wedge \omega_{i_n} \tag{3.4}$$

Из тождества Якоби следует, что $d^2\omega = 0$ для произвольной n-формы. Рассмотрим комплекс левоинвариантных дифференциальных форм:

$$\mathbb{R} = \Lambda^0(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{d_0} \Lambda^1(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{d_1} ... \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda^n(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{d_n} ... \tag{3.5}$$

Определим группу коциклов:

$$Z^i = Ker(d_i : \Lambda^i(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda^{i+1}(\mathfrak{g}^*))$$

и группу кограниц:

$$B^i = Im(d_{i-1} : \Lambda^{i-1}(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda^i(\mathfrak{g}^*))$$

Определение 5. i-ми когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно комплекса 3.5 называется группа $H^i(\mathfrak{g}) = Z^i/B^i$.

Вернемся к нильмногообразиям $M^n = L^n/\Gamma^n$. Из Теоремы 2 следует, что для нахождения когомологий де Рама нильмногообразий достаточно найти структурные константы (c^i_{jk}) алгебры Ли $\mathfrak{l}^n$ группы L^n.

Предложение 7. *Алгебра Ли $\mathfrak{l}^n$ группы L^n мультипликативно порождается дифференциальными операторами вида*

$$\epsilon_i = \partial_i + \sum_q x_{i,q}\partial_q,$$

где $\partial_q = \frac{\partial}{\partial x_q}$, $x_{i,q} = [p_x(t)^{i+1}]_{q+1}$ – коэффициент при t^{q+1} в разложении полинома $p_x(t)^{i+1}$. Выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$[\epsilon_i, \epsilon_j] = \begin{cases} (j-i)\epsilon_{i+j}, & i+j \leq n \\ 0, & i+j > n. \end{cases}$$

Доказательство. Запишем условие на компоненты левоинвариантных полей X_i на группе L^n :

$$(L_g)_* X_i = X_i.$$

Переписав формулу групповой операции 2.2 в удобном виде

$$x * y = x + (E + A(x))y,$$

найдем явный вид линейного отображения $(L_g)_*$, индуцированного операцией левого сдвига L_g :

$$(L_g)_* = d(L_g) = (E + A(g)).$$

Тогда в стандартном базисе $(e_1, ...e_n) \in L^n \cong \mathbb{R}^n$ поля X_i примут вид

$$X_i(x) = (L_x)_* e_i = (E + A(x))^T_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \epsilon_i$$

с нужными соотношениями. □

Замечание 5. Из формулы 3.3 следует следующий вид дифференциала для алгебры Ли $\mathfrak{l}^n$:

$$d\omega_q = \sum_{(k,l):k>l>0,k+l=q} (k-l)\omega_k \wedge \omega_l. \tag{3.6}$$

Предложение 8.

$$H^1(M^1) = \{[\omega_1]\},\ \ H^1(M^n) = \{[\omega_1], [\omega_2]\}, n \geq 2.$$

Доказательство. Следует из того, что

$$d\omega_1 = 0,\ \ d\omega_2 = 0,\ \ d\omega_i \neq 0, i \geq 2.$$

□

Предложение 9. *Нильмногообразие M^{2n} является симплектическим.*

Доказательство. Рассмотрим следующую 2-форму на M^{2n}:

$$\Omega_{2n+1} = \sum_{(k,l):k>l>0,k+l=2n+1} (k-l)\omega_k \wedge \omega_l. \tag{3.7}$$

Она является проекцией "несуществующей" формы ω_{2n+1} на пространство $\Lambda^2(\omega_1, ..., \omega_{2n})$ и задает класс двумерных когомологий $[\Omega_{2n+1}] \in H^2(M^{2n}, \mathbb{R})$. Легко проверяется, что матрица формы Ω_{2n+1} невырождена.
□

Следствие 3. $[\Omega_{2n+1}]^k \in H^{2k}(M^{2n}, \mathbb{R})$.

Предложение 10. *Нильмногообразие M^{2n+1} является контактным.*

Доказательство. Многообразие M^{2n+1} контактно, если на нем существует 1-форма α со следующим условием:

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Положим $\alpha = \omega_{2n+1}$. Тогда $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \omega_{2n+1} \wedge \omega_{2n} \wedge ... \wedge \omega_1$ – искомая невырожденная форма.

□

Определение 6. Алгебра Ли $\mathfrak{c}$ называется *расширением* $\mathfrak{g}$ при помощи $\mathfrak{h}$, если последовательность алгебр Ли

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathfrak{c} \xrightarrow{s} \mathfrak{g} \to 0$$

является точной. Расширение называется *центральным*, если $Ker(s(\mathfrak{c}))$ лежит в центре $Z(\mathfrak{c})$.

Замечание 6. Расширение вида

$$0 \to \{e_{n+1}\} \to \mathfrak{l}^{n+1} \to \mathfrak{l}^n \to 0,$$

$$0 \to \{e_{n+1}\} \hookrightarrow < e_1, ..., e_{n+1} > \to < e_1, ..., e_n > \to 0$$

является центральным.

Теорема 4. *Существует взаимо однозначное соответствие между центральным одномерным расширением*

$$0 \to \{e_{n+1}\} \to \mathfrak{l}^{n+1} \to \mathfrak{l}^n \to 0$$

и главным S^1 расслоением нильмногообразий

$$S^1 \to M^{n+1} \to M^n,$$

которое классифицируется элементом $[\Omega_{n+1}] \in H^2(M^n, \mathbb{R})$.

ω_{n+1}	$H^1 \wedge \omega_{n+1}$	$H^2 \wedge \omega_{n+1}$	$H^3 \wedge \omega_{n+1}$	...	...
1	H^1	H^2	H^3	...	...

Таблица 1: $E_2^{p,q}$

Доказательство. Рассмотрим член $E_2^{p,q}$ спектральной последовательности Серра-Хохшильда для расширения алгебр Ли. Ненулевые элементы в ней $E_2^{0,1} = \{[\omega_{n+1}]\}$, $E_2^{p,0} = H^p(\mathfrak{l}^n)$, $E_2^{p,1} = H^p(\mathfrak{l}^n) \wedge [\omega_{n+1}]$, $p \geq 1$. Тогда дифференциал $d_2 : E_2^{p,1} \to E_2^{p+2,0}$ перепишется в виде:

$$d(H^p(\mathfrak{l}^n) \wedge \omega_{n+1}) = d(H^p(\mathfrak{l}^n)) \wedge \omega_{n+1} - H^p(\mathfrak{l}^n) \wedge d\omega_{n+1} =$$

$$= 0 \wedge \omega_{n+1} - (-1)^{p+1} H^p(\mathfrak{l}^n) \wedge \Omega_{n+1} =$$

$$= (-1)^p H^p(\mathfrak{l}^n) \wedge \Omega_{n+1}.$$

Теперь рассмотрим член E_2 спектральной последовательности S^1-расслоения. Спектральная последовательность расслоения является известной последовательностью Гизина, дифференциал которой выглядит следующим образом:

$$d_2 : E_2^{p,1} \to E_2^{p+2,0},$$

$$d_2(E_2^{p,1}) = H^p(M^n, \mathbb{R}) \wedge e,$$

где $e \in H^2(M^n, \mathbb{R})$ – класс Эйлера S^1-расслоения. Поскольку $H^*(M^n, \mathbb{R}) \cong H^*(\mathfrak{l}^n)$, то спектральные последовательности изоморфны. Отсюда делаем вывод, что $e = [\Omega_{n+1}]$. $\square$

Найдем *числа Бетти* $b_k(M^n) = \dim H^k(M^n, \mathbb{R})$ нильмногообразий M^n для некоторых n методом компьютерных вычислений. Следующие две леммы имеют самостоятельный интерес и существенно ускоряют вычислительный процесс.

Лемма 1. $b_k(M^n) = b_{n-k}(M^n)$

Доказательство. Эта лемма – известная *двойственность Пуанкаре*, которая применима к замкнутым ориентируетмым многообразиям. M^n замкнуто как факторгруппа группы Ли по дискретной подгуппе. Ориентируемость следует из существования левоинвариантной формы объема $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_n$. $\square$

Лемма 2. *Кольцо когомологий $H^*(M^n, \mathbb{R})$ является биградуированным и разлагается в прямую сумму вида*

$$H(M^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=\frac{k(k+1)}{2}}^{\frac{k(2n-k+1)}{2}} H^{k,q}(M^n, \mathbb{R}), \tag{3.8}$$

где $H^{k,q}(M^n, \mathbb{R}) = \{[\sum\limits_{i_1,..,i_k} c_{i_1,...,i_k} \omega_{i_1} \wedge ... \wedge \omega_{i_k}] \in H^k(M^n, \mathbb{R}) \mid n+1 > i_1 > ... > i_k > 0,\ i_1 + .. + i_k = q\}$.

Доказательство. Рассмотрим группу коцепей со второй градуировкой q:

$$\Lambda_n^{k,q} = \{\omega_{i_1} \wedge ... \wedge \omega_{i_k} \mid n+1 > i_1 > ... > i_k > 0,\ i_1 + .. + i_k = q\}.$$

Очевидно, что $\Lambda_n^{k,q} \subset \Lambda_n^k$ и $\Lambda_n^k = \bigoplus_q \Lambda_n^{k,q}$, $q \in \{\frac{k(k+1)}{2}, ..., \frac{k(2n-k+1)}{2}\}$. Поэтому комплекс Λ_n представим в следующем виде:

$$\Lambda_n = \Lambda^0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=\frac{k(k+1)}{2}}^{\frac{k(2n-k+1)}{2}} \Lambda_n^{k,q}.$$

Из вида дифференциала 3.6 следует, что

$$Im(d_k(\Lambda_n^{k,q})) \subset \Lambda_n^{k+1,q},$$

то есть дифференциал сохраняет вторую градуировку. Это позволяет корректно определить биградуированные группы когомологий

$$H^{k,q}(M^n,\mathbb{R}) = Ker(d_k(\Lambda_n^{k,q}))/Im(d_{k-1}(\Lambda_n^{k-1,q})).$$

$\square$

Теорема 5. *Следующая таблицы показывают распределение чисел Бетти нильмногообразий M^n для всех $n \leq 17$.*

	M^1	M^2	M^3	M^4	M^5	M^6	M^7	M^8	M^9
b_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b_1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
b_2	0	1	2	2	3	3	3	3	3
b_3	0	0	1	2	3	4	4	5	5
b_4	0	0	0	1	2	3	4	6	7
b_5	0	0	0	0	1	2	3	5	7
b_6	0	0	0	0	0	1	2	3	5
b_7	0	0	0	0	0	0	1	2	3
b_8	0	0	0	0	0	0	0	1	2
b_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Таблица 2: $b_k(M^n), n \leq 9$

	M^{10}	M^{11}	M^{12}	M^{13}	M^{14}	M^{15}	M^{16}	M^{17}
b_0	1	1	1	1	1	1	1	1
b_1	2	2	2	2	2	2	2	2
b_2	3	3	3	3	3	3	3	3
b_3	5	5	5	5	5	5	5	5
b_4	7	8	8	8	8	8	8	8
b_5	8	10	11	12	13	13	13	13
b_6	7	10	12	15	17	18	20	21
b_7	5	8	11	15	18	21	25	28
b_8	3	5	8	12	17	21	26	32
b_9	2	3	5	8	13	18	25	32
b_{10}	1	2	3	5	8	13	20	28
b_{11}	0	1	2	3	5	8	13	21
b_{12}	0	0	1	2	3	5	8	13
b_{13}	0	0	0	1	2	3	5	8
b_{14}	0	0	0	0	1	2	3	5
b_{15}	0	0	0	0	0	1	2	3
b_{16}	0	0	0	0	0	0	1	2
b_{17}	0	0	0	0	0	0	0	1

Таблица 3: $b_k(M^n), 9 < n \leq 17$

Доказательство. Вычисления проводились в программном пакете Maple. Лемма 1 позволяет вычислять $b_k(M^n)$ до $k \leq [\frac{n}{2}]$. При помощи леммы 2 можно разбить коцепоной комплекс с учетом второй градуировки и считать когомологии отдельно для каждой q, складывая результаты в конце по формуле 3.8.

□

Большой интерес представляет изучение $b_k(M^n)$ при $n \gg k$. Д. В. Миллионщиков в работе [3] доказал, что

$$b_2(M^n) = 3, n \geq 5;$$

$$b_3(M^n) = 5, n \geq 8.$$

Также им была сформулирована следующая гипотеза о числах Бетти произвольных размерностей:

Гипотеза 2 (Миллионщиков)**.** *Число Бетти $b_k(M^n)$ стабилизируется при $n \geq 3k - 1$ и равняется (k+2)-му числу Фибоначчи F_{k+2}.*

Замечание 7. Гипотеза верна при $n \leq 17$.

Рассмотрим башню расслоений нильмногообразий M^n со слоем S^1 :

$$M^n \xrightarrow{\pi_{n-1}} M^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-2}} ... \xrightarrow{\pi_1} M^1.$$

Отображения π_i индуцируют обратные гомоморфизмы $(\pi_i)^*$ в когомологиях де Рама:

$$H^*(M^n, \mathbb{R}) \xleftarrow{(\pi_{n-1})^*} H^*(M^{n-1}, \mathbb{R}) \xleftarrow{(\pi_{n-2})^*} ... \xleftarrow{(\pi_1)^*} H^*(M^1, \mathbb{R}).$$

Следкющая теорема дает явное описание этих гомоморфизмов в размерностях $n \leq 12$:

Теорема 6. *Приведенные ниже таблицы явно описывают обратные гомоморфизмы для башен расслоений нильмногообразий M^n для рамерностей $n \leq 12$. Здесь $[g^k_{i,j}] \in H^{j,k}(M^i, \mathbb{R})$ – генераторы биградуированных колец когомологий. Гомоморфизмы колец*

$$(\pi_i)^* : H^{j,k}(M^i, \mathbb{R}) \to H^{j,k}(M^{i+1}, \mathbb{R}),$$

$$(\pi_i)^* : [g^{k(1)}_{i,j}, .., g^{k(l)}_{i,j}] \to [g^{k(1)}_{i+1,j}, .., g^{k(m)}_{i+1,j}]$$

– являются мономорфизмами при $l \leq m$, эпиморфизмами при $l \geq m$ и изоморфизмами при $l = m$.

	H^1	H^2	H^3
M^1	$[g^1_{1,1}]$		
M^2	$[g^1_{2,1}],[g^2_{1,1}]$	$[g^3_{2,1}]$	
M^3	$[g^1_{3,1}],[g^2_{1,1}]$	$[g^4_{3,2}],[g^5_{3,2}]$	$[g^6_{3,3}]$
M^4	$[g^1_{4,1}],[g^2_{4,1}]$	$[g^{5(1)}_{4,2},g^{5(2)}_{4,2}]$	$[g^8_{4,3}],[g^9_{4,3}]$
M^5	$[g^1_{5,1}],[g^2_{5,1}]$	$[g^5_{5,2}],[g^6_{5,2}],[g^7_{5,2}]$	$[g^8_{5,3}],[g^9_{5,3}],[g^{10}_{5,3}]$
M^6	$[g^1_{6,1},[g^2_{6,1}]$	$[g^5_{6,2}],[g^{7(1)}_{6,2},g^{7(2)}_{6,2}]$	$[g^9_{6,3}],[g^{10}_{6,3}],[g^{11}_{6,3}],[g^{12}_{6,3}]$
M^7	$[g^1_{7,1}],[g^2_{7,1}]$	$[g^5_{7,2}],[g^7_{7,2}],[g^8_{7,2}]$	$[g^{10}_{7,3}],[g^{11}_{7,3}],[g^{12(1)}_{7,3},g^{12(2)}_{7,3}]$
M^8	$[g^1_{8,1}],[g^2_{8,1}]$	$[g^5_{8,2}],[g^7_{8,2}],[g^9_{8,2}]$	$[g^{11}_{8,3}],[g^{12(1)}_{8,3},g^{12(2)}_{8,3}],[g^{13}_{8,3}],[g^{15}_{8,3}]$
M^9	$[g^1_{9,1}],[g^2_{9,1}]$	$[g^5_{9,2}],[g^7_{9,2}],[g^{10}_{9,2}]$	$[g^{12(1)}_{9,3},g^{12(2)}_{9,3}],[g^{13}_{9,3}],[g^{14}_{9,3}],[g^{15}_{9,3}]$
M^{10}	$[g^1_{10,1}],[g^2_{10,1}]$	$[g^5_{10,2}],[g^7_{10,2}],[g^{11}_{10,2}]$	$[g^{12}_{10,3}],[g^{13}_{10,3}],[g^{14}_{10,3}],[g^{15(1)}_{10,3},g^{15(2)}_{10,3}]$
M^{11}	$[g^1_{11,1}],[g^2_{11,1}]$	$[g^5_{11,2}],[g^7_{11,2}],[g^{12}_{11,2}]$	$[g^{12}_{11,3}],[g^{14}_{11,3}],[g^{15(1)}_{11,3},g^{15(2)}_{11,3}],[g^{16}_{11,3}]$
M^{12}	$[g^1_{12,1}],[g^2_{12,1}]$	$[g^5_{12,2}],[g^7_{12,2}],[g^{13}_{12,2}]$	$[g^{12}_{12,3}],[g^{15(1)}_{12,3},g^{15(2)}_{12,3}],[g^{16}_{12,3}],[g^{17}_{12,3}]$

Таблица 4: H^1, H^2, H^3

	H^4	H^5	H^6
M^4	$[g^{10}_{4,4}]$		
M^5	$[g^{13}_{5,4}], [g^{14}_{5,4}]$	$[g^{15}_{5,5}]$	
M^6	$[g^{14(1)}_{6,4}, g^{14(2)}_{6,4}], [g^{16}_{6,4}]$	$[g^{19}_{6,5}], [g^{20}_{6,5}]$	$[g^{21}_{6,6}]$
M^7	$[g^{16(1)}_{7,4}\ g^{16(2)}_{7,4}], [g^{17}_{7,4}], [g^{19}_{7,4}]$	$[g^{20}_{7,5}], [g^{21}_{7,5}], [g^{23}_{7,5}]$	$[g^{26}_{7,6}], [g^{27}_{7,6}]$
M^8	$[g^{16}_{8,4}], [g^{17}_{8,4}], [g^{18(1)}_{8,4}, g^{18(2)}_{8,4}], [g^{19}_{8,4}], [g^{20}_{8,4}]$	$[g^{21}_{8,5}], [g^{23}_{8,5}], [g^{24(1)}_{8,5}, g^{24(2)}_{8,5}], [g^{25}_{8,5}]$	$[g^{27}_{8,6}], [g^{29}_{8,6}], [g^{31}_{8,6}]$
M^9	$[g^{17}_{9,4}], [g^{18}_{9,4}], [g^{19}_{9,4}], [g^{20(1)}_{9,4}\ g^{20(2)}_{9,4}], [g^{21}_{9,4}], [g^{22}_{9,4}]$	$[g^{23}_{9,5}], [g^{24}_{9,5}], [g^{25(1)}_{9,5}, g^{25(2)}_{9,5}], [g^{26}_{9,5}], [g^{27}_{9,5}], [g^{28}_{9,5}]$	$[g^{30}_{9,6}], [g^{31}_{9,6}], [g^{32}_{9,6}], [g^{33(1)}_{9,6}, g^{33(2)}_{9,6}]$
M^{10}	$[g^{18}_{10,4}], [g^{19}_{10,4}], [g^{20}_{10,4}], [g^{21}_{10,4}], [g^{22(1)}_{10,4}\ g^{22(2)}_{10,4}, g^{22(3)}_{10,4}]$	$[g^{25}_{10,5}], [g^{26}_{10,5}], [g^{27(1)}_{10,5}, g^{27(2)}_{10,5}], [g^{28(1)}_{10,5}, g^{28(2)}_{10,5}], [g^{29}_{10,5}], [g^{30}_{10,5}]$	$[g^{33(1)}_{10,6}, g^{33(2)}_{10,6}, g^{33(3)}_{10,6}], [g^{34}_{10,6}], [g^{35}_{10,6}], [g^{36}_{10,6}], [g^{37}_{10,6}]$
M^{11}	$[g^{19}_{11,4}], [g^{20}_{11,4}], [g^{21}_{11,4}], [g^{22(1)}_{11,4}, g^{22(2)}_{11,4}], [g^{23}_{11,4}], [g^{24}_{11,4}], [g^{26}_{11,4}],$	$[g^{27(1)}_{11,5}, g^{27(2)}_{11,5}], [g^{28(1)}_{11,5}, g^{28(2)}_{11,5}], [g^{29(1)}_{11,5}, g^{29(2)}_{11,5}], [g^{30(1)}_{11,5}, g^{30(2)}_{11,5}], [g^{31}_{11,5}], [g^{32}_{11,5}]$	$[g^{34}_{11,6}], [g^{35}_{11,6}], [g^{36(1)}_{11,6}, g^{36(2)}_{11,6}], [g^{37(1)}_{11,6}, g^{37(2)}_{11,6}], [g^{38(1)}_{11,6}, g^{38(2)}_{11,6}], [g^{39(1)}_{11,6}, g^{39(2)}_{11,6}]$
M^{12}	$[g^{20}_{12,6}], [g^{21}_{12,6}], [g^{22(1)}_{12,6}, g^{22(2)}_{12,6}], [g^{23}_{12,6}], [g^{24}_{12,6}], [g^{26(1)}_{12,6}, g^{26(2)}_{12,6}],$	$[g^{28}_{12,5}], [g^{29(1)}_{12,5}, g^{29(2)}_{12,5}], [g^{30(1)}_{12,5}, g^{30(2)}_{12,5}], [g^{31(1)}_{12,5}, g^{31(2)}_{12,5}], [g^{32(1)}_{12,5}, g^{32(2)}_{12,5}], [g^{33}_{12,5}], [g^{34}_{12,5}]$	$[g^{36}_{12,6}], [g^{37(1)}_{12,6}, g^{37(2)}_{12,6}], [g^{38}_{12,6}], [g^{39(1)}_{12,6}, g^{39(2)}_{12,6}, g^{39(3)}_{12,6}, g^{39(4)}_{12,6}], [g^{40}_{12,6}], [g^{41(1)}_{12,6}, g^{41(2)}_{12,6}]\ [g^{42}_{12,6}],$

Таблица 5: H^4, H^5, H^6

	H^7	H^8	H^9
M^7	$[g^{28}_{7,7}]$		
M^8	$[g^{34}_{8,7}], [g^{35}_{8,7}]$	$[g^{36}_{8,8}]$	
M^9	$[g^{35}_{9,7}], [g^{38}_{9,7}], [g^{40}_{9,7}]$	$[g^{43}_{9,8}], [g^{44}_{9,8}]$	$[g^{45}_{9,9}]$
M^{10}	$[g^{40(1)}_{10,7}, g^{40(2)}_{10,7}], [g^{41}_{10,7}], [g^{42}_{10,7}], [g^{43}_{10,7}]$	$[g^{44}_{10,8}], [g^{48}_{10,8}], [g^{50}_{10,8}]$	$[g^{53}_{10,9}], [g^{54}_{10,9}]$
M^{11}	$[g^{40}_{11,7}], [g^{42}_{11,7}], [g^{43}_{11,7}], [g^{44(1)}_{11,7}, g^{44(2)}_{11,7}], [g^{45}_{11,7}], [g^{46}_{11,7}], [g^{47}_{11,7}]$	$[g^{50}_{11,8}], [g^{51(1)}_{11,8}, g^{51(2)}_{11,8}], [g^{52}_{11,8}], [g^{54}_{11,8}]$	$[g^{54}_{11,9}], [g^{59}_{11,9}], [g^{61}_{11,9}]$
M^{12}	$[g^{44}_{12,7}], [g^{45}_{12,7}], [g^{46(1)}_{12,7}, g^{46(2)}_{12,7}], [g^{47(1)}_{12,7}, g^{47(2)}_{12,7}], [g^{48(1)}_{12,7}, g^{48(2)}_{12,7}], [g^{49(1)}_{12,7}, g^{49(2)}_{12,7}], [g^{50}_{12,7}]$	$[g^{52(1)}_{12,8}, g^{52(2)}_{12,8}], [g^{54}_{12,8}], [g^{55}_{12,8}], [g^{56(1)}_{12,8}, g^{56(2)}_{12,8}], [g^{57}_{12,8}], [g^{58}_{12,8}]$	$[g^{61}_{12,9}], [g^{62}_{12,9}], [g^{63(1)}_{12,9}, g^{63(2)}_{12,9}], [g^{66}_{12,9}]$

Таблица 6: H^7, H^8, H^9

	H^{10}	H^{11}	H^{12}
M^{10}	$[g^{55}_{10,10}]$		
M^{11}	$[g^{64}_{11,10}], [g^{65}_{11,10}]$	$[g^{66}_{11,11}]$	
M^{12}	$[g^{65}_{11,10}], [g^{71}_{11,10}], [g^{73}_{11,10}]$	$[g^{76}_{12,11}], [g^{77}_{12,11}]$	$[g^{78}_{12,12}]$

Таблица 7: H^{10}, H^{11}, H^{12}

Доказательство. Вычисления проводились в программном пакете Maple следующим образом: брался генератор $[g^k_{i,j}] \in H^{j,k}(M^i, \mathbb{R})$ и проверялось то, что он гомологичен линейной комбинации генераторов $H^{j,k}(M^{i+1}, \mathbb{R})$. Если генераторов $[g^{k(1)}_{i,j}, .., g^{k(l)}_{i,j}]$ несколько, то также вычислялся ранг их образов в $H^{j,k}(M^{i+1}, \mathbb{R})$.

$\square$

4 Комплексные структуры

Изучим вопрос существования комплексных структур на нильмногообразиях M^{2n}. Как мы покажем далее, на всяком $M^{2n}, n \geq 2$ существует почти комплексная структура и не существует комплексной (интегрируемой) структуры.

Определение 7. *Почти комплексная структура* на гладком многообразии M^{2n} – это гладкое операторное поле $J : TM^{2n} \to TM^{2n}$ с условием $J^2 = -E$.

Следствие 4. *Нильмногообразие M^{2n} снабжено почти комплексной структурой.*

Доказательство. В третьем разделе было доказано, что M^{2n} – симплектическое многообразие. Пусть ω – симплектическая форма, g – метрика на M^{2n}. Существует стандартный метод построения почти комплексной структуры по заданным ω и g :

Зафиксируем точку $x \in M^{2n}$ и расмотрим линейное пространство $V = T_x M^{2n}$. Из невырожденности мектрики и формы следует, что

$$\exists ! A : V \to V : \omega(v, w) = g(Au, v), \quad \forall v, w \in V.$$

Далее можно показать что, оператор AA^* – самосопряженный и положительно определенный. Поэтому $\exists S = \sqrt{AA^*}$. Тогда $J = S^{-1}A$ – искомая почти комплексная структура на $T_x M^{2n}$. Гладкая зависимость J от g и w позволяет распространить ее действие гладко на все TM^{2n}. □

Определение 8. Почти комплексная структура J на гладком многообразии M^{2n} *интегрируема*, если для любой точки $p \in M^{2n}$ существуют такие локальные координаты $z^k = x^k + iy^k$, что

$$J \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial y^k},$$
$$J \frac{\partial}{\partial y^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того, что J является интегрируемой:

Теорема 7 (Newlander–Nirenberg)**.** *Почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $N_J = 0$, где*

$$N_A(X, Y) := -A^2[X, Y] + A([AX, Y] + [X, AY]) - [AX, AY]$$

– тензорное поле Ниенхейса ранга (1,2).

Пусть G – группа Ли размерности $2n$, $\mathfrak{g} \cong T_eG$ – ее алгебра Ли и

$$J_e : T_eG \to T_eG,$$

$$J_e^2 = -1$$

– почти комплексная структура на $\mathfrak{g}$. Распространим действие J на все TG по формуле

$$J_g := (L_g)_* J_e (L_{g^{-1}})_* : T_gG \to T_gG,$$

где L_g – оператор левого сдвига на G. В частности, если $X : G \to TG$ – левоинвариантное векторно поле на G, то есть $X_g = (L_g)_* v$ для некоторого $v \in T_eG$, то $(JX)_g = (L_g)_* J_e v$. Это означает, что $(JX)_g$ а, значит, и JX – левоинвариантное поле для $J_e v \in T_eG$.

Поскольку $N_J(X, Y)$ поточечно зависит от X и Y, то достаточно, чтобы условие $N_J = 0$ выполнялось только для левоинвариантных векторных полей, то есть элементов $\mathfrak{g}$. Отсюда получаем следующее предложение:

Предложение 11. *Существование интегрируемой почти комплексной структуры J на группе Ли G равносильно существованию почти комплексной структуры J_e на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с условием:*

$$[J_eX, J_eY] := -J_e^2[X, Y] + J_e([J_eX, Y] + [X, J_eY])$$

Определение 9. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ размерности n над полем $\mathbb{R}$ называется *филиформной*, если

$$\begin{aligned} \dim C^1\mathfrak{g} &= \dim \mathfrak{g} - 2 \qquad i = 1, \\ \dim C^i\mathfrak{g} &= \dim \mathfrak{g} - i - 1 \qquad i > 1, \end{aligned}$$

где

$$C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad C^i\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{i-1}\mathfrak{g}].$$

Замечание 8. Определенная ранее алгебра Ли $\mathfrak{l}^n$ является филиформной для всех $n \geq 3$.

Класс филиформных алгебр, к которому принадлежит $\mathfrak{l}^n$, важен следующей теоремой, которая является основной в этом разделе.

Теорема 8 (Goze [7])**.** *На филиформной алгебре Ли над $\mathbb{R}$ не существует интегрируемой почти комплексной структуры.*

Следствие 5. *На нильмногообразиях $M^{2n}, n \geq 2$ не существует интегрируемой почти комплексной структуры.*

Доказательство. Рассмотрим накрытие $L^{2n} \xrightarrow{\pi} L^{2n}/\Gamma^{2n} = M^{2n}$, являющееся локальным диффеоморфизмом. Значит, линейное отображение

$$D\pi_e : T_e L^{2n} \to T_{\pi(e)} M^{2n}$$

– изоморфизм векторных пространств. Но $T_e L^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$, поэтому в силу Предложения 11 и Теоремы 8 $N_J \neq 0$ на $T_e L^{2n}$ и $T_{\pi(e)} M^{2n}$. $\square$

Замечание 9. Аналогично можно показать, что существование интегрируемой почти комплекной структуры на группе G произвольного нильмногообразия $M = G/\Gamma$ влечет ее существование на самом M.

Ответом на естественный вопрос, когда произвольное нильмногообразие M является кэлеровым (то есть допускающим существование трех согласованных структур – метрики g, симплектической формы ω и интегрируемой почти комплексной структуры J с условием согласованности $g(X, Y) = \omega(X, JY)$) служит следующий критерий:

Теорема 9. *Нильмногообразие $M = G/\Gamma$ – кэлерово тогда и только тогда, когда $M = \mathbb{T}^{2n}$ – $2n$-мерный тор.*

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, “Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера–Новикова”, УМН, 54:4(328) (1999), 161–162

[2] В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров, “Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой”, Функц. анализ и его прил., 12:3 (1978)

[3] Д. В. Миллионщиков, “Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой”, УМН, 56:4(340) (2001), 153–154

[4] Л. В. Гончарова, “Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой”, Функц. анализ и его прил., 7:2 (1973), 6–14

[5] А. И. Мальцев, “Об одном классе однородных пространств”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 13:1 (1949), 9–32

[6] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous space of nilpotent Lie groups, Ann. of Math. (2)59 (1954), 531-538

[7] M. Goze, E. Remm (2001). Non-Existence of Complex Structures on Filiform Lie Algebras. Communications in Algebra. 30. 10.1081/AGB-120005819.

[8] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б., Курс гомотопической топологии, Наука, М., 1989 , 496 с.

[9] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. Современная геометрия. Части 1,2. - Москва, Наука, 1979. Объем 759 стр.