ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
специалиста

Топологические инварианты слоения Лиувилля для аналога случая интегрируемости Ковалевской

Выполнил студент
607 группы
Кибкало Владислав Александрович

____
подпись студента

Научный руководитель:

акад. А.Т. Фоменко

____
подпись научного руководителя

Соруководитель:

асс. И.К. Козлов

____
подпись соруководителя

Москва

2018 г.

Содержание

Введение

В настоящей работе исследуются топология и инварианты слоений Лиувилля динамической системы уравнений Эйлера на двойственном пространстве к алгебре Ли so(4). Далее эту систему будем называть компактным случаем Ковалевской, поскольку она имеет компактные орбиты коприсоединенного представления и является аналогом рассматриваемого в динамике тяжелого твердого тела случая интегрируемости Ковалевской. Анализ топологии производится в терминах инвариантов Фоменко–Цишанга (меченых молекул).

Актуальность темы

Важным разделом развивающейся в наши дни теории динамических систем являются исследования по интегрируемым системам. Эта область математики берет свое начало в работах по механике твердого тела и теории дифференциальных уравнений, например, трудах Эйлера, Лагранжа, Якоби, Мопертюи, где, в частности, было обнаружено, что для некоторых систем сохранение значений некоторых функций вдоль траекторий системы позволяет выразить уравнения траекторий в квадратурах.

Уже давно (в том числе, в работах Мопертюи, Эйлера, Якоби) рассматривался вопрос о построении изоморфизмов разного характера между двумя динамическими системами. Обнаруживаемая при этом "близость" двух различных систем позволяет использовать информацию об одной системе для описания другой. Тем не менее, вопрос о структуре множества интегрируемых систем и его месте среди всех динамических систем остается открытым.

Одна из задача, тесно связанная с ним, заключается в поиске интегрируемых возмущений уже известных интегрируемых систем. Например, для интегрируемого случая Ковалевской в работах Х.М. Яхьи, И.В. Комарова, А.В. Цыганова, В.В. Соколова, А.В. Борисова и И.С. Мамаева был открыт целый ряд обобщений: добавление гиростатического момента [1], аналоги на алгебрах Ли $so(3,1)-e(3)-so(4)$ [2], найденное Соколовым интегрируемое возмущение [3], рассмотрение волчка в двойном поле сил [4] — системы с тремя степенями свободы.

Для другой задачи, заключающейся в эффективной классификации и распознавании интегрируемых систем, разумно ограничить класс рассматриваемых систем, например, классом интегрируемых гамильтоновых систем. Было открыто много инвариантов интегрируемых систем, как алгебраической (пары Лакса, бигамильтоновы и бипуассоновы структуры, например, в [5], [6]), так геометрической и топологической природы. Исследованию топологии интегральных многообразий и слоений на них посвящены многие работы, в том числе С. Смейла [7], М.П. Харламова [8], [9], [10], А.А. Ошемкова [11], [12], П.Е Рябова [13].

Для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы отношения лиувиллевой и траекторной эквивалентности являются классическими. Первое означает наличие диффеоморфизма , переводящего замыкания решений в замыкания решений. При втором отношении требуется, чтобы диффеоморфизм (в случае гладкой траекторной эквивалентности) или гомеоморфизм (в случае непрерывной траекторной эквивалентности) переводил траектории первой системы в траектории второй системы с учетом направления, но без учета времени.

Вопрос классификации таких систем с двумя степенями свободы с точностью до ливиллевой эквивалентности был эффективно и полно решен в работах А.Т. Фоменко и его школы [14], [15], [16], [17], подробное изложение см. в [19]. А.Т. Фоменко и

Х.Цишангом [18] был построен инвариант, совпадающий для двух систем в точности при их лиувиллевой эквивалентности на трехмерной неособой интегральной поверхности.

Отметим, что А.Т.Фоменко и А.В. Болсиновым был построен инвариант траекторной эквивалентности (являющийся усложнением инварианта Фоменко–Цишанга, подробности и литературу см. [19]). Он позволил доказать непрерывную траекторную эквивалентность двух знаменитых динамических систем — случая Эйлера из динамики твердого тела и геодезического потока на эллипсоиде. В работе [33] было доказано, что случай Горячева-Чаплыгина непрерывно траекторно эквивалентен двум этим системам.

Нахождение инварианта Фоменко–Цишанга при различных значениях интегралов системы, т.е. лиувиллев анализ, был выполнен ранее для многих известных интегрируемых систем динамики твердого тела, например, [12], [19], [20], [21], [22], [24], [25]. В работах [26], [27], [28] инварианты Фоменко–Цишанга были найдены для биллиардов, столы которых ограничены дугами софокусных квадрик, и некоторых их обобщений. С другими современными приложениями и результатами такого подхода можно ознакомиться по [29], [30], [31], [32], [33].

Для случая Ковалевской на e(3) лиувиллев анализ был проведен в [25]. В настоящей работе он будет выполнен в случае алгебры Ли so(4).

История вопроса

В работе [34] С.В. Ковалевской был открыт новый, ранее неизвестный случай интегрируемости уравнений динамики тяжелого твердого тела. Для обнаруженной системы были найдены переменные, в которых уравнения приводятся к виду Абеля-Якоби, и явное решение в тэта-функциях. Систему, рассмотренную С.В. Ковалевской, далее будем называть *классическим случаем Ковалевской*. В работе [35] ей же было показано, что отсутствуют иные случаи интегрируемости уравнений тяжелого твердого тела в поле силы тяжести при всех значениях интеграла площадей, кроме найденной системы и хорошо известных случаев Эйлера и Лагранжа.

Для исследований классического случая Ковалевской использовались разнообразные методы. В работах Жуковского [36] были изучены взаимосвязи между переменными s_1, s_2, найденными Ковалевской, и переменными Эйлера. Г.Г. Аппельротом в работе [37] были классифицированы особые орбиты с алгебраической точки зрения. М.П. Харламовым в работах [8], [9], [10] были применены и развиты новые подходы, основанные на идеях С. Смейла [7] исследования фазовой топологии и конструкциях симплектической геометрии.

В работе [25] А.В. Болсиновым, П. Рихтером и А.Т. Фоменко для классического случая Ковалевской был проведен лиувиллев анализ. Было установлено, что в системе встречается ровно 10 лиувиллево неэквивалентных слоений.

В работе [38] для случая $\varkappa > 0$ были построены бифуркационные диаграммы отображения момента $\mathfrak{F} = (H, K)$ и круговые молекулы особых точек $\Sigma^{a,b}$, исследована невырожденность критических точек $\mathfrak{F}$ и установлено наличие предельного перехода при $\varkappa \to 0+$, сохраняющего типы прообразов особых точек и дуг $\Sigma^{a,b}$.

Цель работы

Целью работы является изучение топологии слоений Лиувилля компактного случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) и сравнение со слоениями исследованных ранее интегрируемых систем. Для каждой неособой поверхности постоянной энергии будет найден инвариант Фоменко–Цишанга слоения на ней и ее класс диффеоморфности (топологический тип).

Дополнительной целью является формализация некоторых методов исследования топологии слоений Лиувилля и трехмерных подмногообразий для их применения к другим интегрируемым системам.

Применяемые методы

При исследовании системы были использованы конструкции и методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, развитых в работах А.Т. Фоменко и его школы. При описании слоения Лиувилля в окрестности некоторых критических точек применялись методы линейной алгебры и дифференциальной геометрии. Для нахождения классов диффеоморфности $Q^3_{a,b,h}$ были задействованы некоторые соображения трехмерной топологии.

Научная ценность

Результаты данной работы являются новыми, и заключаются в следующем:

1. найден полный список классов лиувиллевой эквивалентности слоений Лиувилля на поверхностях постоянной энергии $Q^3_{a,b,h}$ (в терминах инварианта Фоменко–Цишанга),

2. составлен список классов слоений Лиувилля на неособых поверхностях постоянной энергии компактного случая Ковалевской, эквивалентных слоениям исследованных ранее интегрируемых систем или моделируемых топологическими биллиардами в областях, ограниченными дугами софокусных квадрик

3. топология компактного случая Ковалевской описана в терминах однозначно определенных циклов, соответствующих переменным действия,

4. с помощью инварианта Фоменко–Цишанга установлен топологический тип каждой неособой поверхности постоянной энергии $Q^3_{a,b,h}$,

5. установлено,что целочисленная метка круговой молекулы особенности типа центр-центр находится из локального устройства кривых бифуркационной диаграммы.

Результаты 1, 2 позволяют пополнить весьма богатый список классов слоений Лиувилля, встречающихся в реальных задачах физики и механики, и установить некоторые связи компактного случая Ковалевской с другими интегрируемыми системами и топологическими биллиардами.

Результат 3 может быть использован в дальнейшем при исследовании более тонких (траекторных или симплектических) инвариантов данной системы, т. к. дает дополнительную информацию о поведении переменных действия вблизи множества критических точек отображения момента.

Результат 4 показывает, что топологические инварианты позволили дать ответ в условиях невозможности применить стандартную технику нахождения топологических типов $Q^3_{a,b,h}$ (рассмотрения проекции Q^3 на сферу Пуассона) в случае алгебры Ли so(4).

Результат 5 позволяет для произвольной системы находить целочисленную метку ε для класса невырожденных особенностей типа центр-центр по уравнениям бифуркационных кривых. Такие особенности встречаются во многих интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы.

Содержание и объем работы

Дипломная работа состоит из 5 глав, введения и заключения. Ее текст изложен на 61 странице, содержит 35 рисунков и 23 таблицы. Список литературы содержит 40 наименований.

Во **введении** описана структура работы и история обсуждаемых вопросов, актуальность исследуемой области, научная новизна и используемые в работе методы.

В **первой главе** подробно изложены необходимые определения и утверждения из симплектической геометрии, теории скобок Пуассона, алгебр Ли и теории топологического анализа интегрируемых систем.

Во **второй главе** описывается случай Ковалевской, его обобщение на пучок алгебр Ли $\mathrm{so}(3,1) - \mathrm{e}(3) - \mathrm{so}(4)$. Для классического случая Ковалевской (т.е. при $\varkappa = 0$) приведены бифуркационные диаграммы отображения момента и результаты лиувиллева анализа. Для компактного случая Ковалевской приведены полученные в [38] бифуркационные диаграммы отображения момента и разбиение плоскости орбит на области с одинаковыми диаграммами.

В **третьей главе** главе содержатся результаты лиувиллева анализа компактного случая Ковалевской, полученные автором. В теореме 4 приведен полный список классов лиувиллевой эквивалентности (в терминах инварианта Фоменко–Цишанга) слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностей. В теореме 5 перечислены обнаруженные эквивалентности с другими интегрируемыми системами, т.е. случаи совпадения замыканий решений общего положения. Однозначно определенные λ-циклы для дуг бифуркационных диаграмм, не имеющих аналога при $\varkappa = 0$, выражены через уже известные λ-циклы.

В **четвертой главе** содержатся доказательства утверждений из третьей главы. В основном, они носят технический и вычислительный характер.

В **пятой главе** на основе результатов третьей главы была исследована топология изоэнергетических поверхностей компактного случая Ковалевской. Для каждой такой поверхности указан ее топологический тип, т.е. ее класс диффеоморфности.

В **заключении** представлены выводы из полученных результатов и возможности дальнейших исследований в данной области.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своим научным руководителям, академику РАН профессору А.Т. Фоменко и ассистенту И.К. Козлову, за постановку задачи, внимание к работе и ценные замечания.

1 Основные определения и факты

1.1 Динамические системы и алгебры Ли

1.1.1 Задание динамической системы

Конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ можно канонически отождествить с ее вторым двойственным пространством $\mathfrak{g}^{**}$. Зададим скобку Пуассона на двойственном к $\mathfrak{g}$ пространстве $\mathfrak{g}^*$ следующим образом:

$$\{f, g\} = \langle x, [df|_x,\, dg|_x]\rangle. \tag{1.1}$$

Запись $\langle\cdot,\cdot\rangle$ кодирует спаривание ковектора из $\mathfrak{g}^*$ и вектора $\mathfrak{g}$. Через $[\cdot,\cdot]$ обозначен коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Будем рассматривать случай вещественных алгебр Ли. Обозначим через $x_1, \dots, x_n$ линейные координаты в двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Определение 1. *Уравнениями Эйлера* для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \tag{1.2}$$

где H — гладкая функция на $\mathfrak{g}^*$.

Замечание 1. Уравнения Эйлера задают динамическую систему на $\mathfrak{g}^*$.

1.1.2 Пучок алгебр Ли $\mathrm{so}(3,1) - \mathrm{e}(3) - \mathrm{so}(4)$

Для случая Ковалевской из динамики твердого тела И.В. Комаров в работе [2] построил аналоги на пучке коалгебр $\mathrm{so}(3,1)^* - \mathrm{e}(3)^* - \mathrm{so}(4)^*$. В дальнейшем будем, менее строго, говорить о динамических системах на пучке алгебр Ли $\mathrm{so}(3,1) - \mathrm{e}(3) - \mathrm{so}(4)$, опуская звездочки.

В пространстве $\mathbb{R}^6$ выберем некоторый базис $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$. Введем семейство коммутаторов, зависящих от параметра $\varkappa \in \mathbb{R}$:

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad [e_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k, \quad [f_i, f_j] = \varkappa \varepsilon_{ijk} e_k, \tag{1.3}$$

где ε_{ijk} — знак перестановки $\{123\} \to \{ijk\}$. Случай $\varkappa > 0$ соответствует алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, случай $\varkappa = 0$ — алгебре Ли $\mathrm{e}(3)$, а $\varkappa < 0$ — алгебре Ли $\mathrm{so}(3,1)$.

Обозначим через $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$ базис в двойственном пространстве, взаимный для введенного выше базиса $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$. Во взаимном базисе скобка Ли–Пуассона записывается так:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k. \tag{1.4}$$

Определение 2. *Функцией Казимира* некоторой скобки Пуассона называют функцию, коммутирующую с любой другой функцией относительно данной скобки.

Введенная выше скобка имеет две функции Казимира при любом $\varkappa \in \mathbb{R}$. А именно,

$$f_1 = \mathbf{x}^2 + \varkappa \mathbf{J}^2, \qquad f_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{J} \rangle, \tag{1.5}$$

где через $\mathbf{x}$ и $\mathbf{J}$ обозначены трёхмерные вектора (x_1, x_2, x_3) и (J_1, J_2, J_3) соответственно, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение двух векторов из $\mathbb{R}^3$.

При каждом $\varkappa \in \mathbb{R}$ пространство $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x})$ является пуассоновым многообразием. Опишем, как устроены его симплектические листы. Напомним, что в локальных координатах $y_1, \dots, y_n$ на M^n скобка Пуассона записывается через кососимметричный бивектор Пуассона A^{ij}

$$\{f, g\} = A^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial y^j}.$$

Гамильтоново векторное поле, соответствующее гладкой функции H, задается формулой $\mathrm{sgrad}\ H = A\, dH$. Скобка Пуассона определяет кососимметричную замкнутую 2-форму ω по формуле

$$\omega(\mathrm{sgrad}\ f, \mathrm{sgrad}\ g) := \{f, g\}.$$

Пуассоновое многообразие разбивается в объединение симплектических листов, на которых форма ω невырождена, т.е. является симплектической структурой. Для описанного выше пучка симплектическими листами (и орбитами каприсоединенного представления) при фиксированном $\varkappa$ являются совместные поверхности уровня

$$M_{a,b} = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x})|\ f_1(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = a,\ f_2(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = b\} \tag{1.6}$$

во всех случаях кроме $\varkappa \leq 0, a = 0, b = 0$. Если $a > 2\sqrt{\varkappa}|b|$, то орбиты $M_{a,b}$ диффеоморфны прямому произведению двумерных сфер $S^2 \times S^2$ для $\varkappa > 0$ и кокасательному расслоению к двумерной сфере T^*S^2 для $\varkappa = 0$. При $\varkappa > 0$ орбита сингулярна, если $a = 2\sqrt{\varkappa}|b|$, причем орбита $M_{0,0}$ является точкой, а остальные сингулярные орбиты диффеоморфны S^2. Слоение на них описано в лемме 3.1. Парам $a < 2\sqrt{\varkappa}|b|$ при $\varkappa \geq 0$ не соответствует ни одной орбиты. При $\varkappa < 0$ орбиты не нулевой размерности некомпактны.

1.2 Вполне интегрируемые по Лиувиллю системы

Напомним, что *симплектическим многообразием* называют гладкое четномерное многообразие M^{2n} с замкнутой невырожденной 2-формой ω. На таком многообразии по каждой гладкой функции H можно построить гамильтоново векторное поле $\operatorname{sgrad} H = \omega^{-1}\, d\, H$, называемое косым градиентом функции H. Отметим, что в канонических координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ матрица ω и вектор $\operatorname{sgrad} H$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ и $\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}, \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\right)$ соответственно. Векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ задает на M^{2n} динамическую систему. В локальных координатах $x_1, \dots x_{2n}$ она имеет вид

$$\dot{x}_i = \omega(\operatorname{sgrad} x_i,\ \operatorname{sgrad} H).$$

Гладкая функция f называется *первым интегралом* векторного поля v, если ее значение сохраняется вдоль интегральных траекторий этого векторного поля. Для гамильтоновых полей это равносильно условию $\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} H) = 0$.

Определение 3. Динамическая система $v = \operatorname{sgrad} H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существуют n гладких функций $f_1, \dots, f_n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $f_1, \dots, f_n$ — первые интегралы векторного поля $\operatorname{sgrad} H$,
2. $f_1, \dots, f_n$ функционально независимы, т.е. их градиенты линейно независимы почти всюду,
3. $\omega(\operatorname{sgrad} f_i, \operatorname{sgrad} f_j) = 0$ (т.е. $\{f_i, f_j\} = 0$) для всех $i, j = 1, \dots, n$,
4. векторные поля $\operatorname{sgrad} f_1, \dots, \operatorname{sgrad} f_n$ полны.

Зачастую при анализе системы удобно взять гамильтониан H в качестве f_1.

Определение 4. Слоением Лиувилля на M^{2n}, соответствующим вполне интегрируемой системе $v = \operatorname{sgrad} H$, называют разбиение M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов $f_1, \dots, f_n$ этой системы.

Слоение Лиувилля можно описывать локально (в окрестности точки), полулокально (в послойной окрестности некоторого слоя) и глобально (на некотором Q^3 или на всем M^4).

1.3 Устройство слоения Лиувилля в окрестности слоя

1.3.1 Случай регулярного слоя

Каждый слой $T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, \dots, n\}$ слоения Лиувилля является инвариантной поверхностью, т.е. каждая траектория системы или содержится в нем, или не имеет с ним общих точек. Слой T_ξ называется *регулярным*, если дифференциалы df_i линейно независимы во всех его точках. В окрестности регулярного слоя расположение траекторий системы и ее слоение Лиувилля описываются теоремой Лиувилля (ее доказательство приведено в [19]).

Теорема 1 (Лиувилль). *Пусть T_ξ есть регулярная совместная поверхность уровня для n первых интегралов $\{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \xi_i\}$ вполне интегрируемой системы $v = sgrad\ H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω). Тогда*

1. *T_ξ является гладким, лагранжевым (т.е. $\omega|_{T_\xi} = 0$) подмногообразием, инвариантным относительно потоков* $\mathrm{sgrad}\, H, \mathrm{sgrad}\, f_1, \dots \mathrm{sgrad}\, f_n$,
2. *если T_ξ связно и компактно,то $T_\xi \cong T^n$ — n-мерному тору Лиувилля,*
3. *$\exists U \supset T_\xi$ — окрестность слоя T^ξ, послойно диффеоморфная прямому произведению $T^n \times D^n$,*
4. *в U существуют переменные действие-угол $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, такие что*
   - *$s_1, \dots, s_n$ — переменные на диске D^n; $\varphi_1 \bmod 2\pi, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi$ — на торе T^n,*
   - *$\omega = \sum_i d\varphi_i \wedge ds_i$*
   - *$s_i = s_i(f_1, \dots, f_n)$,*
   - *$\dot{s}_i = 0$, $\dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$, т.е. поток* $\mathrm{sgrad}\, H$ *на каждом торе из U или условно периодичен в этих координатах, а траектории являются прямолинейными обмотками тора.*

Замечание 2. Тем самым, окрестности регулярных компактных слоев двух систем с одинаковым числом степеней свободы устроены топологически одинаково. Все траектории системы на зафиксированном торе Лиувилля устроены "одинаково", т.к. значения $\dot{\varphi}_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$ постоянны на нем.

1.3.2 Случай невырожденного особого слоя

Требуется описать топологию особых слоев и их послойных окрестностей в $Q^3 \subset M^4$ для отображения момента $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} = (H, f_2, \dots, f_n): \quad M^{2n} \to \mathbb{R}^n.$$

В случае двух степеней свободы это было проделано в работах А.Т. Фоменко и его школы. Рассмотрим трехмерную поверхность Q^3, в точках которой $dH \neq 0$. Точки падения ранга $\mathfrak{F} = (H, F)$ в ней не могут быть изолированными. Хотя лемма Морса оказывается неприменимой, имеется ее аналог.

Назовем интеграл F *боттовским* на Q^3, если его особые точки были организованы в *критические подмногообразия* N_i (т.е. $d\,F = \alpha d\,H$ в точках N_i), которые являются невырожденными. Это означает, что для каждой точки $x \in N_i$ ограничение $d^2(F - \alpha H)$ на трансверсальное к N_i подпространство в Q^3 невырождено. Тем самым, $F - \alpha H$ есть функция Морса на этом подпространстве. Согласно лемме Морса–Ботта [19], индекс d^2F корректно определен.

Критическое подмногообразие системы $v = \operatorname{sgrad} H$ на $Q^3 \subset M^4$ является окружностью, тором или бутылкой Клейна. В рассматриваемых нами системах встречаются только критические окружности.

Замечание 3. Отметим разницу между критическими подмногообразиями (множествами точек, где $rk\mathfrak{F} < 2$) многообразия Q^3 с $dH \neq 0$ и особыми слоями. Особый слой, т.е. особый уровень интеграла F, содержит одно или несколько критических подмногообразий. Если критическое подмногообразие является минимальной или максимальной окружностью (т.е. индекс d^2F равен 0 или 2) или двумерно, то оно совпадает со связной компонентой особого слоя. В остальных случаях особый слой содержит и точки ранга 2.

Определение 5. Пусть особый слой слоения Лиувилля на Q^3 не содержит точек, где $dH = 0$. Тогда класс лиувиллевой эквивалентности его малой послойной окрестности в Q^3 называют 3-атомом.

Такой атом может быть эллиптическим (критическая окружность является минимальной или максимальной) и седловым (все критические окружности являются седловыми). Существует единственный с точностью до послойного диффеоморфизма эллиптический атом, являющийся полноторием, расслоенным на торы и одну особую окружность. Он обозначается латинской буквой A.

Как доказано А.Т.Фоменко (теорема 3.3, 1 том, [19]), каждый седловой 3-атом имеет структуру расслоения Зейферта со слоем окружность, все особые слои которого (при их наличии) имеют тип (2,1) и являются критическими окружностями $\mathfrak{F}$. Структура расслоения Зейферта и слоения Лиувилля согласованы — каждый слой расслоения Зейферта целиком содержится в некотором слое слоения Лиувилля.

В реальных системах чаще всего встречаются только атомы A, B, C_2 и A^*. Атом A является минимальным или максимальным, атомы B и C_2 — седловыми. Они все имеют тип прямого произведения базы рода 0 на окружность. Атом A^* имеет одну критическую окружность, является седловым, но получаются путем умножения базы 3-атома B на окружность *полупрямым* образом, т.е. с поворотом на π.

1.4 Лиувиллевая эквивалентность и теорема Фоменко–Цишанга

Следующее отношение эквивалентности позволяет классифицировать системы с двумя степенями свободы с точки зрения расположения замыканий их решений:

Определение 6. Две интегрируемые системы (M_1^4, v_1) и (M_2^4, v_2) на трехмерных подмногообразиях Q_1^3 и Q_2^3, целиком состоящих из слоев слоения Лиувилля, на которых $v_i \neq 0$, называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм Q_1^3 и Q_2^3, сохраняющий ориентацию $\operatorname{sgrad} H$ на критических окружностях интеграла F.

Рассмотрев базу слоения Лиувилля, т.е. фактор-пространство, точке которого соответствует связная компонента слоя, сформулируем более слабую эквивалентность:

Определение 7. Две интегрируемые системы (M_1^4, v_1) и (M_2^4, v_2) на трехмерных подмногообразиях Q_1^3 и Q_2^3, целиком состоящих из слоев слоения Лиувилля, на которых $v_i \neq 0$, называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если их базы диффеоморфны, и в полном прообразе окрестности каждой точки базы существует диффеоморфизм самих слоений.

Теорема о топологической классификации, доказанная А.Т. Фоменко и Х.Цишангом, утверждает, что описанный ниже инвариант Фоменко–Цишанга, так же называемый меченой молекулой, является полным различающим инвариантом лиувиллевой эквивалентности:

Теорема 2 (А.Т. Фоменко, Х. Цишанг)**.** *Слоения Лиувилля на неособых Q^3 лиувиллево эквивалентны, в точности если совпадают их инварианты Фоменко–Цишанга.*

Замечание 4. Две нерезонансные системы имеют одинаковые замыкания решений общего положения на трехмерных подмногообразиях, в точности если совпадают инварианты Фоменко–Цишанга их слоений Лиувилля.

Замечание 5. Полным инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности является граф Фоменко. Добавив к нему некоторые числовые метки, получим инвариант Фоменко–Цишанга. Часто построение всех графов Фоменко называют изучением грубой топологии системы.

Ребра этих графов соответствуют семействам регулярным торов, вершины — особым слоям, и характеризуются их классами лиувиллевой эквивалентности особых слоев (т.е. 3-атомам системы). Числовые метки в инварианте Фоменко–Цишанга имеет следующее значение.

Разрежем Q^3 по регулярным торам на части, содержащие по одному особому слою (т.е. для каждого ребра удалим из семейства торов один тор). Запомним, какие пары граничных торов полученных частей были склеены между собой. Даже после этого обратная склейка частей в единое Q^3 не является однозначной, т.к. зависит от закона склейки на удаленных торах.

Для задания закона склейки надо указать некоторый диффеоморфизм тора. Он задается невырожденной матрицей 2×2. Оказывается, на граничных торах 3-атома можно каноническим образом выбрать класс базисов в $\pi_(T^2)$, называемых допустимыми. На каждом ребре матрица перехода между допустимыми базисами на границах 3-атомов задает диффеоморфизм, по которому две части были склеены до разреза. Такая матрица называется матрицей склейки. Подробнее о допустимых базисах написано в разделе 1.6.

По следующим формулам из матрицы склейки $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ можно вычислить числовые метки r, ε, n.

Числовые метки r и ε ставятся на ребрах графа Фоменко. Рациональная метка r равна $\alpha_i/\beta_i \bmod 1$ или $r = \infty$, если $\beta_i = 0$. Метка ε равна $\operatorname{sgn}\beta_i$, если $\beta_i \neq 0$, и $\operatorname{sgn}\alpha_i$, если $\beta_i = 0$.

Для определения метки n на каждом ребре графа Фоменко выберем направление и разрежем граф по всем ребрам с $r \neq \infty$. В дальнейшем ребра инвариантов изоэнергетических поверхностей будем направлять по возрастанию дополнительного интеграла. Для каждой связной компоненты, не содержащей атомов A, целочисленной меткой n назовем сумму чисел Θ_i по всем входящим, выходящим и внутренним ребрам

$$\Theta_i = \begin{cases} \left[\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}\right] & \text{для выходящего ребра,} \\ \left[-\dfrac{\delta_i}{\beta_i}\right] & \text{для входящего ребра,} \\ \left[-\dfrac{\gamma_i}{\alpha_i}\right] & \text{для внутреннего ребра.} \end{cases}$$

Отметим, что $[-1/2] = -1$. При замене ориентации на Q^3 меченая молекула может измениться. А именно,

- пусть ребро соединяет между собой два атома A или два седловых атома. Если $r \neq \infty$, то метки r, ε меняют свой знак. В противном случае их знаки сохраняются.

- пусть ребро соединяет атом A с седловым атомом. Если $r \neq \infty$, то ε сохряняется, а метка r меняет знак. Если $r = \infty$, то метка ε меняет знак, метка r сохраняется.

- $n' = -n - l - s$, где n' — метка n после замены ориентации, l — число внешних ребер с дробной меткой, а s — суммарное число звездочек в атомах данной компоненты.

1.5 Бифуркационные диаграммы отображения момента

Пусть M^4 — симплектическое многообразие, $\mathfrak{F} : M^4 \to \mathbb{R}^2$ — отображение момента.

Определение 8. Бифуркационной диаграммой Σ отображения момента $\mathfrak{F}$ называют образ множества точек падения ранга $\mathfrak{F}$ в $\mathbb{R}^2$.

Для каждой регулярной орбиты $M^4_{a,b}$, являющейся симплектическим листом пуассонового многобразия $\mathbb{R}^6$, обозначим бифуркационную диаграмму через $\Sigma^{a,b}$.

В случае Ковалевской при $\varkappa = 0$ диаграммы $\Sigma^{a,b} \subset \mathbb{R}^2(h, k)$ были исследованы М.П. Харламовым, а при $\varkappa > 0$ — И.К. Козловым [38]. В обоих случаях она состоит из конечного числа гладких дуг (возможно, неограниченных) и особых точек.

Прообраз внутренней точки дуги бифуркационной диаграммы Σ обычно содержит невырожденные особые точки ранга 1. Точки пересечения, касания и возврата или потери гладкости кривых, содержащих дуги Σ, (т.е. концы этих дуг) обычно имеют в прообразе критические точки ранга 0 или вырожденные одномерные орбиты ранга 1. Такие точки Σ называют *особыми точками бифуркационной диаграммы.*

Замечание 6. Система имеет симметрию $(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \to (-\mathbf{J}, \mathbf{x})$, переводящую точки совместного уровня (a, b, h, k) функций f_1, f_2, H, K в точки совместного уровня $(a, -b, h, k)$. Тем самым, бифуркационные диаграммы $\Sigma^{a,-b}$ и $\Sigma^{a,+b}$ состоят из одних и тех же точек плоскости Ohk, прообразы которых при отображении момента устроены одинаково. Далее считаем, что $b \geq 0$.

Определение 9. Кривую γ без самопересечений в плоскости Ohk называют *допустимой*, если она не проходит через особые точки $\Sigma^{a,b}$ и пересекает ее дуги трансверсально.

Прообраз допустимой кривой является расслоенным трехмерным подмногообразием, т.е. для него определен инвариант Фоменко–Цишанга. Среди допустимых кривых выделим более узкий класс, соответствующий постоянству трех интегралов механики.

Изоэнергетическими поверхностями $Q_{a,b,h}$ гамильтоновой системы $v = \operatorname{sgrad} H$ называют совместные поверхности уровня функций Казимира f_1, f_2 и гамильтониана H

$$Q_{a,b,h} = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}) | \quad f_1(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = a,\ f_2(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = b,\ H(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = h\}.$$

Назовем $Q_{a,b,h}$ и соответствующую тройку (a, b, h) *неособыми*, если образ $\mathfrak{F}(Q_{a,b,h})$ является допустимой кривой. Отметим, что при $\varkappa > 0$ образ неособой $Q_{a,b,h}$ является отрезком, лежащим на вертикальной прямой $H = h$ плоскости Ohk, поскольку орбиты $M^4_{a,b}$ алгебры Ли $so(4)$ компактны. Неособая $Q_{a,b,h}$ является гладким трехмерным подмногообразием в $M^4_{a,b}$ без границы. Остальные непустые $Q_{a,b,h}$ назовем *особыми.*

1.6 Допустимые базисы

Как показано в [19], на граничных торах каждого 3-атома можно выбрать некоторые базисы, называемые допустимыми. Допустимый базис состоит из однозначно определенного цикла λ и дополняющего его до базиса цикла μ, который определяется с точностью до прибавления целого числа циклов λ.

По аналогии с работой [25] мы *одновременно* выберем допустимые базисы для всех перестроек и выразим их через однозначно определенные λ-циклы. Для этого для каждой дуги бифуркационной диаграммы мы рассмотрим маленький вертикальный интервал I. Отметим, что в компактном и классическом случаях Ковалевской у дуг бифуркационной диаграммы отсутствуют вертикальные касательные.

Прообразом интервала I является некоторый 3-атом. Общие правила выбора допустимых базисов на граничных торах 3-атомов изложены в [19]. Направление одного из циклов задается векторным полем $\operatorname{sgrad} H$, а второго выбирается из согласованности ориентаций. В работе [23] П.В. Морозов переформулировал это правило для 3-атомов, лежащих в прообразе маленьких вертикальных отрезков. А именно, тройка $(\lambda, \mu, \operatorname{grad}\ K)$ должна быть положительной относительно ориентации Q^3 на верхней границе атома (выше соответствующей дуги Σ) и отрицательной на нижней границе.

Мы переформулируем это условие в случае атома A. Совпадение меток ε для особенностей типа центр-центр, посчитанных работах [20], [21], [22] и найденных нами согласно утверждению 1, означает эквивалентность правил выбора допустимых базисов.

Напомним, что 3-атом A диффеоморфен полноторию $S^1 \times D^2$, расслоенному на торы Лиувилля и одну особую минимальную или максимальную окружность. Базой такого расслоения является 2-атом A (концентрические окружности и особая точка).

Определение 10. Базис (λ, μ) в $\pi_1(T^2)$ на граничном торе 3-атома A назовем *допустимым*, если

1. цикл λ стягиваем,
2. ориентация цикла μ задана векторным полем $\operatorname{sgrad} H$ на особом слое,
3. базис (λ, μ) в $\pi_1(T^2)$ задает положительную ориентацию на граничном торе.

Базис (u, v) в касательном пространстве T_xT^2 к граничному тору положительно ориентирован, если четверка векторов $(\operatorname{grad} H, N, u, v)$ положительно ориентирована относительно формы объема $\omega \wedge \omega$. Здесь N — внешняя нормаль к 3-атому.

Каждому фрагменту допустимой кривой, соединяющему концы двух вертикальных интервалов I_i и не пересекающему дуги Σ, соответствует 2×2 матрица перехода от допустимого базиса на границе одного атома к допустимому базису на границе другого. Для изоэнергетической поверхности $H = \mathrm{const}$ определители таких матриц равны -1, а для поверхности $K = \mathrm{const}$ они равны $+1$.

2 Случай Ковалевской и его аналоги

Обнаруженное И.В Комаровым [2] семейство интегрируемых систем на пучке алгебр Ли $\mathrm{so}(3,1) - \mathrm{e}(3) - \mathrm{so}(4)$ задается уравнениями Эйлера (1.2) для гамильтониана (2.1)

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1x_1, \tag{2.1}$$

Дополнительный интеграл K, находящийся в инволюции с H, имеет вид

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2)^2. \tag{2.2}$$

Здесь c_1 — произвольная постоянная. Можно считать, что $c_1 = 1$ и $\varkappa \in \{-1, 0, 1\}$.

2.1 Топология классического случая Ковалевской

Для случая $\varkappa = 0$ в работе [25] был проведен лиувиллев анализ. Система обладает 10 неэквивалентными слоениями, инварианты Фоменко-Цишанга для которых приведены в таблице 4. На рисунке 4 приведем бифуркационные диаграммы классического случая Ковалевской с обозначениями $\alpha_1, \ldots, \delta_2$, использованными в работе [25]. Отметим, что на нем ось h направлена вправо, а ось k — вверх.

Для каждого семейства торов $(1), \ldots, (5)$ допустимые базисы на торах из фиксированного семейства, расположенных вблизи дуги бифуркационной диаграммы, были выражены через однозначно определенные λ-циклы. Это можно сделать, перенеся эти циклы на один и тот же тор. Соответствующие дугам λ-циклы представлены как элементы целочисленной решетки. Для всех дуг $\alpha_1, \ldots, \delta_2$ их можно найти на рисунке 1.

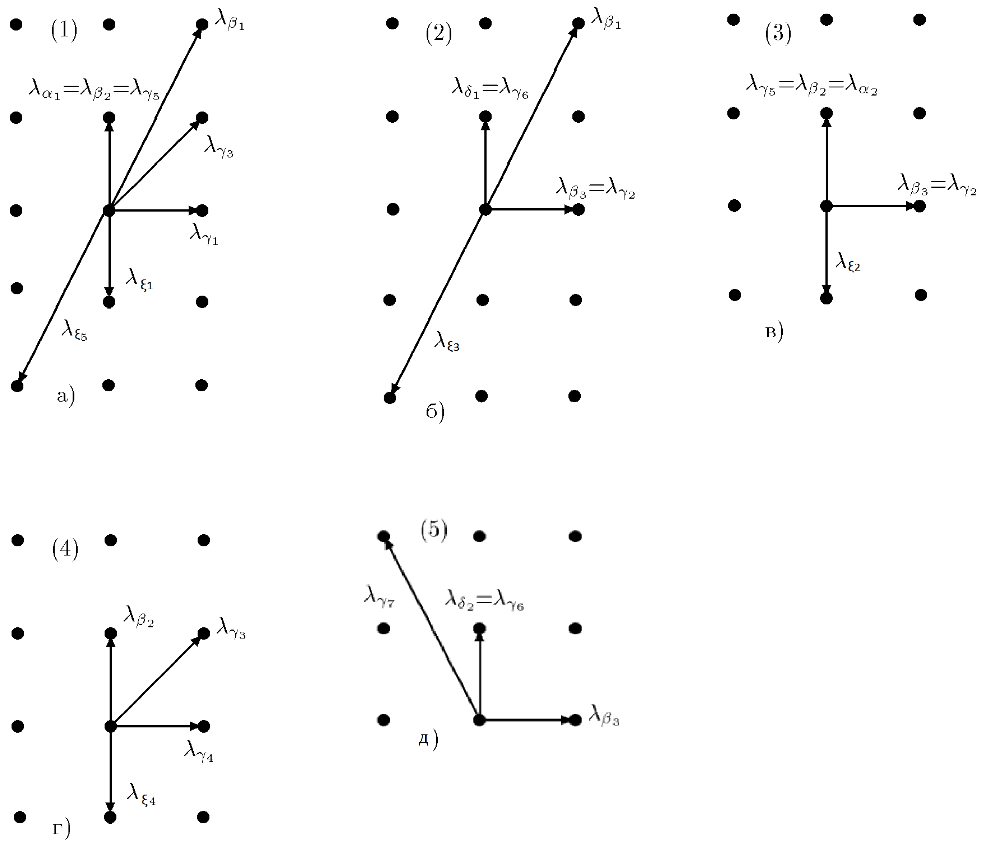


Рис. 1: Циклы допустимых базисов для компактного случая Ковалевской

Изоэнергетические поверхности классического случая Ковалевской диффеоморфны одному из следующих многообразий:

- S^3 — трехмерная сфера — слоения A, B, C, J,
- $S^1 \times S^2$ — прямое произведение двумерной и одномерной сфер — слоения G, F,

- $\mathbb{R}P^3$ — трехмерная проективное пространство — слоения D, E, H,
- $(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$ — связная сумма двух $S^1 \times S^2$ — слоение I.

Некоторые факты о топологии классического случая приведены в разделе 3.5, в котором обсуждается связь компактного и классического случаев Ковалевской. На рисунке 7 указано, какие топологические типы имеет поверхность $Q^3_{1,b,h}$ при $\varkappa = 0$.

2.2 Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской на $so(4)$

В работе И.К. Козлова [38] анализировался случай $\varkappa > 0$. Были найдены четыре кривые, в объединении которых содержится бифуркационная диаграмма.

Лемма 2.1. *Пусть $b \neq 0$ и $\varkappa \neq 0$. Тогда для любой регулярной орбиты $M_{a,b}$ (такой, что $a^2 - 4\varkappa b^2 > 0$) бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ интегрируемой системы с гамильтонианом (2.1) и интегралом (2.2) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h,k)$:*

1. *Прямая* $$k = 0, \tag{2.3}$$

2. *Параметрическая кривая,*
$$h(z) = \frac{b^2c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = \left(4ac_1^2 - \frac{4b^2c_1^2}{z} + \frac{b^4c_1^4}{z^4}\right) - 2\varkappa c_1^2 h(z) + \varkappa^2 c_1^4, \tag{2.4}$$
где $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. *Объединение двух парабол*
$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}\right)^2 \tag{2.5}$$
и
$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa}\right)^2. \tag{2.6}$$

Взаимное расположение этих кривых, попадание их точек в образ отображения момента и устройство прообразов особых точек существенно зависит от значений (a, b). И.К. Козловым установлено, что 5 кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m делят множество $a \geq 2\sqrt{\varkappa}b$, $b > 0$ на 9 областей с одинаковым устройством бифуркационных диаграмм:

Теорема 3 (И.К. Козлов, [38])**.** *Пусть $\varkappa > 0$ и $b > 0$. Функции f_k, f_r, f_m, f_t и f_l заданные формулами*

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\varkappa b^{2/3}c_1^{4/3} - \varkappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}} \tag{2.7}$$

$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \varkappa b^{2/3}c_1^{2/3} \tag{2.8}$$

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2 \tag{2.9}$$

$$f_t(b) = \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1}\right)^2 + \varkappa t^2, \qquad \text{где} \quad b = t\left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1}\right) \tag{2.10}$$

$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b| \tag{2.11}$$

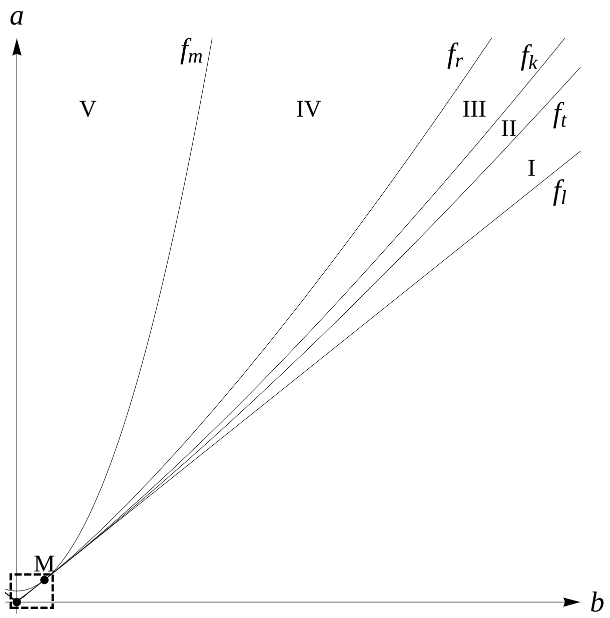


Рис. 2: Разбиение области параметров

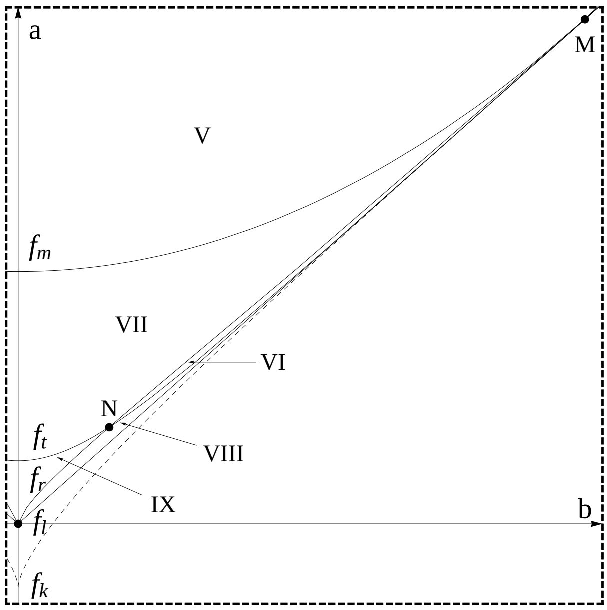


Рис. 3: Увеличенный фрагмент рис. 2.

делят множество орбит $\{b > 0, a \geq 2\sqrt{\varkappa} b\} \subset \mathbb{R}^2(a, b)$ *на 9 областей (см. рис. 2 и 3).*

На рисунках 13 – 31 для каждой из этих областей указана соответствующая бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.1) и интегралом (2.2) на орбите $M_{a,b}$ *алгебры Ли* $so(4)$. *Точнее, в каждом из случаев указано, из каких частей прямой* $k = 0$, *кривой (2.4) и двух парабол (2.5) и (2.6) состоит бифуркационная диаграмма отображения момента.*

Кроме того, для каждой дуги бифуркационной диаграммы указана перестройка, происходящая в прообразе ее точек, а для каждой особой точки указано семейство, которому она принадлежит.

Замечание 7. В случае $b = 0$ вместо кривой 2.4 следует рассмотреть параболу (2.12) и касательную (2.13) к ней в точке оси Ok. В уравнения остальных кривых достаточно подставить $b = 0$.

$$k = (h - \varkappa c_1^2)^2 + 4ac_1^2 \tag{2.12}$$

$$k = -2\varkappa c_1^2 h + (4ac_1^2 + \varkappa^2 c_1^4); \tag{2.13}$$

Два значения $a = \varkappa^2 c_1^2$ и $a = \varkappa^2 c_1^2/4$ делят луч $b = 0, a \geq 0$ на три промежутка, точкам которых соответствуют диаграммы $\Sigma^{a,0}$, изображенные на рисунках 32–35.

Круговые молекулы особых точек $y_1, ..., z_{11}$, найденные в [38], изображены в таблицах 5 и 6.

2.2.1 Предельный переход по параметру пучка

Также в работе [38] была установлена “непрерывность” предельного перехода бифуркационных диаграмм $\Sigma^{a,b}(\varkappa)$ при $\varkappa \to +0$.

Лемма 2.2. *Рассмотрим произвольные* $a, b \in \mathbb{R}$, *где* $a > 0$. *Тогда точка* x *принадлежит бифуркационной диаграмме* $\Sigma(a, b, 0)$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность точек* $x_n \in \Sigma(a_n, b_n, \varkappa_n)$ *такая, что* $\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n, \varkappa_n) = (a, b, 0)$.

Как следствие, из областей I-IX случая $\varkappa > 0$ при предельном переходе “выживают” области I-IV, а из четырех кривых, содержащих $\Sigma^{a,b}(\varkappa)$ — все кроме правой параболы (2.6). При таком предельном переходе сохраняются круговая молекула и тип особой точки, если она не вырождается. В таблице 1 показано соответствие обозначений для семейств особых точек в работах [25] и [38]. Отметим, что точка типа y_4, встречающаяся в $\Sigma^{a,b}$ при $b = 0$, соответствует суперсингулярной точке S_0. Точка z_7 тоже присутствует только на орбитах с $b = 0$, т.е. может быть названа суперсингулярной.

$\varkappa = 0$	H	U_1	U_2	U_3	M_1	M_2	e_1	e_2	c_1	c_2	h_1	h_2
$\varkappa > 0$	y_1	y_3	y_7	y_{12}	y_{10}	y_{11}	y_2	y_{13}	y_6	y_9	y_5	y_8

Таблица 1: Соответствие обозначений для семейств особых точек.

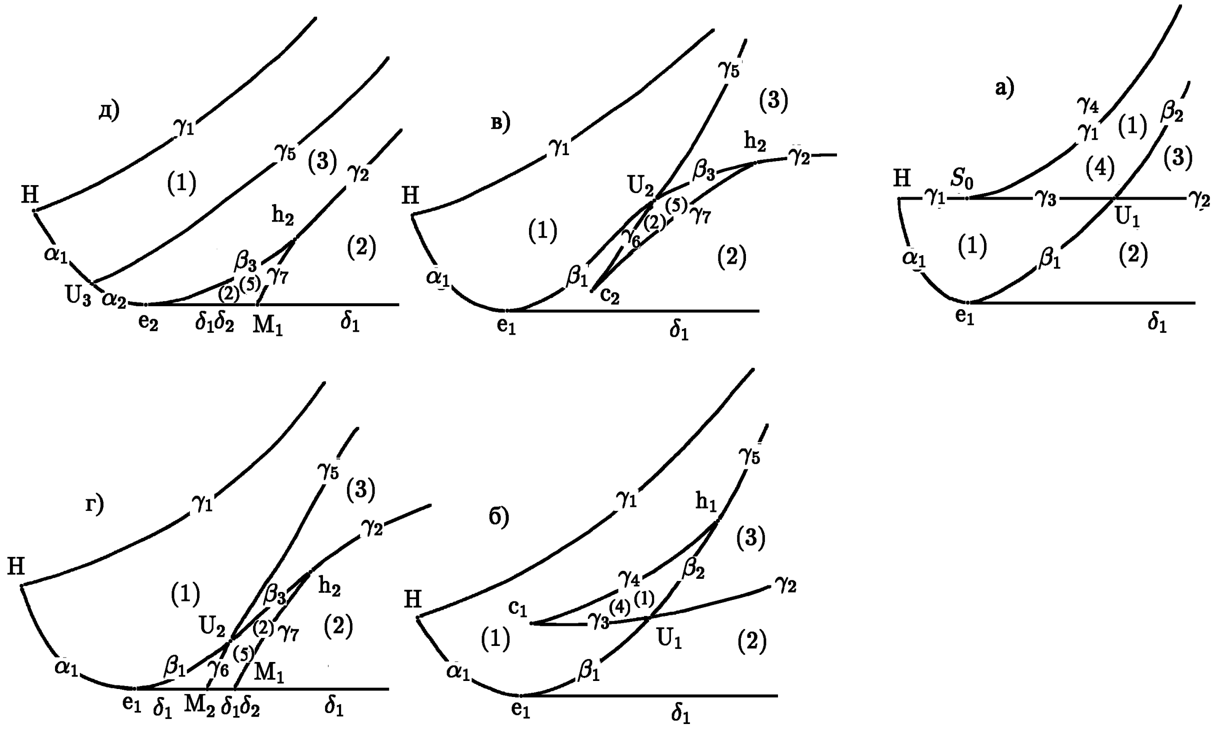


Рис. 4: Бифуркационные диаграммы классического случая Ковалевской

3 Лиувиллев анализ компактного случая Ковалевской

3.1 Формулировки основных теорем

Сформулируем две основные теоремы, содержащие результаты лиувиллева анализа и найденные случаи эквивалентности слоений изучаемой системы и других систем.

Теорема 4. *В системе Ковалевской на алгебре Ли* $so(4)$ *имеется ровно* 27 *классов* $L_1, \ldots, L_{27}$ *лиувиллево неэквивалентных слоений на связных компонентах неособых изоэнергетических поверхностей.*

В таблицах 7 и 8 перечислены инварианты Фоменко–Цишанга всех слоений на неособых $Q^3_{a,b,h}$ при фиксированной ориентации Q^3 и направлении роста интеграла K. Классы лиувиллевой эквивалентности $L_1, \dots, L_{27}$ для связных компонент этих слоений 1-32 *указаны в таблице 12.*

Пунктирная линия в таблицах 7 и 8 означает совпадение меток слева и справа от нее, т.е. симметрию слоения Лиувилля и его меченой молекулы на данных "ярусах", т.е. особых уровнях дополнительного интеграла.

Теорема 5. *Среди слоений $L_1, \dots, L_{27}$ компактного случая Ковалевской следующие слоения лиувиллево эквивалентны слоениям известных интегрируемых систем в некоторых зонах энергии:*

1) слоения $L_1, L_{12}, L_3, L_4, L_{15}, L_{27}, L_{24}, L_{20}, L_{24}, L_{18}$ эквивалентны слоениям A, ..., J классического случая Ковалевской (см. ([25])) соответственно,

2) слоения L_2 и L_{23} эквивалентны слоениям случая Ковалевской–Яхъи в зонах энергии h_2 и h_{10}, h_{23} (см. [22], [24]) соответственно,

3) слоения L_1, L_2, L_9, L_{10} эквивалентны слоениям $1, 2, 6, 7$ *случая Клебша (см. [20]) соответственно,*

4) слоения L_1, L_2, L_4 эквивалентны слоениям A, B, F случая Соколова (см. [21]) соответственно,

5) интегрируемые биллиарды в областях A'_0, A_2, A_1, A_0, ограниченных дугами софокусных квадрик (см. [26]), моделируют слоения Лиувилля L_1, L_2, L_6, L_8 компактного случая Ковалевской.

При проведении лиувиллева анализа мы используем результаты из работ [25] и [38]. В [25] для классического случая Ковалевской были найдены допустимые базисы для дуг бифуркационных диаграмм и вычислен инвариант Фоменко–Цишанга для слоений изоэнергетических поверхностей. В работе [38] для компактного случая Ковалевской были описаны все бифуркационные диаграммы отображения момента.

Таким образом, для нахождения всех меченых молекул компактного случая Ковалевской остается сделать следующее:

1. выразить через λ-циклы, известные из [25], допустимые базисы для дуг $\xi_1, \dots, \xi_5$ (см. таблицу 9) бифуркационных диаграмм, которые не возникали в классическом случае Ковалевской. Это сделано в утверждении 2. На рисунке 1 однозначно определенные λ-циклы для дуг $\alpha_1, \dots, \xi_5$ изображены как элементы целочисленной решетки на плоскости.

2. описать, в каком порядке вдоль оси H могут располагаться особые точки бифуркационных диаграмм в зависимости от параметров — значений функций Казимира. Имеется лишь конечное число вариантов, все они приведены в таблицах 14-19. Интервалу между соседними особыми точками сопоставлен номер молекулы. Отметим, что в таблице 18 для краткости не указано "тривиальное окончание" $6, z_2, 7, z_1$.

Для дуг, сохраняющихся в классическом случае Ковалевской, мы используем те же обозначения $\alpha_1, \dots, \delta_2$ и те же базисы, что и в [25]. Для особых точек мы используем те же обозначения y_i, z_j, что и в [38]. Полученное разбиение областей I-IX из [38] в плоскости значений функций Казимира на подобласти изображено на рисунках 5-6. Дуги, разделяющие подобласти, описаны в утверждении 10.

3.2 Выбор допустимых базисов

3.2.1 Утверждение об особенности типа центр-центр

Можно доказать следующее общее утверждение о допустимых базисах и целочисленных метках ε для особенностей типа центр-центр.

Утверждение 1. *Пусть точка является особой точкой типа центр-центр бифуркационной диаграммы отображения момента (H, F). Обозначим знаки производных функции H в направлении пересекающихся дуг $\gamma_i, i = 1, 2$ как $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2$ соответственно. Тогда допустимые базисы (λ_i, μ_i) для этих дуг могут быть выбраны следующим образом:*

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\\ \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\end{pmatrix}$$

Замечание 8. Метка ε на круговой молекуле в этом случае равна числу ε_1.

Доказательство. 1. Известно, что в окрестности критической точки типа центр-центр можно ввести канонические координаты p_1, p_2, q_1, q_2, в которых форма имеет вид

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2,$$

во всей окрестноси критической точки, а функции H и F одновременно приводятся к виду

$$\begin{cases} H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2),\\ f = f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2). \end{cases}$$

Обозначим $\alpha_1 = p_1^2 + q_1^2$ и $\alpha_2 = p_2^2 + q_2^2$. Т.к. особый слой атома A совпадает с критической окружностью, а слоение в окрестности точки типа центр-центр имеет тип прямого произведения, то $\alpha_1 = 0$ в прообразе точек γ_1, лежащих близко к особой точке. Аналогично, $\alpha_2 = 0$ в прообразе точек γ_2.

Две кривые на плоскости Ohf, содержащие дуги γ_1 и γ_2 бифуркационной диаграммы, пересекаются трансверсально, и дуги $\Sigma^{a,b}$ лежат по одну сторону от точки пересечения. Отсюда следует, что

$$sgn\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} = sgn\frac{\partial H}{\partial \gamma_1} = \varepsilon_1, \quad sgn\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = sgn\frac{\partial H}{\partial \gamma_2} = \varepsilon_2,$$

где частные производные по переменным α_1, α_2 берутся в особой точке $\Sigma^{a,b}$.

2. Каждый тор Лиувилля, лежащий вблизи критической точки типа центр-центр, является прямым произведением двух окружностей φ_1, φ_2 с касательными векторами u_1, u_2.

$$\varphi_1 : \quad \alpha_1 = r_1^2,\, \alpha_2 = 0 \qquad \varphi_2 : \quad \alpha_1 = 0,\, \alpha_2 = r_2^2,$$

$$u_1 = (-q_1, 0, p_1, 0), \quad u_2 = (0, -q_2, 0, p_2).$$

2. Докажем, что пары (λ_i, μ_i) для дуг γ_i имеют следующий вид:

$$(\lambda_1, \mu_1) = \left(\varphi_1, \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\right)\varphi_2\right), \quad (\lambda_2, \mu_2) = \left(\varphi_2, \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\right)\varphi_1\right).$$

Обозначим касательные векторы к циклам μ_1, μ_2 через v_1, v_2:

$$v_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} u_2 \quad v_2 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} u_1.$$

Направление этих циклов задается гамильтоновым векторным полем $\operatorname{sgrad} H$:

$$\operatorname{sgrad} H = \omega^{-1} dH = \left(-2q_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, -2q_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, 2p_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, 2p_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right).$$

Чтобы найти правильное направление λ-циклов, проверим, что следующие четверки векторов $(\operatorname{grad} H, N_i, u_i, v_i)$, $i = 1, 2$ являются положительными относительно формы объема $\omega \wedge \omega$. Здесь вектор N_i — вектор внешней нормали к граничному тору 3-атома, лежащему в прообразе маленького вертикального отрезка, пересекающего дугу $\gamma_i, i = 1, 2$ соответственно.

Несложно проверить, что

$$N_1 = -\operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right) N, \quad N_2 = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right) N,$$

где вектор N ортогонален трем векторам $\operatorname{grad} H, u_i, v_i$:

$$N = \left(-p_1 \alpha_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2},\ p_2 \alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1},\ -q_1 \alpha_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2},\ q_2 \alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right).$$

$\square$

Следствие 1. *Все элементы матрицы склейки в утверждении 1 меняют свои знаки, если требовать противоположную ориентацию четверки* $\operatorname{grad} H, N_i, u_i, v_i$ *в определении допустимой системы координат.*

Следствие 2. *Отметим, такое определение допустимых базисов эквивалентно использованному в работах П.В. Морозова — выбор внешней внешней нормали к 3-атому позволяет требовать положительности четверки векторов $(gradH, N, \lambda, \mu)$ на верхних границах 3-атомов и отрицательности на нижних. таким образом допустимые базисы*

3.2.2 Допустимые базисы для дуг $\Sigma^{a,b}$ для случая $\varkappa > 0$

По аналогии с работой [25] обозначим "новые" дуги бифуркационной диаграммы символами $\xi_1, ..., \xi_5$. В таблице 9 эти дуги заданы своими концами $z_1, ..., z_{11}$. Семейства торов были пронумерованы в [25].

Утверждение 2. *Следующие базисы $(\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i})$ являются допустимыми для дуг $\xi_i,\ i = 1..5$:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \mu_{\xi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_2} \\ \mu_{\xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_2} \\ \lambda_{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_4} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_5} \\ \mu_{\xi_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим орбиту, для которой (a, b) лежит в области V. Особая точка z_4 является точкой типа центр-центр. В обозначениях утверждения 1 знаки производных H в направлении дуг γ_1 и ξ_1 равны $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = 1$ соответственно. Согласно ему, $\lambda_{\xi_1} = p\lambda_{\gamma_1} - \lambda_{\gamma_3}$. Особая точка z_5 является точкой типа центр-седло, поэтому $\lambda_{\xi_1} = \pm\lambda_{\beta_2} = \pm(\lambda_{\gamma_3} - \lambda_{\gamma_1})$. Т.е. $p = 1$, и допустимый базис для ξ_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_1}\\ \mu_{\xi_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\gamma_1}\\ \lambda_{\gamma_3}\end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $b = 0$ получаем допустимый базис для ξ_4 из анализа точки z_7.

2. Особая точка z_2 является вырожденной особой точкой ранга 1, поэтому можно выбрать $\mu_{\xi_2} = \lambda_{\gamma_2}$. Особая точка z_5 является точкой типа центр-седло, поэтому

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_2}\\ \mu_{\xi_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma & 0\\ p & \sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\beta_2}\\ -\lambda_{\gamma_2}\end{pmatrix}.$$

Получили, что $p = 0$ и $\sigma = -1$.

3. Рассмотрим орбиту, для которой (a, b) лежит в области VII. Особая точка z_5 является точкой типа центр-седло, поэтому $\lambda_{\xi_3} = \pm\lambda_{\beta_1}$. Особая точка z_1 является точкой типа центр-центр, $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = -1$ для дуг δ_1 и ξ_3 соответственно. Тогда

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_3}\\ \mu_{\xi_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\delta_1}\\ \lambda_{\beta_1}\end{pmatrix}.$$

4. Особая точка z_{10} является точкой типа центр-седло, поэтому $\lambda_{\xi_5} = \pm\lambda_{\beta_1}$. Особая точка z_8 является образом вырожденной одномерной орбиты, поэтому можно взять $\mu_{\xi_5} = \lambda_{\gamma_3}$.

   Рассмотрим орбиту, для которой (a, b) лежит в области $VIII$. Особая точка z_9 является особой точкой типа центр-центр, $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = -1$ для дуг α_1 и ξ_5 соответственно. Тогда

$$\begin{pmatrix}\lambda_{\xi_5}\\ \mu_{\xi_5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\gamma_3}\\ \lambda_{\beta_1}\end{pmatrix}.$$

Утверждение 2 доказано. □

Инвариант Фоменко–Цишанга для слоения Лиувилля на прообразе любой фиксированной допустимой кривой вычисляется алгоритмически по найденным выражениям для $\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i}$ и соотношениям из [25]. При вычислении меток n для семей в $Q^3_{a,b,h}$ мы ориентировали ребра молекулы единообразно по возрастанию K на прямой $H = \mathrm{const}$. Напомним, что замена ориентации на Q^3 или знака дополнительного интеграла K не меняет класс лиувиллевой эквивалентности.

3.3 Классы слоений на неособых $Q^3_{a,b,h}$

Напомним, что точке (a, b, h) из пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ соответствуют изоэнергетическая поверхность $Q_{a,b,h}$ со структурой слоения. Каждая регулярная орбита $M^4_{a,b}$ задается парой (a, b), где $a > f_l(b) > 0$. Бифуркационная диаграмма $\Sigma^{a,b}$ содержит конечное число особых точек, имеющих на плоскости Ohk абсциссы h_i. Каждому такому h_i соответствует одна или несколько особых точек.

Образ $\mathfrak{F}(Q_{a,b,h})$ лежит на прямой $H = h$ плоскости Ohk. Пересечения этой прямой с $\Sigma^{a,b}$ являются образами бифуркационных слоев. Для неособой $Q^3_{a,b,h}$ они не совпадают с особыми точками $\Sigma^{a,b}$, т.е. лежат на дугах $\Sigma^{a,b}$ и соответствуют атомам графа Фоменко (молекулы без меток). Приписав каждому атому графа название $\alpha_1, \dots, \xi_5$ семейства пересекаемой дуги $\Sigma^{a,b}$, получим граф, который будем называть *графом Фоменко с именованными атомами.*

Утверждение 3. *В компактном случае Ковалевской встречается ровно* 32 *различных графа Фоменко с именованными атомами (таблицы 10-11) слоений на неособых* $Q^3_{a,b,h}$.

Замечание 9. Из данного результата сразу следует теорема 4: инвариант Фоменко–Цишанга однозначно вычисляется по графу Фоменко с именованными атомами и допустимым базисам для дуг $\alpha_1, \dots, \xi_5$.

В таблицах 10-11 также указаны вычисленные по допустимым базисам матрицы склейки на ребрах графов 1-32. Их классы лиувиллевой эквивалентности $L_1, \dots L_{27}$ указаны в таблице 12.

Пусть все особые точки $\Sigma^{a,b}$ принадлежат семействам $y_1, \dots, z_{11}$ и имеют попарно различные абсциссы h_i. Тогда слоение на $M^4_{a,b}$ можно закодировать, записывая по очереди (по возрастанию h) названия семейств особых точек и номера графов Фоменко с именованными атомами, соответствующие интервалам (h_i, h_{i+1}) оси Oh. В качестве примера приведем код для любой точки (a, b) из области VIII:

$$\text{VIII:} \quad y_1,\ 1,\ z_4,\ 13, z_{11},\ 11\,, z_9.$$

Определение 11. Назовем *разделяющим множеством* Θ множество пар (a, b) плоскости Oab, в окрестности которых есть пары (a_i, b_i) с различными кодами или пара (a', b'), которой не соответствует кода.

Кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m, описанные И.К.Козловым в [38], содержатся в Θ, т.к. их точкам соответствуют некоторые перестройки бифуркационных диаграмм. В частности, для точек кривой f_l орбита $M_{a,b}$ сингулярна, а для точек (a, b) остальных кривых диаграмма $\Sigma^{a,b}$ имеет вырожденную особую точку, не принадлежащую семействам $y_1, \dots, z_{11}$. Эти кривые разделяют множество орбит с $b > 0$ на 9 областей I-IX, а луч $b = 0, a > 0$ на три промежутка X-XII.

Остальные дуги Θ состоят из точек (a, b), для которых совпадают значения h гамильтониана H для двух и более особых точек $\Sigma^{a,b}$. Следующее утверждение описывает, как разделяющее множество делит плоскость Oab.

Утверждение 4. *В компактном случае Ковалевской*

1) разделяющее множество Θ*, описанное в утверждении 10 как конечное объединение дуг, изображено на рисунках 5-6 в координатах* (u, v).

2) Θ *разбивает области I-IX плоскости* Oab *на* 61 *подобласть, а промежутки X-XII оси* Oa *разбиваются на 4 интервала и луч. Точкам из одного подмножества соответствуют одинаковые коды, приведенные в таблицах 14-19 для случая* $b \neq 0$ *и в таблице 13 для оси* $b = 0$.

3) номер графа Фоменко с именованными атомами, соответствующего произвольному неособому уровню h *для пары* $(a, b) \in \Theta \backslash f_l$*, входит в код каждой из подобластей, содержащих эту пару* (a, b) *в своей границе.*

Замечание 10. Для краткости в кодах подобластей области II опустим одинаковые символы в конце кода: $\dots, 6, z_2, 7, z_1$.

На рисунках указаны номера всех подобластей и функций f_i, задающих ребра Θ. Вершины Θ, в которых пересекается более двух кривых, пронумерованы от 0 до 9.

Замечание 11. Отметим, что на рисунке 5-6 разделяющее множество изображено в других координатах (u, v). Из леммы 3.2 следует, что образ Θ при сделанной замене $(a, b) \to (u, v)$ удовлетворяет определению 11.

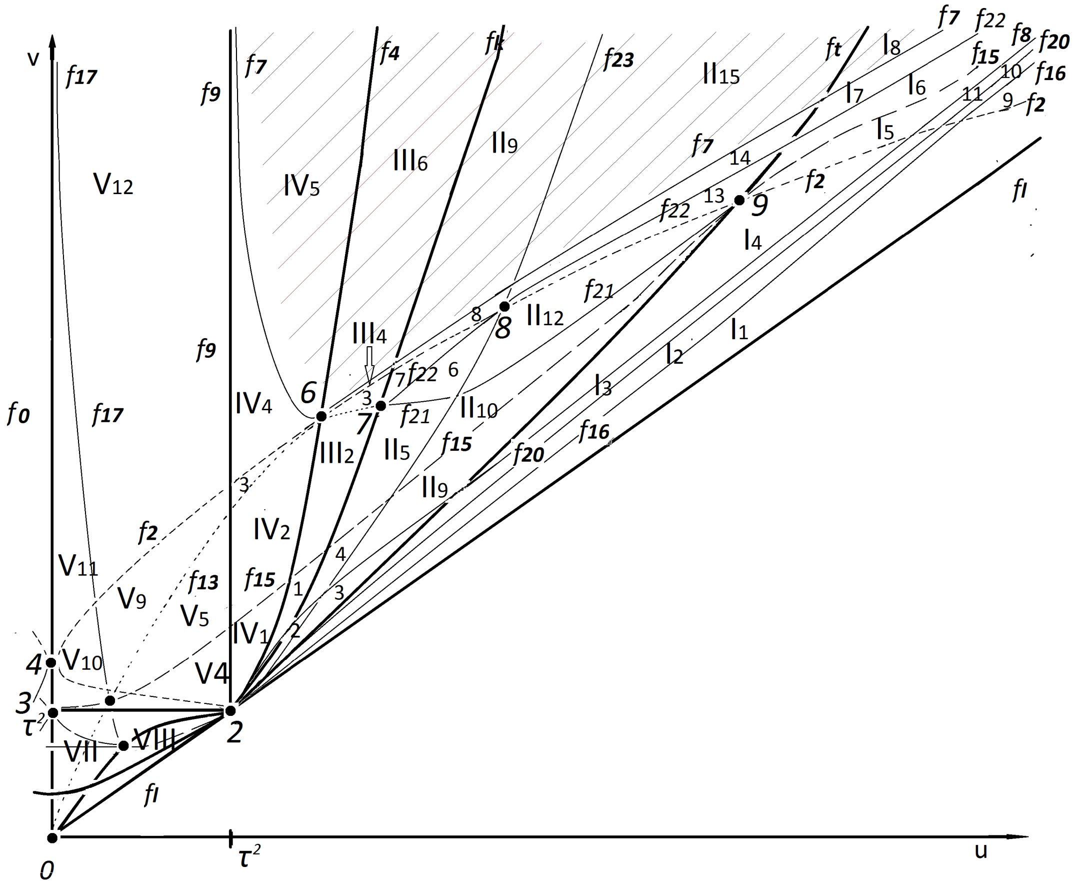


Рис. 5: Разделяющее множество: области I-V

3.4 Стратификация пространства параметров системы

3.4.1 Трехмерные камеры неособых троек (a, b, h)

Опишем, каким тройкам (a, b, h) пространства параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ соответствуют одинаковые графы Фоменко с именованными атомами. Назовем *камерой* связное множество троек (a, b, h) с неособой $Q_{a,b,h}$, а *особым множеством* $\mathbb{A}^2$ — множество троек (a, b, h) с особой $Q_{a,b,h}$.

Заметим, что если особая точка $\Sigma^{a,b}$ принадлежит семействам $y_1, \ldots, \widehat{y_4}, \ldots, \widehat{z_7}, \ldots, z_{11}$, то ее абсцисса h является гладкой функцией от значений функций Казимира. Для нулей параметрической кривой (2.4) это верно, т.к. функции $h(a, b, z)$ и $k(a, b, z)$, определяющие ее, являются полиномами от z и z^{-1}. Для оставшихся точек это следует из леммы 4.1, в которой описаны явные уравнения поверхностей. Отметим, что при $b = 0$ некоторые из поверхностей первой серии могут склеиваться друг с другом непрерывно, но не гладко. Множеству точек склейки соответствуют особые точки типа y_4 и z_7. Из данных

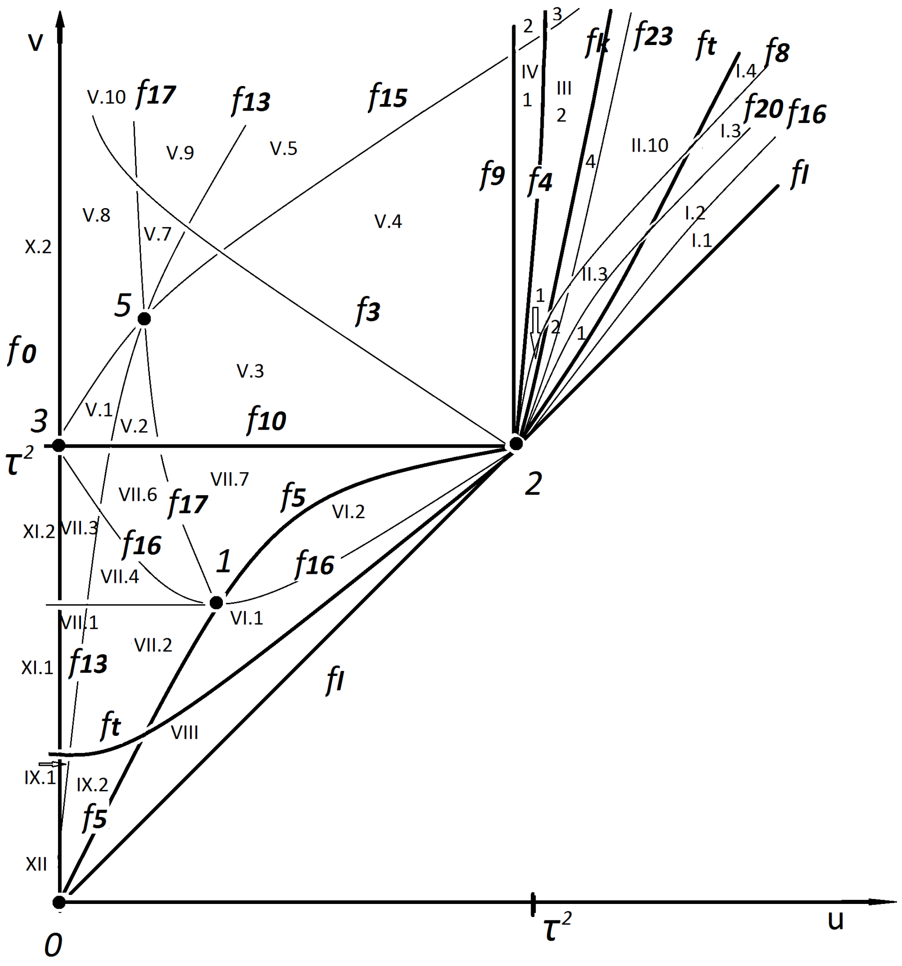


Рис. 6: Увеличенный фрагмент рисунка 5

соображений следует, что объединение границ всех камер совпадает с особым множеством $\mathbb{A}^2$. Отсюда особое множество замкнуто, а все камеры открыты. Сформулируем основное утверждение об устройстве пространства параметров $\mathbb{R}^3(a,b,h)$.

Утверждение 5. *Каждая камера в пространстве параметров $\mathbb{R}^3(a,b,h)$ является открытым диском D^3, всем точкам (a,b,h) которого соответствует одинаковый граф Фоменко с именованными атомами слоения на $Q^3_{a,b,h}$.*

Каждая камера либо симметрична самой себе относительно плоскости $b=0$ и трансверсально пересекает ее, либо не имеет с ней общих точек, расположена строго по одну сторону от нее и симметрична другой камере.

Каждый граф Фоменко с именованными атомами реализуется в одной камере (графы 1-11) или паре камер (графы 12-32), симметричных относительно плоскости $b=0$.

Замечание 12. Множество троек (a,b,h) с пустыми $Q_{a,b,h}$ также гомеоморфно трехмерному диску.

Тем самым, каждой камере в полупространстве $b>0$ можно биективно сопоставить граф Фоменко с именованными атомами. Далее, для каждого из ребер Θ можно перечислить графы Фоменко с именованными атомами, соответствующие неособым тройкам (a,b,h) с парой (a,b), лежащей на данном ребре.

Односвязность камеры следует из односвязности слоя проекции $(a, b, h) \to (a, b)$ камеры на плоскость Oab и односвязности базы. Это проверяется явно по таблицам кодов 14-19 и 13. Пусть некоторый номер графа Фоменко с именованными атомами присутствует в кодах двух соседних по дуге из Θ подобластей и для (a, b) с этой дуги, кроме возможно, ее концов. Согласно пункту 3 утверждения 4, на их объединение проецируется одна камера с данным графом.

3.4.2 Граф соседства трехмерных камер

Назовем *соседними* две камеры, которые граничат друг с другом по двумерному подмножеству. Напомним, что граница каждой камеры лежит в особом множестве $\mathbb{A}^2$.

Максимальное связное подмножество $\mathbb{A}^2$, каждой точке (a, b, h) которого соответствует ровно одна особая точка $\Sigma^{a,b}$ фиксированного семейства $y_1, \ldots, z_{11}$ кроме y_4 и z_{11}, назовем *гранью*. Проекция такой грани на плоскость Oab является инъекцией.

Теперь определим грани, лежащие в плоскостях $a = f_l(b)$ пространства $\mathbb{R}^3(a, b, h)$. Парам $a = f_l(b) > 0$ соответствуют сингулярные двумерные орбиты $M^2_{a,b} \cong S^2$. Для каждой из них множество троек (a, b, h) с непустыми $Q_{a,b,h}$ является точкой или вертикальным отрезком.

Лемма 3.1. *Пусть $\varkappa > 0$ и $a = f_l(b)$, тогда на $M^2_{a,b}$ функции H и K зависимы, неособый слой гомеоморфен одной или двум окружностям S^1 или $2S^1$. Слоение на $M^2_{a,b}$ можно однозначно описать его особыми слоями:*

- *при $0 < b \leq \sqrt{\varkappa^3 c_1^4}$ каждый из двух особых слоев, минимальный и максимальный, является точкой,*
- *при $\sqrt{\varkappa^3 c_1^4} < b$ седловой слой гомеоморфен восьмерке, минимальный является точкой, а максимальный — двумя точками.*

Паре $(0, 0)$ соответствует одноточечная орбита $M_{0,0}$, а при $a = 2\varkappa^2 c_1^2, b = \varkappa^{3/2} c_1^2$ происходит перестройка особых слоев. Здесь *гранями* назовем максимальные связные подмножества троек (a, b, h) с фиксированным числом окружностей в $Q_{a,b,h}$, реализующих неособые слои в M^2. Следующее утверждение доказывается аккуратным рассмотрением проекций граней на плоскость Oab.

Утверждение 6. *Каждая грань является открытым двумерным диском. Пересечение границ двух соседних камер (за исключением пары камер 1 и 2), содержит ровно одну грань. В таблице 23 перечислены все пары соседних камер. Для каждой из них указано семейство особых точек, соответствующее точкам грани.*

Замечание 13. Пара камер 1 и 2 граничит по двум граням, симметричным относительно плоскости $b = 0$. Их точкам соответствует семейство y_6. В плоскости $b = 0$ точкам кривой, являющейся границей этих граней, соответствует особая точка из семейства y_4. При этом типичная особенность типа седло-узел перестроилась в типичную особенность типа “эллиптическая вилка”, см. [25].

Семейство z_7 соответствует точкам кривой в плоскости $b = 0$, лежащей в границе нескольких граней. При $b \to 0$ не происходит перестроек прообразов особых точек типа z_4 и z_6, имеющих тип центр-центр.

Замечание 14. В таблице 23 камеры в паре упорядочены по возрастанию h. Для граней p_{65}, p_{66} (и граней, симметричных им при $b < 0$) указано семейство особых точек $\Sigma^{a,b}$ или количество окружностей, одна или две, составляющих $Q_{a,b,h}$. Знак $\oslash$ обозначает множество всех троек (a, b, h) с пустыми $Q_{a,b,h}$.

3.5 Связь с классическим случаем Ковалевской

Многие динамические системы, возникающие в механике, могут рассматриваться как системы на алгебре Ли $e(3)$. В классическом случае Ковалевской можно без потери общности положить геометрический интеграл f_1 равным 1. Тогда плоскость Obh разбивается несколькими кривыми на области с лиувиллево эквивалентными слоениями $Q^3_{1,b,h}$. На рисунке 7 изображено данное разбиение, т.е. сечение особого множества $\mathbb{A}^2$ классического случая Ковалевской уровнем $a = 1$. Сплошные кривые разделяют области с негомеоморфными $Q^3_{1,b,h}$, а пунктирные линии — области с гомеоморфными $Q^3_{a,b,h}$, но неэквивалентными слоениями Лиувилля. Им соответствуют типы $e_1, e_2, c_1, c_2, h_1, h_2$ особых точек — вырождения классов Аппельрота [25].

В случае $\varkappa = 0$ прообразы особых точек бифуркационных диаграмм $\Sigma^{1,b}$ содержатся в поверхностях $Q^3_{1,b,h}$, соответствующих изображенным кривым. Данные линии имеют 9 общих точек. Семь из них соответствуют вырождению критических точек. В [25] они назывались суперсингулярными и были объединены в классы S_0, S_1, S_2, S_3. Отметим, что при пересечении кривых M и U вырождения не происходит — образы критических точек на Ohk имеют разное значение интеграла K.

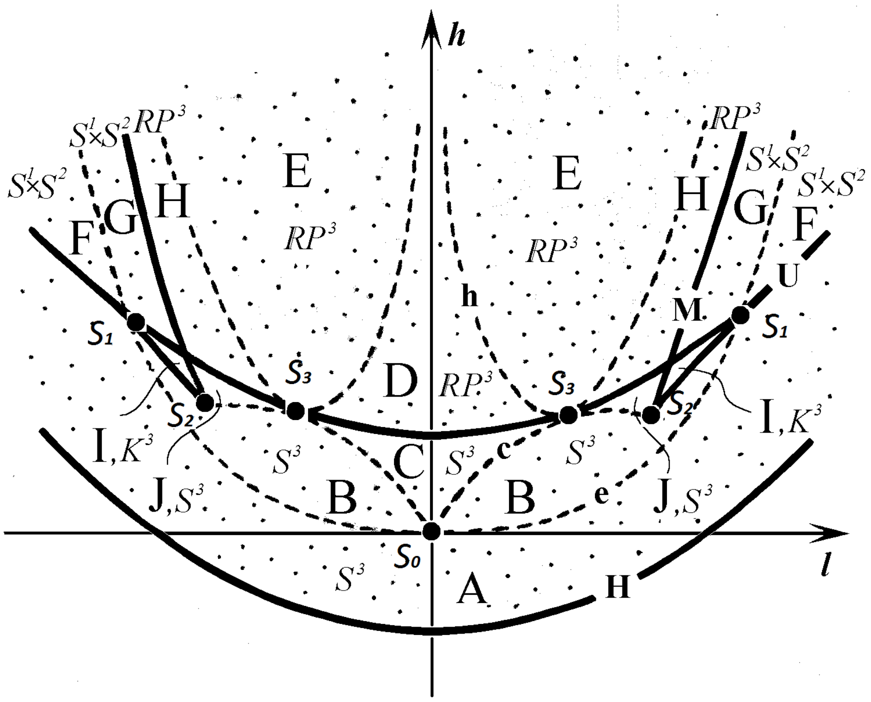


Рис. 7: Проекция $\Sigma_{b,h}$ в случае $\varkappa = 0$

В работе [38] установлено, что при предельном переходе $\varkappa \to +0$ сохраняются типы перестроек для "старых" дуг $\alpha_1, \ldots, \delta_2$ и особых точек $y_1, \ldots, y_{13}$. Тем самым, области I-IV компактного случая Ковалевской соответствуют интервалам, на которые ось Ob разбивается проекциями суперсингулярных точек на рисунке 7. Отметим, что координата b точки пересечения кривых M и U разделяет один из интервалов на два, с разным порядком особых точек y_3 и y_{10} по оси Oh.

По следствию 5 каждое слоение на неособом $Q^3_{a,b,h}$ классического случая Ковалевской лиувиллево эквивалентно одному из слоений компактного случая.

Утверждение 7. *Заштрихованные на рисунке 5 подобласти I.8, II.15, II.9, III.6 и IV.5 компактного случая Ковалевской, лежащие выше кривой* $v = f_7(u) = 2u^{3/2}/(\sqrt{u} - \sqrt{2}\varkappa c_1)$*, соответствуют интервалам классического случая Ковалевской, а именно*

1. *в данных подобластях компактного случая все "старые" (имеющие аналоги в классическом случае Ковалевской) особые точки* $y_i \in \Sigma^{a,b}$ *лежат левее всех "новых" (не имеющих таких аналогов) особых точек* z_i*.*

2. *начало кода (т.е. последовательность до первой точки* z_i *особых точек* y_i *и молекул Фоменко с именованными атомами при возрастании* h*) этих подобластей компактного случая совпадает с кодами интервалов классического случая Ковалевской.*

Отметим, что соседним интервалам оси Ob на рисунке 7, ограниченным значениями b_i общих точек изображенных на нем кривых соответствуют соседние подобласти компактного случая. В силу независимости устройства сечения от выбора $a > 0$ для случая $\varkappa = 0$, можно говорить о "вложении" классического случая Ковалевской при ненулевой постоянной площадей в компактный случай Ковалевской.

3.6 Устройство разделяющего множества

3.6.1 Поверхности в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ и особые точки $\Sigma^{a,b}$

Абсциссы h особых точек $\Sigma^{a,b}$ кроме нулей параметрической кривой (2.4) удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $h = h_i(a, b)$ или $h = h(a, b, z_i(a, b))$. Все особые точки из одного семейства $y_1, \dots, \widehat{y_4}, \dots, \widehat{z_7}, \dots, z_{11}$ удовлетворяют ровно одному из этих уравнений.

Графиками этих функций от (a, b) являются двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$, обозначим их int, l и $\pm r, \pm l, lt, rt, cusp$. Будем называть их и соответствующие им особые точки $\Sigma^{a,b}$ *поверхностями* и *особыми точками первой серии*. В таблице 2 указано соответствие поверхностей и семейств особых точек.

В зависимости от (a, b) точке (a, b, h) такой поверхности может соответствовать одна или несколько особых точек, или $\Sigma^{a,b}$ может не содержать особых точек с такой абсциссой h.

Тройкам (a, b, h) из поверхностей $\pm r, \pm l$ соответствуют точки пересечения параметрической кривой (2.4) с левой и правой параболами, тройкам из lt, rt — касания этих кривых. Тройки из поверхности $cusp, int$ и l соответствуют точке возврата кривой (2.4), точке пересечения парабол и вершине левой параболы.

Нулям параметрической кривой (2.4), в том числе особым точки из семейств y_{10}, y_{11} и z_1, соответствует поверхность $root$, заданная неявно: $k(a, b, z) = 0$. Она не является однозначной над областями I и II. Эти семейства и поверхность будем относить ко *второй серии.*

$-l$	$+l$	$-r$	$+r$	lt	rt	$cusp$	l	int
y_1	$y_3, y_7, y_{12} z_9, z_{10}$	z_4	z_3, z_6, z_{11}	y_5, y_8	z_2, z_8	y_6, y_9	y_2, y_{13}	z_5

Таблица 2: Семейства особых точек $\Sigma^{a,b}$ и поверхности первой серии

Для удобства дальнейших вычислений перепараметризуем множество орбит $D = \{(a, b) | a \geq f_l \geq 0\}$ значениями (u, v) новых функций Казимира, которые выражаются через f_1, f_2 как решения уравнения $f^2 - 2f_1 f + 4f_2^2 = 0$.

$$\begin{cases} u = a - \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} \\ v = a + \sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} a = (u+v)/2 \\ b^2 = uv/(4\varkappa) \end{cases} \tag{3.1}$$

Следующая лемма о порождаемом при этом отображении $\rho : (a,b) \to (u,v)$ в плоскости Oab доказывается явным вычислением. При этом образом лучей $b = 0, a \geq 0$ и $a = f_l(b) \geq 0, b \geq 0$ являются лучи $u = 0, v \geq 0$ и $v = u, u \geq 0$. Далее сохраним для $\rho(D)$ обозначение D.

Лемма 3.2. *Пусть $\varkappa > 0$, тогда замена (3.1) регулярна в $\operatorname{Int} D$ и является гомеоморфизмом множеств D и $\{(u,v) | \, v \geq u \geq 0\}$.*

Функции $h_i(a,b)$ и $z_i(a,b)$ для поверхностей первой серии были найдены в работе [38]. В лемме 4.1 они будут записаны как функции от (u,v).

3.6.2 Равенство абсцисс особых точек первой серии

Укажем орбиты, для которых равны значения функций h_i первой серии, т.е. совпадают абсциссы h_i особых точек из семейств первой серии или происходит перестройка особых точек.

В утверждении 8 попарно приравняем их функции $h_i(a,b)$ и $h(a,b,z_i(a,b))$ и решим возникающие уравнения. Иными словами, поверхности первой серии будут в $\mathbb{R}^3(a,b,h)$ пересекаться или касаться над кривыми на плоскости орбит, перечисленными в таблицах 21 и 22.

Утверждение 8. *Пусть $\varkappa > 0$, тогда поверхности первой серии пересекаются в точности для пар (u,v), лежащих на разделяющих кривых $f_0, \ldots, f_{19}$.*

В таблицах 21 и 22 для них указаны явные формулы вида $y = y(x)$ и значения x_1, x_2 аргумента x, при которых f_i лежит в D.

Замечание 15. В таблицах 21 и 22

1. в указанных интервалах $x \in (x_1, x_2)$ функция f_i определена, и точка с координатами x и $f_i(x)$ лежит в D, т.е. ей соответствует непустая орбита.

2. семейства в паре упорядочены по возрастанию абсцисс h их особых точек при $f_i(x) + \varepsilon > y > f_i(x)$, т.е. там $h_1 \leq h_2$. Паре сопоставлен нижний индекс 0, если на кривой достигается минимум $h_2 - h_1$, и 1, если знак этой разности изменяется при переходе через кривую.

3. кривые f_l и f_t являются графиками функций f_1 и f_{14}, а кривые f_r, f_m — объединением графиков функций f_4 и f_5, f_9 и f_{10} соответственно.

Утверждение 8 доказано в пункте 4.2.

Следствие 3. *Пусть $\varkappa > 0$, тогда луч $a > 0, b = 0$ содержит ровно 4 точки, для которых имеются пересечение поверхностей первой серии:*

$$\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} : l, +r, z_1, \qquad \frac{\varkappa^2 c_1^2}{2} : l, rt, \qquad \varkappa^2 c_1^2 : +l, int, rt, \qquad 4\varkappa^2 c_1^2 : +l, -r$$

3.6.3 Равенство абсцисс особых точек из разных серий

Теперь опишем разделяющие кривые, для точек (u, v) которых нуль параметрической кривой имеет абсциссу h, удовлетворяющую одному из уравнений первой серии $h = h_i(u, v)$ или $h = h(u, v, z_i(u, v))$. Отметим, что этим нулем не является точка z_1 — самая правая особая точка $\Sigma^{a,b}$, если содержится в ней.

Первой такой кривой является f_k, на которой точка возврата с параметром z_{cusp} является нулем кривой (2.4), т.е. $k(f_k(b), b, z_{cusp}(f_k(b), b)) = 0$. Оставшиеся четыре кривые $f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ описаны в утверждении 9. Рассмотрим замены координат $q = q(u, v), s = s(v)$ и $\widetilde{q} = q(v, u), \widetilde{s} = s(u)$.

$$\begin{cases} q(u,v) = \dfrac{\sqrt{u}}{v} \\ s(v) = 1/v \end{cases}, \qquad \begin{cases} u = \dfrac{q^2}{s^2} \\ v = 1/s \end{cases} \tag{3.2}$$

Лемма 3.3. *Пусть* $\varkappa > 0$, *тогда замена* (3.2) *задает гомеоморфизм множеств* $E = \{(u, v) | v \geq u \geq \tau^2\}$ *и* $\{(q, s) \,|\, q/\tau \geq s \geq q^2, 0 < q \leq 1/\tau\}$ *и регулярна в* $\operatorname{Int} E$.

В координатах (q, s) разделяющие кривые f_l, f_t, f_r и f_m являются графиками функций одной переменной, как и в исходных координатах (a, b). Эти функции указаны в таблице 20. Для кривой f_k верен аналогичный факт, который будет доказан в разделе 4.3.

Лемма 3.4. *Пусть* $\varkappa > 0$, *тогда в координатах* (3.2) *дуга кривой* f_k, *лежащая в области* E *является графиком явной функции* $s = f_{24}(q)$

$$f_{24}(q) = -\frac{1}{\tau^2}(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) + \frac{2}{\tau^2}\left(1 - \tau^{2/3}q^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Далее будем обозначать листы поверхности $root$, соответствующие нулям y_{11} и y_{10} как $rootl$ и $rootr$ соответственно. Эти поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ склеиваются в точках (a, b, h) при $h = h(a, b, z_{cusp}(a, b)), a = f_k(b)$. Заметим, что проводить все попарные проверки поверхностей первой серии и $rootl$, $rootr$ на совпадение значений h не требуется.

Лемма 3.5. *При* $\varkappa > 0$ *достаточно проверить следующие пары поверхностей из разных серий:*

- *область I:* $(rootr, -r)$, $(rootr, +r)$,
- *область II:* $(rootr, -r)$, $(rootr, +r)$, $(rootr, +l)$ *и* $(rootl, -r)$.

Действительно, как было установлено в [38], $h'_z < 0$ при $0 < z < \sqrt[3]{b^2c_1^2} = z_{cusp}$ и $h'_z > 0$ при остальных $z \neq 0$. Отсюда $h(z_1) > h(rt) > h(lt) > h(rootr)$ и $h(+l) > h(rootl)$. Т.к. $h(-l) < h_l < h(rootl)$ в области II и $h_l < h(rootr)$ в областях I, II, то положение оставшихся точек относительно $rootr$ и $rootl$ известно. Отсюда следует утверждение леммы 3.5.

Найдем уравнения разделяющих кривых $f_{20}, ..., f_{23}$, на которых достигаются равенства значений гамильтониана в точках $\pm r$ или $\pm l$ и $rootl, rootr$.

Утверждение 9. *Пусть* $\varkappa > 0$, *тогда*

1) равенства $h(rootr) = h(+r)$, $h(rootl) = h(-r)$ и $h(rootr) = h(-r)$ в координатах $(q, s) = (v^{-1}\sqrt{u}, v^{-1})$ достигается на графиках следующих функций $s = f_i(q)$ в плоскости Oqs, где $i \in \{20, 21, 22\}$ соответственно:

$$f_i: \quad s(q) = \frac{-(1+2\sigma_i\tau q) + \sqrt{(1+2\sigma_i\tau q)^2 - 2\tau^2\left(2q^2 - 8\dfrac{q^2}{w_i(q)} + 128\tau^2\dfrac{q^4}{w_i^4(q)}\right)}}{\tau^2}, \quad (3.3)$$

2) равенство $h(rootr) = h(+l)$ достигается на кривой, которая в координатах $(\widetilde{q}, \widetilde{s}) = (u^{-1}\sqrt{v}, u^{-1})$ $\widetilde{s} = f_{23}(\widetilde{q})$ является графиком функции $\widetilde{s} = f_{20}(\widetilde{q})$.

Здесь $\sigma_{20} = -1, \sigma_{21} = \sigma_{22} = +1$. В выражении w_i знаки “+” и “−” перед корнем определяются выбором правого или левого корня rootr и rootl соответственно, а знаки “+” и “−” под корнем равны $-\sigma_i$ и зависят от выбора $+r$ или $-r$:

$$w_{20} = \left(1 + \sqrt{1 - 8\sigma_{20}\tau\sqrt{u}/v}\right), w_{21,22} = \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\sigma_{21}\tau\sqrt{u}/v}\right).$$

Замечание 16. При $1 - 8\tau q < 0$, выражения w_{21}, w_{22} не определены. Значение $q = 1/(8\tau)$ соответствует общей точке $(u_0, f_{13}(u_0))$ кривых f_{21}, f_{22}, f_{13} и f_k.

Благодаря явному заданию кривых можно утверждать, что на рисунки 5 и 6 попали все ветви этих кривых, содержащиеся в Θ.

3.6.4 Дуги кривых, входящие в разделяющее множество

На следующем шаге для каждой из функций f_i укажем подмножество промежутка (x_1, x_2), на котором точка графика f_i содержится в Θ. Отметим, что общая тройка (a, b, h) двух поверхностей содержится в $\mathbb{A}^2$, т.е. пара $(a, b) \in \Theta$, в точности если $\Sigma^{a,b}$ содержит две особые точки с равными значениями h или осуществляется одна из перестроек бифуркационных диаграмм, происходящих при пересечении кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m или $b = 0$.

Проверим, на каких дугах кривых f_i лежат тройки, которым соответствуют две особые точки $\Sigma^{a,b}$ с равными абсциссами. Функция f_i была записана в таблицу 22, если ее график содержит конечное или нулевое число точек из Θ, или в таблицу 21, если целая дуга графика f_i содержится в Θ. Следующее утверждение доказано в пункте 4.5.

Утверждение 10. *В компактном случае Ковалевской разделяющее множество Θ состоит из следующих дуг кривых f_i:*

1. *f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{14}, f_{15}, f_{16} — с указанными в таблице 21 областями определения в координатах (u, v), заданных формулой (3.1),*
2. *$v = f_{18}(u)$ — при $u \in (0, \tau^2/4)$,*
3. *$v = f_{13}(u)$ — при $u \in (0, u_0)$. Здесь $u_0 = \dfrac{(5+3\sqrt{3})^2}{16}\tau^2$,*
4. *$v = f_{17}(u)$ — при $u \in (0, \tau^2/4)$,*
5. *$a = f_k(b)$ — при $b \geq 0$.*
6. *Кривые $f_6, f_{11}, f_{12}, a = f_{19}(b)$ не добавляют новых дуг и точек в Θ.*

7. *Описанные в утверждении 9 кривые f_{20}, f_{22}, f_{23} входят в Θ целиком, кривая f_{21} — до пересечения с f_t.*

Замечание 17. Точка $(u_0, f_{13}(u_0))$ лежит на кривых f_{13}, где $h_{cusp} = h_{-r}$, и на кривой f_k, общей для поверхностей *rootr*, *rootl* и *cusp*.

Таким образом, на рисунках 5 и 6 указаны все дуги разделяющих кривых, входящих в Θ. В частности, отсутствуют иные ветви кривых $f_{20}, \ldots, f_{23}$.

3.6.5 Точки пересечения разделяющих кривых

Остается удостовериться, что на эти рисунки попали все точки пересечения этих дуг. В утверждении 11 докажем, что все точки пересечения дуг Θ, лежащие в достаточно малой окрестности вершины 2, уже указаны на рисунке 6 (т.е. при рассмотрении такой окрестности “под микроскопом” не обнаружатся новые вершины графа Θ).

Утверждение 11. *Все пересечения кривых из Θ вблизи точки (τ^2, τ^2) указаны на рисунке 6. А именно, кривые f_r, f_{16} не имеют там точек пересечения с другими кривыми, кривая f_8 пересекает кривые f_k, f_{23}, f_t, кривая f_{20} пересекает кривую f_t.*

Теперь опишем поведение кривых Θ на большом удалении от нуля в плоскости Ouv. В утверждении 12 докажем, что дуги Θ не пересекаются при достаточно больших (u, v), т.е. все вершины Θ попали на рисунок 5.

Утверждение 12. *Кривые Θ пересекают окружность достаточно большого радиуса с центром в начале координат в следующем порядке. Окружность обходится против часовой стрелки.*

$$f_1 = f_l, f_2, f_{16}, f_{20}, f_8, f_{15}, f_{22}, f_7, f_{14} = f_t, f_{23}, f_{24} = f_k, f_4 = f_r, f_7, f_9 = f_m, f_{17}, f_0.$$

Следствие 4. *Разделяющее множество имеет структуру графа с 75 вершинами и 199 ребрами, симметричного относительно прямой $b = 0$. Все вершины и ребра Θ изображены на рисунках 5-6.*

4 Доказательства

4.1 Доказательство лемм

4.1.1 Явные формулы для поверхностей первой серии

Лемма 4.1. *Пусть $\varkappa > 0$, тогда в области $\hat{D} = \{(a, b) \,|\, a > 2\sqrt{\varkappa} b > 0\}$ абсциссы особых точек первой серии в координатах (u, v), заданных формулой (3.1), имеют следующий вид, где $\tau = \sqrt{2\varkappa c_1}$:*

$$h_{\pm l} = \frac{u \pm 2\tau\sqrt{v}}{2\varkappa}, \qquad h_{\pm r} = \frac{v \pm 2\tau\sqrt{u}}{2\varkappa}, \qquad h_{lt} = \frac{v}{u}\varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}, \qquad h_{rt} = \frac{u}{v}\varkappa c_1^2 + \frac{v}{\varkappa}, \quad (4.1)$$

$$h_{cusp} = 3(uv)^{1/3}\left(\frac{c_1^2}{4\varkappa}\right)^{1/3}, \qquad h_l = \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}, \qquad h_{int} = \varkappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\varkappa}. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Несложно посчитать, что

$$z_{\pm l} = \pm\sqrt{\frac{v}{2}}c_1, \quad z_{lt} = \frac{u}{2\varkappa}, \qquad z_{\pm r} = \pm\sqrt{\frac{u}{2}}c_1, \quad z_{rt} = \frac{v}{2\varkappa}, \quad z_{cusp} = \left(\frac{uv}{4}\frac{c_1^2}{\varkappa}\right)^{1/3}.$$

Для поверхностей класса $h = h(a, b, z_i(a, b))$ данные выражения были получены подстановкой $z_i(u, v)$ в формулу

$$h(z) = \frac{b(u,v)^2 c_1^2}{z^2} + 2z.$$

Лемма 4.1 доказана. □

4.1.2 Доказательство леммы 3.1 о сингулярных орбитах

1. При $\varkappa > 0$ из $f_1 = f_l(f_2)$ следует, что $x_i = \sqrt{\varkappa}J_i$, т.е. объединение сингулярных орбит изоморфно $\mathbb{R}^3(\mathbf{J})$ со структурой алгебры Ли $so(3)$. Функцией Казимира является $f = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = b\varkappa^{-1/2}$. Интегралы H, K и f зависимы:

$$K = ((J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 - J_2^2)^2 + 4J_2^2(J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 = ((J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 + J_2^2)^2.$$

$$H = 2(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - J_1^2 - J_2^2 + 2c_1x_1 = 2b\varkappa^{-1/2} - ((J_1 - \sqrt{\varkappa}c_1)^2 + \varkappa c_1^2 + J_2^2).$$

Тем самым, $H = -\sqrt{K} + \varkappa c_1^2 + 2b\varkappa^{-1/2}$. Образ отображения момента (H, K) одномерен и лежит на параболе $k = (h - a\varkappa^{-1} - \varkappa c_1^2)^2$.

2. Интеграл $H(J_1, J_2)$ расслаивает $\mathbb{R}^3(\mathbf{J})$ на соосные круговые цилиндры и особую прямую $J_1 = \sqrt{\varkappa}c_1, J_2 = 0$. Значение $b_0 = \sqrt{\varkappa^3 c_1^4}$ соответствует касанию оси цилиндров и орбиты $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = b\varkappa^{-1/2}$.

   Рассмотрим множество троек $(f_l(b), b, h)$, для которых $Q_{f_l(b),b,h}$ не диффеоморфно S^1 или $2S^1$. Для каждой сингулярной орбиты $M^2_{a,b}$ таковыми являются две точки $p_1^\pm$ касания цилиндров и сферы, а при $b_0 < b$ также две точки $p_2^\pm$ пересечения оси цилиндров и сферы. Нетрудно найти их координаты:

$$p_1^\pm: \quad \left(\pm\varkappa^{-1/4}\sqrt{b}, 0, 0\right), \qquad p_2^\pm: \quad \left(\sqrt{\varkappa}c_1, 0, \pm\sqrt{b\varkappa^{-1/2} - \varkappa c_1^2}\right).$$

   При $0 < b \le b_0$ минимум и максимум H достигаются в точках p_1^- и p_1^+ соответственно. При $b_0 < b$ слой, содержащий точку p_1^+, диффеоморфен окружности, а максимум H достигается в точках $p_2^\pm$. При этом $K(p_1^\pm) > 0$ и $K(p_2^\pm) = 0$.

3. Из леммы 4.1 при $a = f_l(b)$ имеем равенства $z_{-r} = z_{-l}$, $z_{+l} = z_{+r}$, $z_{lt} = z_{rt}$. Явно проверено, что $H(p_1^-) = h_{-l}, H(p_1^+) = h_{+l}$ и $H(p_2^\pm) = h_l = h_{rt}$. Равенство $H(p_2^\pm) = h(z_1)$ по непрерывности следует из расположения z_1 между вершинами парабол (2.5) и (2.6). Этих данных достаточно, чтобы описать $\mathbb{A}^2$ в окрестности плоскостей $a = f_l(b)$.

Лемма 3.1 доказана.

4.2 Доказательство утверждения 8

Достаточно сравнить значения функций $h_i(a,b)$ и $h(a,b,z_i(a,b))$ из леммы 4.1 для 36 пар поверхностей.

1. Сравнение значений h поверхностей $\pm l, \pm r, lt, rt$ не представляет сложностей. Для сравнения h_{cusp} и значения h для поверхностей $\pm l, \pm r$ сделаем замену $w = w(u,v) > 0$ и получим кубический многочлен с кратным корнем. Например, для $-l$ замена и многочлен имеют вид $w = u^{1/3}v^{-1/6}\tau^{-1/3}$ и $(w-2)(w+1)^2$ соответственно. Для пар $(lt, cusp)$ и $(rt, cusp)$ используется похожая замена $w = u^{-2/3}v^{1/3}\tau^{2/3}$.

   Значения функций h_{+l} и h_{cusp}, h_{+r} и h_{cusp} равны на кривых $v = u^2/\tau^2, u > \tau^2$ и $u = v^2/\tau^2, 0 < v < \tau$ соответственно. Две эти кривые являются образом кривой f_r в координатах (u,v).

2. Функции h_l и h_{+l} равны на кривой $a = f_t(b(t),t), b = b(t)$. Приняв за $t = \sqrt{u/(2\varkappa)}$, и подставив $a = a(u,v), b = b(u,v)$, получим уравнение кривой f_{14}. Отметим, что при $u \in (0, \tau^2)$ совпадают точки трех поверхностей: $+l$, l и z_1. При $v < f_{14}(u), 0 \leq u < \tau^2$ точкам поверхностей l и z_1 не соответствует особых точек $\Sigma^{u,v}$.

   Сравнение значений h_l и h_{int} друг с другом или с одной из функций h_{-l}, $h_{\pm r}$, h_{lt}, h_{rt} не представляет сложностей. Отметим, что образ кривой f_m в координатах (u,v) является объединением отрезка $v = \tau^2, 0 \leq u \leq \tau^2$ и луча $u = \tau^2, v \geq \tau^2$, на которых равны значения пар функций h_{int} и h_{rt}, h_{int} и h_{lt} соответственно.

3. Кривая $v = f_{17}(u)$, в точках которой равны h_l и h_{cusp}, и луч $v = u, u > 0$ не имеют общих точек кроме точки (τ^2, τ^2), поскольку значение функции $uf_{17}(u) - u^2 > 0$ положительно в точках ее экстремумов $u = \tau^2$ и $u = \tau^2/4$ и в точке $u = 0$.

4. Пару *cusp* и *int* рассмотрим в координатах (a,b). Полученная кривая $a = f_{19}(b)$ не войдет в Θ, т.к. она лежит ниже прямой $a = f_l(b)$ при $b > 0, b \neq \varkappa^{3/2}c_1^2$:

   $$f_{19}(b) = 3b^{2/3}\varkappa c_1^{2/3} - \varkappa^2 c_1^2 < 2\sqrt{\varkappa}b = f_l(b), \quad \text{т.к.} \quad 0 < (b^{1/3} + 1/2\varkappa^{1/2}c_1^{2/3})(b^{1/3} - \varkappa^{1/2}c_1^{2/3})^2.$$

   Т.к. при $b > 0$ полученный многочлен от $b^{1/3}$ неотрицателен, и равен нулю только при $b = \varkappa^{3/2}c_1^2$, то единственной точкой кривой f_{19} в Θ является вершина 2.

Утверждение 8 доказано.

4.3 Уравнения кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m в координатах (q,s)

1. Подставив выражения $u(s,q)$ и $v(s)$ в уравнения кривых f_1, f_4, f_9, f_{14} из таблицы 21, легко получить уравнения из таблицы 20 для кривых f_l, f_t, f_r и f_m.

2. Проделав то же самое с уравнением кривой f_k в координатах (u,v), получим квадратное уравнение относительно s.

$$\frac{u+v}{2} = \frac{3(uv)^{2/3}}{4^{5/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\varkappa c_1^{2/3}(uv)^{1/3}}{2(4\varkappa)^{1/3}} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2 \tag{4.3}$$

$$\frac{\tau^2}{2}s^2 + s\left(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}\right) + 2q^2 - \frac{3q^{4/3}}{2\tau^{2/3}} = 0.$$

$$f_k: \quad s = f_k^{\pm}(q) = \frac{1 - 3x(q) \pm 2x^{\frac{3}{2}}(q)}{\tau^2}, \quad \text{где } x(q) = 1 - q^{2/3}\tau^{2/3}.$$

3. Выбор знака перед радикалом, т.е. нужной ветви f_k^- или f_k^+, определяется попаданием данной ветви в E, т.е. условием $f_m(q) \le f_k(q) \le f_l(q)$ на промежутке $q \in (0, 1]$.

Найдя корни уравнений $f_k^{\pm}(q) = f_l(q)$ и $f_k^{\pm}(q) = f_m(q)$ с учетом их кратностей, легко увидеть, что $f_k^-(q) \ge f_m(q) \ge f_k^+(q) \ge f_l(q)$ при $0 < q \le \tau^{-1}$. Значит, $f_k = f_k^+$.

Лемма 3.4 доказана.

4.4 Доказательство утверждения 9

Подробно обоснуем формулы для кривой f_{20}, разделяющей точки $+r$ и $rootr$. Небольшие отличия для остальных случаев будут указаны в пункте 3.

1. Приравняем $h(z) = h(z_{\delta r})$, тогда $z_{\delta r}$ и один из нулей параметрической кривой z_{rootr}, z_{rootl} сопряжены как корни этого уравнения

$$\frac{uvc_1^2}{4\varkappa z^2} + 2z = \frac{v + 2\delta\tau\sqrt{u}}{2\varkappa}.$$

Разделим многочлен на двучлен $z - z_{\delta r} = \left(z - \delta c_1\sqrt{u/2}\right)$ и вычислим корни квадратного трехчлена:

$$8\varkappa z^3 - z^2(2v + 4\sqrt{2}\delta\varkappa c_1\sqrt{u}) + uvc_1^2 = \left(z - \delta c_1\sqrt{u/2}\right)(8\varkappa z^2 - 2vz - \sqrt{2}\delta c_1\sqrt{u}v),$$

$$z_{root} = \frac{v}{8\varkappa}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8\delta\tau\sqrt{u}/v}\right) = \frac{v}{8\varkappa}w_{x,+r}(u, v).$$

В выражении $w_{x,y}(u, v)$ индексы $x \in \{rootl, rootr\}$ и $y \in \{+l, -r, +r\}$ указывают, абсциссы какой пары особых точек $\Sigma^{a,b}$ были приравнены. Правило выбора знака в выражении $w(u, v)$ с индексами x, y опишем в пункте 3. Получили, что $w(u, v)$ является функцией одной переменной $q = \sqrt{u}/v$ в случае $y = \pm r$ или одной переменной $\sqrt{v}/u$ в случае $y = +l$.

2. Подставим найденные z_{root} в уравнение $k(z) = 0$ и разделим на v^2:

$$k(z) = \left(2(u + v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\varkappa z} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\varkappa)^2z^4}\right) - 2\varkappa c_1^2 h(z) + \varkappa^2c_1^4 = 0,$$

$$2c_1^2\frac{u}{v^2} + 2c_1^2\frac{1}{v} - \frac{8uc_1^2}{v^2w(q)} + \frac{u^2c_1^4 8^4\varkappa^4}{(4\varkappa)^2v^4w^4(q)} - 2\varkappa c_1^2\frac{1}{2\varkappa v} - 2\sqrt{2}\delta\varkappa c_1^3\frac{\sqrt{u}}{v^2} + \frac{\varkappa^2c_1^4}{v^2} = 0.$$

Перепишем уравнение в координатах (q, s):

$$\varkappa^2c_1^2s^2 + (1 - 2\delta\tau q)s + 2q^2 - 8\frac{q^2}{w(q)} + 128\tau^2\frac{q^4}{w^4(q)} = 0$$

$$s = \frac{-(1 - 2\delta\tau q) \pm \sqrt{(1 - 2\delta\tau q)^2 - 2\tau^2\left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_{x,+r}(q)} + 128\tau^2\frac{q^4}{w_{x,+r}^4(q)}\right)}}{\tau^2}$$

Здесь $w = w_{x,+r} = \left(1 \pm \sqrt{1+8\delta\tau q}\right)$. Получена явная формула кривой $s(q)$, содержащей те и только те точки (q,s) для которых абсцисса корня совпадает с абсциссой z_{+r}.

3. Опишем выбор знаков для $s(q)$, $w_{x,y}(q)$ и σ_i. Достаточно описать пары $(x,y) \in \{(rootr,+r),(rootl,-r),(rootr-r)\}$, т.к. для пары $(rootr,+r)$ вычисления проходятся аналогично случаю $(rootr,+r)$, в координатах $(\widetilde{q},\widetilde{s}) = (q(v,u),s(u))$.

Из пункта 1 видно, что знак $\delta_i = \operatorname{sgn} z_{\pm r}$, т.е. $\sigma_i = -\delta_i, w_i(q) = 1 \pm \sqrt{1-8\sigma_i\tau q}$. Т.е. под радикалом функции $w_{x,y}(q)$ выбирают знак "плюс" для точки $+r$ и "минус" для $-r$.

Знак перед радикалом в $w_{x,-r}(q)$ определяет выбор корня — знак "плюс" для $rootr$ и знак "минус" для $rootl$. Отметим, что $h(+r) > h(rootl)$, поэтому этой паре не соответствует дуг Θ.

Знак перед внешним радикалом в итоговой функции $s(q)$ определяется двумя требованиями: неотрицательностью подкоренного выражения и принадлежностью кривой области E. Таким образом, перед внешним корнем надо выбрать знак "плюс" для всех трех кривых f_{20}, f_{21}, f_{22}.

Получили указанные в утверждении выражения для σ_i, $w_i(q)$ и $f_i(q)$, $i \in \{20,21,22\}$. Утверждение 9 доказано.

4.5 Доказательство утверждения 10

Кривые $f_i, i \in \{1,4,5,9,10,14\}$ с указанными в таблице 21 областями определения являются образами кривых $f_l, f_t,\ f_r, f_m$ при замене $(a,b) \to (u,v)$, и потому входят в Θ.

Остальные кривые f_i соответствуют парам пересекающихся поверхностей. Проекция кривой их пересечения или касания на Oab имеет конечное число общих точек с границами областей I-IX. Для каждой кривой назовем подходящими те области, где обе особые точки входят в $\Sigma^{a,b}$. Дуга кривой, лежащая в такой области, войдет в разделяющее множество Θ.

1. Для кривых f_2, f_3, f_7, f_8, f_{15} подходящими являются области I-V, V, I-IV, I-III, I-V. На всей области определения, указанной в таблице 21, каждая из кривых содержится в замыкании своих подходящих областей. Достаточно проанализировать порядок роста данных кривых, а для кривой f_8 — значения f'_t, f'_k, f'_8 и f'_r в точке $(\tau^2,\tau^2) \in Ouv$.

   Для кривой f_{16} области I, VI и VII являются подходящими. Кривая лежит именно в них, поскольку $f_t(u) = f_{14}(u) < f_{16}(u) < \tau^2$ при $0 < u < \tau^2$ и $f_l(u) < f_{16}(u) < f_t(u)$ при $u > \tau^2$. Это легко обосновать, рассмотрев $f'_{14} - f'_{16}$ при $u < \tau^2$ и $f'''_{16}(u), f'''_{14}(u)$ при $u = \tau^2 + 0$.

2. Для кривой f_{18} подходящей является область VII. Данная кривая $v = \tau^2/2$ пересекает кривую $f_r : v(u) = \tau\sqrt{u}$ в точке $(\tau^2/4, \tau^2/2)$, т.е. при $u < \tau^2/4$ график $f_{18}(u)$ лежит в VII.

3. На кривой f_{13} совпадают абсциссы особых точек $-r$ и $cusp$. Подходящими областями являются III, IV, V, VII, IX. При $0 < u < \tau^2$ имеем $f_{13}(u) > f_5(u)$, т.е. график лежит в подходящих областях V, VII и IX. Порядок роста функции f_{13} равен $1/2$, т.е. график пересечет кривые f_4, f_k и f_{14}. Найдем точку пересечения u_0 кривых f_{13} и f_k, подставив $v = 8\tau\sqrt{u}$ в (4.3):

$$u + 8\tau\sqrt{u} = 3u + 3\tau\sqrt{u} - \frac{\tau^2}{4}$$

$$2u - 5\tau\sqrt{u} - \frac{\tau^2}{4} = 0, \qquad u_0 = \frac{(5+3\sqrt{3})^2\tau^2}{16}.$$

4. В точках пересечения кривых f_{17} и f_k имеем $h_{cusp} = h_l$ и $cusp = rootl = rootr$. Значит, в ней $h_{rootl} = h_l$, и эта точка принадлежит f_t. Точка (τ^2, τ^2) является единственной общей точкой трех кривых f_t, f_{17}, f_k, т.е. график f_{17} лежит ниже графика f_k и не попадает в подходящие области (III и IV) при $u > \tau^2$.

   Кривая f_{17} пересекает кривую f_r в точке $(\tau^2/2, \tau^2/\sqrt{2})$, области V и VII являются подходящими, а область VIII нет.

5. Дуга $v < \tau^2$ кривой f_6 находится в областях VI и VIII, которые не являются для нее подходящими: при $v < \tau^2$ имеем $f_r(u) > f_6(u) > u$.

   $$f_r(v) = \frac{v^2}{\tau^2} \vee \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v}+\tau^2} = f_6(v) \quad\Rightarrow\quad (v + \sqrt{v}\tau^2 - 2\tau^4)v^{3/2} \vee 0. \tag{4.4}$$

   Аналогично, при $0 < u < \tau^2/2$ график $v = f_{11}(u)$ лежит ниже прямой $v = 0$, а при $\tau^2/2 < u < \tau^2$ график лежит выше прямой $v = \tau^2$, т.е. в не подходящей для f_{11} области V. Из утверждения 8 следует, что график кривой $a = f_{19}(b)$ лежит вне D.

6. Функции f_{20}, f_{22}, f_{24} определены при сколь угодно близких к нулю значениях q, т.е. при сколь угодно больших v. Эти кривые $s = f_i(q)$ лежат выше кривой $s = f_l(q) = q^2$. Равенство абсциссы h для нуля параметрической кривой и одной из точек типов $-r, +r, +l$ возможно только при $f_l(b) \le a \le f_k(b)$, т.к только в областях I и II параметрическая кривая (2.4) имеет нули, отличные от z_1. Напомним, точка z_1 на плоскости Ohk всегда лежит правее остальных особых точек.

   Для кривой f_{21} данный факт следует из рассмотрения области определения радикала. Самая правая на плоскости Osq точка кривой $s = f_{21}(q)$ лежит на кривой f_t.

Утверждение 10 доказано.

4.6 Доказательство утверждения 11

1. В координатах (u, v) кривые $f_{24} = f_k, f_{20}$ и f_{23}, выходящие из вершины 2 с координатами (τ^2, τ^2), заданы неявно. Вид разделяющего множества для "средних" по величине значений (u, v), изображенных на рисунке 5, достоверен. Устройство Θ в окрестности этой вершины Θ докажем аналитически.

   На кривой f_{20} равны h_{rootr} и h_{+l}, на кривой f_{23} — h_{rootr} и h_{+r}. При этом $h(+r) = h(+l)$ на кривой f_3 при $u \le \tau^2$. Т.е. f_{20} и f_{23} имеют одну общую точку (τ^2, τ^2).

   Кривая f_{23} может пересечь f_k только в точке (u, v), для которой $h(+l) = h(cusp)$, т.е. на кривой $f_4 = f_r$ при $u \ge \tau^2$. Значит, f_k лежит выше кривой f_{23} при $u > \tau^2$. Т.к. f_{20} пересекает f_{23} только в вершине 2, то она тоже не пересекает f_k при $u > \tau^2$.

2. Через точку пересечения f_8 и f_4 пройдет кривая f_3. Т.е. это только точка (τ^2, τ^2).

   Пару кривых f_8 и f_k рассмотрим в координатах (q, s). Уравнение f_k выведено в лемме 3.4, а уравнение f_8 несложно найти: $s > 0$, и в следующем уравнении требуется выбрать знак $+$

   $$s = f_8(q) = \frac{q}{2\tau}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 8\tau q}\right).$$

Численное решение уравнения $f_8(q) = f_k(q)$ дает корень $q_0 = 1/\tau$ и корень $q_1 \approxeq 0,57$, отделенный от нуля и q_0. При этом в точке q_0 имеем $f_8'(q_0 - 0) = 5\sqrt{2}/6 < \sqrt{2} = f_k'(q_0 - 0)$. Значение $q_0' \approxeq 0,65$ является ближайшей к q_0 точкой равенства f_k' и f_8'.

Из теории вычислительных методов следует, что достаточно исследовать достаточно малую окрестность q_0 на наличие общих точек этих кривых. Поскольку производные непрерывны, достаточно показать сохранение знака $f_k'(q) - f_8'(q)$ в некоторой окрестности.

Докажем, что на (q_0', q_0) нет нулей второй производной, т.е. там $f_k''(q) > f_8''(q)$. Используем оценку:

Вторая производная $f_k''(q)$ имеет асимптотику $(q - q_0)^r, -1 < r < 0$, а $f_8''(q)$ определена и конечна в этой точке.

Для всех q из промежутка $0,69 = p < q < q_0$ верна оценка

$$f_8''(q) < -\frac{8p\sqrt{2}}{(1 + 8q_0\sqrt{2})} + \frac{4}{p\sqrt{1 + 8q_0\sqrt{2}}} < \frac{2^{2/3}}{3q_0\sqrt{1 - 2^{1/3}p^{2/3}}} - \frac{2}{p^{4/3}} < f_k''(q).$$

С помощью сеточного разбиения и оценки на третьи производные доказывается отсутствие нуля $f_k'' - f_8''$ на промежутке $[q_0', p]$. Поскольку между нулями непрерывной f' лежит ноль f'', то на промежутке q_1, q_0 разность $f_k - f_8$ не обращается в ноль и не меняет знака.

Утверждение 4.6 доказано.

4.7 Доказательство утверждения 12

1. Кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m не пересекаются друг с другом при больших значениях $u^2 + v^2$. Кривые f_7 при $u \to \tau^2 + 0$ и f_{17} при $u \to +0$ неограниченно возрастают, приближаясь справа к прямым f_m и $u = 0$ соответственно.

   Все кривые, возможно, кроме f_k и $f_{20}, ..., f_{23}$, монотонно возрастают при больших u с известной скоростью. Кривая f_7 не пересекается с f_{15} при больших u, т.к. $f_7(u) - f_{15}(u) = const_7 - const_{15} + o(1)$, где $const_7 = 2\tau^2 > \tau^2 = const_{15}$. Аналогично в случае кривых f_8 и f_{16}.

   Кривая f_2 имеет порядок роста как $u + const\sqrt{u} + ...$ Начиная с некоторого u кривая f_2 лежит ниже всех остальных кривых, значит, это свойство сохранится далее из монотонности кроме f_l на большом удалении $u^2 + v^2$.

2. Докажем, что кривая f_{22} лежит между f_7 и f_{15} при больших u. Все три кривые неограниченно возрастают при $q \to 0$. На кривой f_7 равны абсциссы $h_l = h_{-r}$, на кривой f_{15} — $h(z_{lt} = h_{-r}$, на кривой f_{22} имеем $h_{rootr} = h_{-r}$. При этом точка $rootr$ лежит левее точки z_{lt} и правее точки h_l. Значит, данные кривые не могут пересекаться. Аналогично кривая f_{20} лежит между f_8 и f_{16} при больших u.

3. Кривая f_{23}, в точках (u, v) которой $h_{rootr} = h_{+l}$, лежит на Ouv между f_k и f_t при всех отмеченных на чертеже u. На кривой f_k имеем совпадение особых точек: $rootr = rootl = cusp$. При этом кривая $h(z_{+l}) = h(z_{cusp})$ есть кривая f_r при $u > \tau^2$. Аналогично, на кривой f_t $+l = h_l = rootl$. Поскольку $rootr = rootl$ есть кривая f_k, то кривые f_t и f_{20} не пересекаются при $u > \tau^2$.

4. Кривые f_t, f_r имеют квадратичный порядок роста u^2, f_k находится между ними, потому все три кривые повторно не пересекутся достаточно далеко с кривыми линейного порядка роста.

Утверждение 12 доказано.

5 Топология изоэнергетических поверхностей

По инвариантам Фоменко-Цишанга удается определить топологию всех изоэнергетических поверхностей, не содержащих положений равновесия.

Теорема 6. *Каждая неособая изоэнергетическая поверхность $Q^3_{a,b,h}$ диффеоморфна одной из следующих поверхностей:*

S^3, $2S^3$, $S^1 \times S^2$, $2(S^1 \times S^2)$, $\mathbb{R}P^3$, $(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$, $(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$.

В таблице 3 перечислено, какие из слоений 1-32 компактного случая Ковалевской реализуются на этих многообразиях

Тип поверхности	Номер инварианта Фоменко–Цишанга
S^3	$1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 21, 23$
$2S^3$	$6, 7, 22$
$S^1 \times S^2$	$5, 12, 13, 14, 15, 20, 29, 32$
$2(S^1 \times S^2)$	$27, 31$
$\mathbb{R}P^3$	$4, 19, 24$
$(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$	$26, 28, 30$
$(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$	25

Таблица 3: Многообразия со слоениями 1-32 компактного случая Ковалевской

Замечание 18. Каждое слоение Лиувилля, допускающее описание инвариантом Фоменко–Цишанга, реализуется ровно на одном классе диффеоморфных трехмерных многообразий. Топологическим типом инварианта естественно назвать тип этого многообразия.

Доказательство. 1. Если $dH|_{Q^3_h} \neq 0$, то топологический тип изоэнергетических поверхностей $Q^3_{h\pm\varepsilon}$ в симплектическом M^4 совпадает. Таким образом, если два инварианта Фоменко–Цишанга соответствуют двум соседним областям пространства параметров $\mathbb{R}^3(a,b,h)$, общей границе которых соответствует особая точка из семейств $y_2, y_5, y_6, y_8, y_9, y_{12}, z_2, z_8$, то их топологический тип совпадает. Укажем список таких троек (две области и семейство особых точек) из таблицы 23, дополненный номером одной из подобластей I.1-IX.2, в которой такой порядок реализуется:

$$1 \xrightarrow{y_2, V.8} 2 \xrightarrow{y_6, V.8} 3,\ 1 \xrightarrow{y_2, V.7} 16 \xrightarrow{y_9, III.4} 23; \qquad 22 \xrightarrow{y_8, III.1} 6 \xrightarrow{z_2, V.8} 7$$

$$9 \xrightarrow{y_2, VII.4} 8 \xrightarrow{z_8, VII.4} 10,\ 9 \xrightarrow{z_8, VII.1} 11 \xrightarrow{y_2, VII.1} 10;$$

$$13 \xrightarrow{y_6, VII.6} 12 \xrightarrow{y_2, VII.6} 14,\ 13 \xrightarrow{y_2, VII.7} 15 \xrightarrow{y_9, III.1} 20;$$

$$17 \xrightarrow{y_5, IV.4} 18,\ 21 \xrightarrow{y_8, III.5} 18; \qquad 4 \xrightarrow{y_5, V.5} 19,\ 24 \xrightarrow{y_8, III.6} 19;$$

$$30 \xrightarrow{y_{13}, I.5} 26; \qquad 31 \xrightarrow{y_{13}, I.9} 27, \qquad 32 \xrightarrow{y_{13}, I.6} 29.$$

Инварианты $1, 7, 11, 13, 31$ имеют грубую молекулу $A{-}A$ или $2(A{-}A)$, т.е. топология связной компоненты Q^3 полностью определяется r-меткой. Случай $r = 0$ соответствует трехмерной сфере S^3, случай $r = \infty$ — прямому произведению $S^1 \times S^2$ окружности и двумерной сферы.

Инварианты $4, 28, 32$ встречались в классическом случае Ковалевской и были обозначены D, I, F. Многообразия $Q^3(F), Q^3(D)$ и $Q^3(I)$ диффеоморфны $S^1 \times S^2$, $\mathbb{R}P^3$ (трехмерному проективному пространству) и связной сумме $(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$ двух экземпляров $S^1 \times S^2$ соответственно.

Инвариант 30 с одним седловым атомом B и тремя ребрами с $r = \infty$ является круговой молекулой особенности типа центр-седло $A \times B$. Как показано в [19], такое многообразие диффеоморфно $(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$.

2. Остается определить топологию многообразия, оснащенного со слоением 25, и многообразия с одним из слоений 17, 18, 21. Как было показано (С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко), класс изоэнергетических многообразий *интегрируемых* систем совпадает с классом граф-многообразий, введенных Вальдхаузеном в [39], [40]. Такое многообразие разбивается конечным числом торов в объединение нескольких частей, оснащенных структурой расслоения Зейферта.

Описанные части многообразий имеют структуры расслоения Зейферта (на окружности) и слоения Лиувилля (на торы и особые слои), которые согласованы — каждый слой расслоения Зейферта содержится в слое слоения Лиувилля, каждая критическая окружность особого слоя слоения Лиувилля является слоем расслоения Зейферта, и каждый особый слой расслоения Зейферта имеет тип (2,1), являясь критической окружностью особого слоя слоения Лиувилля.

Заданное на Q^3 слоение Лиувилля однозначно определяет его топологический тип. При этом на многообразии фиксированного топологического типа, оснащенном слоением Лиувилля, можно задать другое слоение Лиувилля, неэквивалентное первому.

3. Пусть атом V соединен с атомом A ребром с меткой $r = \infty$. Тогда две части Q^3, соответствующие атомам A и V, т.е. два расслоения Зейферта над 2-атомами A и V можно представить как одно расслоение Зейферта над атомом V, на одной из окружностей которого слой, т.е. окружность, стянута в точку. На рисунках 8-9 такие окружности нарисованы толстыми линиями.

В молекуле 18 пару атомов $A \overset{r=\infty}{\longrule} B$ изобразим как слоение над единой базой, слоем которого является λ_B, а на одной из граничных окружностей она стягивается в точку ($\lambda_B = \pm\lambda_A$, т.к. $r = \infty$, а λ_A гомологичен нулю). Такую окружность будем изображать толстой линией (см. рис 8). Она является критической окружностью атома A.

Аналогично доказательству теоремы 9.2 и предложения 4.5 в [19], разрежем базу по кривой, проходящей через особую точку 2-атома B, концы которой лежат на критической окружности атома A с меткой $r = \infty$ (см. рис 8). Полный прообраз этой кривой (изображенной вверху рисунка 8) является двумерной сферой со слоением на окружности, гомологичные циклу $\pm\lambda_B$, и две точки, принадлежащие критической окружности атома A. Разрезав расслоение Зейферта по этому прообразу, получим две одинаковые половины многообразия с границей S^2, т.е. $Q^3 = Q^3_1 \# Q^3_1$.

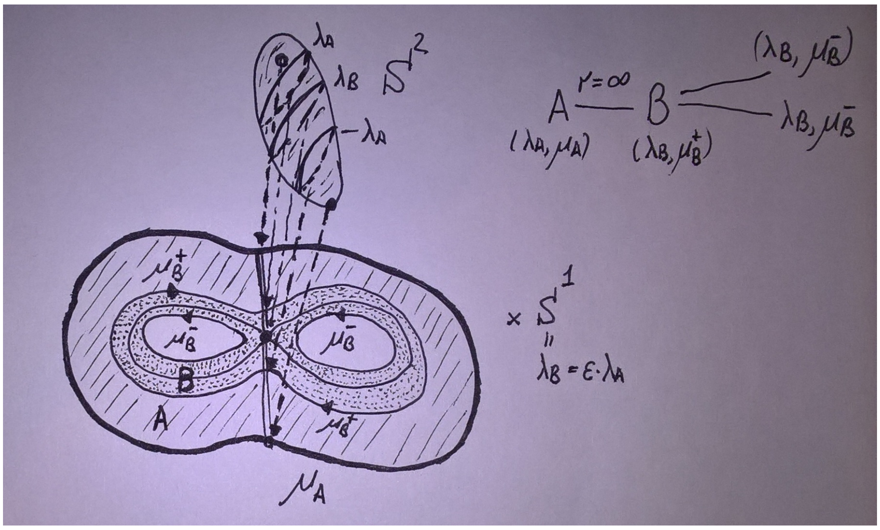


Рис. 8: Прообраз ребра $A - B$ с $r = \infty$ как связная сумма

В каждой из полученных половин слои $k \geq k_B$ не являются торами. Для воссоздания слоения Лиувилля на вклеиваемом замкнутом шаре D^3 требуется ввести слоение $I \times A$ на окружности и особые слои — одноточечные множества. Здесь I — отрезок, A — база атома A, т.е. диск, расслоенный на концентрические окружности и одну особую точку.

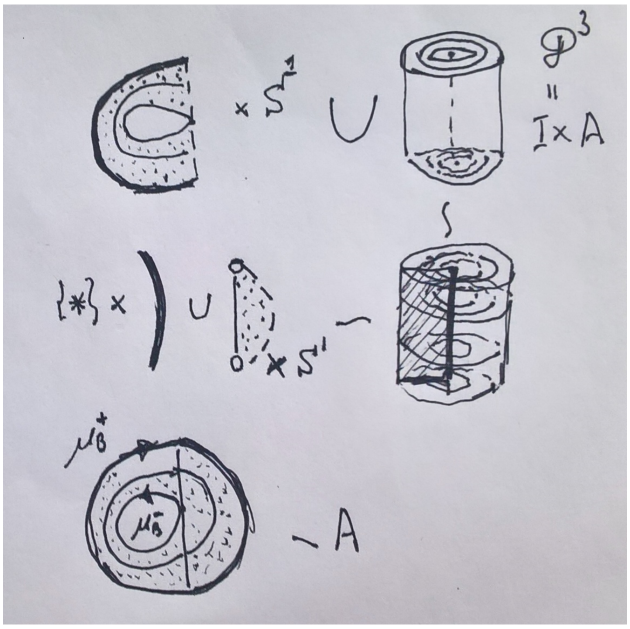


Рис. 9: Восстановление слоения Лиувилля при вклейке шара D^3

Объединив ось этого расслоенного шара с половиной граничной окружности атома B, получим особую окружность атома A нового слоения Лиувилля. Оставшаяся часть имеет структуру $S^1 \times (D^2/D^1)$. Объединив ее со слоением на половине молекулы (см. рис 9), получим новое слоение Лиувилля с молекулой $A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=0} A$. При этом $\mu_A = -\mu_B^-$, т.е. $\lambda_A = \lambda_B$. Матрица склейки на новом ребре молекулы равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Полученная молекула $A \dfrac{r=0}{\varepsilon=1} A^* \dfrac{r=0}{\varepsilon=1}$ и $n=-1$ встречалась при анализе случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского. Ее многообразие $Q_1^3 \cong S^3$, т.е. многообразие $Q^3 \cong S^3 \# S^3 \cong S^3$.

4. Для слоения Лиувилля с молекулой 25 мы введем другое слоение Лиувилля, согласованное с той же структурой расслоения Зейферта. Иначе говоря, другую организацию слоев расслоения Зейферта (со слоем окружность) в двумерные торы и особые слои. Инвариант Фоменко–Цишанга нового слоения совпадет с инвариантом для круговой молекулы особенности типа центр-седло $A \times C^2$. Как доказано в теореме 9.2 из [19], круговое многообразие Q^3 особенности центр-седло с седловым 2-атомом V, диффеоморфно связной сумме $(s+1)$ экземпляров $S^1 \times S^2$, где s — число особых точек слоения на 2-атоме (т.е. число особых окружностей 3-атома V).

Для слоения 25 рассмотрим атом B, соединенный ребрами с двумя другими. Т.к. $n=0$, то λ-циклы для трех соседних с ним атомов уже образуют единое сечение на данном атоме B.

Известно, что слоение, молекула которого содержит фрагмент $A\dfrac{r=0}{\varepsilon=1}V$ для седлового атома без звездочек, допускает деформацию, при которой диском "заклеивают" одну из дырок на базе атома V. При этом из молекулы удаляется ребро $A\dfrac{r=0}{\varepsilon=1}V$, и меняется тип седлового атома.

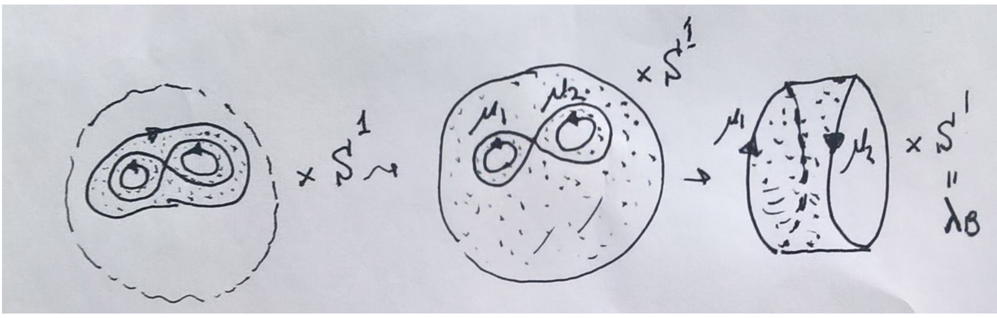


Рис. 10: Замена ребра $A-B$ с $r=0$ на критический тор.

База 3-атома B — сфера с тремя дырками, причем две граничные окружности, соответствующие ребрам $B-B$, расположены симметрично относительно особого слоя 2-атома. Заклеив внешнюю дырку диском (что соответствует деформации слоения, удаляющей ребро с атомом A), получим новое слоение (см. рис 10). Вместо $A\dfrac{r=\infty}{}B$ слоение содержит особый максимальный для интеграла тор со значением k_T на нем.

Введем новый интеграл $\hat{K}$, совпадающий с K на "левой" половине молекулы, и равный $2k_T - k$ на "правой" половине (см. рис 11). Топологический тип Q^3 при этом не изменился. Новое слоение содержит пару атомов $B\dfrac{r=\infty}{\varepsilon=-1}B$ (т.к. определитель матрицы склейки равен -1). Топологически семья из двух атомов B может быть получена возмущением особенности типа C^2 (см. рис 12).

Таким образом, слоение можно продеформировать без изменения топологии к молекуле с одним атомом C_2 и четырьмя атомами A с бесконечными r-метками, т.е. круговой молекулы особенности центр-седло $A \times C_2$. По теореме 9.2 из [19] круговое многообразие особенности $A \times V$ диффеоморфно связной сумме $s+1$ экземпляров $S^1 \times S^2$, где s — число вершин особого слоя 2-атома V (в нашем случае, $V = C_2$, s = 2). Тем

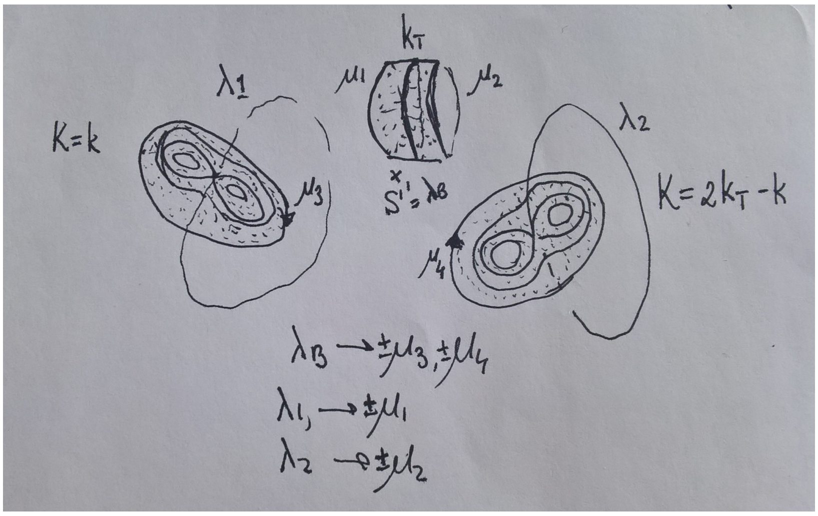


Рис. 11: Новое слоение Лиувилля на Q^3 для молекулы 25

самым, слоение 25 реализуется на $(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)\#(S^1 \times S^2)$. □

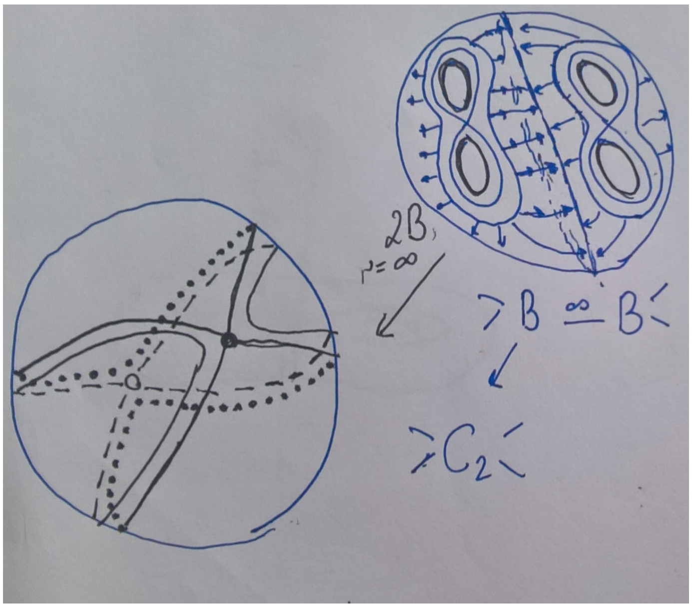


Рис. 12: Семья $B - B$ как возмущение атома C_2

Выводы и заключение

Для компактного аналога случая Ковалевской на поверхностях постоянной энергии обнаружно 27 классов слоений Лиувилля, которые попарно лиувиллево неэквивалентны. Было обнаружено, что некоторые из этих слоений эквивалентны слоениям Лиувилля других интегрируемых систем. Это означает, что у таких систем совпадают замыкания решений общего положения на выбранных уровнях энергии.

Отметим, что почти во всех случаях инварианты совпадающих слоений достаточно просто устроены. Исключениями являются случай Ковалевской (который полностью моделируется компактным случаем) и случай Соколова [21], который тесно связан со случаем Ковалевской при $\varkappa < 0$, [13]. Таким образом, совпадение инвариантов иллюстрирует тесную связь указанных систем.

Для всех неособых поверхностей был найден топологический тип — класс диффеоморфности. Он является важным инвариантом грубой топологии динамических систем.

Случай алгебры Ли $\mathrm{so}(3,1)$, реализующийся при $\varkappa < 0$, тесно связан с некоторым обобщением случая Соколова, грубая топология которого рассматривалась в [13]. Возникли новые примеры графов Фоменко, не встречавшихся прежде в исследованных интегрируемых системах. Задача лиувиллева анализа для этой системы будет решаться в дальнейшем.

Аналогичное обобщение на пучок алгебр Ли $\mathrm{so}(3,1) - \mathrm{e}(3) - \mathrm{so}(4)$ имеется и для случая Ковалевской–Яхьи [5]. Результаты [24] и настоящей работы могут сильно упростить задачу лиувиллева анализа для этой системы на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, аналогично тому, как в данной работе помогали результаты [25].

Список литературы

[1] H.M. Yehia *New integrable cases in dynamics of rigid bodies* // Mech. Res. Com., **13**:3 (1986), 169-172.

[2] И. В. Комаров, *Базис Ковалевской для атома водорода* // ТМФ, **47**:1 (1981), 67–72.

[3] Borisov A. V., Mamaev I. S., Sokolov V. V. *A new integrable case on so(4)* // Doklady. Physics., **46**:12 (2001), 888–889.

[4] В.В. Соколов, А.В. Цыганов *Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина* // ТМФ, /textbf131:1 (2002), 118–125.

[5] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход* // Ижевск, РХД, 2003.

[6] А.В. Вершилов, Ю.А. Григорьев, А.В. Цыганов, *Об одной интегрируемой деформации волчка Ковалевской* // Нелинейная динам., **10**:2 (2014), 223–236.

[7] С. Смейл, *Топология и механика* // УМН, **27**:2(164) (1972), 77-133.

[8] М. П. Харламов, *Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела* // Доклады АН СССР, **273**:6 (1983), 1322—1325.

[9] М. П. Харламов, *Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской* // Прикладная математика и механика, **47**:6 (1983), 922—930.

[10] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела* // Л., Изд-во ЛГУ, 1988.

[11] А.А. Ошемков *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы* //Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **23** (1988), 122-132.

[12] А.А. Ошемков *Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела* //Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **25**:2 (1993), 23-110.

[13] Kharlamov M. P., Ryabov P. E., Savushkin A. E. *Topological Atlas of the Kowalevski – Sokolov Top* // Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 24–65.

[14] А.Т. Фоменко, *Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **50**:6 (1986), 1276–1307.

[15] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, *О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике* // Докл. АН СССР, **294**:2 (1987), 283–287.

[16] S.V. Matveev, A.T. Fomenko, *Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds* // Rus. Math. Surveys, **43**:1 (1988), 3–24.

[17] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, *О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **52**:2 (1988), 378–407.

[18] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы* // Изв. РАН, **54**:3 (1990), 546—575.

[19] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация* // Ижевск, Издат. дом “Удмурт. ун-т”, 1999.

[20] П. В. Морозов, *Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша* // Матем. сб., **193**:10 (2002), 113—138.

[21] П. В. Морозов, *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа* // Матем. сб., **195**:3 (2004), 69—114.

[22] П. В. Морозов, *Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи* // Матем. сб., **198**:8 (2007), 59—82.

[23] П. В. Морозов, *Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела* // диссертация, (2006).

[24] Н. С. Славина, *Топологическая классификация систем типа Ковалевской-Яхьи* // Матем. сб., **205**:1 (2014), dir0o05—160.

[25] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской* // Матем. сб., **191**:2 (2000), 3—42.

[26] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик* // Матем. сб., **206**:10 (2015), 127—176.

[27] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела* // Доклады РАН, серия: Математика, **465**:2 (2015), 150—153.

[28] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы* // Известия РАН, серия: Математика, **81**:4 (2017), 20—67.

[29] Е. А. Кудрявцева, И. Н. Никонов, А. Т. Фоменко, *Максимально симметричные клеточные разбиения и их накрытия* // Матем. сб., **199**:9 (2008), 3—96.

[30] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, *New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems* // Topology and Its Applications, **159** (2012), 1964—1975.

[31] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, *Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях* // Доклады РАН, серия: Математика, **446**:6 (2012), 615—617.

[32] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, *Algebra and geometry through Hamiltonian systems* // Continuous and distributed systems. Theory and applications. Ser. Solid Mechanics and Its Applications/ Ed. by V.Z. Zgurovsky, V.A. Sadovnichiy. // Cham, Springer, 2014.

[33] A. T. Fomenko, C. C. Nikolaenko, *The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsiod.* // Journal of Georemry and Physics, **87** (2015), 115—133.

[34] S. Kowalewski, *Sur une propriété du systéme d'équations differentielles qui définit la rotation d'un corps solide autor d'un point fixe* // Acta Mathematica, **14** (1889), 81–83.

[35] S. Kowalewski, *Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* // Acta Mathematica, **12** 1889, 177—232.

[36] Н.Е. Жуковский, *Геометрическая интерпретация случая движения тяжелого твердого тела вокруг фиксированной точки, рассмотренного С.В. Ковалевской* // Матем. сб., **19** (1896), 45-93.

[37] Г. Г. Аппельрот, *Не вполне симметричные тяжелые гироскопы* // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки // М.-Л., Изд-во АН СССР, 1940.

[38] И. К. Козлов, *Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4)* // Матем. сб., **205**:4 (2014), 79—120.

[39] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I* // Invent. Math., **3**:4 (1967), 308—333.

[40] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II* // Invent. Math., **4**:2 (1967), 88—117.

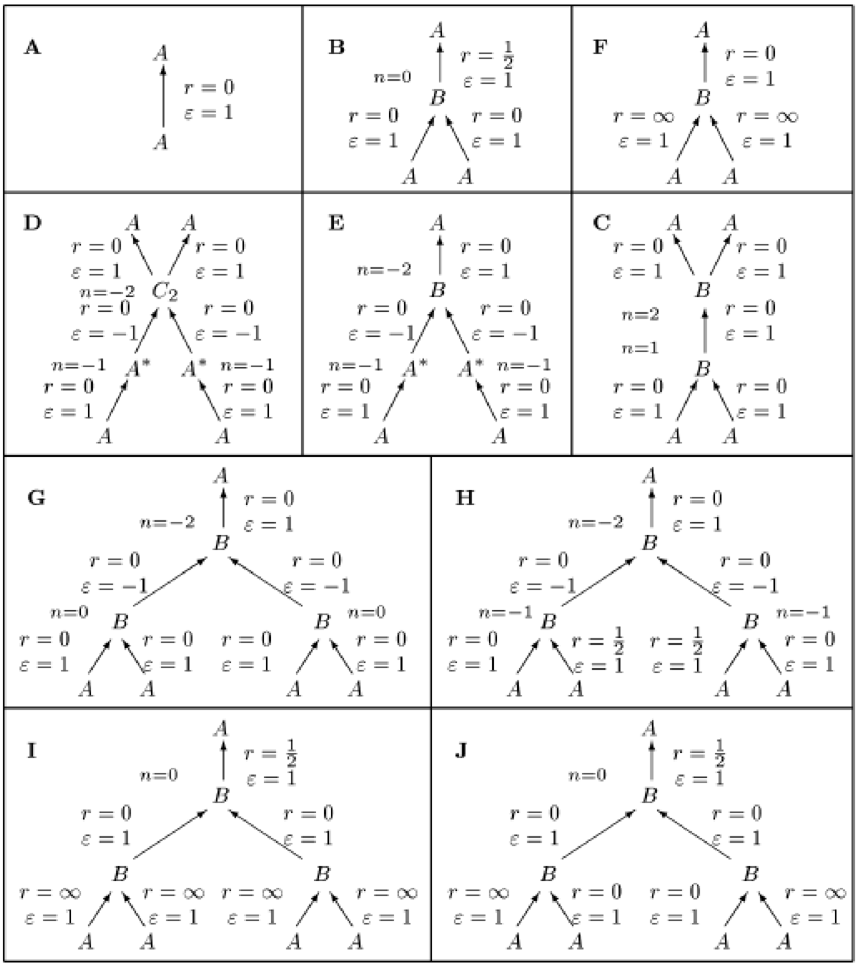


Таблица 4: Инварианты Фоменко–Цишанга классического случая Ковалевской.

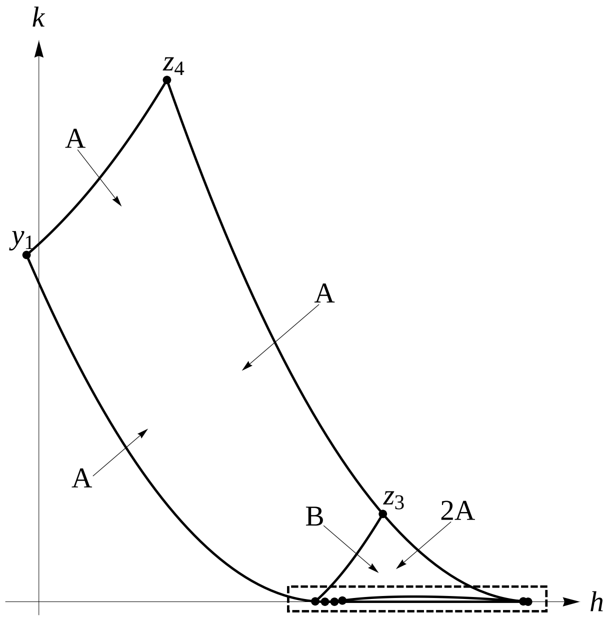


Рис. 13: Область I: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $\quad f_l(b) < a < f_t(b)$

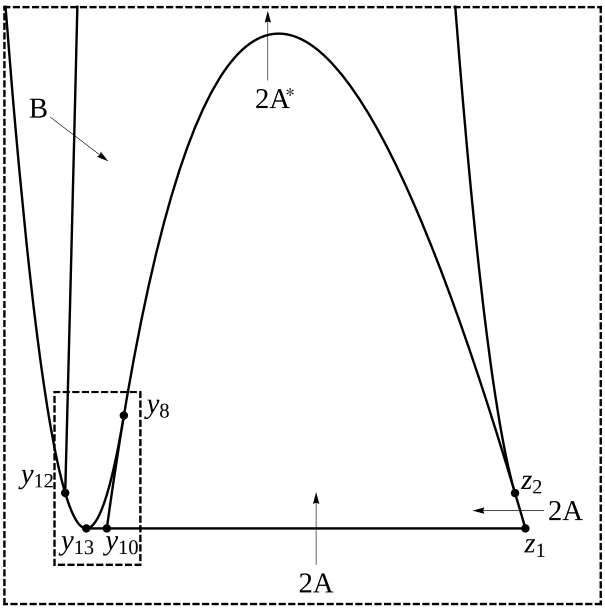


Рис. 14: Область I: увеличенный фрагмент рис. 13

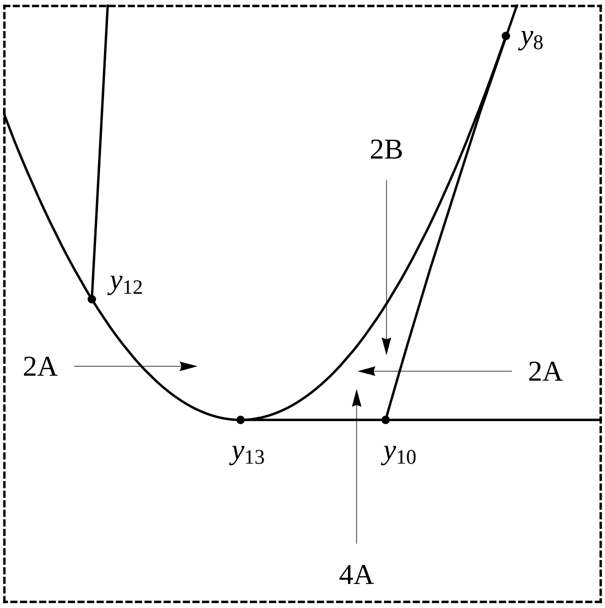


Рис. 15: Область I: увеличенный фрагмент рис. 14

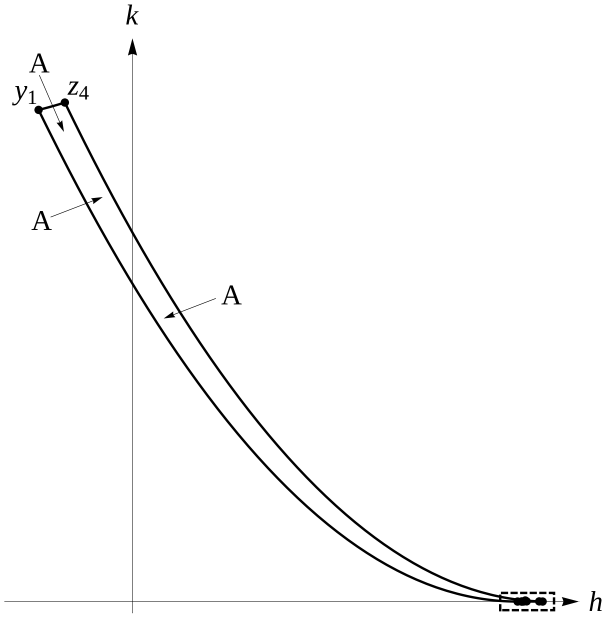


Рис. 16: Область II: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_t(b) < a < f_k(b)$

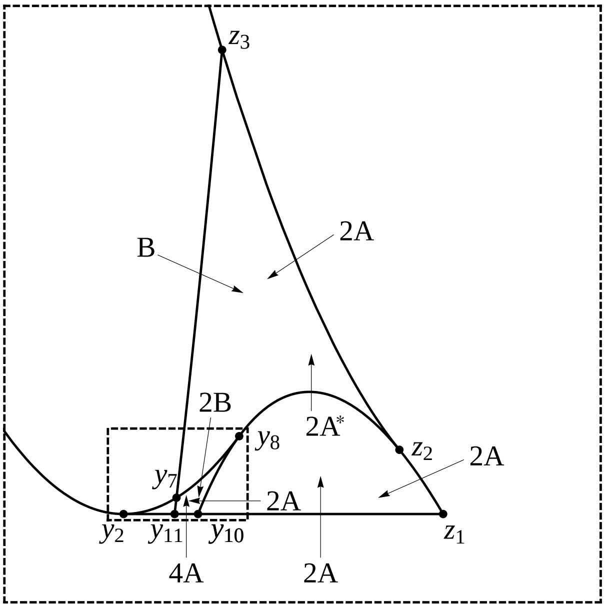


Рис. 17: Область II: увеличенный фрагмент рис. 16

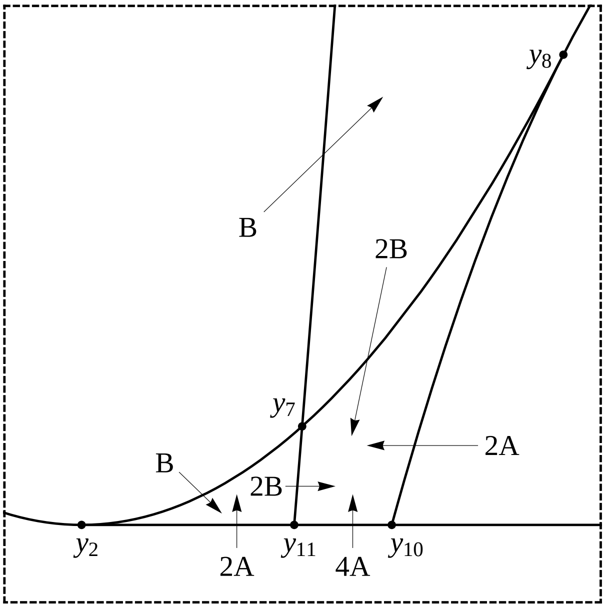


Рис. 18: Область II: увеличенный фрагмент рис. 17

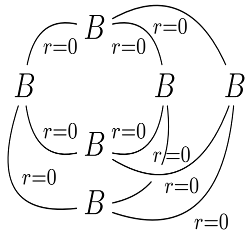
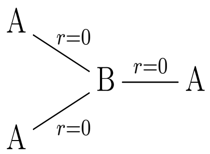
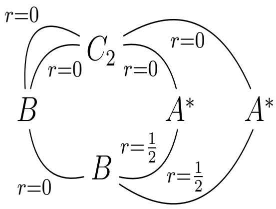
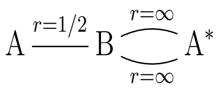
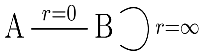
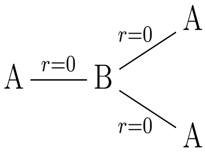
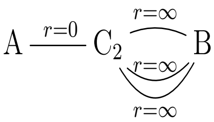
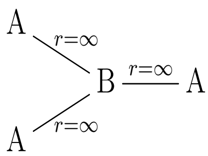
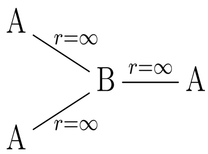
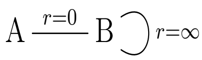
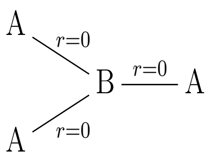
y_1	$\mathrm{A}\ \overset{r=0}{\overline{\qquad}}\ \mathrm{A}$	y_7	
y_2			
y_3		y_8	 дважды
		y_9	 дважды
y_4		y_{10}	$\mathrm{A}\ \overset{r=\infty}{\overline{\qquad}}\ \mathrm{A}$ $\quad$ $\mathrm{A}\ \overset{r=0}{\overline{\qquad}}\ \mathrm{A}$ $\mathrm{A}\ \overset{r=\infty}{\overline{\qquad}}\ \mathrm{A}$ $\quad$ $\mathrm{A}\ \overset{r=0}{\overline{\qquad}}\ \mathrm{A}$
y_5		y_{11}	 дважды
		y_{12}	
y_6		y_{13}	 дважды

Таблица 5: Круговые молекулы, классический случай Ковалевской.

z_1	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$	z_6	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A}$
z_2	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}^* \overset{r=1/2}{\text{——}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}^* \overset{r=1/2}{\text{——}} \mathrm{A}$	z_7	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$
z_3	$\mathrm{A} \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{B} \begin{cases} \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A} \\ \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A} \end{cases}$	z_8	$\begin{rcases} \mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \\ \mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \end{rcases} \mathrm{B} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$
z_4	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$	z_9	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$
z_5	$\begin{rcases} \mathrm{A} \overset{r=\infty}{\text{——}} \\ \mathrm{A} \overset{r=\infty}{\text{——}} \end{rcases} \mathrm{C}_2 \begin{cases} \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A} \\ \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A} \end{cases}$	z_{10}	$\mathrm{A} \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{B} \begin{cases} \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A} \\ \overset{r=\infty}{\text{——}} \mathrm{A} \end{cases}$
		z_{11}	$\mathrm{A} \overset{r=0}{\text{——}} \mathrm{A}$

Таблица 6: Новые круговые молекулы.

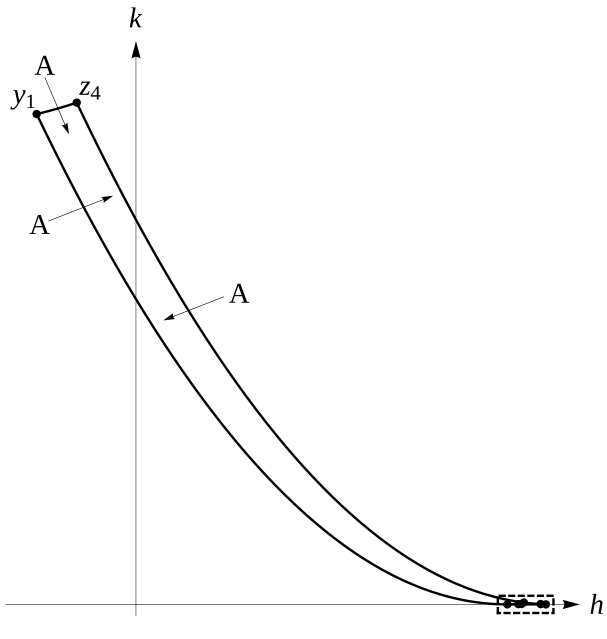


Рис. 19: Область III: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2, \quad f_k(b) < a < f_r(b)$

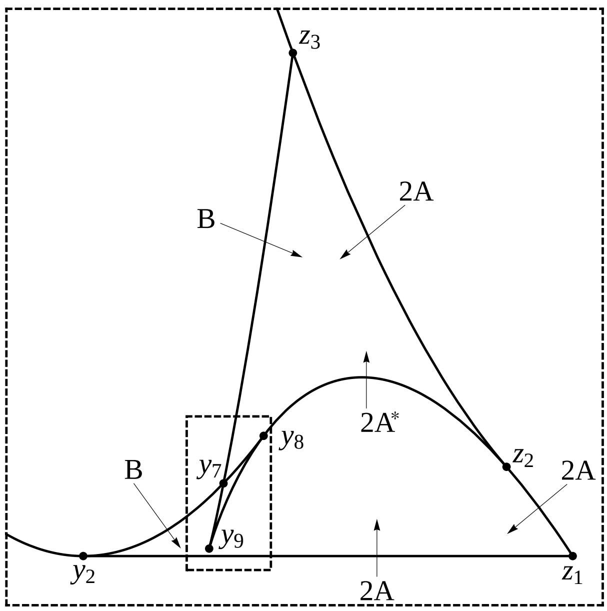


Рис. 20: Область III: увеличенный фрагмент рис. 19

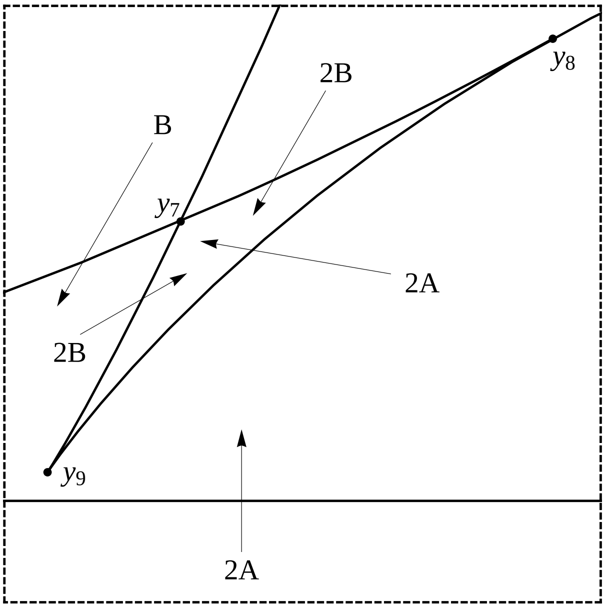


Рис. 21: Область III: увеличенный фрагмент рис. 20

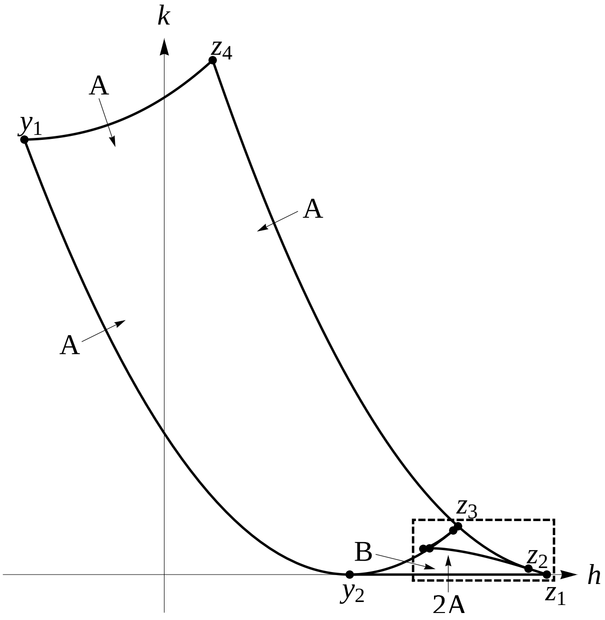


Рис. 22: Область IV: $\varkappa^3 c_1^4 < b^2$, $f_r(b) < a < f_m(b)$

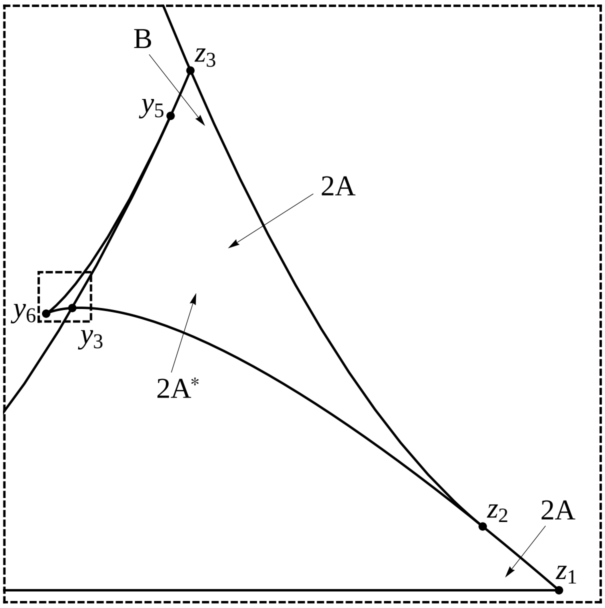


Рис. 23: Область IV: увеличенный фрагмент рис. 22

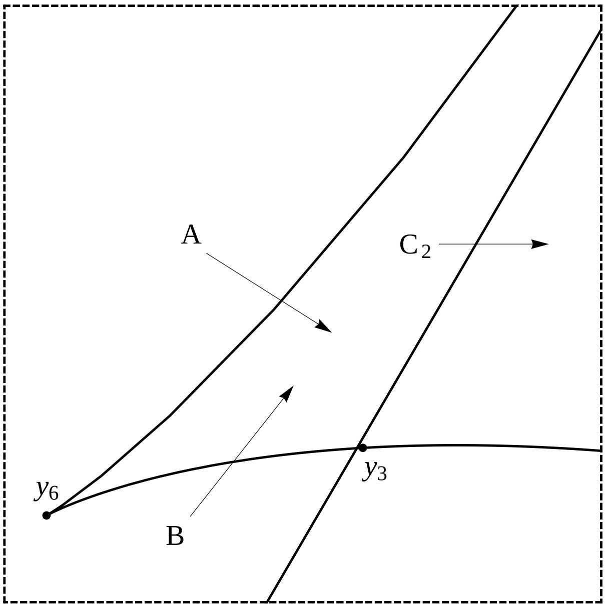


Рис. 24: Область IV: увеличенный фрагмент рис. 23

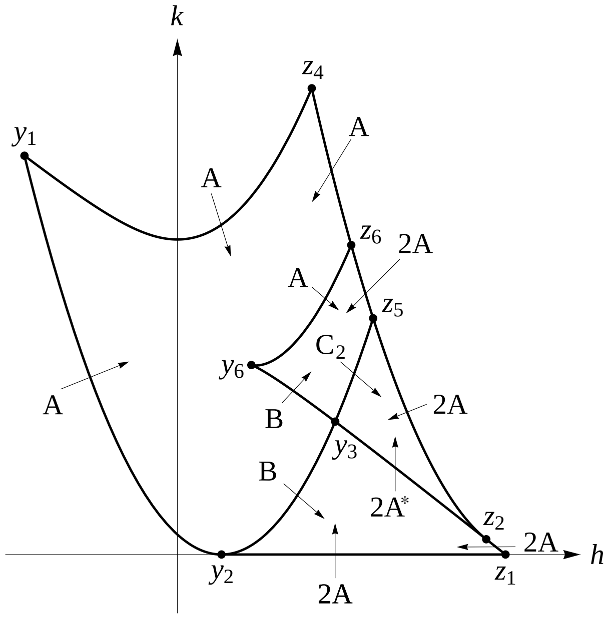


Рис. 25: Область V: $f_m(b) < a$

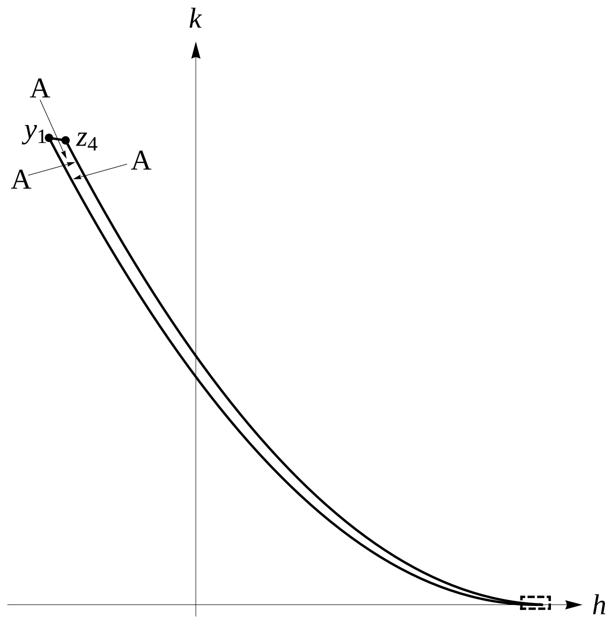


Рис. 26: Область VI: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad f_t(b) < a < f_r(b)$

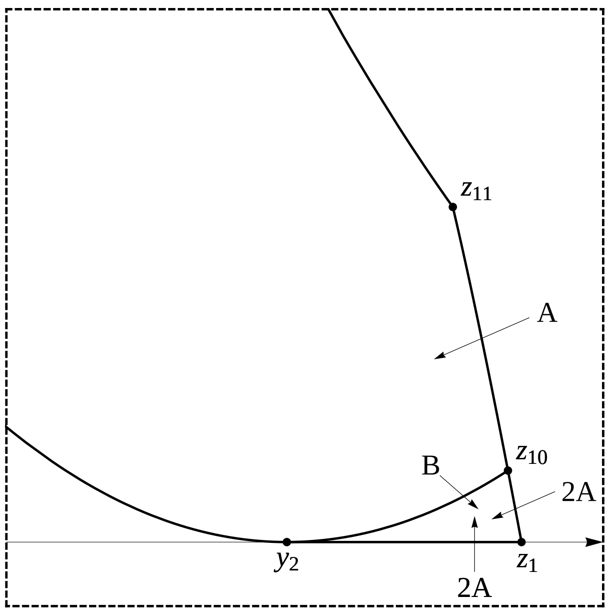


Рис. 27: Область VI: увеличенный фрагмент рис. 26

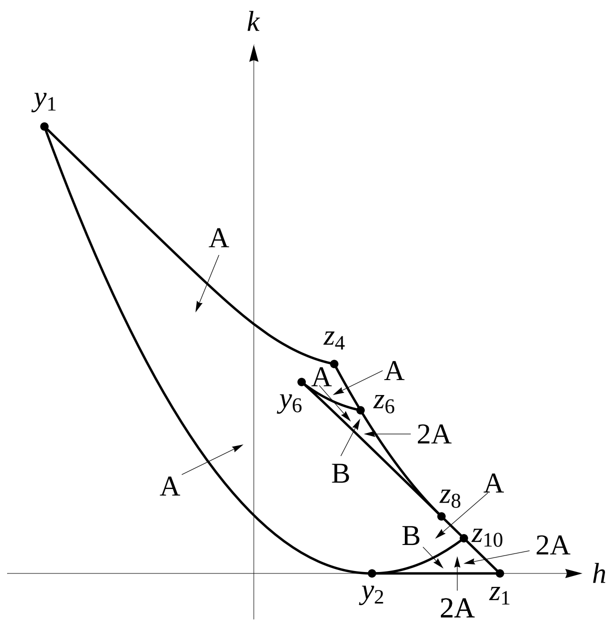


Рис. 28: Область VII: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad \max(f_t(b), f_r(b)) < a < f_m(b)$

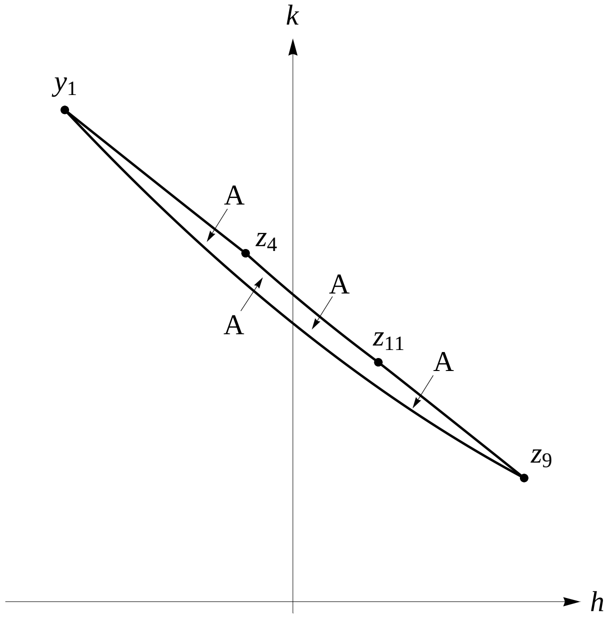


Рис. 29: Область VIII: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad f_l(b) < a < \min(f_r(b), f_t(b))$

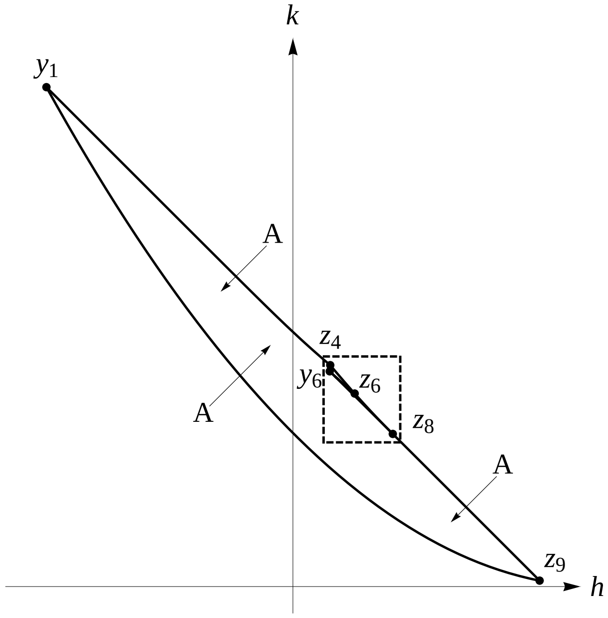


Рис. 30: Область IX: $0 < b^2 < \varkappa^3 c_1^4, \quad f_r(b) < a < f_t(b)$

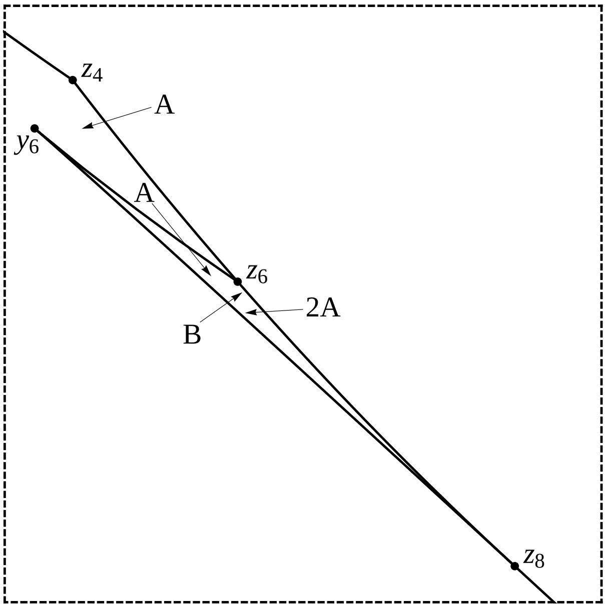


Рис. 31: Область IX: увеличенный фрагмент рис. 30

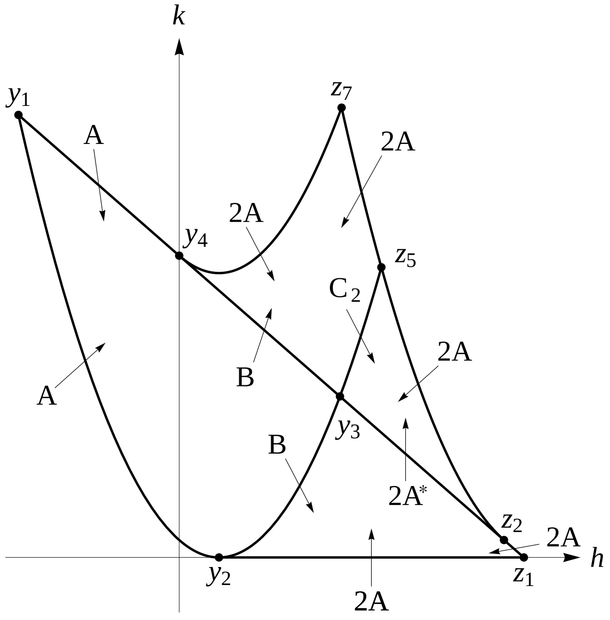


Рис. 32: Область X: $b = 0, \quad \varkappa^2 c_1^2 < a$

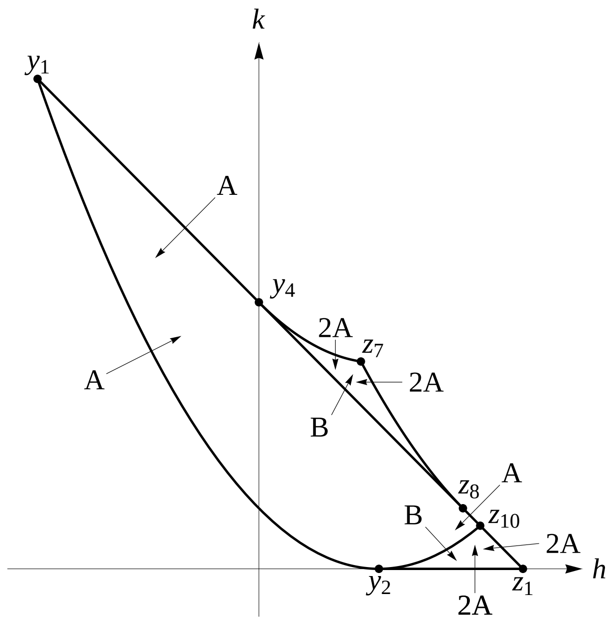


Рис. 33: Область XI: $b = 0, \quad \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2$

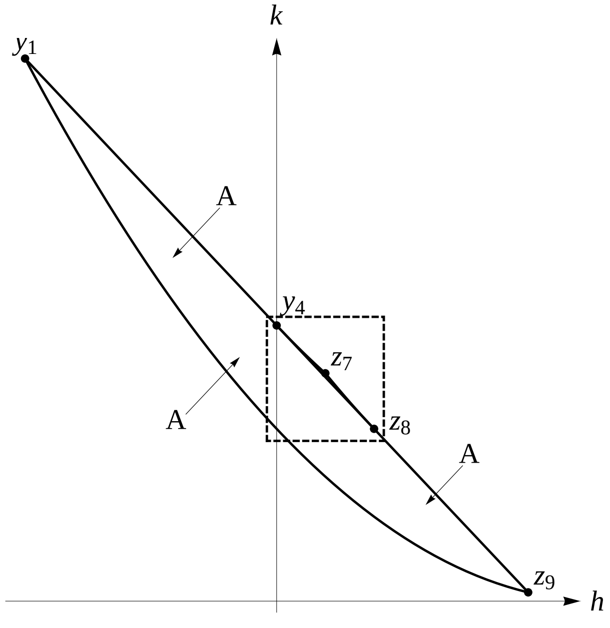


Рис. 34: Область XII: $b = 0, \quad 0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$

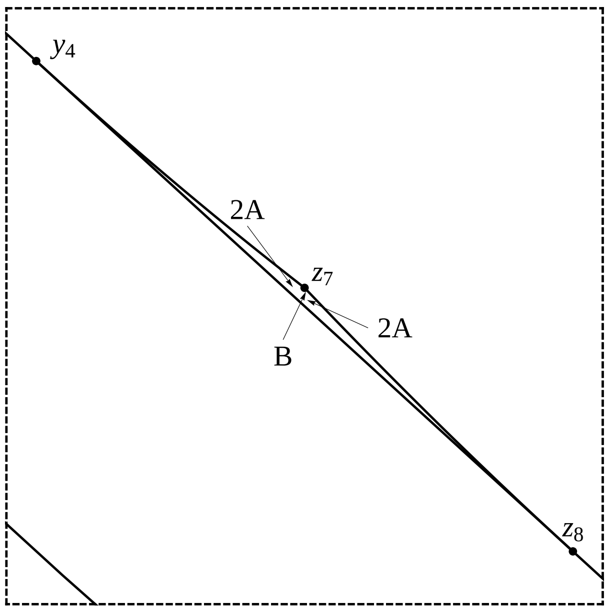


Рис. 35: Область XII: увеличенный фрагмент рис. 34

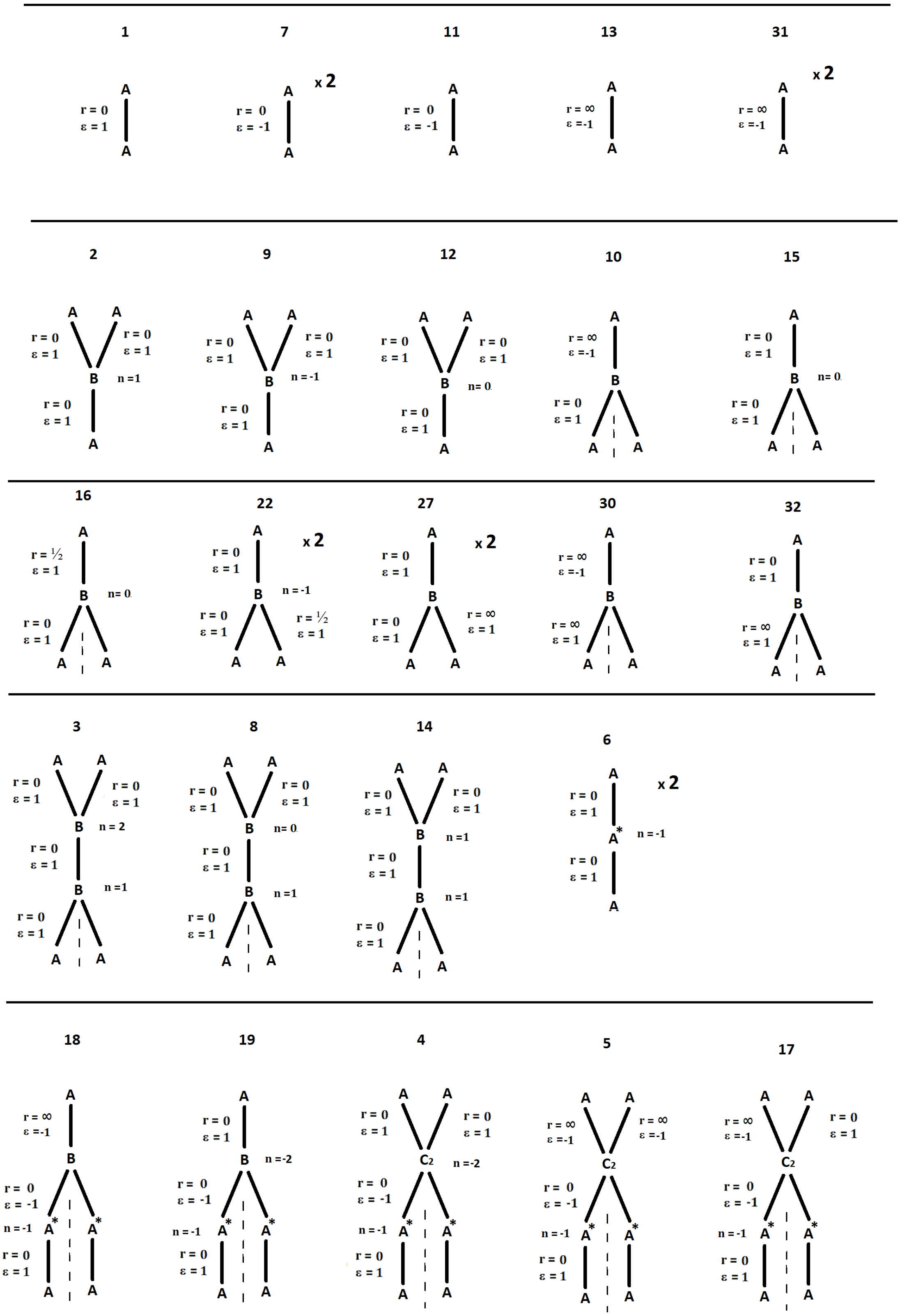


Таблица 7: Список молекул с матрицами склейки. Часть 1.

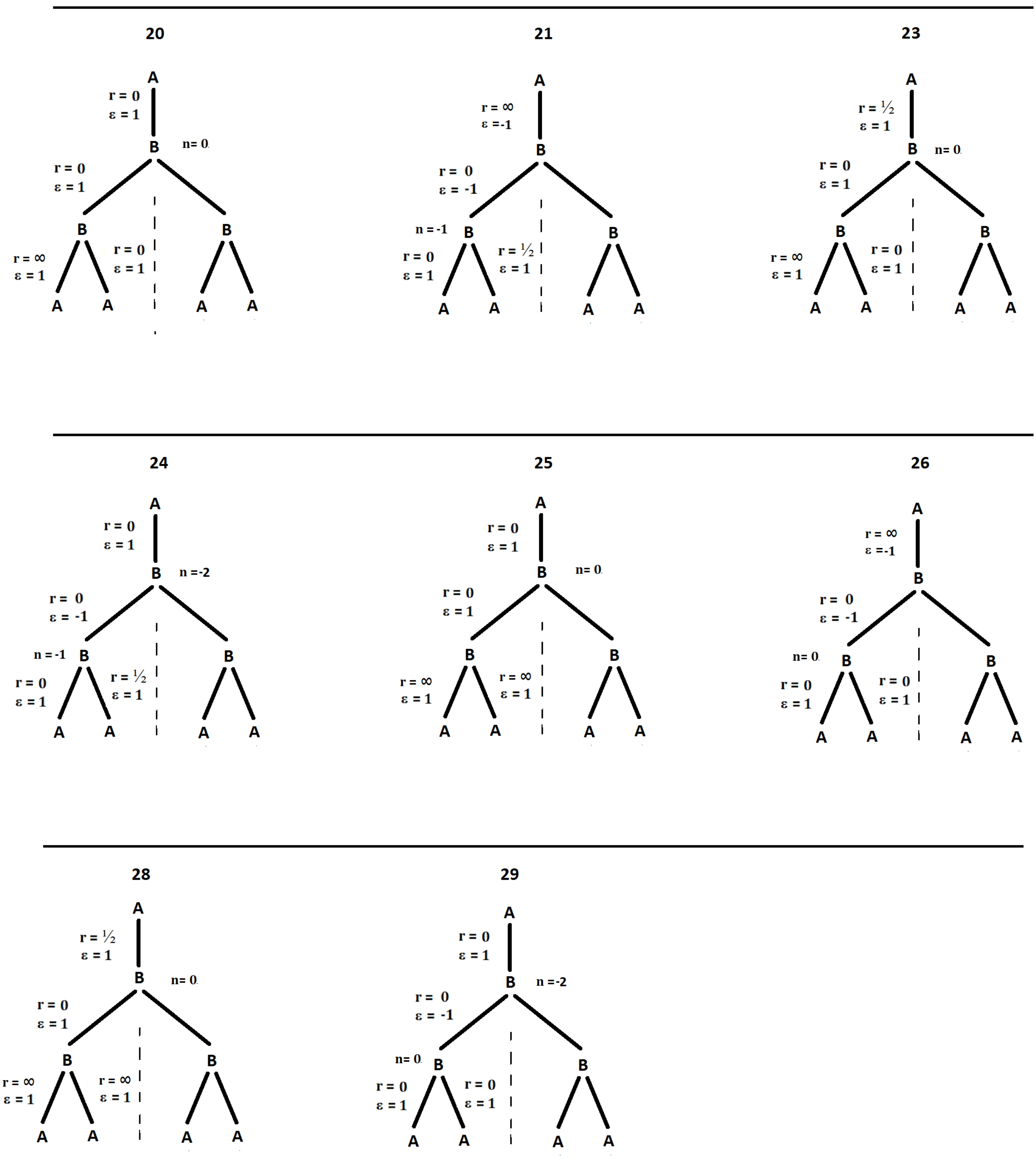


Таблица 8: Список молекул с матрицами склейки. Часть 2.

символ	дуга бифуркационной диаграммы	атом	семейство торов
ξ_1	$(z_4, z_3), (z_4, z_5), (z_4, z_{11}), (z_4, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(1)
ξ_2	$(z_3, z_2), (z_5, z_2)$	2 A	(3)
ξ_3	$(z_2, z_1), (z_{10}, z_1)$	2 A	(2)
ξ_4	$(z_6, z_5), (z_6, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(4)
ξ_5	$(z_8, z_9), (z_8, z_{10}), (z_{11}, z_{10}), (z_{11}, z_9)$	A	(1)

Таблица 9: Новые семейства дуг бифуркационных диаграмм.

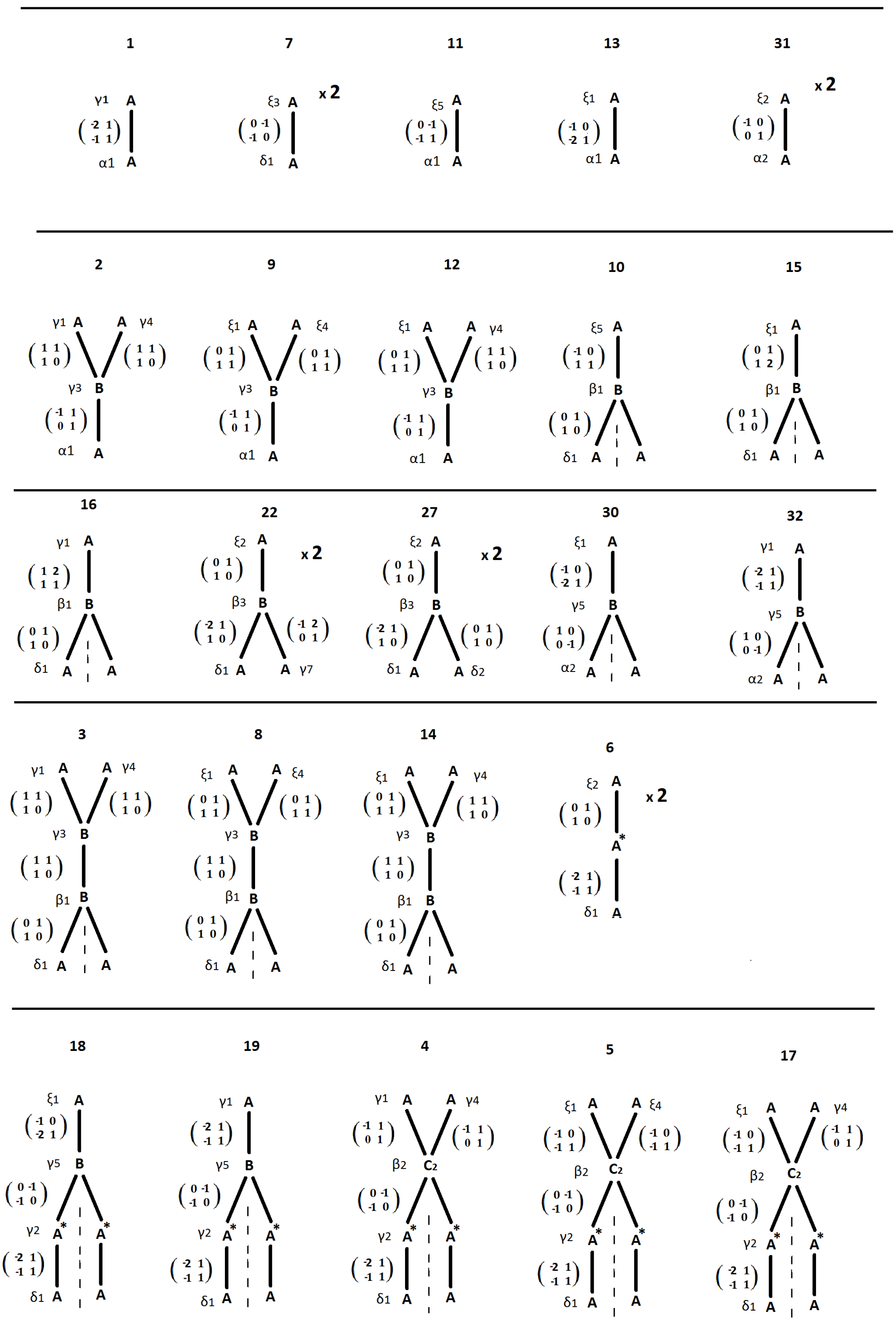


Таблица 10: Список молекул с матрицами склейки. Часть 1.

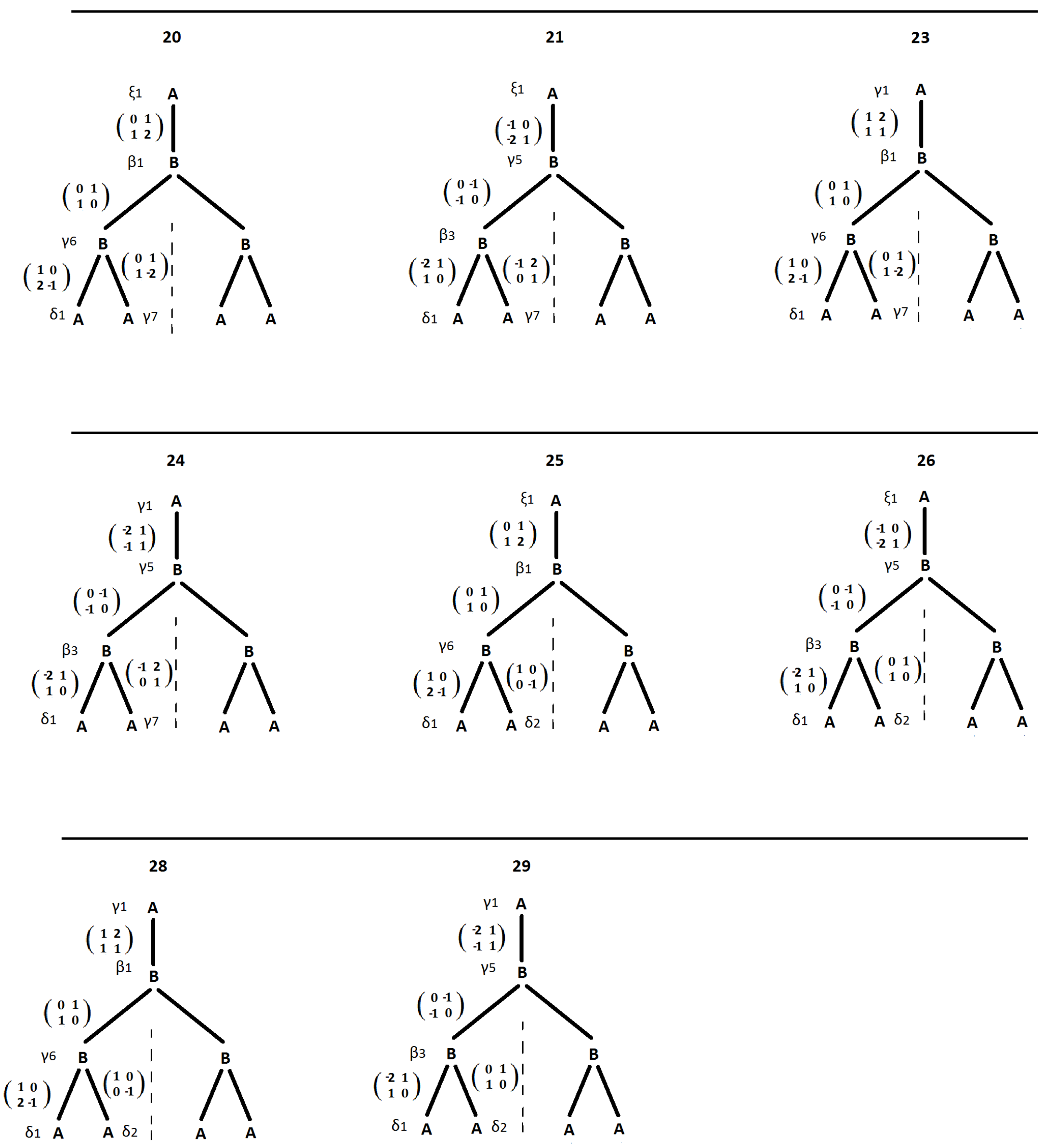


Таблица 11: Список молекул с матрицами склейки. Часть 2.

класс L_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
молекула	1, 7, 11	2, 9	3	4	5	6	8	10	12, 15	13, 31	14	16	17

класс L_i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
молекула	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	32

Таблица 12: Классификация слоений на связных компонентах $Q^3_{a,b,h}$.

X.1	y_1	1	y_4	2	y_2	3	y_3	4	z_7	5	z_5	6	z_2	7	z_1
X.2	y_1	1	y_4	2	y_2	3	z_7	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
XI.1	y_1	1	y_4	2	z_7	9	y_2	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1		
XI.2	y_1	1	y_4	2	z_7	9	z_8	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1		
XII	y_1	1	y_4	2	z_7	9	z_8	11	z_9						

Таблица 13: Промежутки X-XII: порядок 3-камер и особых точек.

IX.1	y_1	1	y_6	2	z_4	12	z_6	9	z_8	11	z_9				
IX.2	y_1	1	z_4	13	y_6	12	z_6	9	z_8	11	z_9				
VIII	y_1	1	z_4	13	z_{11}	11	z_9								
VII.1	y_1	1	y_6	2	z_4	12	z_6	9	z_8	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1
VII.2	y_1	1	z_4	13	y_6	12	z_6	9	z_8	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1
VII.3	y_1	1	y_6	2	z_4	12	z_6	9	y_2	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.4	y_1	1	z_4	13	y_6	12	z_6	9	y_2	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.5	y_1	1	y_6	2	z_4	12	y_2	14	z_6	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.6	y_1	1	z_4	13	y_6	12	y_2	14	z_6	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VII.7	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	z_6	8	z_8	10	z_{10}	7	z_1
VI.1	y_1	1	z_4	13	z_{11}	11	y_2	10	z_{10}	7	z_1				
VI.2	y_1	1	z_4	13	y_2	15	z_{11}	10	z_{10}	7	z_1				

Таблица 14: Области VI-IX: порядок 3-камер и особых точек.

V.3	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.4	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.5	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_6	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.6	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_6	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.7	y_1	1	y_2	16	y_6	3	z_4	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.9	y_1	1	y_2	16	y_6	3	z_4	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.12	y_1	1	y_2	16	y_6	3	y_3	4	z_4	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.2	y_1	1	z_4	13	y_6	12	y_2	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.1	y_1	1	y_6	2	z_4	12	y_2	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.8	y_1	1	y_6	2	y_2	3	z_4	14	z_6	8	y_3	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.10	y_1	1	y_6	2	y_2	3	z_4	14	y_3	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1
V.11	y_1	1	y_6	2	y_2	3	y_3	4	z_4	17	z_6	5	z_5	6	z_2	7	z_1

Таблица 15: Область V: порядок 3-камер и особых точек.

IV.1	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_6	14	y_3	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.2	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_6	14	y_3	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.3	y_1	1	y_2	16	y_6	3	z_4	14	y_3	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.4	y_1	1	y_2	16	y_6	3	y_3	4	z_4	17	y_5	18	z_3	6	z_2	7	z_1
IV.5	y_1	1	y_2	16	y_6	3	y_3	4	y_5	19	z_4	18	z_3	6	z_2	7	z_1

Таблица 16: Область IV: порядок 3-камер и особых точек.

III.1	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_9	20	y_7	21	z_3	22	y_8	6	z_2	7	z_1
III.2	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_9	20	y_7	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.3	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_9	20	y_7	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.4	y_1	1	y_2	16	y_9	23	z_4	20	y_7	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.5	y_1	1	y_2	16	y_9	23	y_7	24	z_4	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
III.6	y_1	1	y_2	16	y_9	23	y_7	24	y_8	19	z_4	18	z_3	6	z_2	7	z_1

Таблица 17: Область III: порядок 3-камер и особых точек.

II.1	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_7	26	z_3	27	y_{10}	22	y_8
II.3	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_7	26	y_{10}	21	z_3	22	y_8
II.4	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_{10}	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.5	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_{11}	25	y_{10}	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.6	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	z_4	25	y_{10}	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.7	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_{10}	23	z_4	20	y_7	21	y_8	18	z_3
II.8	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_{10}	23	y_7	24	z_4	21	y_8	18	z_3
II.9	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_{10}	23	y_7	24	y_8	19	z_4	18	z_3
II.2	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_{10}	20	y_7	21	z_3	22	y_8
II.10	y_1	1	z_4	13	y_2	15	y_{11}	25	y_7	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.11	y_1	1	y_2	16	z_4	15	y_{11}	25	y_7	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.12	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	z_4	25	y_7	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.13	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_7	29	z_4	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3
II.14	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_7	29	y_{10}	24	z_4	21	y_8	18	z_3
II.15	y_1	1	y_2	16	y_{11}	28	y_7	29	y_{10}	24	y_8	19	z_4	18	z_3

Таблица 18: Область II: порядок 3-камер и особых точек. Нетривиальная часть.

I.1	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	z_3	31	y_{13}	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.2	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	y_{13}	26	z_3	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.3	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	y_{13}	26	y_{10}	21	z_3	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.4	y_1	1	z_4	13	y_{12}	30	y_{13}	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.9	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	z_3	31	y_{13}	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.10	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	y_{13}	26	z_3	27	y_{10}	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.11	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	y_{13}	26	y_{10}	21	z_3	22	y_8	6	z_2	7	z_1
I.5	y_1	1	y_{12}	32	z_4	30	y_{13}	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.6	y_1	1	y_{12}	32	y_{13}	29	z_4	26	y_{10}	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.7	y_1	1	y_{12}	32	y_{13}	29	y_{10}	24	z_4	21	y_8	18	z_3	6	z_2	7	z_1
I.8	y_1	1	y_{12}	32	y_{13}	29	y_{10}	24	y_8	19	z_4	18	z_3	6	z_2	7	z_1

Таблица 19: Область I: порядок 3-камер и особых точек.

номер	название	вид в (u,v)	вид в (q,s)
f_1	f_l	$v = u$	$s(q) = q^2$
f_4	f_r	$v = \dfrac{u^2}{\tau^2}$	$s(q) = \dfrac{q^{4/3}}{\tau^{2/3}}$
f_9	f_m	$u = \tau^2$	$s(q) = \dfrac{q}{\tau}$
f_{14}	f_t	$v = \dfrac{1}{4}\left(\tau + \dfrac{u}{\tau}\right)^2$	$q(s) = \tau s\sqrt{-1 + \dfrac{2}{\tau\sqrt{s}}}$
f_{24}	f_k	$\varnothing$	$s(q) = -\dfrac{1}{\tau^2}(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) + \dfrac{2}{\tau^2}\left(1 - \tau^{2/3}q^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}$

Таблица 20: Вид кривых в координатах (q,s).

№	формула	(x_1, x_2)	пары особых точек
0	$u(v) = 0$	$(0,\ \infty)$	
1	$v(u) = u$	$(0,\ \infty)$	$(-l, +l)_0,\ (-r, +r)_0,\ (l, lt, rt, z_1)_0$
2	$v(u) = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	$(0,\ \infty)$	$(+l, -r)_1$
3	$v(u) = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	$(0,\ \tau^2)$	$(+l, +r)_1$
4	$v(u) = \dfrac{u^2}{\tau^2}$	$(\tau^2,\ \infty)$	$(+l, lt)_0,\ (cusp, +l)_0,\ (cusp, lt)_0$
5	$v(u) = \tau\sqrt{u}$	$(0,\ \tau^2)$	$(+r, rt)_0,\ (cusp, +r)_0,\ (cusp, rt)_0$
7	$v(u) = \dfrac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$	$(\tau^2,\ \infty)$	$(lt, -r)_1$
8	$v(u) = \dfrac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}$	$(\tau^2,\ \infty)$	$(+r, lt)_1$
9	$u(v) = \tau^2$	$\tau^2,\ \infty)$	$(lt, +r)_1,\ (+r, int)_0,\ (lt, int)_1$
10	$v(u) = \tau^2$	$(0,\ \tau^2)$	$(+l, rt)_1,\ (+l, int)_0,\ (int, rt)_1$
13	$v(u) = 8\tau\sqrt{u}$	$(0,\ 64\tau^2)$	$(cusp, -r)_1$
14	$v(u) = \dfrac{1}{4}\left(\tau + \dfrac{u}{\tau}\right)^2$	$(0,\ \tau^2)$	$(l, +l)_1$
14	$v(u) = \dfrac{1}{4}\left(\tau + \dfrac{u}{\tau}\right)^2$	$(\tau^2,\ \infty)$	$(l, +l)_1, (+l, rootl)_1 (l, rootl)_1$
15	$v(u) = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	$(0,\ \infty)$	$(l, -r)_1$
16	$v(u) = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	$(0,\ \infty)$	$(l, +r)_1$
17	$v(u) = \dfrac{(2u + \tau^2)^3}{27\tau^2 u}$	$(0,\ \infty)$	$(cusp, l)_1$
18	$v(u) = \dfrac{\tau^2}{2}$	$\left(0, \dfrac{\tau^2}{2}\right)$	$(l, rt)_1$

Таблица 21: Разделяющие кривые для особых точек первой серии.

№	формула	(x_1, x_2)	пары особых точек
6	$u(v) = \dfrac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau}$	$(0,\ \tau^2)$	$(rt, +l)_1$
11	$v(u) = \dfrac{\tau^2}{2}\left(1 + \dfrac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2}\right)$	$\left(\dfrac{\tau^2}{2}, \tau^2\right)$	$(lt, rt)_1$
12	$v(u) = \dfrac{u^2}{64\tau^2}$	$(64\tau^2,\ \infty)$	$(-l, cusp)_1$
19	$\mathbf{a}(\mathbf{b}) = 3b^{2/3}c_1^{2/3}\varkappa - \varkappa^2 c_1^2$	$\varnothing$	(cusp, int)

Таблица 22: Кривые с конечным числом точек разделяющего множества Θ.

грань	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
точка	y_1	y_2	y_3	z_5	z_2	z_1	y_3	y_2	z_8	z_{10}	z_8	y_2	z_9	y_6
выше	1	3	5	6	7	$\oslash$	4	8	10	7	11	10	$\oslash$	2
ниже	$\oslash$	2	8	5	6	7	3	9	8	10	9	11	11	1
грань	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}
точка	z_4	z_6	z_4	y_6	z_{11}	y_2	z_6	y_2	y_6	z_{11}	y_3	z_6	y_2	z_4
выше	12	9	13	12	11	14	8	15	14	10	17	5	16	15
ниже	2	12	1	13	13	12	14	13	15	15	14	17	1	16
грань	p_{29}	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{35}	p_{36}	p_{37}	p_{38}	p_{39}	p_{40}	p_{41}	p_{42}
точка	y_6	z_4	z_4	y_5	z_3	y_5	z_4	y_9	y_7	z_3	y_8	y_8	y_9	z_4
выше	3	17	14	18	6	19	18	20	21	22	6	18	23	20
ниже	16	4	3	17	18	4	19	15	20	21	22	21	16	23
грань	p_{43}	p_{44}	p_{45}	p_{46}	p_{47}	p_{48}	p_{49}	p_{50}	p_{51}	p_{52}	p_{53}	p_{54}	p_{55}	p_{56}
точка	y_7	z_4	y_8	y_{11}	y_7	z_3	y_{10}	y_{10}	y_{10}	y_{11}	z_4	y_{10}	y_7	z_4
выше	24	21	19	25	26	27	22	21	20	28	25	23	29	26
ниже	23	24	24	15	25	26	27	26	25	16	28	28	28	29
грань	p_{57}	p_{58}	p_{59}	p_{60}	p_{61}	p_{62}	p_{63}	p_{64}	p_{65}	p_{66}				
точка	y_{10}	y_{12}	z_3	y_{13}	y_{13}	y_{12}	z_4	y_{13}	S^1	S^2				
выше	24	30	31	27	26	32	30	29	$\oslash$	$\oslash$				
ниже	29	13	30	31	30	1	32	32	13	31				

Таблица 23: Перестройки меченых молекул для компактного случая Ковалевской.