ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ «РЕЗИНОВЫЙ ШАР НА ПЛОСКОСТИ»

Выполнил студент
607 группы
Христов Антон Павлович

____

Научные руководители:
Профессор, доктор физ.-мат. наук Фоменко Анатолий Тимофеевич

____

Ассистент, кандидат физ.-мат. наук Козлов Иван Константинович

____

Москва
2018 г.

Содержание

1 Введение

1.1 История вопроса

Задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной абсолютно шероховатой поверхности (задача о качении шара Чаплыгина) поставлена С.А. Чаплыгиным в работе [16]. Предполагается, что мгновенная скорость точки контакта шара равна нулю. В работах [8] и [11] исследуется динамика шара Чаплыгина при наличии еще одного ограничения: проекция вектора угловой скорости на нормаль к плоскости должна равняться нулю. Такую систему называют **"Резиновый шар на плоскости"**. В дальнейшем данная система исследовалась многими авторами. Отметим, что рассматриваемая механическая система не является гамильтоновой (см. работу [9]). Этому препятствует наличие неголономной связи - отсутствие проскальзывания при качении. В своей работе [8] А.В. Борисов и И.С. Мамаев показали, что данная система становится гамильтоновой после замены времени (такие системы называются конформно-гамильтоновыми).
А.В. Борисовым и И.С. Мамаевым также было показано в работе [8], что задача о качении шара останется конформно-гамильтоновой, если поместить в шар гиростат.

Топологические свойства для задачи о качении резинового шара по плоскости с гиростатом были исследованы А.Ю. Москвиным в работе [11], в частности им было сделано следующее:

- построены бифуркационные диаграммы отображения момента (а также бифуркационные комплексы);
- описаны критические решения;
- исследована устойчивость критических окружностей.

1.2 Результаты

Отметим, что обе системы — как резиновый шар на плоскости с гиростатом, так и без него — были заданы как интегрируемые конформно-гамильтоновы системы на особых симплектических листах скобки Пуассона. Гамильтониан и интеграл коммутировали только при нулевой постоянной площадей.

В этой работе мы

1. Продолжили систему “Резиновый шар на плоскости с гиростатом” до конформно-гамильтоновой системы, которая будет интегрируемой при любом значении интеграла площадей. Эту новую систему мы будем называть **“Обобщенный резиновый шар на плоскости с гиростатом”.** Интеграл для этой системы остался прежним и задан формулой (3). Новый гамильтониан задан формулой (2) и является однородным многочленом четвертой степени. Старый квадратичный гамильтониан получается из нового, если приравнять к нулю постоянную площадей и поделить на геометрический интеграл.

2. Исправили опечатку в формуле для скобки Пуассона для шара Чаплыгина с гиростатом, допущенную в работах Борисова-Мамаева [8] и Москвина [11]. Правильная скобка Пуассона задана формулой (4).

3. Для новой системы “Обобщенный резиновый шар на плоскости с гиростатом” мы описали точки ранга 1 и 0 (см. Теорему 4 и Теорему 5).
4. Построили бифуркационные диаграммы отображения момента (см. Теорему 6).
5. Исследовали невырожденность и определили тип точек ранга 0 (см. Теорему 7)
6. Исследовали невырожденность и определили тип точек ранга 1, а также описали перестройки торов Лиувилля (см. Теорему 8, Теорему 9, Теорему 10 и Теорему 11)

1.3 Благодарность.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи и ценные советы, а также Ивану Константиновичу Козлову за помощь в написании работы.

2 Основные понятия.

2.1 Симплектические и пуассоновы многообразия.

Определение 1. ***Скобкой Пуассона*** *на многообразии* M^n *называется отображение* $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M^n) \times C^\infty(M^n) \to C^\infty(M^n)$, *удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. *кососимметричность:* $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
2. *линейность:* $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$ *для любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
3. *тождество Лейбница:* $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$,
4. *тождество Якоби:* $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Учитывая свойства линейности, кососимметричности и тождество Лейбница, получаем, что любая скобка Пуассона на многообразии M^n может быть задана при помощи кососимметрического тензорного поля типа (2, 0) по формуле:

$$\{f, g\} = A^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

В любых локальных координатах $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ компоненты A^{ij} **тензора Пуассона** имеют вид $A^{ij} = \{x^i, x^j\}$. А, исходя из тождества Якоби, получаем, что кососимметрическое тензорное поле A типа (2, 0) на многообразии является тензором Пуассона для некоторой скобки Пуассона тогда и только тогда, когда

$$A^{is}\frac{\partial A^{jk}}{\partial x^s} + A^{ks}\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^s} + A^{js}\frac{\partial A^{ki}}{\partial x^s} = 0, \qquad \forall\ i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, для определения скобки Пуассона достаточно задать тензор Пуассона.

Определение 2. ***Симплектической структурой*** *на гладком многообразии M называется дифференциальная 2-форма ω, удовлетворяющая двум условиям:*

1. *ω замкнута, то есть $d\omega = 0$.*
2. *ω невырождена в каждой точке многообразия, то есть в любых локальных координатах $\det \Omega(x) \neq 0$, где $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ — матрица формы ω.*

Многообразие, снабженное симплектической структурой, называется **симплектическим**. Из невырожденности формы ω следует, что симплектические многообразия всегда четномерны.

Любое симплектическое многообразие является пуассоновым – тензор Пуассона при этом задается формулой $A^{ij}\omega_{jk} = \delta^i_k$. Можно показать, что тождество Якоби для тензора Пуассона A будет эквивалентно замкнутости формы ω.

2.2 Интегрируемые гамильтоновы системы.

Любая гладкая функция H на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задает на нем векторное поле v_H, называемое **гамильтоновым векторным полем** с гамильтонианом H, определяемое тождеством

$$\omega(u, v_H) = u(H),$$

где u – произвольный вектор касательного пространства, а $u(H)$ – производная функции H вдоль вектора u. Векторное поле v_H также иногда называют **косым градиентом** функции H и обозначают $\operatorname{sgrad} H$. В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^{2n})$ компоненты этого векторного поля имеют вид:

$$(\operatorname{sgrad} H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j},$$

где ω^{ij} – элементы матрицы обратной к матрице $\Omega = (\omega_{ij})$.

Динамическую систему $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ на многообразии (M^{2n}, ω) называют **гамильтоновой системой** с n степенями свободы. Функцию H при этом называют ее **гамильтонианом**, а многообразие M^{2n} — ее **фазовым пространством**.

Функцию f на фазовом пространстве M называют **первым интегралом** гамильтоновой системы с гамильтонианом H, если она постоянна на всех траекториях системы. Другими словами, функция f является первым интегралом системы $\dot{x} = v_H$ тогда и только тогда, когда $v_H(f) = 0$ или, что эквивалентно, $\{f, H\} = 0$.

Определение 3. *Гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} называется* ***вполне интегрируемой по Лиувиллю****, если существует набор гладких функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ таких, что:*

1. *$f_1, f_2, \ldots, f_n$ — первые интегралы системы,*
2. *функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функционально независимы на M^{2n}, то есть почти всюду на M^{2n} их дифференциалы линейно независимы: $\mathrm{d}f_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_n \neq 0$,*

3. *$\{f_i, f_j\} = 0$ для любых i и j,*

4. *векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ полны для всех i, то есть естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.*

В этой работе вполне интегрируемые по Лиувиллю системы мы будем для краткости называть интегрируемыми системами. Часто в качестве первого интеграла f_1 для интегрируемой системы берут гамильтониан H. В этом случае интегрируемую систему обозначают через $(M^{2n}, \omega, H = f_1, \ldots, f_n)$ или, для краткости, через $(M^{2n}, \omega, f_1, \ldots, f_n)$.

Определение 4. ***Слоением Лиувилля****, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.*

Для интегрируемой системы $(M^{2n}, \omega, f_1, \ldots, f_n)$ **отображением момента** называют отображение
$$F = (f_1, f_2, \ldots f_n) : M^{2n} \to \mathbb{R}^n,$$
сопоставляющее точке $x \in M^{2n}$ точку $(f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим регулярную **поверхность уровня** отображения момента
$$T_\xi = \{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \xi_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n\}.$$
Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы в каждой точке T_ξ.

Топология вполне интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности совместной регулярной поверхности уровня ее первых интегралов полностью описывается теоремой Лиувилля.

Теорема 1 (Лиувилля)**.** *Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$, и T_ξ — регулярная поверхность уровня отображения момента. Тогда*

1. *Любая связная и компактная компонента поверхности уровня T_ξ является подмногообразием (M^{2n}, ω), диффеоморфным n-мерному тору T^n. Этот тор называется тором Лиувилля.*

2. *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T^n тривиально, то есть диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n.*

3. *В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \ldots, s_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:*

   (a) *$s_1, \ldots, s_n$ – координаты на диске D^n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – стандартные угловые координаты на торе T^n, $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

   (b) *$\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.*

(c) Переменные действия s_i являются функциями от интегралов $f_1, \ldots, f_n$.

(d) В переменных действие-угол гамильтонов поток $\operatorname{sgrad} H$ *выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , то есть гамильтоновы уравнения принимают вид:*

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \ldots, s_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток $\operatorname{sgrad} H$ *задает условно периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).*

Доказательство теоремы Лиувилля можно найти, например, в [7].

2.3 Понятие конформно-гамильтоновой системы.

Задачи неголономной механики обычно нельзя представить в гамильтоновой форме, однако часто можно представить их в так называемом **конформно-гамильтоновом** виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x}) \operatorname{sgrad} H(\mathbf{x}),$$

где приводящий множитель $\mu(x)$ — знакоопределенная на всем многообразии M^{2n} функция. Легко видеть, что траектории решений данного уравнения после замены времени

$$d\tau = \mu(x) dt,$$

совпадают с траекториями гамильтоновой системы $\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{sgrad} H(\mathbf{x})$.

Конформно-гамильтонову систему будем называть **интегрируемой**, если соответствующая ей гамильтонова система является интегрируемой.

2.4 Гамильтоновы системы на пуассоновых многообразиях.

Любую скобку Пуассона можно рассматривать как отображение $A : T^*M \longrightarrow TM$. Так же, как и для симплектического многообразия, любая гладкая функция H на пуассоновом многообразии (M, A) определяет на нем векторное поле v_H, называемое гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом H, задаваемое формулой

$$v_H = A \, \mathrm{d}H.$$

По аналогии с симплектическим случаем векторное поле v_H мы будем также называть косым градиентом функции H и обозначать через $\operatorname{sgrad} H$.

Любое пуассоново многообразие естественным образом распадается на дизъюнктивное объединение подмножеств, называемых симплектическими листами, каждое из которых обладает естественной структурой симплектического многообразия. А именно, две точки принадлежат одному симплектическому листу тогда и только тогда, когда одну из них можно перевести в другую при помощи последовательных сдвигов вдоль гамильтоновых векторных полей. Каждый определенный таким образом лист является погруженным многообразием. Это следует из **теоремы Дарбу-Вейнстейна** о локальном устройстве пуассоновых многообразий (подробнее об этой теореме см., например, в [5]).

Теорема 2 (Дарбу-Вейнстейн). *В окрестности произвольной точки x пуассонова многообразия M^n существуют локальные координаты*

$$p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m, s_1, \ldots, s_k, \quad (2m + k = n),$$

в которых скобка Пуассона имеет вид

$$\{p_i, q_j\} = \delta^i_j, \quad \{s_i, s_j\} = \varphi_{ij}(s_1, \ldots, s_k),$$

где все функции φ_{ij} обращаются в ноль в точке x. Все остальные попарные скобки координатных функций при этом равны нулю.

Видно, что в локальных координатах (p_i, q_j, s_k) из теоремы Дарбу–Вейнстейна, симплектический лист, проходящий через начало координат локально задается уравнениями $s_k = 0$. Симплектическая структура на нем имеет вид $\omega = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$. В общем случае пуассонова структура задаёт симплектическую структуру на каждом симплектическом листе по формуле

$$\omega(v_f, v_g) = \{f, g\}.$$

Таким образом мы можем рассматривать интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических листах пуассонового многообразия.

На пуассоновом многообразии (M, A) две функции f и g называют **коммутирующими** или **находящимися в инволюции**, если $\{f, g\} = 0$. Функция f называется **функцией Казимира** скобки Пуассона, если она коммутирует с любой другой функцией на многообразии относительно этой скобки.

Многие интегрируемые гамильтоновы системы в физике и механике задаются следующим образом: рассматривается набор функций в инволюции, при этом часть из этих функций — это функции Казимира, регулярные поверхности уровня которых задают неособые симплектические листы скобки Пуассона, а оставшиеся функции задают интегрируемую гамильтонову систему на этих симплектических листах. В частности, такой вид имеет рассматриваемая в этой работе система.

2.5 Невырожденные особенности отображения момента.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на (M^4, ω) с гамильтонианом H и первым интегралом F. Отображением момента в данном случае является отображение

$$H \times F : M^4 \to \mathbb{R}^2(h, f).$$

Определение 5. *Точка $x \in M^4$ называется* ***особой точкой ранга i****, если $rk(d(H \times F)(x)) = i$.*

Напомним, что критическими точками называют точки, в которых ранг дифференциала отображения момента меньше двух. Образ критических точек отображения момента называют **бифуркационной диаграммой** или **диаграммой Смейла**. Обычно бифуркационная диаграмма состоит из набора кривых и изолированных точек.

Для более наглядной визуализации структуры критических точек мы будем рассматривать отображение момента и двумерный комплекс K, точками которого являются отдельные компоненты связности поверхностей уровня отображения момента, то есть множеств $(H \times F)^{-1}(y)$, где точка $y \in \mathbb{R}^2$ пробегает образ M^4 при отображении момента.

Определение 6. *Комплекс K называется* ***бифуркационным комплексом*** *для интегрируемой системы.*

В этом разделе мы дадим определение одного особого класса критических точек, а именно, мы дадим определение невырожденных точек для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Существует общее определение невырожденности особенностей отображения момента, которое можно найти в [7], но, для простоты, мы ограничимся случаем двух степеней свободы.

2.5.1 Невырожденные точки ранга ноль.

Пусть ξ — точка ранга 0 для отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, H, F), то есть

$$dH|_\xi = dF|_\xi = 0.$$

На $T_\xi M^4$ можно корректно определить два линейных оператора

$$A_H := \Omega^{-1} d^2 H, \;\; A_F := \Omega^{-1} d^2 F,$$

которые совпадают с линеаризациями векторных полей $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} F$ в точке ξ. Оба оператора A_H и A_N удовлетворяют условию:

$$A^T \Omega + \Omega A = 0,$$

где Ω — матрица формы $\omega|_\xi$, поэтому их можно рассматривать как элементы симплектической алгебры Ли $sp(4, \mathbb{R})$. Так как функции H и F коммутируют между собой, то линейные операторы A_H и A_N порождают в $sp(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную 2-мерную подалгебру $K(H, F)$.

Определение 7. *Точка ξ ранга ноль отображения момента называется* ***невырожденной****, если подалгебра $K(H, F)$ является картановской подалгеброй в $sp(4, R)$.*

Картановские подалгебры симплектической алгебры Ли $sp(2n, \mathbb{R})$ были классицированы Вильямсоном (подробнее см. [7]). В двумерном случае существует эффективный способ проверки картановости подалгебры $K(H, F)$: коммутативная подалгебра $sp(4, \mathbb{R})$ является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна, и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. При этом существует только 4 несопряженных между собой картановских подалгебр в $sp(4, \mathbb{R})$, и тип подалгебры полностью определяется спектром оператора общего положения. Таким образом, мы получаем следующий критерий невырожденности точек ранга ноль.

Утверждение 1. *Точка $\xi \in (M, \omega)$ ранга 0 для отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, H, F) является* ***невырожденной*** *тогда и только тогда, когда линеаризации A_H и A_F в точке ξ гамильтоновых векторных полей* $\operatorname{sgrad} H$ *и* $\operatorname{sgrad} F$ *обладают следующими свойствами:*

1. *операторы A_H и A_F линейно независимы,*

2. *существует линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_F$, которая имеет попарно различные ненулевые собственные значения.*

При этом, невырожденная точка ранга 0 полностью определяется спектром любой линейной комбинации $\lambda A_H + \mu A_F$ без нулевых собственных значений. А именно, тип точки следующим образом зависит от типа спектра:

- *Спектр $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\left\{0\right\}$ соответствует точкам типа* ***седло-седло****.*
- *Спектр $\alpha, -\alpha, i\beta, -i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\left\{0\right\}$ соответствует точкам типа* ***центр-седло****.*
- *Спектр $i\alpha, -i\alpha, i\beta, -i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\left\{0\right\}$ соответствует точкам типа* ***центр-центр****.*
- *Спектр $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\left\{0\right\}$ соответствует точкам типа* ***фокус-фокус****.*

Слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга 0 полностью определяется ее типом.

Теорема 3 (Рюссман)**.** *Пусть многообразие M^4, симплектическая структура ω и функции H и F являются вещественно - аналитическими. Тогда в окрестности невырожденной особой точки ранга ноль $\xi \in M^4$ всегда существуют канонические координаты (p_1, q_1, p_2, q_2), в которых функции H и F одновременно приводятся к одному из следующих видов:*

1. *случай* ***центр-центр****:* $H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \;\; F = F(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$,
2. *случай* ***центр-седло****:* $H = H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2), \;\; F = F(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$,
3. *случай* ***седло-седло****:* $H = H(p_1 q_1, p_2 q_2), \;\; F = F(p_1 q_1, p_2 q_2)$,
4. *случай* ***фокус-фокус****:* $H = H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1), \;\; F = F(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$.

Подробнее о теореме Рюссмана и ее многомерных аналогах можно прочитать в [7].

2.5.2 Невырожденные точки ранга один.

Рассмотрим теперь точку x **ранга 1** интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, H, F). Тогда в этой точке дифференциалы $\mathrm{d}H$ и $\mathrm{d}F$ зависимы, то есть существуют числа λ и μ т.ч.

$$\lambda \mathrm{d}H(x) + \mu \mathrm{d}F(x) = 0.$$

Здесь λ и μ определены однозначно с точностью до пропорциональности. Пусть L — подпространство (в касательном пространстве к M^4), порожденное линейно зависимыми векторами $\operatorname{sgrad} H$, $\operatorname{sgrad} F$, а $L^{'}$ — трехмерное подпространство, ортогональное к L в смысле симплектической формы. Тогда L — изотропное подпространство, поэтому $L \subset L^{'}$ и фактор $L^{'}/L$ обладает естественной структурой 2-мерного линейного симплектического пространства $\{\mathbb{R}^2, \omega_0\}$. Обозначим через v векторное поле $\lambda \operatorname{sgrad} H + \mu \operatorname{sgrad} F$, обращающееся в ноль в точке x, а через A_v линеаризацию этого векторного поля в точке x. Можно показать, что оператор A_v сохраняет пространства L и $L^{'}$, поэтому он порождает оператор $\widehat{A}_v$ на $L^{'}/L$, который является элементом $\operatorname{sp}(2, \mathbb{R})$.

Определение 8. *Точка x ранга 1 отображения момента называется **невырожденной** тогда и только тогда, когда у оператора $\widehat{A}_v$ есть ненулевые собственные значения.*

Так как функции H и F коммутируют, пространство L лежит в ядре оператора A_v, поэтому спектр оператора A_F отличается от спектра $\widehat{A}_F$ добавлением нулей.

Определение 9. *Невырожденная точка ранга 1 называется **эллиптической**, если спектр A_v содержит чисто мнимые собственные значения, и **гиперболической**, если спектр A_v имеет вещественные собственные значения.*

В каждом компактном слое отображения момента невырожденные точки ранга 1 образуют набор критических окружностей. Все точки каждой из этих окружностей имеют один и тот же тип (эллиптический или гиперболический). Устройство слоения Лиувилля в окрестности особых слоев отображения момента, содержащих только невырожденные точки, подробно описано в книге [7].

3 Описание системы

"Резиновый шар с ротором на плоскости" - это интегрируемая система с двумя степенями свободы, описывающая качение сбалансированного, динамически несимметричного шара по абсолютно шероховатой горизонтальной поверхности. Фазовым пространством системы является евклидово пространство R^6 с координатами $\omega, n \in R^3$.
Система задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = (J\omega + K) \times \omega + \mu n, \\ \dot{n} = n \times \omega, \\ \mu = -\frac{((J\omega + K) \times \omega, J^{-1}n)}{(n, J^{-1}n)} \end{cases} \tag{1}$$

где:

- ω - вектор угловой скорости;
- n - орт вертикали;
- K - вектор ротора;
- $J = I + DE$;

- $I = diag(I_1, I_2, I_3)$ - тензор инерции шара относительно его центра, полагаем, что $0 < I_1 < I_2 < I_3$;
- E – единичная матрица 3×3;
- $D = mr^2 \geq 0$;
- m - масса шара;
- r - радиус шара.

Система имеет четыре первых интеграла:

$$N = (n, n), \qquad C = (\omega, n),$$

$$H = \frac{(J\omega, \omega)}{2}(n, n) - (J\omega + K, n)(\omega, n), \tag{2}$$

$$F = (J\omega + K, J\omega + K)\,(n, n) - (J\omega + K, n)^2\,, \tag{3}$$

где (,) - евклидово скалярное произведение.

На самом деле система (1) является конформно-гамильтоновой системой с гамильтонианом H и интегралом F, а N и C являются функциями Казимира. Скобку Пуассона удобнее описать в координатах (M, γ):

$$\begin{gathered} \{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}(M_k + \rho^3 \left(K, J^{1/2}\gamma\right) \gamma_k), \\ \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$M = \rho J^{\frac{1}{2}}\omega, \tag{5}$$

$$\gamma = \rho^{-1} J^{-\frac{1}{2}} n, \tag{6}$$

$$\rho = (n, J^{-1}n)^{\frac{1}{2}} = (\gamma, J\gamma)^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Видно, что случай $K = 0$ соответствует алгебре Ли $e(3)$.
То, что скобка (4) является скобкой Пуассона немедленно следует из следующего несложного утверждения.

Утверждение 2. *Рассмотрим векторное поле $v(M, \gamma)$ на пространстве $\mathbb{R}^6(M, \gamma)$. Тогда формула*

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}(M_k + v_k), \qquad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \qquad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \tag{8}$$

задает скобку Пуассона на $\mathbb{R}^6(M, \gamma)$ тогда и только тогда, когда поле v зависит только от $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ и (M, γ), и

$$\operatorname{div}(\gamma \times v) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Формула (4) задает скобку Пуассона, если тождество Якоби выполнено для всех троек координатных функций. Условие

$$\left\{\gamma^i, \left\{M^j, M^k\right\}\right\} + \left\{M^j, \left\{M^k, \gamma^i\right\}\right\} + \left\{M^k \left\{\gamma^i, M^j\right\}\right\} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\left\{\gamma^i, v^j\right\} = 0$$

Алгебра функций, коммутирующих с функциями γ^i, порождается этими функциями γ^i и (M, γ). Поэтому

$$v = v((M, \gamma), \gamma^1, , \gamma^2, \gamma^3)$$

Тождество Якоби для координат M

$$\left\{M^i, \left\{M^j, M^k\right\}\right\} + \left\{M^j, \left\{M^k, M^i\right\}\right\} + \left\{M^k \left\{M^i, M^j\right\}\right\} = 0$$

выполненно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{3} \left\{M^i, v^i\right\} = 0$$

Это условие эквивалентно (9). □

Замечание 1. *Функция* (M, γ) *является функцией Казимира скобки* (8) *тогда и только тогда, когда* $\gamma \times v$ *=0.*

В координатах (M, γ) интегралы имеют вид:

$$N = (\gamma, \gamma), \qquad C = (M, \gamma),$$
$$H = \frac{(M, M)}{2}(\gamma, J\gamma) - (J^{1/2}M + \rho K, J^{1/2}\gamma)(M, \gamma),$$
$$F = (J^{1/2}M + \rho K, J^{1/2}M + \rho K)(\gamma, J\gamma) - (J^{1/2}M + \rho K, J^{1/2}\gamma)^2.$$

Для скобки (4) гамильтоновы векторные поля задаются формулой

$$\mathrm{sgrad} H = \left(\frac{\partial H}{\partial M} \times (M + \rho(K, J^{1/2}\gamma)\gamma) + \frac{\partial H}{\partial \gamma} \times \gamma, \quad \frac{\partial H}{\partial M} \times \gamma\right)$$

4 Нахождение особых точек

Рассмотрим симплектические листы скобки (4):

$$M^4_{c,a} = \{C = c, N = a\}. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Если вектор* v *т.,ч.* $(v, n) = 0$ *и* $Jv || n$, *то* $v = 0$.

Доказательство. Если $Jv = \alpha n$, то $(v, n) = (\alpha J^{-1} n, n) \neq 0$, т.к. матрица J положительно определена. $\square$

Теорема 4. *Точки ранга 0 для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) — это точки (w, n), в которых вектора n, ω и $J\omega + K$ лежат на одной прямой, т.е.*

$$\omega || n \qquad и \qquad J\omega + K || n. \tag{11}$$

Доказательство. В точке ранга 0 дифференциалы гамильтониана и интеграла должны быть линейно зависимы с дифференциалами функций Казимира. Выпишем явно все эти 4 дифференциала. Вместо дифференциалов dH и dF будем рассматривать следующие 1-формы

$$\alpha_H = dH + (J\omega + K, n)dC - \frac{(J\omega, \omega)}{2} dN, \qquad \alpha_F = dF - (J\omega + K, J\omega + K)dN.$$

Тогда

$$\begin{gathered} dN = (0, 2n) \\ dC = (n, \omega) \\ \alpha_H = (J\left((n,n)\omega - (\omega,n)n\right), -(n,\omega)\left(J\omega + K\right)) \\ \alpha_F = 2(J\left((n,n)\left(J\omega+K\right) - (J\omega+K,n)n\right), -(J\omega+K,n)\left(J\omega+K\right)) \end{gathered} \tag{12}$$

Остается заметить, что вектора

$$\begin{gathered} u_H = (n,n)\omega - (\omega,n)n = n \times (\omega \times n) \\ u_F = (n,n)(J\omega+K) - (J\omega+K,n)n = n \times ((J\omega+K) \times n) \end{gathered} \tag{13}$$

ортоганальны ветору n.

По Утверждению 3 в точках ранга 0 они должны быть равны 0, что эквивалентно (11). То, что в точках (11) ковектора α_H и α_F выражаются через dN и dC проверяется непосредственно. $\square$

Теорема 5. *Критические точки для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом H и интегралом F — это точки (w, n), в которых выполнено любое из следующих двух условий:*

1. $J\omega + K || \omega$.

2. $J\omega + K || n$.

Доказательство. Вначале проверим, что указанные точки являются критическими:

1. Если $\lambda(J\omega + K) + \mu\omega = 0$, то по формуле (12) $\lambda\alpha_H + \frac{\mu}{2}\alpha_F = 0$.

2. Если $J\omega + K||n$, то $\alpha_F = (0, \lambda n)$ для некоторой константы $\lambda \in \mathbb{R}$.

Докажем теперь, что в критических точках вектор $J\omega + K$ коллинеарен ω или n.

Утверждение 4. *В критических точках вектора n, ω и $J\omega + K$ лежат в одной плоскости.*

Доказательство. Посмотрим на левую часть ковекторов в (12) (т.е. на производные по ω). В критических точка вектора n, Ju_H и Ju_F (заданые формулой (13)) линейно зависимы. Вектора u_H и u_F ортогональны к n, поэтому по Утверждению 3 они должны быть коллинеарны. Как следствие, выражающиеся через них и n вектора ω и $J\omega + K$ лежат в одной плоскости с n. □

Вектора $J\omega + K$, ω и n линейно зависимы, поэтому

$$\lambda(J\omega + K) + \mu\omega + \zeta n = 0$$

Тогда

$$2\mu\alpha_H + \lambda\alpha_F = 2\zeta(n, n)\,(0, J\omega + K)$$

Если $J\omega + K$ не коллинеарен ни ω, ни n, то $\zeta \neq 0$, и вектора $(0, n), (n, \omega)$ и $(0, J\omega + K)$ линейно независимы. По формуле (12) в критических точках в линейной оболочке этих трех векторов должны лежать вектора $(Ju_H, 0)$ и $(Ju_F, 0)$. Но по Утверждению 2 это возможно только при $u_H = u_F = 0$, т.е. когда $\omega||n$ и $J\omega + K||n$. Теорема 5 доказана.

□

5 Бифуркационная диаграмма

5.1 Аналитическое представление бифуркационной диаграммы

Теорема 6. *Бифуркационная диаграмма отображения момента для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом* (2) *и интегралом* (3) *состоит из объединения следующих кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$:*

1. *Набора параметрических кривых $\sigma = \{h(\lambda, k(\lambda)\}$*

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{J_i k_i^2}{(J_i - \lambda)^2}\right) - \lambda c^2, \\ f(\lambda) &= \lambda^2 a \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i^2}{(J_i - \lambda)^2}\right) - \lambda^2 c^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\lambda \neq J_i$ и $f \geq 0$.

2. Лучей σ_i, если $K_i = 0$:

$$f = 2J_i h - aJ_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{K_j^2}{J_j - J_i} \right) + J_i^2 c^2 \tag{15}$$

где

$$f \geq 0 \qquad \text{и} \qquad h \geq \frac{a}{2} \left(\sum_{j \neq i} \frac{J_j K_j^2}{J_j - J_i} \right) - J_i c^2. \tag{16}$$

3. Отрезка τ_h на оси h:

$$h_A \leq h \leq h_B, \qquad f = 0,$$

где h_A и h_B — соответственно минимум и максимум функции

$$\hat{h}(n) = \frac{a(K, J^{-1}K)}{2} - \frac{a\left(c + (K, J^{-1}n)\right)^2}{2(n, J^{-1}n)} \tag{17}$$

на сфере $(n, n) = a$.

4. При $c = 0$ отрезка τ_f на оси f

$$h = 0, \qquad 0 \leq f \leq a(K, K).$$

Доказательство. Рассмотрим образы критических точек из Теоремы 5. Разберем несколько случаев (случаи 1, 2 и 3 соответствуют точкам $J\omega + K || \omega$, а случай 4 точкам $J\omega + K || n$):

1. Пусть $\omega = 0$. Тогда $H = 0$, $c = 0$, а $F = (n, n)(K, K) - (K, n)^2 = |K \times n|^2$
   Значит $0 \leq F \leq a(K, K)$.

2. Пусть $J\omega + K = \lambda\omega$, где $\lambda \neq J_i$. Тогда $\omega_i = \frac{K_i}{\lambda - J_i}$. Подставив эти выражения в формулы для гамильтониана (2) и интеграла (3), получим (14).

3. Пусть $J\omega + K = \lambda\omega$, где $\lambda = J_i$. Тогда $K_i = 0$, а $\omega_i = \frac{K_i}{J_i - J_j}$ при $i \neq j$.
   Подставив эти выражения в формулы для гамильтониана (2) и интеграла (3), получим:

$$F = aJ_i^2 \omega_i^2 + aJ_i^2 \left(\sum_{j \neq i} \frac{K_j^2}{(J_i - J_j)^2} \right) - J_i^2 c^2 \tag{18}$$

$$2H = aJ_i \omega_i^2 + a \left(\sum_{j \neq i} \frac{J_j K_j^2}{(J_i - J_j)^2} \right) - 2J_i c^2 \tag{19}$$

   Выразим ω_i^2 из (19) и подставим в (18), получим (15).

4. Пусть $J\omega + K = \lambda n$. Образами этих точек является отрезок τ_h. Образы точек лежат лежат на оси h, так как

$$F = |(J\omega + K) \times n|^2 = 0.$$

Параметр λ можно найти из условия $(\omega, n) = g$. Получаем

$$\omega = J^{-1}(\lambda n - K), \qquad \lambda = \frac{g + (K, J^{-1}n)}{(n, J^{-1}n)}$$

Значение гамильтониана в этом случае имеет вид

$$H = \frac{a(K, J^{-1}K)}{2} - \frac{a\left(g + (K, J^{-1}n)\right)^2}{2(n, J^{-1}n)}$$

$\square$

5.2 Построение бифуркационной диаграммы

Опишем некоторые свойства бифуркационной диаграммы.

1. Рассмотрим горизонтальную прямую $f = 0$
   (a) $f(0) = 0$
   (b) $\lambda = 0$ экстремум $f(\lambda)$
   (c) при построении набора параметрических кривых $\sigma = \{h(\lambda, k(\lambda)\}$ нарисуем кривые, описанные формулой 14 и возьмем все, что выше $f = 0$

2.
$$h'(\lambda) = -\left(a\sum_{j=1}^{3}\frac{J_jK_j^2}{(\lambda - J_j)^3} + c^2\right) = -g(\lambda) \tag{20}$$

$$f'(\lambda) = -2\lambda\left(a\sum_{j=1}^{3}\frac{J_jK_j^2}{(\lambda - J_j)^3} + c^2\right) = 2\lambda h'(\lambda) \tag{21}$$

3. (a) При $c \neq 0$:

$$\begin{gathered}\lim_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} h(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} h'(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} h'(\lambda) = +\infty \\ \lim_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = -\infty\end{gathered} \tag{22}$$

   (b) При $c = 0$:

$$\begin{gathered}\lim_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} h(\lambda) = 0 \\ \lim_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = a(K, K)\end{gathered} \tag{23}$$

4. При $K_i \neq 0$:

$$\lim_{\lambda\to J_i} h(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda\to J_i} h(\lambda) = -\infty \tag{24}$$

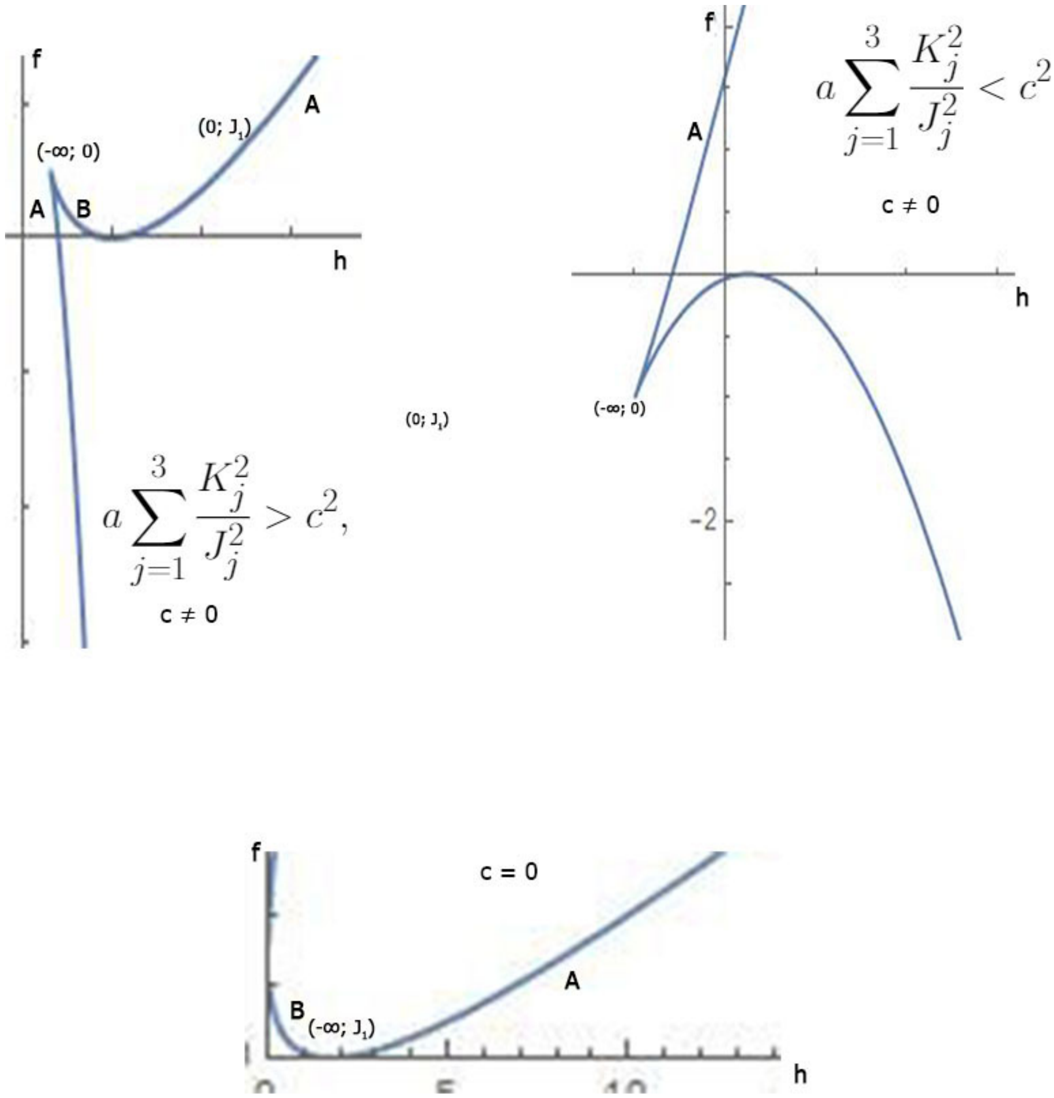


Рис. 1: Все возможные куски бифуркационной диаграммы при $\lambda \in (-\infty; J_1)$

5. Пусть $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $K_3 \neq 0$. Рассмотрим $g(\lambda)$, общую часть у $h'(\lambda)$ и $f'(\lambda)$:

$$\begin{gathered}\lim_{\lambda\to-\infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = c^2 > 0, \\ \lim_{\lambda\to J_i-0} h(\lambda) = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to J_i+0} h(\lambda) = +\infty\end{gathered} \tag{25}$$

Итак, на интервале $\lambda \in (J_3; +\infty)$ функция $g(\lambda)$ возрастает. На интервалах $\lambda \in (J_2; J_3)$, $\lambda \in (J_1; J_2)$ и $\lambda \in (-\infty; J_1)$ функция $g(\lambda)$ есть сумма монотонно возрастающей и убывающей функций. Значит есть только по одному значению на этих интервалах, где $g(\lambda) = 0$.

Кроме того $f'(0) = 0$. Если $a\sum_{j=1}^{3}\frac{K_j^2}{J_j^2} > c^2$, то ноль $g(\lambda)$ меньше нуля. В противном случае - больше нуля.

Возможные ветви бифуркационной диаграммы при $\lambda \in (-\infty; J_1)$ изображены на рис. 1

Аналогичные рассуждения работают при занулении компонент ротора.

6. Пусть $K_i = 0$. Начало луча σ_i соответствует точке $\omega_i = 0$. Координаты этой точки луча σ_i равны координатам кривой σ при $\lambda = J_i$. Таким образом начало луча лежит на кривой σ.

5.3 Бифуркационные диаграммы при $c \neq 0$

В этом разделе проиллюстрируем диаграммы при $c \neq 0$.

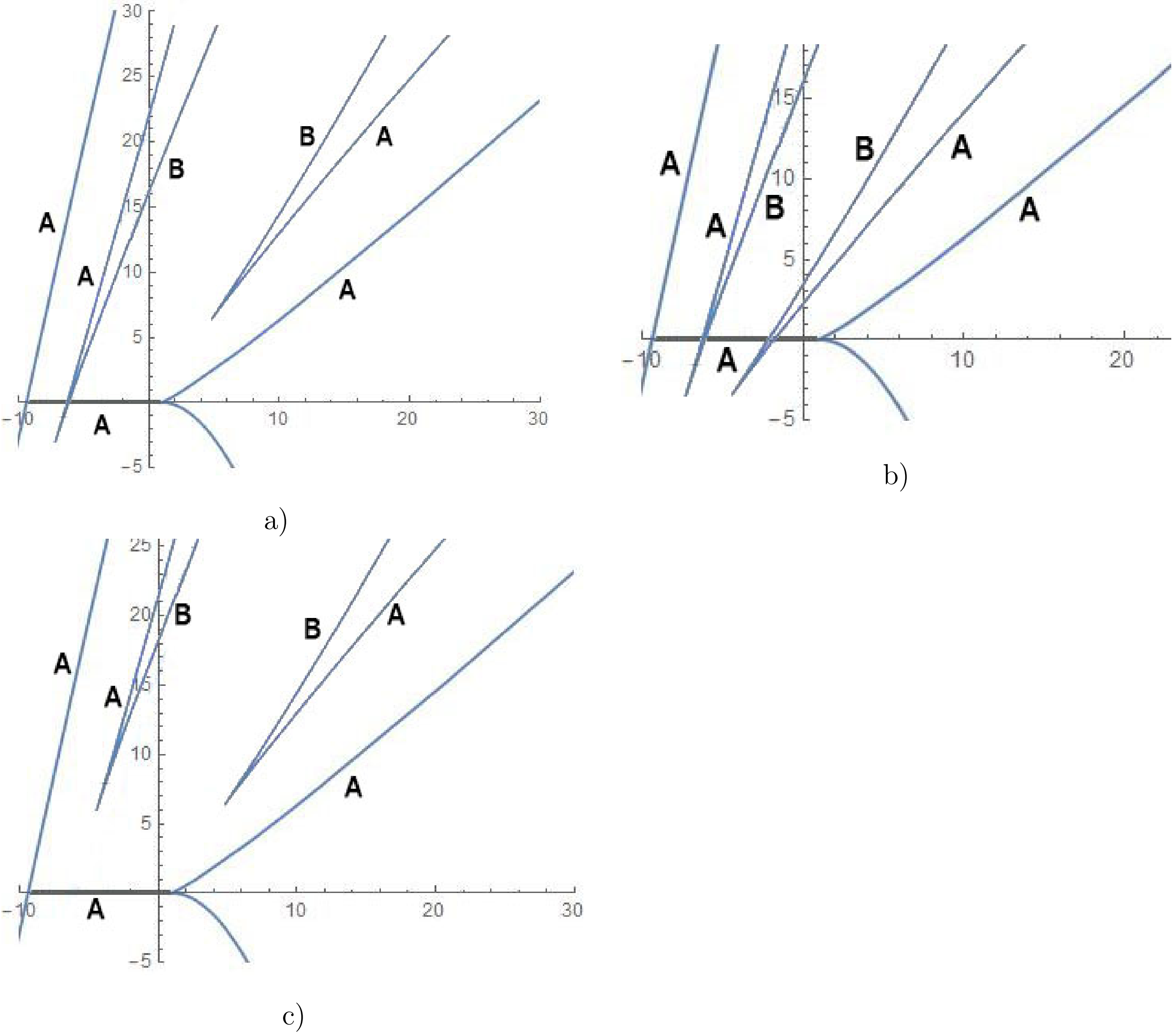


Рис. 2: $K = (K_1, K2, K_3)$, $c \neq 0$.

1. Пусть ротор не содержит нулевых координат. Тогда диаграмма содержит два клина, которые в зависимости от параметров могут быть выше или ниже $f = 0$ (рис.2)

2. При занулении K_2 два клина соединяются в один с лучом внутри (рис.3)

3. При занулении K_3 левый клин становится касательным лучом к самой левой кривой σ (рис.9)

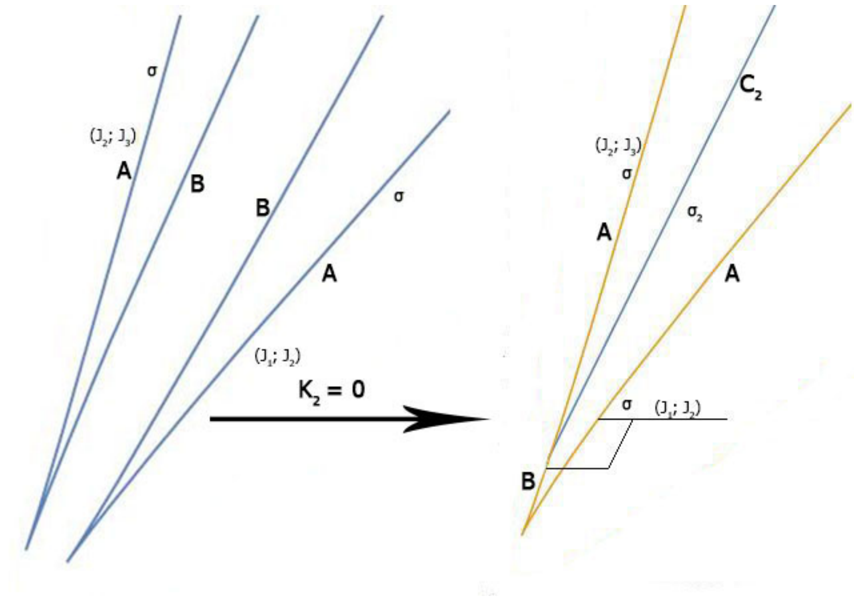


Рис. 3:

4. При занулении K_1 правый клин становится касательным лучом к самой правой кривой σ (рис.10)
5. В конце концов при $K = 0$ диаграмма превращается в три луча, соединенные отрезком (рис.4)

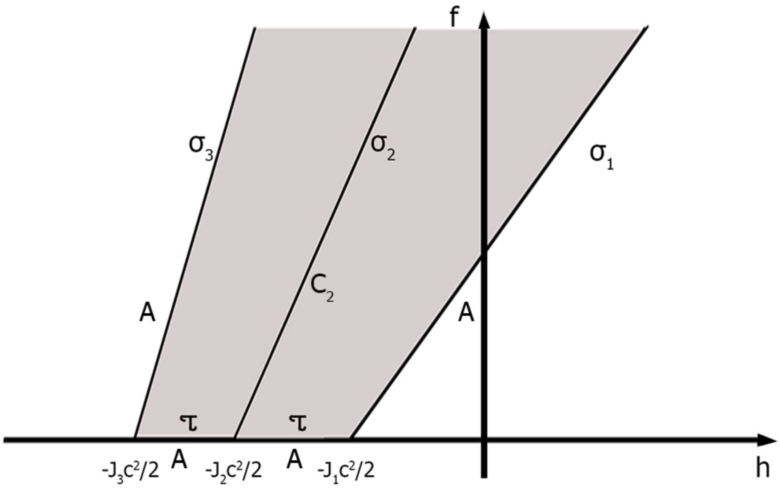


Рис. 4:

5.4 Бифуркационные диаграммы при $c = 0$

Этот раздел посвящен иллюстрации всех возможных видов диаграмм при $c = 0$.

1. Бифуркационная диаграмма для случая с нулевым ротором изображена на рис.5

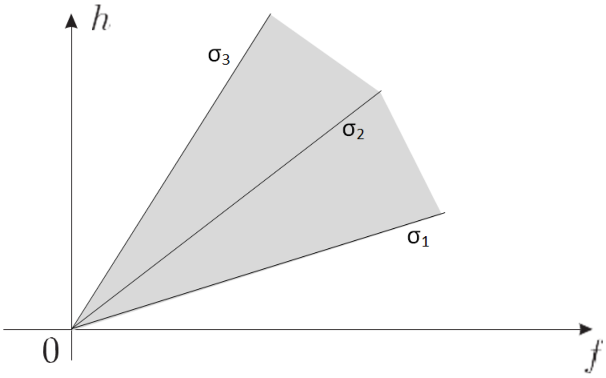


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма при $K = 0$.

2. На всех диаграммах при $c = 0$ и $K \neq 0$ в районе начала координат будет возникать своеоброзный треугольник, ограниченный отрезками τ_h, τ_f и частью кривой σ (рис.6)

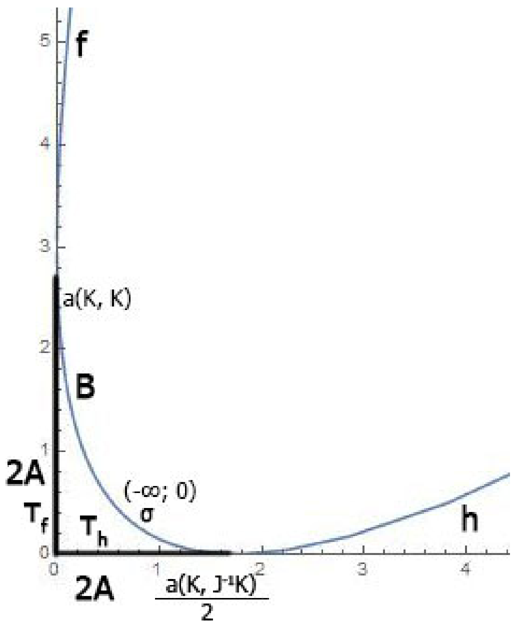


Рис. 6: Масштабированная часть графика в районе начала координат при $K \neq 0$.

3. Бифуркационная диаграмма для ротора без нулевых координат изображена на рис.7

4. Бифуркационные диаграммы для ротора с двумя нулевыми координатами изображены на рис.11 и рис.12

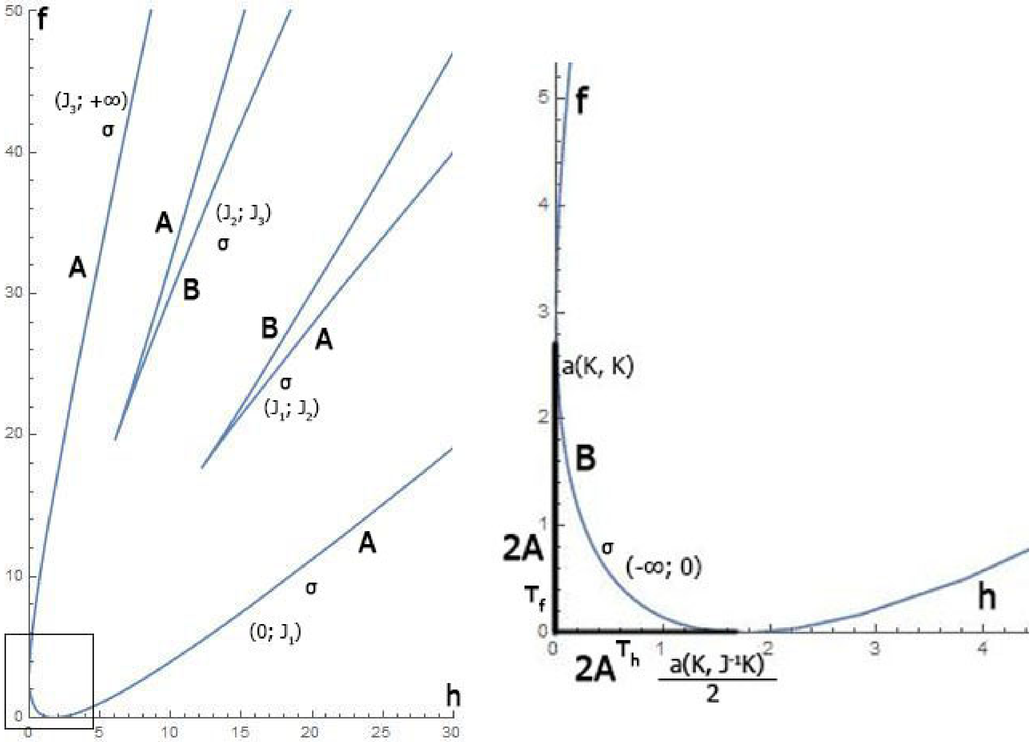


Рис. 7: $K = (K_1, K_2, K_3)$.

5. Бифуркационные диаграммы для ротора с одной нулевой координатой изображены на рис.14 и рис.13

Отдельно остановимся на случае $K = (K_1, 0, K_3)$.

Утверждение 5. *Начало луча σ_2 диаграммы отображения момента в случае для интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом* (2) *и интегралом* (3) *при $c = 0$ и $K = (K_1, 0, K_3)$ зависит от выражения*

$$\sum_{j\neq 2} \frac{J_j K_j^2}{(J_2 - J_j)^3} \tag{26}$$

1. *При $\sum_{j\neq 2} \frac{J_j K_j^2}{(J_2-J_j)^3} > 0$ луча находится слева от вершины клина (рис.13)*

2. *При $\sum_{j\neq 2} \frac{J_j K_j^2}{(J_2-J_j)^3} < 0$ луча находится справа от вершины клина (рис.13)*

3. *При $\sum_{j\neq 2} \frac{J_j K_j^2}{(J_2-J_j)^3} = 0$ луча находится в вершине клина (рис.13)*

Доказательство. Луч σ_2 (15) выходит из параметрически заданной кривой σ (15) при $\lambda = J_2$. Найдем минимум функции на интервале $(J_1; J_3)$.

$$h'(\lambda) = -a \sum_{j\neq 2} \frac{J_j K_j^2}{(\lambda - J_j)^3} \tag{27}$$

$$f'(\lambda) = -2\lambda a \sum_{j \neq 2} \frac{J_j K_j^2}{(\lambda - J_j)^3} \tag{28}$$

Таким образом знак (26) противоположен знаку h' и f' на интервале $(J_1; J_3)$. Согласуя это с тем, что на интервале $(J_1; J_3)$ меньшим значениям λ соотвествуют точки на правой ветке клина, а большим - на левой, получаем доказательство утверждения. □

6 Невырожденность и тип особых точек

6.1 Невырожденность точек ранга 0

При исследовании невырожденности критических точек отображения момента мы будем использовать факты и утверждения из [7]. Для нахождения спектров линеаризации векторных полей использовался пакет Wolfram Mathematica 11.1

Пусть x - точка ранга 0 для отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, H, F). Тогда на $T_x M^4$ можно корректно определить два линейных оператора:

$$A_H = \Omega^{-1} d^2 H(x) \text{ и } A_F = \Omega^{-1} d^2 F(x),$$

которые совпадают с линеаризациями векторных полей $sgradH$ и $sgradF$ в точке x. Здесь Ω - матрица формы ω.

В данном случае рассматриваются интегрируемые системы на симлектических листах $M^4_{c,a}$ пуассонова многообразия.

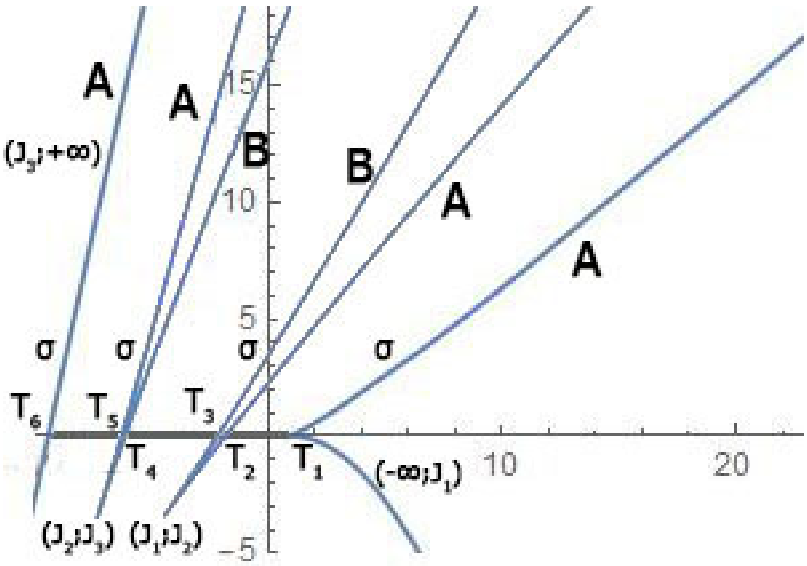


Рис. 8:

Утверждение 6. *Пусть $x \in M^4_{c,a}$ критическая точка функции $\hat{H} = H|_{M^4_{c,a}}$, а $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $dH(x) = \lambda_1 dC(x) + \lambda_2 dG(x)$. Тогда спектр линеаризации косого градиента*

$\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, H)$ *совпадает со спектром оператора*

$$\mathcal{A}\left(d^2H(x) - \lambda_1 d^2C(x) - \lambda_2 d^2G(x)\right),$$

где $\mathcal{A}$ *— бивектор Пуассона. При этом спектр* $\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, H))$ *получается из спектра* $\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, \hat{H}))$ *добавлением нулей.*

При $c \neq 0$ точки ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и интегралом (3) на неособых орбитах $M_{a,c}$ при отображении момента проецируются в точки пересечения σ_i и σ с отрезком τ_h за исключением точки пересечения σ_i с τ_h при $\lambda = 0$ (например, как на рис.8).

Утверждение 7. *Пусть* $c \neq 0$, $K_1 \neq 0$ *и* $K_2 \neq 0$. *Тогда на интервале* $(J_1; J_2)$ *кривая* σ *есть клин.* λ_{min} *- экстремум на этом интервале. Тогда клин пересекает ось* $f = 0$, *если выполняется следующее неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{K_j^2}{(\lambda_{min} - J_j)^3} < 0 \tag{29}$$

Доказательство. λ_{min} - экстремум, значит:

$$a\sum_{j=1}^{3} \frac{J_j K_j^2}{(\lambda_{min} - J_j)^3} + c^2 = 0 \tag{30}$$

$f(\lambda_{min}) < 0$, если:

$$a\sum_{j=1}^{3} \frac{K_j^2}{(\lambda_{min} - J_j)^2} < c^2 \tag{31}$$

Подставив c^2 из (30) в (31) и сократив на λ_{min} ($\lambda_{min} > 0$, т.к. $0 < J_1 < J_2 < J_3$), получим (29)

□

Утверждение 8. *Пусть* $c \neq 0$, *и у ротора нет нулевых координат. Тогда выражение:*

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{K_j^2}{(\lambda - J_j)^3} \tag{32}$$

1. *Больше нуля в прообразах точек* T_2, T_4, T_6 *(рис.8)*

2. *Меньше нуля в прообразах точек* T_1, T_3, T_5 *(рис.8)*

Доказательство. 1. В точках T_6 / T_1 утверждение очевидно, так как сумма состоит только из положительных/ отрицательных слагаемых

2. В точках T_2, T_4 (T_3, T_5) $f = 0$, а значит:

$$a\sum_{j=1}^{3}\frac{K_j^2}{(\lambda - J_j)^2} = c^2 \tag{33}$$

Кроме того в этих точках $f(\lambda)$ убывает (возрастает), что означает:

$$a\sum_{j=1}^{3}\frac{J_jK_j^2}{(\lambda - J_j)^3} + c^2 > 0 (< 0) \tag{34}$$

Подставив c^2 из (33) в (34), получим формулировку утверждения

$\square$

Теорема 7. *Точки ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом* (2) *и интегралом* (3) *на неособых орбитах $M_{a,c}$ имеют следующий тип:*

1. *При $c = 0$:*

   (a) *при $K = 0$ точки ранга 0 образуют двумерную сферу*

   $$\omega = 0, \qquad n^2 = a.$$

   Они все вырождены и лежат в прообразе начала координат

   $$h = 0, f = 0.$$

   (b) *при $K \neq 0$ точки ранга 0 — две диаметрально противоположные точки на сфере*

   $$\omega = 0, \qquad n^2 = a, \qquad n \parallel K$$

   Они все вырождены и лежат в прообразе начала координат

   $$h = 0, f = 0.$$

2. *При $c \neq 0$ в пересечении σ с τ_h:*

   (a) *Прообразы точек T_1, T_2, T_4 и T_6 невырождены и имеют тип центр-центр*

   (b) *Прообразы точек T_3 и T_5 невырождены и имеют тип центр-седло*

3. *При $c \neq 0$ в пересечении σ_i с τ_h (далее S_i):*

   (a) *Прообразы точек S_i вырождены, если в S_i одновременно пересекаются σ, σ_i и τ_h*

   (b) *Прообразы точек S_1 и S_3 (кроме случая (a)) невырождены и имеют тип центр-центр* *(c) Прообразы точек S_2 (кроме случая (a)) невырождены и имеют тип центр-седло*

Доказательство. Все точки ранга 0 были описаны в теореме (4). При $c = 0$ точки ранга 0 вырождены, так как $\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, F))$ состоит только из нолей, а у $\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, H))$ максимум два ненулевых элемента . Остается доказать, что при $c \neq 0$ точки имеют указанный тип. Заметим, что в прообразах отрезка τ_h у $\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, F))$ макисмум 2 ненулевых элемента (рассматриваем эту линеаризацию при исследовании точек ранга 1. А значит, если у $\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, H)$ четыре ненулевых собственных значения, то A_H и A_F линейно независимы. В точках пересечения σ с отрезком τ_h для гамильтониана выполнено

$$\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, H)) = \left(0, 0, \pm ic\frac{\sqrt{aJ_1J_2J_3}}{(\gamma, J\gamma)}, \pm i\sqrt{\prod_{i=1}^{3}(\lambda - J_i)}\sqrt{a\sum_{i=1}^{3}\frac{K_i^2}{(\lambda - J_i)^3}}\right),$$

что вместе с утверждением (8) доказывает пункт 2.

В точках пересечения σ_i с отрезком τ_h выполнено

$$\sigma(\mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\, H)) = \left(0, 0, \pm ic\frac{\sqrt{aJ_1J_2J_3}}{(\gamma, J\gamma)}, \pm ic\frac{\sqrt{a\gamma_i^2\prod\limits_{j\neq i}(J_i - J_j)}}{(\gamma, J\gamma)}\right),$$

что доказывает пункт 3 ($\gamma_i = 0$ - точка выхода луча σ_i из σ). □

6.2 Невырожденность точек ранга 1

Также, как и при исследовании точек ранга 0, подробнее о невырожденности и типах критических точек отображения момента можно прочитать в [7].
Рассмотрим точку ранга 1. В ней sgradH и sgradF зависимы. Значит существует и однозначно определено такое μ, что $\mu sgradH(x) + sgradF(x) = 0$. Обозначим через v векторное поле $\mu sgradH + sgradF$, а через A_v линеаризацию этого векторного поля в точке x.

Теорема 8. *Точки ранга 1, лежащие в прообразе отрезка τ_f:*

1. *невырождены и имеют эллиптический тип, если $(K, n) \neq 0$*

2. *вырождены, если $(K, n) = 0$*

3. *в прообразе каждой такой точки лежит по две критические окружности*

4. *как следствие, отрезку τ_f соответствует перестройка торов Лиувилля типа $2A$*

Доказательство. Все утверждения доказываются прямым вычислением. Покажем, как может быть проверена невырожденность точек.
В прообразе τ_f лежат точки $\omega = 0$, тогда

$$sgradH = 0 \quad \Rightarrow \quad Lin(A_v) = Lin(sgradH(x))$$

Спектр этого оператора выглядит следующим образом:

$$\left(0, 0, 0, 0, \pm i\frac{\sqrt{a(K, J^{\frac{1}{2}}\gamma)^2}}{(\gamma, J\gamma)}\right).$$

□

Теорема 9. *Точки ранга 1, лежащие в прообразе отрезка τ_h невырождены и имеют эллиптический тип.*

Доказательство. В прообразе τ_h лежат точки $J\omega + K = \beta\gamma$, тогда

$$sgradF = 0 \quad \Rightarrow \quad Lin(A_v) = Lin(sgradF(x))$$

Спектр этого оператора выглядит следующим образом:

$$\left(0, 0, 0, 0, \pm 2i\beta a\frac{\sqrt{J_1 J_2 J_3}}{(\gamma, J\gamma)}\right).$$

□

Теорема 10. *Точки ранга 1, лежащие в прообразе отрезка σ_i:*

1. *вырождены в точке $\omega_i = 0$. Иными словами, прообразы точек, лежащих в пересечении σ_i с σ, вырождены.*
2. *невырождены и имеют эллиптический тип при $i = 1$ и $i = 3$, если $\omega_i \neq 0$*
3. *невырождены и имеют гиперболический тип при $i = 2$, если $\omega_2 \neq 0$*
4. *в прообразе каждой такой точки лежит по две критические окружности*
5. *как следствие, лучам σ_1, σ_3 соответствует перестройка торов Лиувилля типа $2A$, а лучу σ_2- типа C_2*

Доказательство. В прообразе σ_i лежат точки $J\omega + K = J_i\omega$, тогда

$$2J_i dH = dF \quad \Rightarrow \quad Lin(A_v) = \mathcal{A}d(2J_i dH - dF),$$

где $\mathcal{A}$ — тензор Пуассона.

Спектр этого оператора выглядит следующим образом:

$$\left(0,0,0,0,\pm 2iM_i\sqrt{a(\gamma,J\gamma)J_i\prod_{j\neq i}(J_i-J_j)}\right).$$

□

Теорема 11. *Точки ранга 1, лежащие в прообразе семейства параметрических кривых σ:*

1. *вырождены, если $f'(\lambda)=0$*
2. *невырождены и имеют эллиптический тип, если $(\lambda-J_1)(\lambda-J_2)(\lambda-J_3)f'(\lambda)<0$*
3. *невырождены и имеют гиперболический тип, если $(\lambda-J_1)(\lambda-J_2)(\lambda-J_3)f'(\lambda)>0$*
4. *в прообразе каждой такой точки лежит по одной критические окружности*
5. *как следствие, эллиптической части кривой соответствует перестройка торов Лиувилля типа A, а гиперболической - типа B*

Доказательство. В прообразе σ лежат точки $J\omega+K=\lambda\omega$, тогда

$$2\lambda sgradH = sgradF \quad\Rightarrow\quad Lin(A_v)=Lin(2\lambda sgradH - sgradF)$$

Спектр этого оператора выглядит следующим образом:

$$\left(0,0,0,0,\pm\sqrt{2a(\lambda-J_1)(\lambda-J_2)(\lambda-J_3)f'(\lambda)}\right)=$$
$$=\left(0,0,0,0,\pm 2i\sqrt{a\lambda(\lambda-J_1)(\lambda-J_2)(\lambda-J_3)\left(a\sum_{j=1}^{3}\frac{J_jK_j^2}{(\lambda-J_j)^3}+c^2\right)}\right).$$

□

7 Рисунки

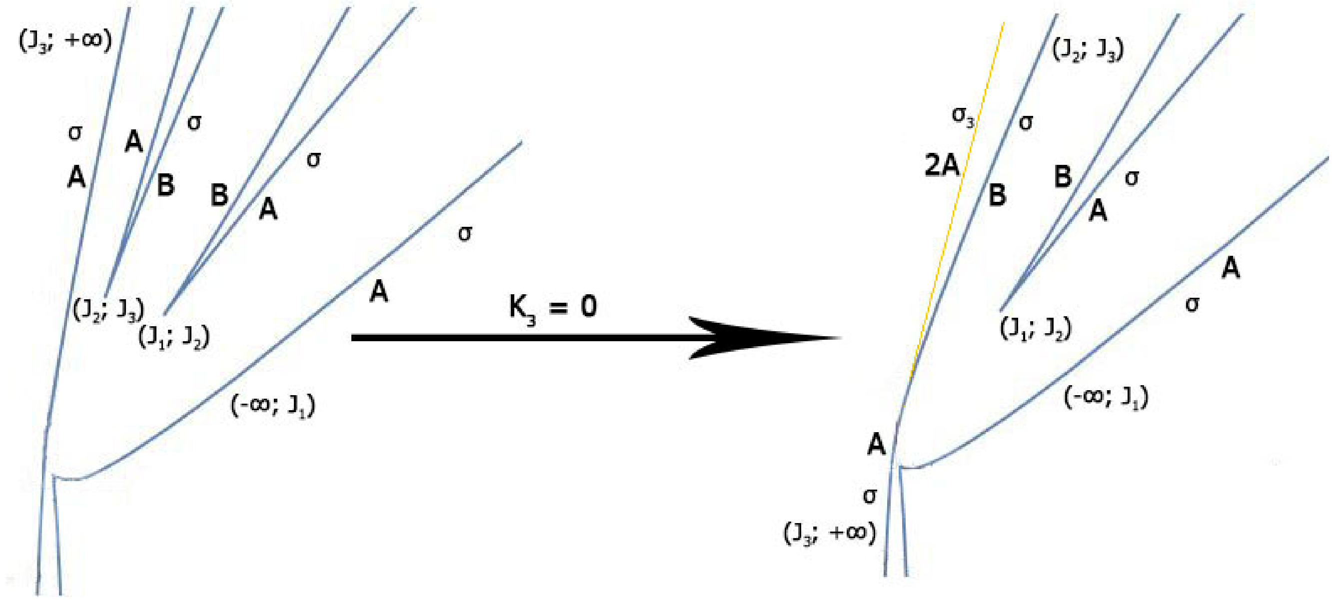


Рис. 9:

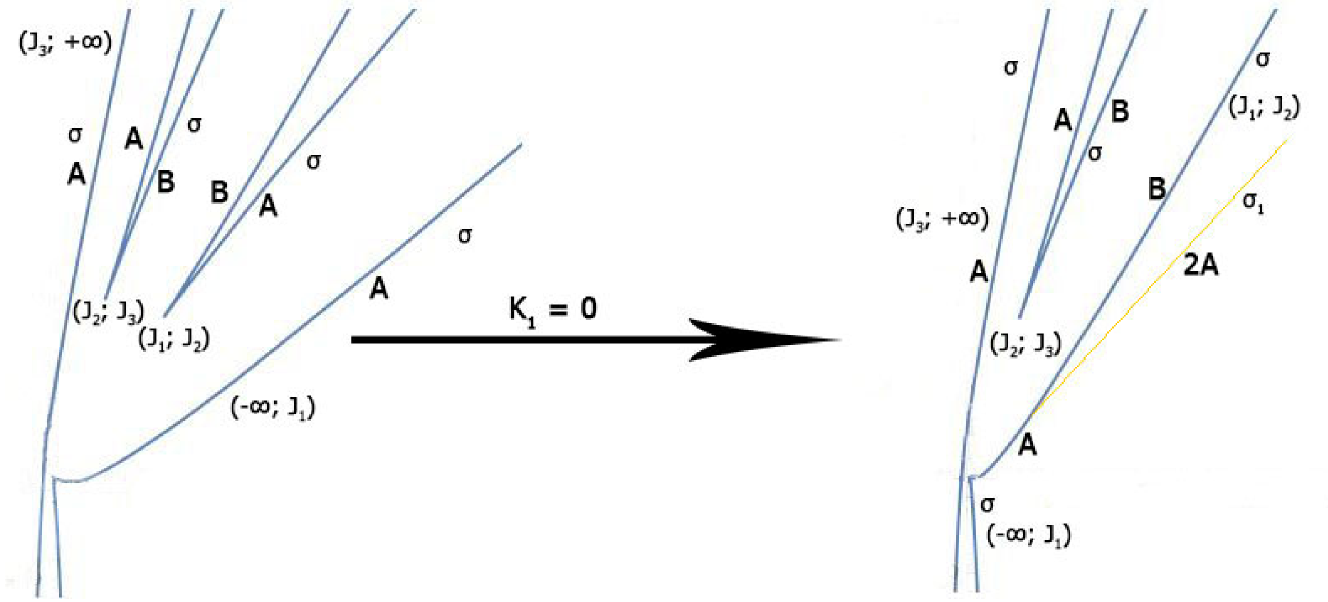


Рис. 10:

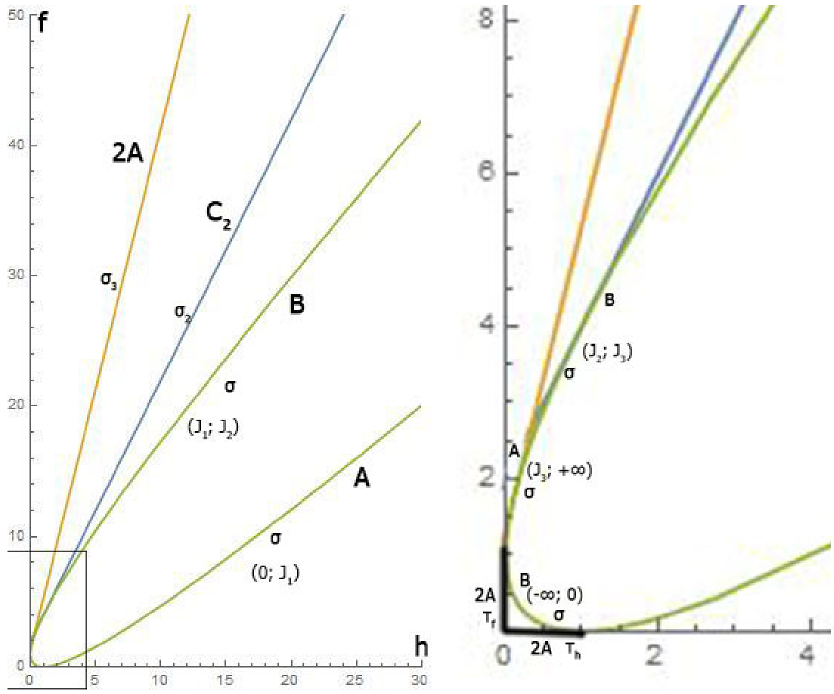


Рис. 11: $K = (K_1, 0, 0)$.

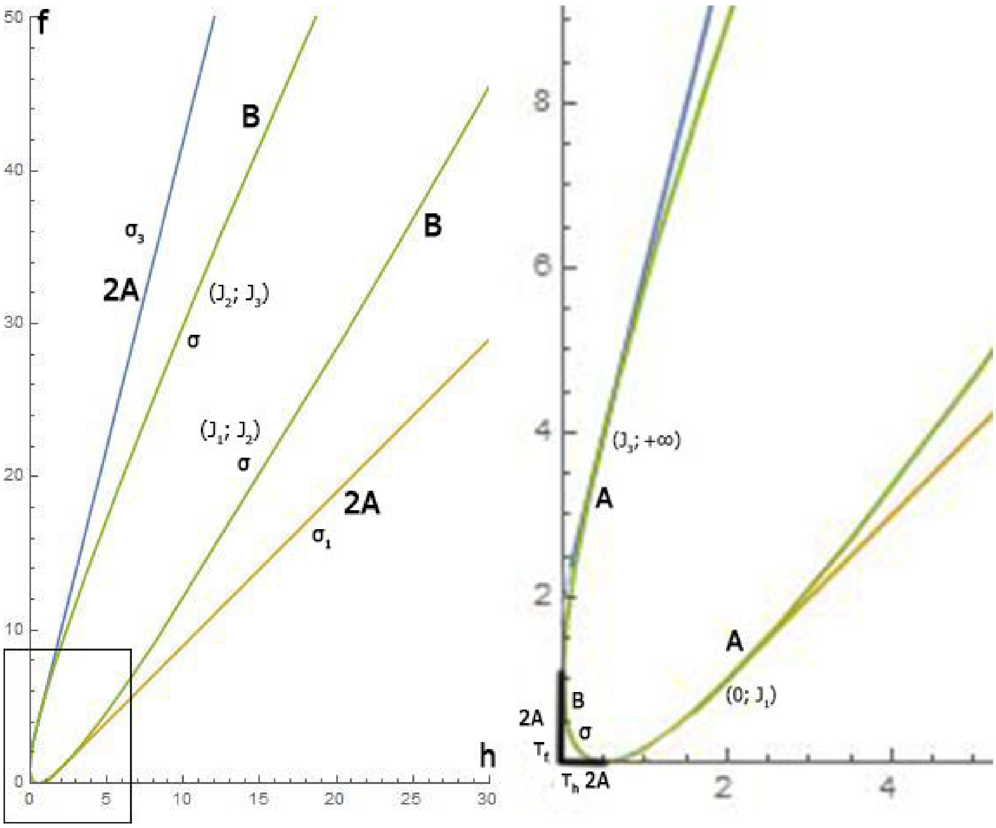
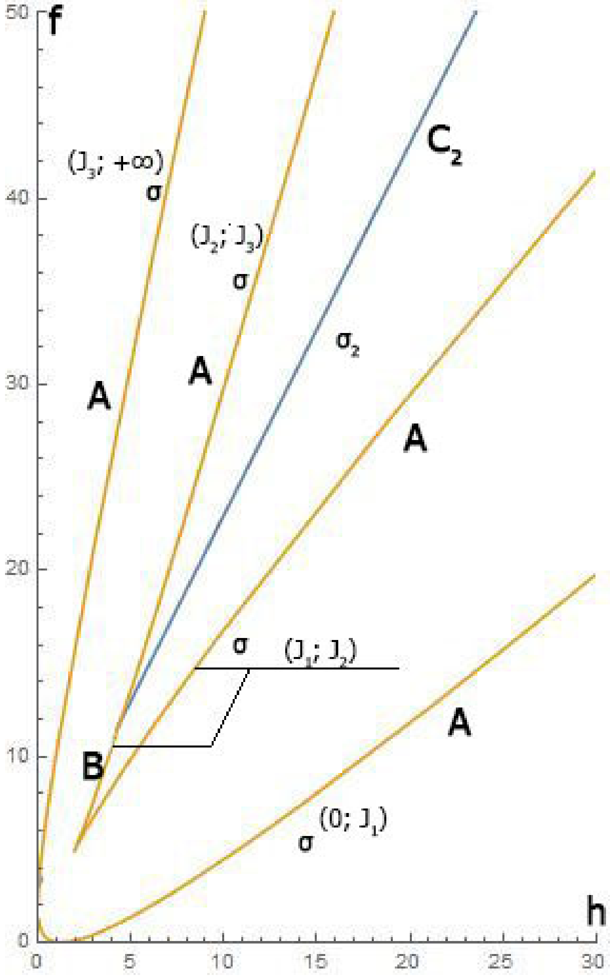
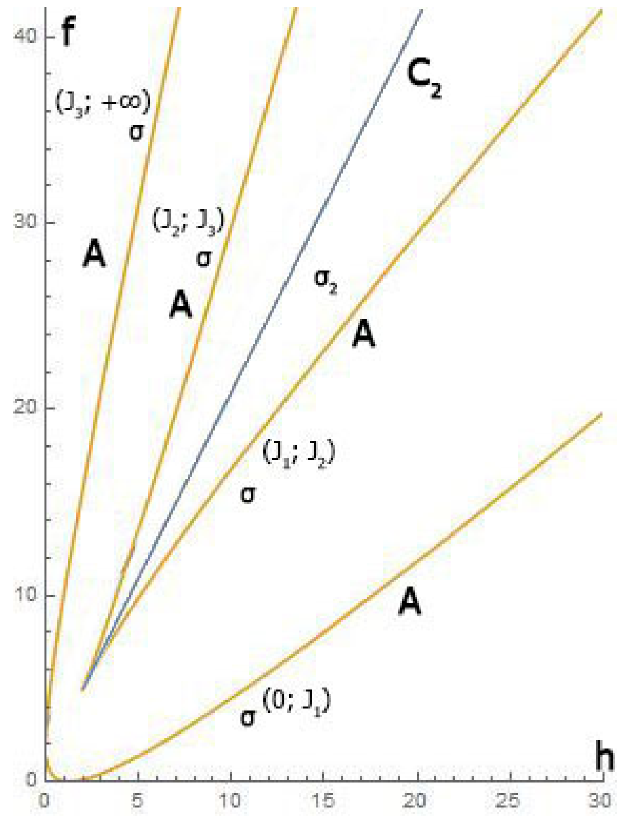


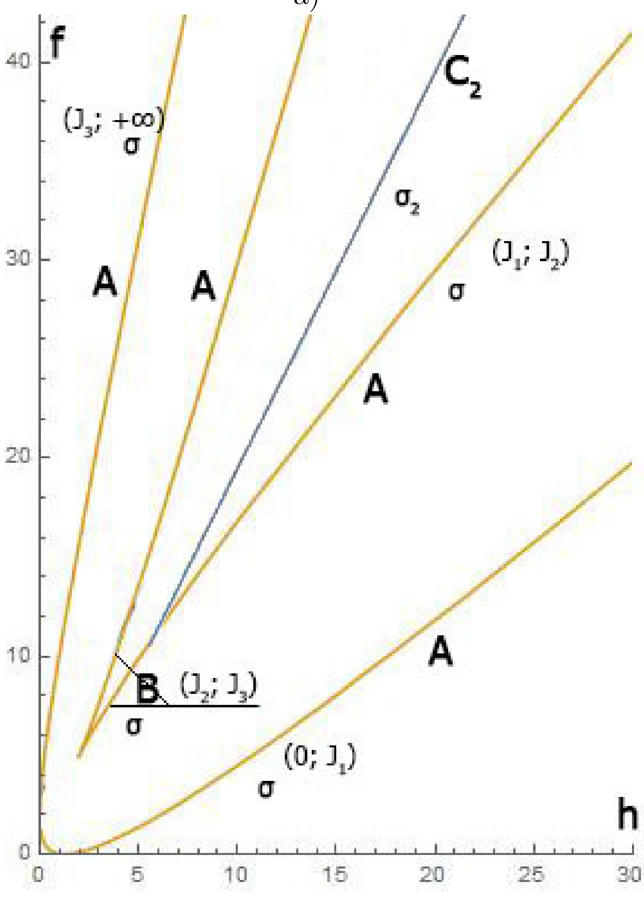
Рис. 12: $K = (0, K_2, 0)$



a)



b)



c)

Рис. 13: $K = (K_1, 0, K_3)$.

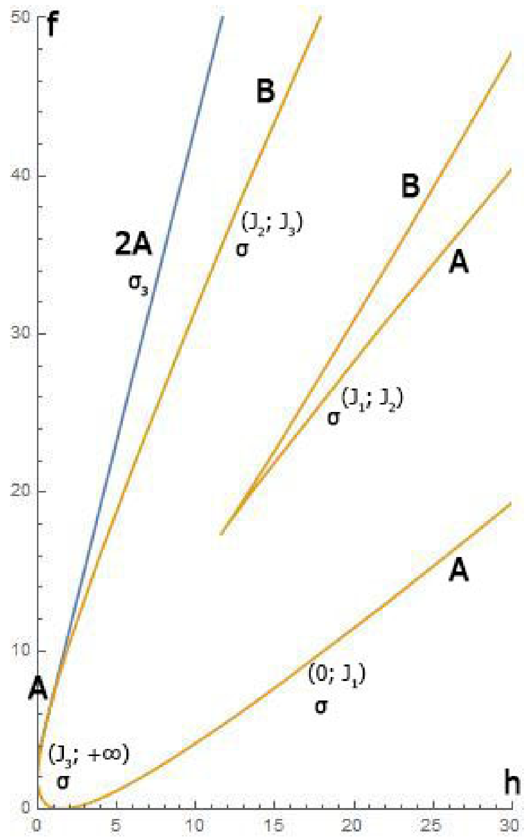


Рис. 14: $K = (K_1, K_2, 0)$.

Список литературы

[1] A.T.Fomenko. "Symplectic Geometry". Second revised edition. (Монография). - Gordon and Breach, 1995.

[2] A.T.Fomenko, A.Yu.Konyaev. "New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems". - Topology and its Applications, 2012, vol.159, pp.1964-1975.

[3] A.T.Fomenko and P.V.Morozov. "Some New Results in Topological Classification of Integrable Systems in Rigid Body Dynamics". - In: Proceedings of the Workshop "Contemporary Geometry and Related Topics". Belgrade, Yugoslavia, 15-21 May 2002. - World Scientific Publishing Co., 2004, pp.201-222.

[4] A.T.Fomenko, S.S.Nikolaenko, "The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid". - Journal of Geometry and Physics. 2015, v.87, pp.115-133.

[5] A. Weinstein, The local structure of poisson manifolds. Differential Geometry, 18:523 - 557, 1983.

[6] Д.К.Бобылев, "О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения". Мат.сб., 1892, т. XVII

[7] А.В.Болсинов, А.Т. Фоменко, "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация". т.1,2, РХД, Ижевск, 1999

[8] А.В.Борисов, И.С. Мамаев, "Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении Шара". Мат. заметки, 2001, т. 70, No5, стр. 793-795

[9] А.В.Борисов, И.С. Мамаев, "Препятствия к гамильтоновости интегрируемых систем". Доклады РАН, 2002, т.387, No6, стр.764-766

[10] Н.Е.Жуковский, "О гироскопическом шаре Д.Н.Бобылева, Труды отд. Физич. наук Общ. люб. естествознания". 1893, т.VI, вып. 1.

[11] А.Ю.Москвин, "Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения". Нелинейная динамика, 5 (3), с. 345–356 (2009)

[12] Фоменко А.Т. "Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем". - Доклады АН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075.

[13] Фоменко А.Т. "Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости". - Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.

[14] Фоменко А.Т. "Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем". - Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.

[15] Фоменко А.Т., Цишанг Х. "Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы". - Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.

[16] С.А.Чаплыгин, "О движении тяжёлого твёрдого тела вращения на плоскости". Собр.соч., т.1, М.-Л.:ГИТТЛ, 1948, стр.57-75

[17] С.А.Чаплыгин, "О катании шара по горизонтальной плоскости". Собр.соч., т.1, М.-Л.:ГИТТЛ, 1948, стр.76-101