ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«Нормальные формы подпространств бигамильтоновых пространств»

Выполнила студентка
607 группы
Битуева Лидия Мухамедовна

подпись студента

Научные руководители:
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н. Фоменко Анатолий Тимофеевич
Доцент, к.ф.-м.н. Коняев Андрей Юрьевич

подпись научного руководителя

Москва
2018 г.

Содержание

1 Введение

Пусть есть бигамильтоновоо просранство с заданой на нем парой скобок Пуассона.

Возникает вопрос: как устроено локальное вложение одного бигамильтонового многообразия в другое?

Вообще говоря, скобки Пуассона нельзя ограничивать, но если пространство инвариантно относительно обоих скобок (такое часто бывает в интегрируемых системах), то возникает вопрос, как устроено это инвариантное многообразие.

Первым шагом на пути к ответу на вопрос о том, как устроено локальное вложение одного бигамильтонового многообразия в другое, является рассмотрение случая линейного пространства $\mathbb{C}^{2n}$ над алгебраически замкнутым полем. На пространстве заданы две билинейные кососимметрические формы, одна из которых невырождена. Цель: найти классификацию подпространств, с точностью до изоморфизма, и канонический вид ограничения форм на подпространства.

1.1 Необходимые понятия

Определение. Многообразие M^n нузывается пуассоновым, если на пространстве гладких функций $\mathbb{C}^{\infty}(M^n)$ задана операция $\{\cdot\}$ - скобка Пуассона, обладающая следующими свойствами:

1) кососоммутативна и билинейна над $\mathbb{R}$;

2) удовлетворяет тождеству Якоби;

3) удовлетворяет правилу Лейбница.

Определение. Многообразие M^n называется бигамильтоновым, если на нем задана пара скобок $\{\cdot\}_1$ и $\{\cdot\}_2$ и $\{\cdot\}_1 + \{\cdot\}_2 = \{\cdot\}$ - тоже скобка Пуассона.

Определение. Пусть даны два многообразия M_1 и M_2, тогда вложением называется такое гладкое отображение $f : M_1 \to M_2$, что для любой точки $P \in M_1$ дифференциал df_P является мономорфизмом, то есть взаимно однозначным отображением на свой образ, а так же f взаимно однозначно отображает M_1 на свой образ $f(M_1)$ и при этом $f(M_1)$ - замкнуто.

Теорема. Любое подпространство U в симплектическом пространстве с заданной формой ω характеризуется двумя числами, а именно: $dim(U)$, $dim(Ker(\omega|_U))$.

Похожая теорема есть и для случая пуассоновского линейного пространства.

Теорема. Любое подпространство U в пуассоновском линейном пространстве с заданной на нем формой A характеризуется тремя числами, а именно: $dim(U)$, $dim(Ker(A|_U))$, $dim(Ker(A) \cap U)$.

В данных теоремах считается, что термин "характеризуется" означает следующие: существует базис, в котором формы приведены к каноническому виду, и замена координат, переводящая подпространство U в U' и оставляющая форму в каноническом виде, существует, тогда и только тогда когда два (или три) числа, заданные в (соответствующей) теореме, совпадают.

Теперь давайте посмотрим, как выглядит канонический вид форм в симплектическом и пуассоновском случаях, и какой вид имеет базис, в котором форма приведена к каноническому виду на подпространсве.

Симплектический случай.

Пусть $2n$ - разметрость симплектического пространства, U - его подпространство. Пусть $dim(U) = 2r + k$ и $dim(Ker(\omega|_U)) = k$ Канонический вид формы ω:

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \text{E} \\ \hline \text{-E} & 0 \end{array}\right)$$

в базисе $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Соответственно, базис, в котором $\omega|_U$ будет иметь канонический вид, выглядит так:

$$p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_{r+k}, p_{r+1}, \ldots, p_n, q_{r+k+1}, \ldots, q_n$$

.

Пуассоновский случай.

Пусть $2n + t$ - размерность пуассоновского пространства. U - его подпространство, такое что: $dim(U) = k$; $dim(Ker\omega|_U) = r$ $dim(Ker(\omega) \cap U) = m$ Канонический вид формы A выглядит так:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \text{E} & 0 \\ \hline \text{-E} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

в базисе $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, s_1, \ldots, s_t$, а базис, в котором $A|_U$ будет иметь канонический вид, выглядит так:

$$p_1, \ldots, p_{\dfrac{k+r}{2}}, q_1, \ldots, q_{\dfrac{k-r}{2}}, pq_{\dfrac{k-r}{2}+1}, \ldots, q_{\dfrac{k-r}{2}+k-m}, s_1, \ldots, s_m$$

.

Теорема.(Jordan-Kronecker)

Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то существует базис пространства V, в котором матрицы обоих форм A и B являются блочно-диагональными:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

,

где каждая пара соответствующих блоков A_i и B_i имеет один из следующих видов:

1. Блоки Жордана с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K}$. Размеры блоков $(2k) \times (2k)$.

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -\lambda & & & \\ \text{-1} & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \text{-1} & -\lambda \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right); \mathrm{B}_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{-1} & & & \\ & \text{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{-1} \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

2. Блоки Жордана с собственным значением ∞. Размеры блоков $(2k) \times (2k)$.

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{-1} & & & \\ & \text{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{-1} \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right); B_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & & \\ \text{-1} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \text{-1} & 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

3. Блоки Кронекера. Размеры блоков $(2k+1) \times (2k+1)$.

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{-1} & & \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & \text{-1} \\ & & 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right); B_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & \\ \text{-1} & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ & & \text{-1} \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

1.2 Результаты

Теорема. Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на $\mathbb{C}^4$. Канонический вид этой пары форм имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда подпространства U характеризуются двумя числами: $dim(U)$, $dim(U \cap V)$, где $V = \{v \in \mathbb{C}^4 | (B^{-1}A - \lambda E)v = 0\}$.

Теорема. Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на $\mathbb{C}^4$. Канонический вид этой пары форм имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Тогда подпространства U характеризуются двумя числами: $dim(U)$, $dim(U \cap V)$, где $V = KerA \cap KerB$.

1.3 Благодарности

Выражаю огромную благодарность Анатолию Тимофеевичу Фоменко и Андрею Юрьевичу Коняеву за поставноку задачи, помощь в решении, а так же поддерржку на протяжении всех лет обучения на кафедре "Дифференциальной геометрии и приложений"!

2 Случай четырехмерного пространтсва

Рассмотрим, какие возможны случаи канонических форм матриц A и B исходя из теоремы Жордана-Кронекера.

1. Каждая матрица состоит из одного блока Жордана с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$. Размеры блоков $(4) \times (4)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приечание: в случае, если $\lambda = 0$ получаем случай Блоков Жордана с собственным значением ∞:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Каждая матрица состоит из двух блоков Жордана с собственными значениями λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ соответственно. В случае, если $\lambda_i = 0$ получаем Блок Жордана с собственным значением ∞

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Каждая матрица состоит из двух блоков Кронекера размерами $(3) \times (3)$ и $(1) \times (1)$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2.1 Один блок Жордана

Рассмотрим теперь случай 1, когда матрицы форм имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в данном случае форма A является невырожденной. Таким образом $Ker(A) = 0$ (нулевой вектор).

Рассмотрим, как в данном случае будет выглядеть оператор $R = B^{-1}A$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$R = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Рассмотрим, как оператор R действует на вектора пространства $\mathbb{C}^4$. Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 - базисные вектора $\mathbb{C}^4$, при которых матрицы имееют какнонический вид - Блоки Жордана с собственным значением λ. Рассмотри вектор $v = v_1k_1 + v_2k_2 + v_3k_3 + v_4k_4$.

Тогда:

$$Rv = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ v_1 + \lambda v_2 \\ \lambda v_3 + v_4 \\ \lambda v_4 \end{pmatrix}$$

Таким образом можно заметить, что если $v \in < k_2, k_3 >$, то

$$Rv = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Это в свою очередь означает, что $R\colon\ < k_2, k_3 > \to < k_2, k_3 >$, то есть $Rv = \lambda v$, если $v \in < k_2, k_3 >$. Следовательно, $< k_2, k_3 >$ является собственным пространством, λ собственным значением, а каждое $v \in < k_2, k_3 >$ собственным вектором оператора R. Обозначим $< k_2, k_3 >= V$.

Сформулируем и докажем теорему:

Теорема. Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на $\mathbb{C}^4$. Канонический вид этой пары форм имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда подпространства U характеризуются двумя числами: $dim(U)$, $dim(U \cap V)$, где $V = \{v \in \mathbb{C}^4 | (B^{-1}A - \lambda E)v = 0\}$.

Рассмотрим каждый случай, из приведенных ниже, в отдельности.

№	dim U	dim $(U \cap V)$
1.1	1	1
1.2	1	0
2.1	2	2
2.1	2	1
2.3	2	0
3.1	3	2
3.2	3	1

Доказательство:

2.1.1 $dimU = 1$ и $dim(U \cap V) = 1$

1) $dimU = 1$ и $dim(U \cap V) = 1$ То есть, $U =< e_1 >$ и e_1 - собственный вектор с собственным значение λ для оператора R. Рассмотрим вектор $e_2 \neq e_1$, но при этом $e_2 \in < k_2, k_3 >$.

Пусть вектора имеют вид $e_1 = (0, e_1^1, e_1^2, 0), e_2 = (0, e_2^1, e_2^2, 0)$. Рассмотрим два вектора f_1 и f_2, такие что, $f_1 = (e_1^1, 0, 0, e_1^2), f_2 = (e_2^1, 0, 0, e_2^2)$.

Теперь рассмотрим, как будут выглядеть матрицы форм A и B в басизе f_1, e_1, e_2, f_2.

$$A(f_1, f_2) = (e_1^1, 0, 0, e_1^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ e_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$=(-e_1^2, -\lambda e_1^2, \lambda e_1^1, e_1^1) \begin{pmatrix} e_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ e_2^2 \end{pmatrix} = -e_1^2 e_2^1 + e_1^1 e_2^2$$

$$A(f_1, e_1) = (e_1^1, 0, 0, e_1^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_1^1 \\ e_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$=(-e_1^2, -\lambda e_1^2, \lambda e_1^1, e_1^1) \begin{pmatrix} 0 \\ e_1^1 \\ e_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1^2 e_1^1 + e_1^1 e_1^2 = 0$$

$$A(f_1,e_2)=(e_1^1,0,0,e_1^2)\begin{pmatrix}0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\\-\lambda&0&0&0\\-1&-\lambda&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\e_2^1\\e_2^2\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(\text{-}\lambda f_1^3-e_1^2,-\lambda e_1^2,\lambda e_1^1,e_1^1+\lambda f_1^2)\begin{pmatrix}0\\e_2^1\\e_2^2\\0\end{pmatrix}=-\lambda e_1^2e_2^1+\lambda e_1^1e_2^2=\lambda A(f_1,f_2)$$

$A(e_1,e_2)=0$. Это следует из канонического вида формы А.

$$A(e_1,f_2)=(0,e_1^1,e_1^2,0)\begin{pmatrix}0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\\-\lambda&0&0&0\\-1&-\lambda&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_2^1\\0\\0\\e_2^2\end{pmatrix}=$$

$$=(\text{-}\lambda e_1^2,0,0,\lambda e_1^1)\begin{pmatrix}e_2^1\\0\\0\\e_2^2\end{pmatrix}=-\lambda e_1^2e_2^1+\lambda e_1^1e_2^2=\lambda A(f_1,f_2)$$

$$A(e_2,f_2)=(0,e_2^1,e_2^2,0)\begin{pmatrix}0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\\-\lambda&0&0&0\\-1&-\lambda&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_2^1\\0\\0\\e_2^2\end{pmatrix}=$$

$$=(\text{-}\lambda e_2^2,0,0,\lambda e_2^1)\begin{pmatrix}e_2^1\\0\\0\\e_2^2\end{pmatrix}=-\lambda e_2^2e_2^1+\lambda e_2^1e_2^2=0$$

Следовательно, в базисе $<f_1,e_1,e_2,f_2>$ форма A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\lambda A(f_1,f_2)&A(f_1,f_2)\\0&0&0&\lambda A(f_1,f_2)\\-\lambda A(f_1,f_2)&0&0&0\\-A(f_1,f_2)&-\lambda A(f_1,f_2)&0&0\end{pmatrix}$$

Теперь посмотрим на форму B:

$$B(f_1,f_2)=(e_1^1,0,0,e_1^2)\begin{pmatrix}0&0&1&\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_2^1\\0\\0\\e_2^2\end{pmatrix}=(0,-e_1^2,e_1^1,0)\begin{pmatrix}e_2^1\\0\\0\\e_2^2\end{pmatrix}=0$$

$$B(f_1,e_1)=(e_1^1,0,0,e_1^2)\begin{pmatrix}0&0&1&\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\e_1^1\\e_1^2\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(0,-e_1^2,e_1^1,0)\begin{pmatrix}0\\e_1^1\\e_1^2\\0\end{pmatrix}=-e_1^2e_1^1+e_1^1e_1^2=0$$

$$B(f_1, e_2) = (e_1^1, 0, 0, e_1^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_2^1 \\ e_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0, -e_1^2, e_1^1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ e_2^1 \\ e_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1^2 e_2^1 + e_1^1 e_2^2 = A(f_1, f_2)$$

$B(e_1, e_2) = 0$. Это следует из канонического вида формы A.

$$B(e_1, f_2) = (e_1^1, 0, 0, e_1^2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ e_2^2 \end{pmatrix} = (-e_1^2, 0, 0, e_1^1) \begin{pmatrix} e_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ e_2^2 \end{pmatrix} = -e_1^2 e_2^1 + e_1^1 e_2^2 = A(f_1, f_2)$$

$$B(e_2, f_2) = (e_1^1, 0, 0, e_1^2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ e_2^2 \end{pmatrix} = (-e_2^2, 0, 0, e_2^1) \begin{pmatrix} e_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ e_2^2 \end{pmatrix} = -e_2^2 e_2^1 + e_2^1 e_2^2 = 0$$

Следовательно, в базисе $< f_1, e_1, e_2, f_2 >$ форма B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A(f_1, f_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A(f_1, f_2) \\ A(f_1, f_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(f_1, f_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем замену базиса:

$$\begin{cases} f_1 = f_1; \\ e_1 = e_1; \\ e_2' = \dfrac{e_2}{A(f_1, f_2)}; \\ f_2' = \dfrac{f_2}{A(f_1, f_2)} \end{cases}$$

Очевидно, что в базисе $< f_1, e_1, f_2', e_2' >$ матрицы форм A и B имеют канонический вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.2 $dimU = 1$ и $dim(U \cap V) = 0$

То есть, $U =< f_1 >$ и $f_1 \notin V$. Рассмотрим вектор $f_2 \neq f_1$, но при этом $f_2 \notin V$.

Пусть вектора имеют вид: $f_1 = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4)$ и $f_2 = (f_2^1, 0, 0, f_2^4)$. Тогда, рассмотрим следующие вектора $e_1, e_2 \in V$, такие что $e_1 = (0, f_1^1, f_1^4, 0)$ и $e_2 = (0, f_2^1, f_2^4, 0)$.

Посмотрим, как в базисе $< f_1, e_1, e_2, f_2 >$ будут выглядеть матрицы форм A и B.

$$A(f_1, f_2) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^3 - f_1^4, -\lambda f_1^4, \lambda f_1^1, f_1^1 + \lambda f_1^2) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda f_1^3 f_2^1 - f_1^4 f_2^1 + f_1^1 f_2^4 + \lambda f_1^2 f_2^4$$

$$A(f_1, e_1) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^1 \\ f_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^3 - f_1^4, -\lambda f_1^4, \lambda f_1^1, f_1^1 + \lambda f_1^2) \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^1 \\ f_1^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda f_1^4 f_1^1 + \lambda f_1^1 f_1^4 = 0$$

$$A(f_1, e_2) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^1 \\ f_2^4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^3 - f_1^4, -\lambda f_1^4, \lambda f_1^1, f_1^1 + \lambda f_1^2) \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^1 \\ f_2^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda f_1^4 f_2^1 + \lambda f_1^1 f_2^4 = \lambda(A(f_1, f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 - \lambda f_1^2 f_2^4)$$

$A(e_1, e_2) = 0$

$$A(e_1, f_2) = (0, f_1^1, f_1^4, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^4, 0, 0, \lambda f_1^1) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda f_1^4 f_2^1 + \lambda f_1^1 f_2^4 = \lambda(A(f_1, f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 - \lambda f_1^2 f_2^4)$$

$$A(e_2,f_2)=(0,f_2^1,f_2^4,0)\begin{pmatrix}0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\\-\lambda&0&0&0\\-1&-\lambda&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_2^1\\0\\0\\f_2^4\end{pmatrix}=$$

$$=(-\lambda f_2^4,0,0,\lambda f_2^1)\begin{pmatrix}f_2^1\\0\\0\\f_2^4\end{pmatrix}$$

$$=-\lambda f_2^4 f_2^1+\lambda f_2^1 f_2^4=0$$

Следовательно, в базисе $< f_1, e_1, e_2, f_2 >$ форма A имеет вид:

$$\begin{pmatrix}0&0&\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1-\lambda f_1^2f_2^4)&A(f_1,f_2)\\0&0&0&\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1-\lambda f_1^2f_2^4)\\-\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1-\lambda f_1^2f_2^4)&0&0&0\\-A(f_1,f_2)&-\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1-\lambda f_1^2f_2^4)&0&0\end{pmatrix}$$

Теперь форма B:

$$B(f_1,f_2)=(f_1^1,f_1^2,f_1^3,f_1^4)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_2^1\\0\\0\\f_2^4\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_1^3,-f_1^4,f_1^1,f_1^2)\begin{pmatrix}f_2^1\\0\\0\\f_2^2\end{pmatrix}=-f_1^3f_2^1+f_1^2f_2^4$$

$$B(f_1,e_1)=(f_1^1,f_1^2,f_1^3,f_1^4)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f_1^1\\f_1^4\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_1^3,-f_1^4,f_1^1,f_1^2)\begin{pmatrix}0\\f_1^1\\f_1^4\\0\end{pmatrix}=-f_1^4f_1^1+f_1^1f_1^4=0$$

$$B(f_1,e_2)=(f_1^1,f_1^2,f_1^3,f_1^4)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f_2^1\\f_2^4\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_1^3,-f_1^4,f_1^1,f_1^2)\begin{pmatrix}0\\f_2^1\\f_2^4\\0\end{pmatrix}=-f_1^4f_2^1+f_1^1f_2^4=A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1-\lambda f_1^2f_2^4$$

$B(e_1,e_2)=0$

$$B(e_1, f_2) = (0, f_1^1, f_1^4, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$= (-f_1^4, 0, 0, f_1^1) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix} = -f_1^4 f_2^1 + f_1^1 f_2^4 = A(f_1, f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 - \lambda f_1^2 f_2^4$$

$$B(e_2, f_2) = (0, f_2^1, f_2^4, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$= (-f_2^4, 0, 0, f_2^1) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^4 \end{pmatrix} = -f_2^4 f_2^1 + f_2^1 f_2^4 = 0$$

Таким образом, получаем, что форма B имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A(f_1, f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 - \lambda f_1^2 f_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A(f_1, f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 - \lambda f_1^2 f_2^4 \\ -A(f_1, f_2) - \lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^2 f_2^4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(f_1, f_2) - \lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^2 f_2^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $A(f_1, f_2) = -\lambda f_1^3 f_2^1 - f_1^4 f_2^1 + f_1^1 f_2^4 + \lambda f_1^2 f_2^4$. Тогда подберем вектор f_2 таким образом, что $-\lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^2 f_2^4 = 0$. Тогда, $A(f_1, f_2) = -f_1^4 f_2^1 + f_1^1 f_2^4$.

И матрицы примут вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda A(f_1, f_2) & A(f_1, f_2) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda A(f_1, f_2) \\ -\lambda A(f_1, f_2) & 0 & 0 & 0 \\ -A(f_1, f_2) & -\lambda A(f_1, f_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A(f_1, f_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A(f_1, f_2) \\ A(f_1, f_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(f_1, f_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично предыдущему случаю, сделаем замену координат:

$$\begin{cases} f_1 = f_1; \\ e_1 = e_1; \\ e_2' = \dfrac{e_2}{A(f_1, f_2)} \\ f_2' = \dfrac{f_2}{A(f_1, f_2)} \end{cases}$$

Очевидно, что в базисе $< f_1, e_1, f_2', e_2' >$ матрицы форм A и B имеют канонический вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.3 $dimU = 2$ и $din(U \cap V) = 2$

Размерность собственного пространства V равно 2. Поэтому, $U = V =< k_2, k_3 >$. В качестве базисных векторов можно взять канонический базис $\mathbb{C}^4$.

2.1.4 $dimU = 2$ и $din(U \cap V) = 1$

Существует вектор $e_1 : e_1 \in V, e_1 \in U$. Пусть этот вектор имеет координаты $e_1 = (0, e_1^1, e_1^2, 0)$. Так же, существует вектор $f_1 : f_1 \in U, f_1 \notin V$. Пусть его координатное представление имеет вид $f_1 = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4)$.

Дополним до базиса всего пространства $\mathbb{C}^4$ следующими векторами: $e_2 = (0, f_1^1, f_1^4, 0)$ и $f_2 = (e_1^1, 0, 0, e_1^2)$.

Этот случай абсолютно аналогичен случаю 2.

2.1.5 $dimU = 2$ и $din(U \cap V) = 0$

В данном случае, $U =< f_1, f_2 >$ и $f_i \notin V$. Распишем в координатах: $f_i = (f_i^1, f_i^2, f_i^3, f_i^4)$. Дополним до базиса всего пространства векторами e_i, которые имеют вид: $e_i = (0, f_i^1, f_i^4, 0)$.

Рассмотрим какой вид в базисе f_1, e_1, e_2, f_2 имеют формы A и B.

$$A(f_1, f_2) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^3 - f_1^4, -\lambda f_1^4, \lambda f_1^1, f_1^1 + \lambda f_1^2) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda f_1^3 f_2^1 - f_1^4 f_2^1 - \lambda f_1^4 f_2^2 + \lambda f_1^1 f_2^3 + f_1^1 f_2^4 + \lambda f_1^2 f_2^4$$

$$A(f_1, e_1) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^1 \\ f_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^3 - f_1^4, -\lambda f_1^4, \lambda f_1^1, f_1^1 + \lambda f_1^2) \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^1 \\ f_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda f_1^4 f_1^1 + \lambda f_1^1 f_1^4 = 0$$

$$A(f_1, e_2) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^1 \\ f_2^4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^3 - f_1^4, -\lambda f_1^4, \lambda f_1^1, f_1^1 + \lambda f_1^2) \begin{pmatrix} 0 \\ f_2^1 \\ f_2^4 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda f_1^4 f_2^1 + \lambda f_1^1 f_2^4$$

$$A(e_1, e_2) = 0$$

$$A(e_1, f_2) = (0, f_1^1, f_1^4, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_1^4, 0, 0, \lambda f_1^1) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda f_1^4 f_2^1 + \lambda f_1^1 f_2^4$$

$$A(e_2, f_2) = (0, f_2^1, f_2^4, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$=(-\lambda f_2^4, 0, 0, \lambda f_2^1) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda f_2^4 f_2^1 + \lambda f_2^1 f_2^4 = 0$$

Таким образом мы получили, что матрица формы A имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda(A(f_1,f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^4 f_2^2 - \\ -\lambda f_1^1 f_2^3 - \lambda f_1^2 f_2^4) \end{matrix} & A(f_1,f_2) \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda(A(f_1,f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^4 f_2^2 - \\ -\lambda f_1^1 f_2^3 - \lambda f_1^2 f_2^4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\lambda(A(f_1,f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^4 f_2^2 - \\ -\lambda f_1^1 f_2^3 - \lambda f_1^2 f_2^4) \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ -A(f_1,f_2) & \begin{matrix} -\lambda(A(f_1,f_2) + \lambda f_1^3 f_2^1 + \lambda f_1^4 f_2^2 \\ -\lambda f_1^1 f_2^3 - \lambda f_1^2 f_2^4) \end{matrix} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь форма B:

$$B(f_1, f_2) = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} =$$

$$=(-f_1^3, -f_1^4, f_1^1, f_1^2) \begin{pmatrix} f_2^1 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_2^4 \end{pmatrix} = -f_1^3 f_2^1 - f_1^4 f_1^2 + f_1^1 f_2^3 + f_1^2 f_2^4$$

$$B(f_1,e_1)=(f_1^1,f_1^2,f_1^3,f_1^4)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f_2^1\\f_2^4\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_1^3,-f_1^4,f_1^1,f_1^2)\begin{pmatrix}0\\f_1^1\\f_1^4\\0\end{pmatrix}=-f_1^4f_1^1+f_1^1f_1^4=0$$

$$B(f_1,e_2)=(f_1^1,f_1^2,f_1^3,f_1^4)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f_2^1\\f_2^4\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_1^3,-f_1^4,f_1^1,f_1^2)\begin{pmatrix}0\\f_2^1\\f_2^4\\0\end{pmatrix}=-f_1^4f_2^1+f_1^1f_2^4$$

$$B(e_1,e_2)=0$$

$$B(e_1,f_2)=(0,f_1^1,f_1^4,0)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_2^1\\f_2^2\\f_2^3\\f_2^4\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_1^4,0,0,f_1^1)\begin{pmatrix}f_2^1\\f_2^2\\f_2^3\\f_2^4\end{pmatrix}=-f_1^4f_2^1+f_1^1f_2^4$$

$$B(e_2,f_2)=(0,f_2^1,f_2^4,0)\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_2^1\\f_2^2\\f_2^3\\f_2^4\end{pmatrix}=$$

$$=(-f_2^4,0,0,f_2^1)\begin{pmatrix}f_2^1\\f_2^2\\f_2^3\\f_2^4\end{pmatrix}=-f_2^4f_2^1+f_2^1f_2^4=0$$

Тогда рматрица формы B имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \begin{matrix}A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1+\lambda f_1^4f_2^2-\\-\lambda f_1^1f_2^3-\lambda f_1^2f_2^4\end{matrix} & \dfrac{A(f_1,f_2)+f_1^4f_2^1-f_1^1f_2^4}{\lambda}\\
0 & 0 & 0 & \begin{matrix}\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1+\lambda f_1^4f_2^2-\\-\lambda f_1^1f_2^3-\lambda f_1^2f_2^4)\end{matrix}\\
\begin{matrix}-\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1+\lambda f_1^4f_2^2-\\-\lambda f_1^1f_2^3-\lambda f_1^2f_2^4)\end{matrix} & 0 & 0 & 0\\
-\dfrac{A(f_1,f_2)+f_1^4f_2^1-f_1^1f_2^4}{\lambda} & \begin{matrix}-\lambda(A(f_1,f_2)+\lambda f_1^3f_2^1+\lambda f_1^4f_2^2\\-\lambda f_1^1f_2^3-\lambda f_1^2f_2^4)\end{matrix} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

2.1.6 $dimU = 3$ и $din(U \cap V) = 2$

Исходя из текущих размерностей, плучаем, что V лежит в подпространстве U.

Пусть $U =< f_1, e_1, e_2 >$, где $f_1 = (f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_{4)}$, $e_1 = (0, f_1^1, f_1^4, 0)$, $e_2 = (0, f_2^1, f_2^4, 0)$. Дополним до базиса всего пространства вектором $f_2 = (f_2^1, 0, 0, f_2^4)$.

Таким образом, этот случай аналогичен случаю 2.

2.1.7 $dimU = 3$ и $din(U \cap V) = 1$

Из текущих размерностей следует, что существет верктор $e_1 = U \cap V$. Пусть $e_1 = (0, f_1^1, f_1^4, 0)$. Рассмотрим множество векторов, такой что $f_1 = (f_1^1, *, *, f_1^4)$. Заметим, что все такие вектора образуют двухмерное пространство. Это пространство заведомо пересекается с U. Поэтому, существует вектор $f_1 \in U$, такой что его координаты - $(f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_1^4)$.

Далее, рассмотрим вектор $f_2 \in U$ с координатами $f_2 = (f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4)$. Вектора f_1, e_1, f_2 образуют базис пространства U. Дополним этот базис до базиса всего $\mathbb{C}^4$ вектором $e_2 = (0, f_2^1, f_2^4, 0)$.

Данный случай аналогичен случаю 5.

Теорема доказана.

2.2 Два блока Жордана

Каждая матрица состоит из двух блоков Жордана с собственными значениями λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ соответственно. В случае, если $\lambda_i = 0$ получаем Блок Жордана с собственным значением ∞

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим, как в данном случае будет выглядеть оператор $R = B^{-1}A$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, оператор R примет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим действие данного оператора на вектор $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4$.

$$Rv = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_1 v_2 \\ \lambda_2 v_3 \\ \lambda_2 v_4 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения оператора R:
Пусть λ - собсбвенное значение. которое необходимо найти. Тогда:

$$def(R - \lambda E) = def\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{def} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)^2 (\lambda_2 - \lambda)^2$$

Следовательно $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ - собсвтенные значения оператора.

2.3 Два блока Кронекера

Матрицы форм A и B имеют вид:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В данном случае каждая матрица является вырожденной, поэтому оператор R, аналогичный рассмотренному ранее, рассматриваться не будет.

Обозначим вектора канонического базиса, как и ранее, k_1, k_2, k_3, k_4. Из канонического вида форм очевидно, что $KerA = \langle k_3, k_4 \rangle$, а $KerB = \langle k_2, k_4 \rangle$. Так же заметим, что пересечение ядер форм не пусто - $KerA \cap KerB = \langle k_4 \rangle$.

Теорема. Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на $\mathbb{C}^4$. Канонический вид этой пары форм имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Тогда подпространства U характеризуются двумя числами: $dim(U)$, $dim(U \cap V)$, где $V = KerA \cap KerB$.

Доказательство:

2.3.1 $dimU = 1$ и $dim(U \cap V) = 1$

Пусть подпространство U имеет размерность 1 и $dim(U \cap < k_4 >) = 1$. То есть $U =< k_4 >$. Дополним до базиса остальными базисными векторами. Таким образом, удалось дополнить подпространство до канонического базиса всего пространства.

2.3.2 $dimU = 1$ и $dim(U \cap V) = 0$

Пусть подпространство U имеет размерность 1 и $dim(U \cap < k_4 >) = 0$. Тогда:

а) $U \cap KerA = 1$. Следовательно $U =< k_3 >$. Дополним до базиса остальными базисными векторами. Таким образом, удалось дополнить подпространство до канонического базиса всего пространства.

б) $U \cap KerB = 1$. Следовательно $U =< k_2 >$. Дополним до базиса остальными базисными векторами. Таким образом, удалось дополнить подпространство до канонического базиса всего пространства.

в) $U \cap KerA = 0$ и $U \cap KerB = 0$. Пусть $U =< e >$. Дополним базис U до базиса всего пространства векторами k_2, k_3, k_4. Тогда в базисе $< e, k_2, k_3, k_4 >$ матрицы форм будут иметь следующий вид:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Параметры a и b в данном случае, заведома не нулевые. Иначе бы, ядра форм совпадали со всем пространством $\mathbb{C}^4$.

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} \mathrm{e} = \mathrm{e}; \\ \mathrm{k}_2' = \dfrac{k_2}{a}; \\ \mathrm{k}_3' = \dfrac{k_3}{b}; \\ \mathrm{k}_4 = k_4; \end{cases}$$

Очевидно, что в новом базисе матрицы принимают канонический вид.

2.3.3 $dimU = 2$ и $dim(U \cap V) = 1$

Пусть подпространство U имеет размерность 2 и $dim(U \cap < k_4 >) = 1$. Тогда $k_4 \in U$. Рассмотрим случаи:

а) $U \cap KerA = 2$. Следовательно $U = KerA$. Поэтому в качестве базисных векторов можно взять вектора k_2 и k_4, а дополнить до базиса векторами k_1 и k_2.

б) $U \cap KerB = 2$. Аналогично предудышему пункту $U = KerB$. Поэтому в качестве базисных векторов можно взять вектора k_3 и k_4, а дополнить до базиса векторами k_1 и k_3.

в) $U \cap KerA = 1$ и $U \cap KerB = 1$. Тогда пусть $U =< e, k_4 >$. Дополним до базиса всего пространства векторами k_2 и k_3. Этот случай аналогичен случаю в) пункта 4.3.2.

2.3.4 $dimU = 2$ и $dim(U \cap V) = 0$

Пусть подпространство U имеет размерность 2 и $dim(U \cap < k_4 >) = 0$. Тогда $k_4 \notin U$. для начала заметим, что двумерное подпространство U обязательно будет пересекаться с одним из ядер $KerA$ или $KerB$. Если это не верно, то $U \cap (KerA \cup KerB) = 0$, что в свою очередь означает, что двумерное подпространство не пересекается с трезмерным в четырехмерном пространстве. Чего не может быть. Поэтому возможны следующие случаи:

а) $U \cap KerA = 1$ и $U \cap KerB = 0$ Следовательно, $k_3 \in U$. Возьмем в качестве базиса U вектора e и k_3. Дополним этот базис до базиса всего пространства векторами k_2 и k_4. случай свелся к случаю в) предыдущего пункта.

б) $U \cap KerA = 0$ и $U \cap KerB = 1$ Следовательно, $k_2 \in U$. Возьмем в качестве базиса U вектора e и k_2. Дополним этот базис до базиса всего пространства векторами k_3 и k_4. Этот случай аналогичен случаю в) пункта 4.3.2.

в) $U \cap KerA = 1$ и $U \cap KerB = 1$ Следовательно, $k_2 \in U$ и $k_3 \in U$. Возьмем эти вектора в качестве базиса подпространства. Дополним этот базис до базиса всего пространства векторами k_1 и k_4. То есть мы дополнили базис подпространства до канонического базиса.

2.3.5 $dimU = 3$ и $dim(U \cap V) = 1$

Пусть $dimU = 3$ и в данном случае $k_4 \in U$. Для начала, заметим, что $dimU \cap (KerA \cup KerB) \geq 2$. Так как два трехмерныз подпространства не могут пересекаться по одномерному в четырехмерном. Рассмотрим следующие варианты:

а) $U \cap KerA = 2$ и $U \cap KerB = 2$ В данном случае, получается, что подпространство $U =< k_2, k_3, k_4 >$. Дополним его до базиса всего пространсва вектором k_1. Таким образом подпространство дополнено до канонического базиса.

б) $U \cap KerA = 1$ и $U \cap KerB = 2$ Следовательно, $KerB \subset U$. Возьмем в качестве базисных векторов вектора k_3, k_4 и некоторый вектор $e \in U$. дополним этот базис до базиса всего пространства вектором k_2. Этот случай аналогичен случаю в) пункта 4.3.2.

в) $U \cap KerA = 2$ и $U \cap KerB = 1$ Следовательно, $KerA \subset U$. Возьмем в качестве базисных векторов вектора k_2, k_4 и некоторый вектор $e \in U$. дополним этот базис до базиса всего пространства вектором k_3. Этот случай аналогичен случаю в) пункта 4.3.2.

Случай двух блоков Кронекера разобран.

3 Случай пучка

Случай пучка:

Для случая (2), когда каждая матрица состоит из двух Блоков Жордана с собственным значением ∞ сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на $\mathbb{C}^4$, и B невырожденная. Канонический вид этой пары форм имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда подпространства U характеризуются двумя числами: $dim(U)$, $dim(U \cap KerA)$.

Список возможных случаев представлен ниже:

№	dim U	dim $(U \cap KerA)$
1.1	1	1
1.2	1	0
2.1	2	2
2.1	2	1
2.3	2	0
3.1	3	2
3.2	3	1

Доказательство теоремы.

Прежде чем доказывать непосредственно теорему, сформулируем и докажем лемму:

Лемма.

Пусть в базисе $< k_1, k_2, k_3, k_4 >$ формы A и B имеют следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда выполнены два свойства:

1. Ограничение формы B на ядро формы A вырažденно.

2. Для оператора $R = B^{-1}A$ выполнено: $R\colon KerA \to 0$ и $R\colon \mathbb{C}^4 \to KerA$.

◀ 1. Заметим, что $KerA =< k_2, k_3 >$, следовательно любой верктор v из ядра формы A представляеся в виде $v = \alpha k_2 + \beta k_3$. Пусть v_1 и v_2 лежат в ядре формы A. Тогда:

$$B(v_1, v_2) = B(\alpha_1 k_2 + \beta_1 k_3, \alpha_2 k_2 + \beta_2 k_3) =$$
$$= \alpha_1\alpha_2 B(k_2, k_2) + \alpha_1\beta_2 B(k_2, k_3) + \alpha_2\beta_1 B(k_2, k_3) + \beta_1\beta_2 B(k_3, k_3) = 0$$

Таким образом получаем, что $\forall v_1, v_2 \in KerA \quad B(v_1, v_2) = 0$, что означает, что органичение формы B на ядро A вырожденно.
2. В данном случае, оператор R имеет вид:

$$\text{R}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $v \in KerA$. Тогда, $v = \alpha k_2 + \beta k_3$. Следовательно,

$$Rv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Таким образом, верно, что $R\colon KerA \to 0$.
Пусть $v \notin KerA$. Тогда $v = \gamma k_1 + \alpha k_2 + \beta k_3 + \delta k_4$. Следовательно,

$$Rv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = (\ 0,\ \gamma,\ \delta,\ 0\ )$$

Из этого следует, что $R\colon \mathbb{C}^4/KerA \to KerA$. ►

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Очевидно, что возможны следующие пары чисел $dim(U)$, $dim(U \cap KerA)$:

№	dim U	dim $(U \cap KerA)$
1.1	1	1
1.2	1	0
2.1	2	2
2.1	2	1
2.3	2	0
3.1	3	2
3.2	3	1

Заметим, что случай, когда $dimU = 3$ и $dim(U \cap KerA) = 0$ не возможен, т.к. $dimKerA = 2$, а в четырехмерном пространстве двумерное и трехмерное подпространства не могут не пересекаться.

Рассмотрим первый случай.

Пусть $U =< e_1 >$ и при этом $e_1 \in KerA$. Рассмотрим $e_2 \in KerA : e_2 \neq e_1$. Тогда,

$$A(e_1, e_2) = B(e_1, e_2) = 0$$

Рассмотрим вектора $f_i : e_i = Rf_i$. Посмотрим, какой вид имеют обе формы в базисе $< f_1, e_1, e_2, f_2 >$

$$A(f_1, e_1) = A(f_1, e_2) = A(f_1, e_1) = A(e_1, f_2) = A(e_2, f_2) = 0$$

Без ограничения общности можно считать, что $A(f_1, f_2) = 1$. Тогда,

$$B(f_1, e_1) = B(f_1, Rf_1) = A(f_1, f_1) = B(e_2, f_2) = 0$$

$$B(f_1, e_2) = B(e_1, f_2) = B(Rf_1, f_2) = B(f_1, R_{f2}) = A(f_1, f_2) = 1$$

Осталось разобраться, какое значение будет принимать $B(f_1, f_2)$. Рассмотрим вектора $\hat{f}_1 = f_1 + \lambda e_1$ и $\hat{f}_2 = f_2 + \mu e_2$. Тогда

$$B(\hat{f}_1, \hat{f}_2) = B(f_1 + \lambda e_1, f_2 + \mu e_2) = B(f_1, f_2) + \mu B(f_1, e_2) + \lambda B(e_1, f_2) + \lambda\mu B(e_1, e_2) =$$

$$= B(f_1, f_2) + \mu B(f_1, e_2) + \lambda B(e_1, f_2) = B(f_1, f_2) + \lambda + \mu$$

Пусть $\mu = 0$, тогда остается подобрать такое λ, что $B(\hat{f}_1, \hat{f}_2) = B(f_1, f_2) + \lambda = 0$. Очевидно, что $\lambda = -B(f_1, f_2)$.

Заметим, что соответствующая замена никак не влияет на вид формы A.

Таким образом, базис подпространтсва U дополнен до базиса всего пространства - $< \hat{f}_1, e_1, e_2, \hat{f}_2 >$ и формы имеют в нем вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что все остальные случаи абсолютно аналогичны этому. Просто выбираем два вектора из ядра и их прообразы относительно оператора R и получаем базис, в котором обе формы имеют канонический вид.

Теорема доказана.

4 Список литературы

[1] А. Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. Редакция журанала "Регулярная и хаотическая динамика", Издательский дом "Удмуртский университет", 1999 г.

[2] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Издательство "Наука", главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1966 г.

[3] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия. Итоги науки и техн. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985 г.

[4] И. К. Козлов. Элементарное доказательство теоремы Жордана–Кронекера. 2011. http://arxiv.org/pdf/1109.5371.pdf