ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«Трехмерные линейные операторы Нийенхейса с функционально независимыми собственными значениями»

Выполнил студент
607 группы
Андреев Максим Александрович

подпись студента

Научные руководители:
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н. Фоменко Анатолий Тимофеевич
Доцент, к.ф.-м.н. Коняев Андрей Юрьевич

подпись научного руководителя

Москва
2018 г.

Содержание

1 Введение **2**

2 Необходимые понятия **3**

3 Мотивация **7**

4 Трехмерные алгебры. Известные примеры из работы Д.Бурдэ **8**

5 Трехмерные лево-симметрические алгебры. Определение **15**

6 Алгоритм поиска лево-симметрических алгебр **18**
- 6.1 Случаи для перебора 21
- 6.2 Реализация поиска лево-симметрических алгебр 23

7 Классификация линейных операторов Нийенхейса размерности 3 **28**

8 Список литературы **31**

1 Введение

Операторные поля на многообразиях с нулевым тензором Нийенхейса (его еще называют кручением Нийенхейса) возникают в самых разных областях математики. Например, для почти комплексной структуры равенство нулю тензора Нийенхейса - единственное условие, необходимое для интегрируемости этой структуры в комплексную. В бигамильтоновой геометрии такие операторы появляются как операторы рекурсии для построения семейств коммутативных функций для пар согласовнных скобок на симплекстическом многообразии.

Недавно выяснилось, что такого рода операторные поля естественным образом возникают в теории проективной классификации метрик. В последнем случае они играют ключевую роль при изучении особых точек таких "метрических пучков" - точек, где в нормальной форме пары метрик появляются одинаковые собственные значения. Более того, оказалось, что специальная структура возникающих операторов накладывает крайне сильные условия на топологию многообразия. То есть, например, если многообразие компактно, то пары проективно-эквивалентных метрик существуют только на сфере и торе. Причем на последнем им запрещено иметь особые точки вообще.

Как оказалось, общей теории особенностей Нийенхейсовых операторов не существует, равно как основанной на этом теории глобального строения Нийенхейсовых полей. Строить эту теорию естественно по аналогии с теорией особенностей и нормальных форм векторных полей. Построение этой теории, которое проходят в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений на мехмате, начинается с описания окрестностей изолированной особой точки линейных векторных полей. Именно этому посвящена курсовая.

На основе списка, полученного в работе А.Ю.Коняева [1], изучаются окрестности изолированных особых точек для линейных операторов Нийенхейса в двумерном случае. Эти тензоры оказываются тесно связаны с так называемыми лево-симметрическими алгебрами, известными также, как пре-Ли алгебры. Эти объекты впервые возникли в работе Э.Б.Винберга [3] при изучении левоинвариантных связностей на группах Ли.

В ходе работы были изучены уже известные линейные операторы Нийенхейса размерностей 2 и 3. Был получена полная классификация линейных операторов Нийенхейса размерности 3.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям - А. Ю. Коняеву и А. Т. Фоменко за продуктивную работку, постановку задач, помощь в нахождении пути их решения.

2 Необходимые понятия

Определение. Стандартное определение тензора Нийенхейса выглядит так:

$$N_R(v, w) = R[Rv, w] + R[v, Rw] - R^2[v, w] - [Rv, Rw],$$

где v, w - любые векторные поля, $[,]$ - стандартный коммутатор векторных полей, R - операторное поле, тензор типа $(1, 1)$. Этот тензор хорошо известен и используется во многих работах геометрии.

Определение. Мы называем операторное поле R *полем Нийенхейса* , если тензор Нийенхейса зануляется.

Рассмотрим характерестический многочлен оператора R, и возьмем его дискриминант:

$$\mathcal{D}_R = \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$$

Здесь λ_i - корни характеристического многочлена.

Определение. Точку будем называть *особой*, если дискриминант характеристического многочлена в этой точке равен нулю $\mathcal{D}_R = 0$, то есть точка, в которой хотя бы один корень характерестического многочлена является кратным.

Замечание. Точки, в которых матрица является жордановой клеткой и собственные значения совпадают - тоже вырожденые, которое можно изучать, эти точки назовем *почти особыми.*

В особой точке P касательное пространство $T_P M$ имеет естественную структуру, которая называется лево-симметрической алгеброй. Предположим, что A - алгебра с операцией $*$.

Ассоциатор: $\langle x, y, z\rangle = (x * y) * z - x * (y * z)$ Это трилинейное отображение $A \to A$.

Алгебра *ассоциативна*, если $\forall x, y, z \in A$ выполнено $\langle x, y, z\rangle = 0$.

Алгебра называется *лево-симметрической*, если ассоциатор удовлетворяет тождеству: $\langle x, y, z\rangle = \langle y, x, z\rangle$ для любых троек из A. Это симметрия для левой пары аргументов.

Определим *левое действие* на A по формуле $L_x y = x * y$. В этом случае свойство "*левой симметрии*" может быть записано формулой:

$$L_x L_y - L_y L_x = L_{[x,y]} \tag{1}$$

То есть коммутатор на A удовлетворяет тождеству Якоби.

Пусть v и u - векторные поля на многообразии M, L_v - оператор производной Ли по направлению векторного поля v. Коммутатор операторов L_u и L_v есть дифференциальный оператор первого порядка. поэтому существует такое векторное поле $[v,u]$, для которого выполнено (1).

Соответственные алгебры Ли назовем *ассоциированными алгебрами Ли.*

Утверждение 1. Рассмотрим аффинное пространство V и операторное поле R, где все компоненты - это однородные линейные полиномы. $N_R = 0$, на нем $a_{ij}^k = \frac{\partial R_i^k}{\partial x^j}$ определяют структурные константы лево-симметрической алгебры.

Доказательство. Сначала нужно переписать свойство ассоциатора в терминах структурных констант алгебры. Зафиксируем базис e_i в A. Имеем $e_i * e_j = a_{ij}^k e_k$ Получим следующие уравнения для ассоциаторов:

$$\langle e_j, e_i, e_r\rangle = (a_{ji}^l e_l) * e_r - e_j * (a_{ir}^l e_l) = (a_{ji}^l a_{lr}^p - a_{jl}^p a_{ir}^l) e_p, \tag{2}$$

$$\langle e_i, e_j, e_r\rangle = (a_{ij}^l e_l) * e_r - e_i * (a_{jr}^l e_l) = (a_{ij}^l a_{lr}^p - a_{il}^p a_{jr}^l) e_p. \tag{3}$$

Свойство левой симметрии алгебры имеет вид

$$\langle e_j, e_i, e_r\rangle - \langle e_i, e_j, e_r\rangle = (a_{ji}^l a_{lr}^p - a_{jl}^p a_{ir}^l - a_{ij}^l a_{lr}^p + a_{il}^p a_{jr}^l) e_p \tag{4}$$

Свойство $N_R = 0$ в координатах имеет вид

$$0 = (N_R)_{ij}^p = \frac{\partial R_p^j}{\partial x^l} R_i^l - \frac{\partial R_p^i}{\partial x^l} R_j^l - \frac{\partial R_p^l}{\partial x^i} R_l^p + \frac{\partial R_l^i}{\partial x^j} R_l^p \tag{5}$$

Так как R - линейный, то $R_i^k = a_{ij}^k x^j$. Подставляя это в предыдущее уравнение, получим

$$0 = N_R(e_i, e_j) = (a_{ji}^l a_{lr}^p - a_{jl}^p a_{ir}^l - a_{ij}^l a_{lr}^p + a_{il}^p a_{jr}^l) e_p. \tag{6}$$

А это и есть вид уравнения (4). □

Замечание. Для лево-симметрических алгебр поле Нийенхейса R определяется *правым действием* $R_y x = x * y$.

Теорема 1. *Рассмотрим P - особую точку операторного поля Нийенхейса R. Тогда $\frac{\partial R_i^k}{\partial x^j}|_P$ определяет структуру лево-симметрической алгебры в касательном пространстве $T_P M$.*

Доказательство этой теоремы приведено в работе А.Ю.Коняева [1].

Теорема 2. *С точностью до изоморфизма существуют 2 непрерывных семейства и 10 исключительных двумерных лево-симметрических алгебр. Буквой $\mathfrak{b}$ обозначаем алгебры с некоммутативной ассоциированной алгеброй Ли, буквой $\mathfrak{c}$ обозначаем алгебры с коммутативной ассоциированной алгеброй Ли. Полный список представлен в следующих двух таблицах.*

Таблица 1. Столбцы: 1) Название 2) Структурные константы (указаны только ненулевые) 3) в базисе $xL_{e_1} + yL_{e_2}$ 4) в базисе $xR_{e_1} + yR_{e_2}$

Название	Структурные константы	L	R
$b_{1,\alpha}$	$e_2 * e_1 = e_1,$ $e_2 * e_2 = \alpha e_2$	$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$
b_2	$e_2 * e_1 = e_1,$ $e_2 * e_2 = e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} y & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & x + y \\ 0 & y \end{pmatrix}$
$b_{3,\alpha}$ $\alpha \neq 0$	$e_1 * e_2 = \alpha e_1,$ $e_2 * e_1 = (\alpha - 1)e_1$ $e_2 * e_2 = \alpha e_2$	$\begin{pmatrix} (\alpha-1)y & \alpha x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha y & (\alpha-1)x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$
b_4	$e_1 * e_2 = e_1,$ $e_2 * e_2 = e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & x + y \\ 0 & y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$
b_5^+	$e_1 * e_1 = e_2,$ $e_2 * e_1 = -e_1$ $e_2 * e_2 = -2e_2$	$\begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -2y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2x & -y \\ y & 0 \end{pmatrix}$
b_5^-	$e_1 * e_1 = -e_2,$ $e_2 * e_1 = -e_1$ $e_2 * e_2 = -2e_2$	$\begin{pmatrix} -y & 0 \\ -x & -2y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2x & -y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 2. Столбцы: 1) Название 2) структурные константы 3) в этом случае алгебры с коммутативной ассоциированой алгеброй Ли, то есть $L = R$

Название	Структурные константы	L=R
c_1		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
c_2	$e_2 * e_2 = e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$
c_3	$e_2 * e_2 = e_1$	$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
c_4	$e_2 * e_2 = e_2$ $e_2 * e_1 = e_1$ $e_1 * e_1 = e_2$	$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$
c_5^+	$e_2 * e_2 = e_2$ $e_2 * e_1 = e_1$ $e_1 * e_2 = e_1$ $e_1 * e_1 = e_2$	$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}$
c_5^-	$e_2 * e_2 = e_2$ $e_2 * e_1 = e_1$ $e_1 * e_2 = e_1$ $e_1 * e_1 = -e_2$	$\begin{pmatrix} y & -x \\ x & y \end{pmatrix}$

3 Мотивация

Общей теории особенностей Нийенхейсовых операторов не существует, равно как основанной на этом теории глобального строения Нийенхейсовых полей. Строить эту теорию естественно по аналогии с теорией особенностей и нормальных форм векторных полей. Построение этой теории, которое проходят в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений на мехмате, начинается с описания окрестностей изолированной особой точки линейных векторных полей.

В книге В.И.Арнольда [2], сказано, что геометрия уравнения второго порядка послужила источником ряда математических теорий:

А.Трессе, ученик С. Ли, в своей диссертации построил все "полуинварианты" уравнения. Задача о геометрии дифференциального уравнения второго порядка привела Э.Картана к теории многообразий проективной связности. Г.Болем был проделан перевод теории Трассе на язык пары полей направлений в пространстве.

Таким образом, строение окрестности в двумерном случае для линейных векторных полей, может дать начало исследованиям теории особенностей Нийенхейновых операторов.

Главным результатом моей курсовой работы в 2016 году было построение окрестностей особых точек для всех двумерных линейных операторов Нийенхейса размерности 2. Классификация таких операторов приведена выше.

Далее логично изучать окретстности особеных точек операторов Нийенхейса размерности 3. К сожалению, нет классификации таких операторов, как в случае размерности 2.

В теории дифференциальных уравнений есть результат, который говорит о том, что окрестности сингулярного множества операторных полей устроены таким же образом, как и окрестности сингулярного множества векторных полей, в случае, если коразмерность сингулярного множества ≥ 2. *Сингулярным* множеством здесь мы называем множество особых точек.

В следующем разделе мы рассмотрим уже известные трехмерные лево-симметрические алгебры и изучим как выглядит их сингулярное множество. Далее будут описаны попытки и реализация поиска новыч трехмерныч алгебр, чтобы получить возможность изучить их строение.

4 Трехмерные алгебры. Известные примеры из работы Д.Бурдэ

В работе Д.Бурдэ [7] в **Предложении 3.51** приведены структурные константы двух лево-симметрических алгебр размерности 3 $A_{1,\alpha}$:

$$e_1 \cdot e_1 = (\alpha+1)e_1; \qquad e_1 \cdot e_1 = \alpha e_3; \qquad e_3 \cdot e_2 = e_1;$$

$$e_1 \cdot e_2 = e_2; \qquad e_2 \cdot e_3 = e_1;$$

и A_2:

$$e_1 \cdot e_1 = \frac{3}{2}e_1; \qquad e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2}e_3; \qquad e_3 \cdot e_2 = e_1;$$
$$e_1 \cdot e_1 = e_2; \qquad e_2 \cdot e_3 = e_1; \qquad e_3 \cdot e_3 = -e_2;$$

По структурным константам восстановим операторы правого действия этих алгебр. Получим следующий результат:

Название	Оператор правого действия
$A_{1,\alpha}$	$\begin{pmatrix} (\alpha+1)x & z & y \\ y & 0 & 0 \\ \alpha z & 0 & 0 \end{pmatrix}$
A_2	$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x & z & y \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix}$

Рассмотрим сингулярные множества этих операторов.

Случай $A_{1,\alpha}$ Посчитаем собственные значения оператора:

$$\lambda_1 = 0;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(x(\alpha+1) - \sqrt{x^2(\alpha+1)^2 + 4yz(\alpha+1)});$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(x(\alpha+1) + \sqrt{x^2(\alpha+1)^2 + 4yz(\alpha+1)});$$

Здесь α - вещественный параметр, а λ_i - собственные значения оператора, то есть корни характеристического многочлена. Сингулярные множества оператора можно изучать, рассматривая уравнения вида $\lambda_i = \lambda_j$, при $i \neq j$.

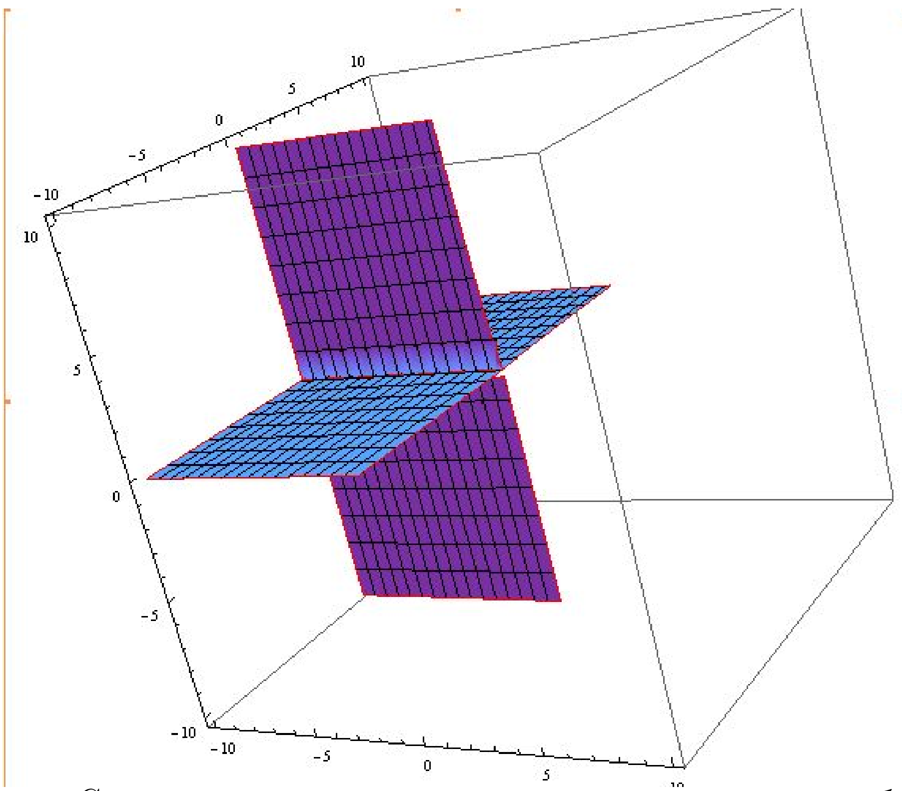
Случай $\lambda_1 = \lambda_2$**:**

$$x(\alpha+1) - \sqrt{x^2(\alpha+1)^2 + 4yz(\alpha+1)} = 0 \tag{7}$$

Упростим и приведем подобные слагаемые, получим уравнение с условиями:

$$\begin{cases} yx(\alpha+1)=0, \\ x(\alpha+1)\geq 0, \\ x^2(\alpha+1)^2+4yz(\alpha+1)\geq 0. \end{cases}$$

Построим множество точек, удовлетворяющее нашим условиям, получим следующую картинку:



Сделаем аналогичные вычисления для других пар собственных значений. При построении конкретно этой картинки, взяли параметр $\lambda = 1$.

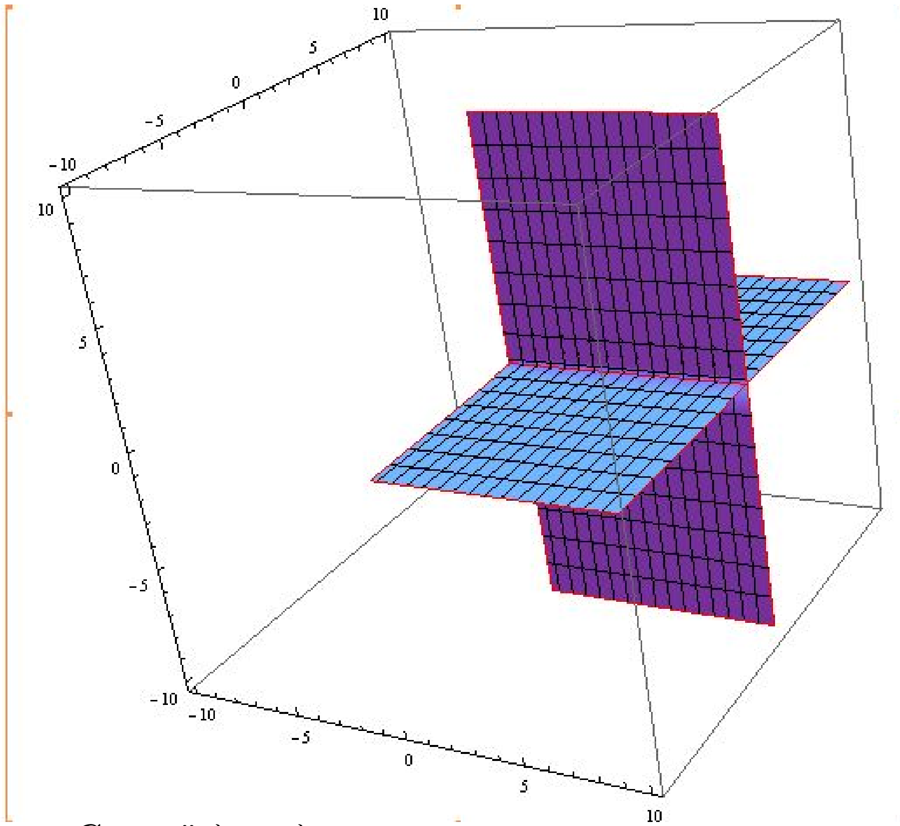
Случай $\lambda_1 = \lambda_3$**:**

$$x(\alpha+1)+\sqrt{x^2(\alpha+1)^2+4yz(\alpha+1)}=0 \tag{8}$$

Упростим и приведем подобные слагаемые, получим уравнение с условиями:

$$\begin{cases} yx(\alpha+1)=0, \\ x(\alpha+1)\leq 0, \\ x^2(\alpha+1)^2+4yz(\alpha+1)\geq 0. \end{cases}$$

Построим множество точек, удовлетворяющее нашим условиям, получим следующую картинку:



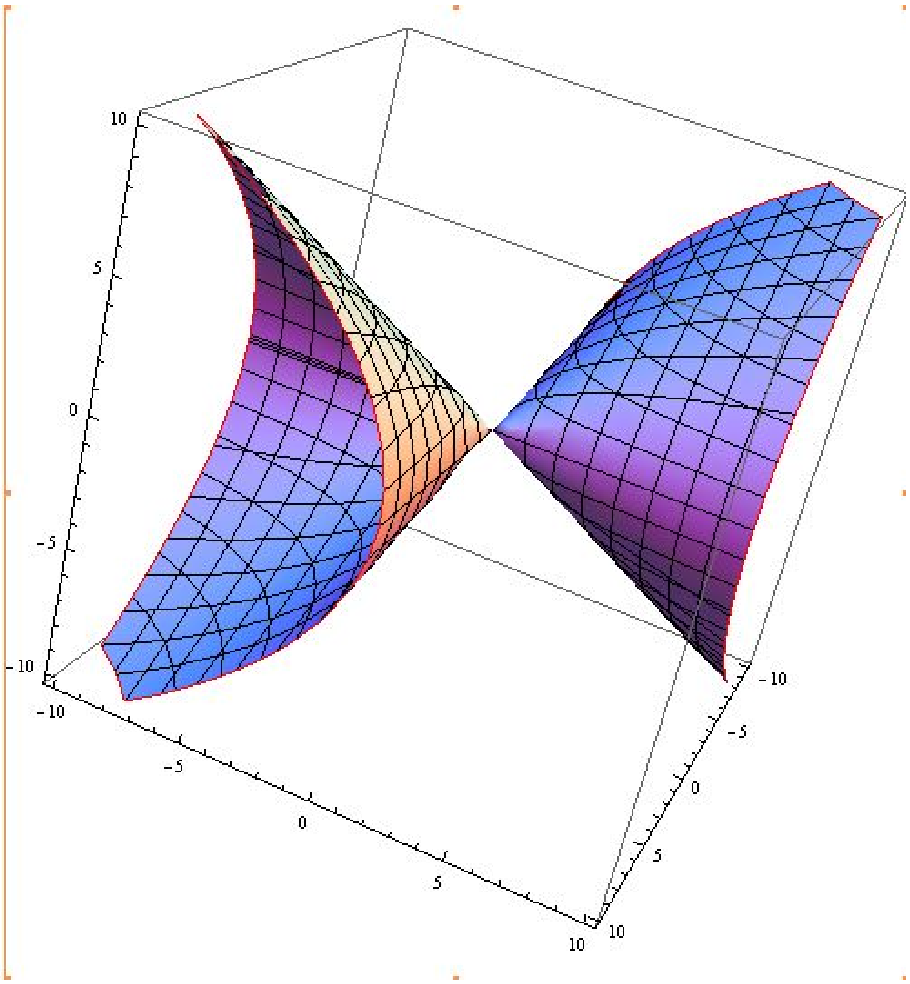
Случай $\lambda_2 = \lambda_3$**:**

$$x(\alpha+1) + \sqrt{x^2(\alpha+1)^2 + 4yz(\alpha+1)} = x(\alpha+1) - \sqrt{x^2(\alpha+1)^2 + 4yz(\alpha+1)} \qquad (9)$$

Упростим и приведем подобные слагаемые, получим уравнение :

$$x^2(\alpha+1)^2 + 4yz(\alpha+1) = 0$$

Построим множество точек, удовлетворяющее уравнению, получим следующую картинку:



Видно, что коразмерность сингулярного множества оказалась равна 1, а именно в первых двух случаях получили 2 пересекающиеся полуплоскости, в третьем - конус. Значит такая алгебра нам не подходит. Проделаем те же вычисления для алгебры A_2.

Случай A_2 Посчитаем собственные значения оператора:

$$\lambda_1 = -z;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(3x - \sqrt{9x^2 + 16yz});$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(3x + \sqrt{9x^2 + 16yz});$$

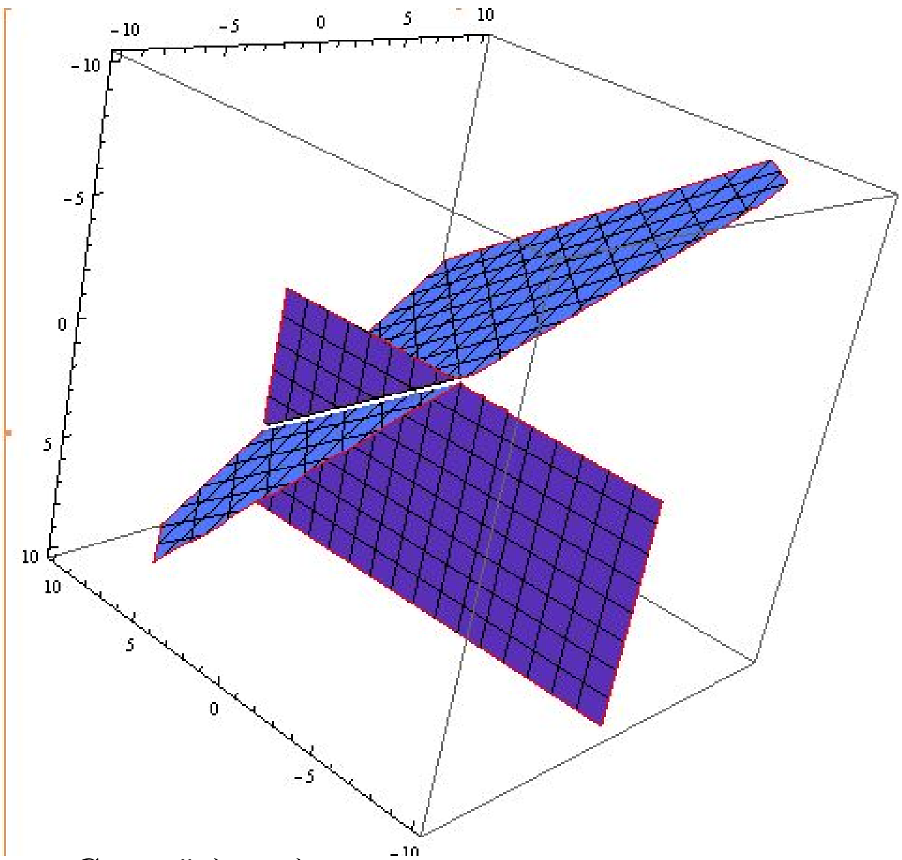
Случай $\lambda_1 = \lambda_2$**:**

$$\frac{1}{4}(3x - \sqrt{9x^2 + 16yz}) = -z \tag{10}$$

Упростим и приведем подобные слагаемые, получим уравнение с условиями:

$$\begin{cases} z(3x - 2y + 2z) = 0, \\ 3x + 4z \geq 0, \\ 9x^2 + 16yz \geq 0. \end{cases}$$

Построим множество точек, удовлетворяющее нашим условиям, получим следующую картинку:



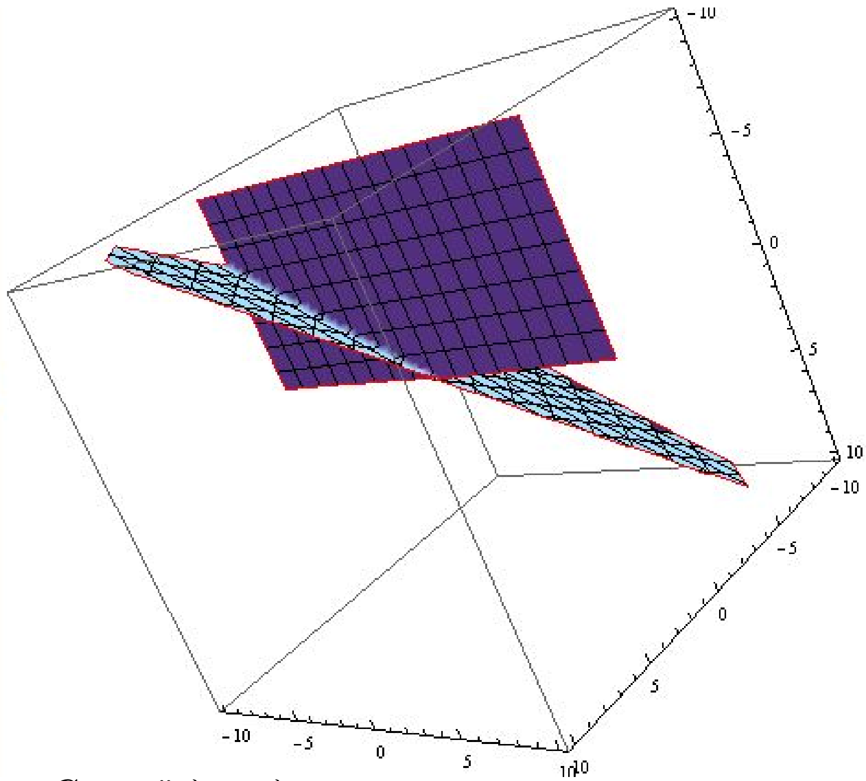
Случай $\lambda_1 = \lambda_3$**:**

$$\frac{1}{4}(3x + \sqrt{9x^2 + 16yz}) = -z \tag{11}$$

Упростим и приведем подобные слагаемые, получим уравнение с условиями:

$$\begin{cases} z(3x - 2y + 2z) = 0, \\ 3x + 4z \leq 0, \\ 9x^2 + 16yz \geq 0. \end{cases}$$

Построим множество точек, удовлетворяющее нашим условиям, получим следующую картинку:



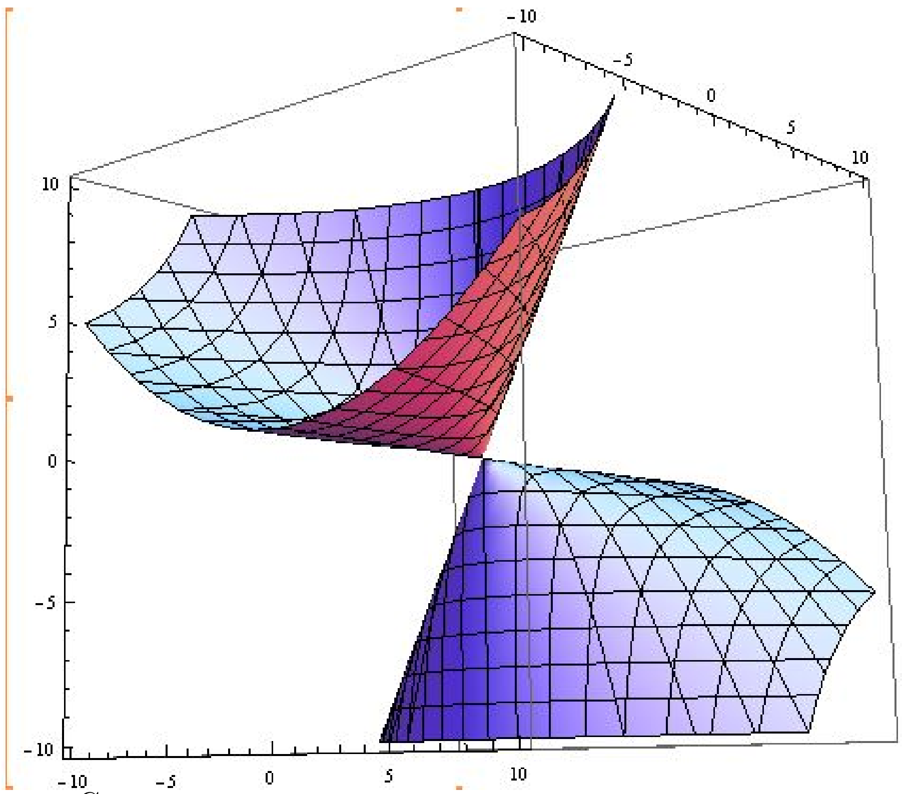
Случай $\lambda_1 = \lambda_2$**:**

$$\frac{1}{4}(3x - \sqrt{9x^2 + 16yz}) = \frac{1}{4}(3x + \sqrt{9x^2 + 16yz}) \tag{12}$$

Упростим и приведем подобные слагаемые, получим уравнение:

$$9x^2 + 16yz = 0.$$

Построим множество точек, удовлетворяющее уравнению, получим следующую картинку:



Снова видно, что коразмерность сингулярного множества оказалась равна 1, а именно в первых двух случаях получили 2 пересекающиеся полуплоскости, в третьем - конус. Значит такая алгебра нам не подходит.

5 Трехмерные лево-симметрические алгебры. Определение

На этом этапе, мы исчерпали известные нетривиальные лево-симметрические алгебры, поэтому остается по определению выписать условие лево-симметричности в трехмерном случае, и поизучать его. Возможно получится найти интересные случаи.

Выпишем равенство нулю тензора Нийенхейса в координатах:

$$(N_R)^p_{ij} = \frac{\partial R^p_j}{\partial x^l} R^l_i - \frac{\partial R^p_i}{\partial x^l} R^l_j - \frac{\partial R^l_j}{\partial x^i} R^p_l + \frac{\partial R^l_i}{\partial x^j} R^p_l \tag{13}$$

Рассмотрим линейные трехмерные операторы в общем виде:

$$R = \begin{pmatrix} a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z & a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z & a_{13}x + b_{13}y + c_{13}z \\ a_{21}x + b_{21}y + c_{21}z & a_{22}x + b_{22}y + c_{22}z & a_{23}x + b_{23}y + c_{23}z \\ a_{31}x + b_{31}y + c_{31}z & a_{32}x + b_{32}y + c_{32}z & a_{33}x + b_{33}y + c_{33}z \end{pmatrix}$$

В общем виде равенство нулю тензора Нийенхейса (13) будет выглядеть, как 27 уравнений на параметры a_{km}, b_{km} и c_{km}. Заметим, что $(N_R)^p_{ij} = -(N_R)^p_{ji}$, а значит $(N_R)^p_{ii} = 0$. Соответственно количество интересующих нас комбинаций (p, i, j) сокращается до 9.

Выписав все эти уравнения, необходимо потребовать равенство нулю для любых значений x, y и z. Сгруппируем получаемые уравнения по переменным, получим систему из 27 квадратичных уравнений:

$$
\begin{cases}
a_{11}a_{12}+a_{21}b_{12}+a_{31}c_{12}-a_{11}a_{12}-a_{22}b_{11}-a_{32}c_{11}- \\
\qquad -a_{11}a_{12}-a_{12}a_{22}-a_{13}a_{32}+a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(1,1,2) \\
a_{12}b_{11}+b_{12}b_{21}+b_{31}c_{12}-a_{11}b_{12}-b_{11}b_{22}-b_{32}c_{11}- \\
\qquad -a_{12}b_{11}-a_{22}b_{12}-a_{32}b_{13}+b_{11}^2+b_{12}b_{21}+b_{13}b_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(1,1,2) \\
a_{12}c_{11}+b_{12}c_{21}+c_{12}c_{31}-a_{11}c_{12}-b_{11}c_{22}-c_{11}c_{32}- \\
\qquad -a_{12}c_{11}-a_{22}c_{12}-a_{32}c_{13}+b_{11}c_{11}+b_{21}c_{12}+b_{31}c_{13}=0, \qquad (p,i,j)=(1,1,2) \\
a_{11}a_{13}+a_{21}b_{13}+a_{31}c_{13}-a_{11}a_{13}-a_{23}b_{11}-a_{33}c_{11}- \\
\qquad -a_{11}a_{13}-a_{12}a_{23}-a_{13}a_{33}+a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(1,1,3) \\
a_{13}b_{11}+b_{13}b_{21}+b_{31}c_{13}-a_{11}b_{13}-b_{11}b_{23}-b_{33}c_{11}- \\
\qquad -a_{13}b_{11}-a_{23}b_{12}-a_{33}b_{13}+b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21}+b_{13}c_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(1,1,3) \\
a_{13}c_{11}+b_{13}c_{21}+c_{13}c_{31}-a_{11}c_{13}-b_{11}c_{23}-c_{11}c_{33}- \\
\qquad -a_{13}c_{11}-a_{23}c_{12}-a_{33}c_{13}+c_{11}^2+c_{12}c_{21}+c_{13}c_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(1,1,3) \\
a_{12}a_{13}+a_{22}b_{13}+a_{32}c_{13}-a_{12}a_{13}-a_{23}b_{12}-a_{33}c_{12}- \\
\qquad -a_{11}b_{13}-a_{12}b_{23}-a_{13}b_{33}+a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+a_{13}c_{32}=0, \qquad (p,i,j)=(1,2,3) \\
a_{13}b_{12}+b_{13}b_{22}+b_{32}c_{13}-a_{12}b_{13}-b_{12}b_{23}-b_{33}c_{12}- \\
\qquad -b_{11}b_{13}-b_{12}b_{23}-b_{13}b_{33}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}+b_{13}c_{32}=0, \qquad (p,i,j)=(1,2,3) \\
a_{13}c_{12}+b_{13}c_{22}+c_{13}c_{32}-a_{12}c_{13}-b_{12}c_{23}-c_{12}c_{33}- \\
\qquad -b_{13}c_{11}-b_{23}c_{12}-b_{33}c_{13}+c_{11}c_{12}+c_{12}c_{22}+c_{13}c_{32}=0, \qquad (p,i,j)=(1,2,3) \\
a_{11}a_{22}+a_{21}b_{22}+a_{31}c_{22}-a_{12}a_{21}-a_{22}b_{21}-a_{32}c_{21}- \\
\qquad -a_{12}a_{21}-a_{22}^2-a_{23}a_{32}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(2,1,2) \\
a_{22}b_{11}+b_{21}b_{22}+b_{31}c_{22}-a_{21}b_{12}-b_{21}b_{22}-b_{32}c_{21}- \\
\qquad -a_{12}b_{21}-a_{22}b_{22}-a_{32}b_{23}+b_{11}b_{21}+b_{21}b_{22}+b_{23}b_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(2,1,2) \\
a_{22}c_{11}+b_{22}c_{21}+c_{22}c_{31}-a_{21}c_{12}-b_{21}c_{22}-c_{21}c_{32}- \\
\qquad -a_{12}c_{21}-a_{22}c_{22}-a_{32}c_{23}+b_{11}c_{21}+b_{21}c_{22}+b_{31}c_{23}=0, \qquad (p,i,j)=(2,1,2) \\
a_{11}a_{23}+a_{21}b_{23}+a_{31}c_{23}-a_{13}a_{21}-a_{23}b_{21}-a_{33}c_{21}- \\
\qquad -a_{13}a_{21}-a_{22}a_{23}-a_{23}a_{33}+a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+a_{23}c_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(2,1,3) \\
a_{23}b_{11}+b_{21}b_{23}+b_{31}c_{23}-a_{21}b_{13}-b_{21}b_{23}-b_{33}c_{21}- \\
\qquad -a_{13}b_{21}-a_{23}b_{22}-a_{33}b_{23}+b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}+b_{23}c_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(2,1,3) \\
a_{23}c_{11}+b_{23}c_{21}+c_{23}c_{31}-a_{21}c_{13}-b_{21}c_{23}-c_{21}c_{33}- \\
\qquad -a_{13}c_{21}-a_{23}c_{22}-a_{33}c_{23}+c_{1121}+c_{21}c_{22}+c_{23}c_{31}=0, \qquad (p,i,j)=(2,1,3) \\
a_{12}a_{23}+a_{22}b_{23}+a_{32}c_{23}-a_{13}a_{22}-a_{23}b_{22}-a_{33}c_{22}- \\
\qquad -a_{21}b_{13}-a_{22}b_{23}-a_{23}b_{33}+a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}+a_{23}c_{32}=0, \qquad (p,i,j)=(2,2,3) \\
a_{23}b_{12}+b_{22}b_{23}+b_{32}c_{23}-a_{22}b_{13}-b_{22}b_{23}-b_{33}c_{22}- \\
\qquad -b_{13}b_{21}-b_{22}b_{23}-b_{23}b_{33}+b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}+b_{23}c_{32}=0, \qquad (p,i,j)=(2,2,3) \\
a_{23}c_{12}+b_{23}c_{22}+c_{23}c_{32}-a_{22}c_{13}-b_{22}c_{23}-c_{22}c_{33}- \\
\qquad -b_{13}c_{21}-b_{23}c_{22}-b_{33}c_{23}+c_{12}c_{21}+c_{22}^2+c_{23}c_{32}=0, \qquad (p,i,j)=(2,2,3)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{11}a_{32} + a_{21}b_{32} + a_{31}c_{32} - a_{12}a_{31} - a_{22}b_{31} - a_{32}c_{31} - \\
\qquad - a_{12}a_{31} - a_{22}a_{32} - a_{32}a_{33} + a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,1,2) \\
a_{32}b_{11} + b_{21}b_{32} + b_{31}c_{32} - a_{31}b_{12} - b_{22}b_{31} - b_{32}c_{31} - \\
\qquad - a_{12}b_{31} - a_{22}b_{32} - a_{32}b_{33} + b^{b}_{1131} + b_{21}b_{32} + b_{13}b_{33} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,1,2) \\
a_{32}c_{11} + b_{32}c_{21} + c_{31}c_{32} - a_{31}c_{12} - b_{31}c_{22} - c_{31}c_{32} - \\
\qquad - a_{12}c_{31} - a_{22}c_{32} - a_{32}c_{33} + b_{11}c_{31} + b_{21}c_{32} + b_{31}c_{33} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,1,2) \\
a_{11}a_{33} + a_{21}b_{33} + a_{31}c_{33} - a_{13}a_{31} - a_{23}b_{31} - a_{33}c_{31} - \\
\qquad - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32} - a_{33}^2 + a_{31}c_{11} + a_{32}c_{21} + a_{33}c_{31} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,1,3) \\
a_{33}b_{11} + b_{21}b_{33} + b_{31}c_{33} - a_{31}b_{13} - b_{23}b_{31} - b_{33}c_{31} - \\
\qquad - a_{13}b_{31} - a_{23}b_{32} - a_{33}b_{33} + b_{31}c_{11} + b_{32}c_{21} + b_{33}c_{31} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,1,3) \\
a_{33}c_{11} + b_{33}c_{21} + c_{31}c_{33} - a_{31}c_{13} - b_{31}c_{23} - c_{31}c_{33} - \\
\qquad - a_{13}c_{31} - a_{23}c_{32} - a_{33}c_{33} + c_{11}c_{31} + c_{21}c_{32} + c_{31}c_{33} = 0, \qquad (p,i,j) = (1,1,3) \\
a_{12}a_{33} + a_{22}b_{33} + a_{32}c_{33} - a_{13}a_{32} - a_{23}b_{32} - a_{33}c_{32} - \\
\qquad - a_{31}b_{13} - a_{32}b_{23} - a_{33}b_{33} + a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{32} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,2,3) \\
a_{33}b_{12} + b_{22}b_{33} + b_{32}c_{33} - a_{32}b_{13} - b_{23}b_{32} - b_{33}c_{32} - \\
\qquad - b_{13}b_{31} - b_{23}b_{32} - b_{33}^2 + b_{31}c_{12} + b_{32}c_{22} + b_{33}c_{32} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,2,3) \\
a_{33}c_{12} + b_{33}c_{22} + c_{32}c_{33} - a_{32}c_{13} - b_{32}c_{23} - c_{32}c_{33} - \\
\qquad - b_{13}c_{31} - b_{23}c_{32} - b_{33}c_{33} + c_{12}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{32}c_{33} = 0, \qquad (p,i,j) = (3,2,3)
\end{cases}
$$

27 уравнений, объединенные в 2 системы - это одна система уравнений, которая равнозначна равенству нулю тензора Нийенхейса для линейных операторов размерности 3. На данный момент была попытка решить или частично решить эту систему, и аналогичную ей в двумерном случае с помощью Wolfram Mathematica, что не увенчалось успехом. Более подробное изучение этой системы не помогло найти хотя бы одно нетривиальное решение.

В следующих разделах работы будет приведен алгоритм поиска новых левосимметрических алгебр, который увенчался успехом для размерности 3.

6 Алгоритм поиска лево-симметрических алгебр

В этом разделе будет подробно описано как ещё можно искать лево-симметрические алгебры. Алгоритм основан на следующих двух утверждениях, и был реализован с помощью вычислений на компьютере с применением программного обеспечения Maple 17.

Утверждение 2. *Трехмерные линейные операторы Нийенхейса с функционально независимыми собственными значениями R можно представить в виде $R = A * M * A^{-1}$, где*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что действие линейного оператора Нийенхейса на дифференциал своего собственного значения, выглядит так:

$$R * d\lambda_i = \lambda_i d\lambda_i$$

Запишем характеристическую функцию оператора R:

$$det(R - \lambda I) = \lambda^3 + (\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}_{f_1})\lambda^2 + (\underbrace{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3}_{f_2})\lambda + \underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{f_3}$$

Выпишем в явном виде действие матрицы R на дифференциал инвариантов этой матрицы f_1, f_2 и f_3.

$$f_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$f_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$$
$$f_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$\underline{R * df_1} = R * (d\lambda_1 + d\lambda_2 + d\lambda_3) = \lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2 d\lambda_2 + \lambda_3 d\lambda_1 =$$
$$= d(\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)) = d(\frac{1}{2}((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3))) =$$
$$= d(\frac{1}{2}f_1^2 - f_2) = \underline{f_1 df_1 - df_2}$$

$$\underline{R * df_2} = R*d(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3) = R*((\lambda_1+\lambda_2)d\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_3)d\lambda_2+(\lambda_2+\lambda_3)d\lambda_1) =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 d\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_3)\lambda_2 d\lambda_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1 d\lambda_1 =$$
$$= \lambda_1\lambda_2(d\lambda_1 + d\lambda_2) + \lambda_2\lambda_3(d\lambda_2 + d\lambda_3) + \lambda_1\lambda_3(d\lambda_1 + d\lambda_3) =$$
$$= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)(d\lambda_1 + d\lambda_2 + d\lambda_3) - (\lambda_1\lambda_2 d\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 d\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 d\lambda_1) =$$
$$= \underline{f_2 df_1 - df_3}$$

$$\underline{R * df_3} = R * (\lambda_1\lambda_2 d\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 d\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 d\lambda_1) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3(d\lambda_1 + d\lambda_2 + d\lambda_3) = \underline{f_3 df_1}$$

Таким образом, мы показали как выглядят столбцы матрицы M:

$$M = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Используя доказанное выше утверждение, мы можем восстанавливать операторы Нийенхейса по их инвариантам. Осталось понять, как выразить эти инварианты в общем виде и можно ли их вид упростить?

Утверждение 3. Рассмотрим инварианты оператора: $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)$, где f_1 - линейная функция, f_2 - квадратичная, f_3 - кубическая. Линейными заменами координат, функции f_1 и f_2 можно привести к следующему виду:

$$f_1(x, y, z) = ax + by + cz = x'$$

$$f_2(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5 * xz + a_6yz = f_2 = \pm y'^2 \pm z'^2 + cx^2$$

Доказательство. Первое равенство доказывать не нужно, применяем линейную замену: за x' принимаем значение функции f_1 в первоначальных координатах. Таким образом, в дальнейших преобразованиях трогать координату x' нам нельзя.

Выпишем преобразования второй функции в явном виде:

$$f_2(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz =$$

$$= a_2y^2 + (a_4x + a_6z)y + a_1x^2 + a_3z^2 + a_6xz =$$

$$= a_2y^2 + 2\sqrt{a_2}y \cdot \frac{a_4x + a_6z}{2\sqrt{a_2}} + \frac{(a_4x + a_6z)^2}{4a_2} - \frac{(a_4x + a_6z)^2}{4a_2} + a_1x^2 + a_3z^2 + a_6xz =$$

$$= (\underbrace{\sqrt{a_2}y + \frac{a_4x + a_6z}{2\sqrt{a_2}}}_{y'})^2 - \frac{(a_4x + a_6z)^2}{4a_2} + a_1x^2 + a_3z^2 + a_6xz =$$

$$= y'^2 + (\underbrace{a_1 - \frac{a_4^2}{4a_2}}_{b_1})x^2 + (\underbrace{a_5 - \frac{a_4a_6}{2a_2}}_{b_2})xz + (\underbrace{a_3 - \frac{a_6^2}{4a_2}}_{b_3})z^2 =$$

$$= y'^2 + b_3z^2 + 2 \cdot \sqrt{b_3}z \cdot \frac{b_2}{2\sqrt{b_3}}x + \frac{b_2^2}{4b_3} \cdot x^2 - \frac{b_2^2}{4b_3} \cdot x^2 + b_1x^2 =$$

$$= y'^2 + (\underbrace{\sqrt{b_3}z + \frac{b_2}{2\sqrt{b_3}}x}_{z'})^2 + (b_1 - \frac{b_2^2}{4b_3})x^2 = y'^2 + z'^2 + (\underbrace{\frac{4b_1b_3 - b_2^2}{4b_3}}_{c})x^2$$

Применяя такие замены координат, мы предполагаем, что $a_2 > 0$ и $b_3 > 0$. Осталось рассмотреть случаи, когда эти неравенства не выполняются.

1) Рассмотрим случай, когда $a_2 < 0$

$$f_2(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz =$$
$$= -(-a_2y^2 - (a_4x + a_6z)y) + a_1x^2 + a_3z^2 + a_6xz =$$
$$= -(-a_2y^2 - 2\sqrt{-a_2}y \cdot \frac{a_4x + a_6z}{2\sqrt{-a_2}} - \frac{(a_4x+a_6z)^2}{4\cdot(-a_2)}) - \frac{(a_4x+a_6z)^2}{4\cdot(-a_2)} + a_1x^2 + a_3z^2 + a_6xz =$$
$$= -(\underbrace{\sqrt{-a_2}y + \frac{a_4x+a_6z}{2\sqrt{-a_2}}}_{y'})^2 + \frac{(a_4x+a_6z)^2}{4a_2} + a_1x^2 + a_3z^2 + a_6xz =$$
$$= -y'^2 + (\underbrace{a_1 + \frac{a_4^2}{4a_2}}_{b_1})x^2 + (\underbrace{a_5 + \frac{a_4a_6}{2a_2}}_{b_2})xz + (\underbrace{a_3 + \frac{a_6^2}{4a_2}}_{b_3})z^2 =$$

Если $b_3 > 0$, то считаем, как указано ниже:

$$= -y'^2 + b_3z^2 + 2\cdot\sqrt{b_3}z \cdot \frac{b_2}{2\sqrt{b_3}}x + \frac{b_2^2}{4b_3}\cdot x^2 - \frac{b_2^2}{4b_3}\cdot x^2 + b_1x^2 =$$
$$= -y'^2 + (\underbrace{\sqrt{b_3}z + \frac{b_2}{2\sqrt{b_3}}x}_{z'})^2 + (b_1 - \frac{b_2^2}{4b_3})x^2 = y'^2 + z'^2 + (\underbrace{\frac{4b_1b_3 - b_2^2}{4b_3}}_{c})x^2 =$$
$$= -y'^2 + z'^2 + cx^2$$

Если $b_3 < 0$, то, аналогичным образом мы получим $f_2 = -y'^2 - z'^2 + cx^2$.
Далее, проверим к какому виду можно привести f_2, если $a_2 = 0$. 2) Если $a_2 = 0$, то начнем сворачивать полный квадрат относительно переменной z:

$$f_2(x,y,z) = a_1x^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz =$$
$$= a_3z^2 + (a_5x + a_6y)z + a_1x^2 + a_4xy =$$
$$= (a_3z^2 + 2\sqrt{a_3}z\cdot\frac{a_5x+a_6y}{2\sqrt{a_3}} + \frac{(a_5x+a_6y)^2}{4a_3}) - \frac{(a_5x+a_6y)^2}{4a_3} + a_1x^2 + a_4xy =$$
$$= (\underbrace{\sqrt{a_3}z + \frac{a_5x+a_6y}{2\sqrt{a_3}}}_{z'})^2 - \frac{(a_5x+a_6y)^2}{4a_3} + a_1x^2 + a_4xy =$$
$$= z'^2 + (\underbrace{a_1 - \frac{a_5^2}{4a_3}}_{b_1})x^2 + (\underbrace{a_4 - \frac{a_5a_6}{2a_2}}_{b_2})xy + (\underbrace{-\frac{a_6^2}{4a_3}}_{b_3})y^2 =$$
$$= z'^2 + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2$$

На этом моменте становится понятно, что этот случай сводится к предыдущему. Т.е. мы смогли привести функцию к виду $f_2 = \pm y^2 \pm z^2 + cx^2$.

Осталось рассмотреть один случай:
3) $a_2 = a_3 = 0$, т.е. $f_2(x,y,z) = a_1x^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz$. Сделаем замену координат:

$$y = z' + y'$$
$$z = z' - y'$$

Получим следующий вид функции:

$$\begin{gathered} f_2(x,y,z) = a_1x^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz = \\ = a_1x^2 + a_4x(z'+y') + a_5x(z'-y') + a_6(z'+y')(z'-y') = \\ = a_1x^2 - a_6y'^2 + a_6z'^2 + (a_4+a_6)xz' + (a_4-a_6)xy' \end{gathered}$$

Таким образом, мы вернулись к начальному условию. Аналогичным образом f_2 можно представить в виде $f_2 = \pm y^2 \pm z^2 + cx^2$. $\square$

6.1 Случаи для перебора

Итак, мы знаем, что инварианты нашего оператора, без ограничения общности, представляются в следующем виде:

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 \pm y^2 \pm z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases}$$

Покажем, что для перебора всех вариантов, нам достаточно рассмотреть 3 вида функции f_2. Полученную выше форму функций f_1, f_2 и f_3 можно выписать в следующем виде:

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 + y^2 + z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 - y^2 + z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 + y^2 - z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 - y^2 - z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases} \tag{17}$$

Заметим, что случаи (15) и (16) равносильны. Один приводится к другому следующей заменой координат: $\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$

Таким образом, чтобы получить полную классификацию линейных операторов Нийенхейса с функционально независимыми собственными значениями, нам достаточно найти решения для случаев (14), (15) и (17).

6.2 Реализация поиска лево-симметрических алгебр

Будем искать матрицы R согласно следующему алгоритму:
Подставим значения функций f_1, f_2 и f_3 в матрицы M и A, после чего расчитаем произведение $A * M * A^{-1}$ и потребуем, чтобы получившаяся матрица получалась линейной.

Применять такой алгоритм вручную, не выглядит возможным, поэтому мной был написан код в Maple 17, который следует нашему алгоритму. Приведу алгоритм, как расчитать одну ячейку оператора.

Итак, рассмотрим случай (14), собственные значения вида:

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 + y^2 + z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases}$$

Часть кода, которая по набору функций f_1, f_2 и f_3 возвращает матрицу $A * M * A^{-1}$ выглядит так:

Код 1.

```
with(linalg);
if 1=1 then
f :=     [x[1],
             r0*x[1]^2 + x[2]^2 + x[3]^2,
                                          r1*x[1]^3+
                                          r2*x[2]^3+
                                          r3*x[3]^3+
                                          r4*x[1]^2*x[2]+
                                          r5*x[1]^2*x[3]+
                                          r6*x[1]*x[2]^2+
                                          r7*x[1]*x[3]^2+
                                          r8*x[2]^2*x[3]+
                                          r9*x[2]*x[3]^2+
                                          r10*x[1]*x[2]*x[3]]:
g := proc (i, j) options operator, arrow; diff(f[j], x[i]) end proc:
A := matrix(3, 3, g):
M := matrix([[f[1], f[2], f[3]], [-1, 0, 0], [0, -1, 0]]):
if det(A) = 0 then
print("Det = 0");
print("f_3=",f[3]);
else
        B := inverse(A);
        R := simplify(multiply(A, M, B)):
        ff:=0;
        for j from 1 to 3 while ff=0 do
                for k from 1 to 3 while ff=0 do
                        if not type(R[j,k],polynom(rational)) then ff:=1;
                        end if;
                end do;
        end do;


                print("================");
                print(simplify(R));
                print("================");

end if;
end if;
```

Замечание. Для удобства написания кода, переменные x, y и z обозначаем за $x[1]$, $x[2]$ и $x[3]$ соответственно.

Заметим, что в первом столбце матрицы автоматически получаются линейные функции от x, y и z. Это произошло потому, что функция f_1 имеет хороший вид.
Выберем ячейку $(1, 2)$ и потребуем, чтобы это была линейная функция. Функцию в числителе назовем $h(x, y, z)$, а в знаменателе $g(x, y, z)$. Заметим, что $deg(h) = 4$, и $deg(g) = 3$. Линейность функции $\frac{h(x,y,z)}{g(x,y,z)}$ равносильна тому, что h представляется в следующем виде $h(x, y, z) = g(x, y, z) \cdot (ax + by + cz)$.
Представим функции $h(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ в удобном виде: приведем подобные слагаемые и сгруппируем относительно x,y и z с помощью следующего кода в Maple 17:

Код 2.

```
g:=r10*x[1]*x[2]^2-r10*x[1]*x[3]^2-3*r2*x[2]^2*x[3]+3*r3*x[2]*x[3]^2
-r4*x[1]^2*x[3]+r5*x[1]^2*x[2]-2*r6*x[1]*x[2]*x[3]+2*r7*x[1]*x[2]*x[3]
+r8*x[2]^3-2*r8*x[2]*x[3]^2+2*r9*x[2]^2*x[3]-r9*x[3]^3:
f:=a*x[1]+b*x[2]+c*x[3]:
h:=4*r0^2*r10*x[1]^3*x[2]+12*r0^2*r3*x[1]^2*x[3]^2+4*r0^2*r5*x[1]^4
+8*r0^2*r7*x[1]^3*x[3]+4*r0^2*r8*x[1]^2*x[2]^2+8*r0^2*r9*x[1]^2*x[2]*x[3]
-12*r0*r1*x[1]^3*x[3]-r0*r10*x[1]^3*x[2]-4*r0*r10*x[1]*x[2]*x[3]^2
-3*r0*r3*x[1]^2*x[3]^2-8*r0*r4*x[1]^2*x[2]*x[3]-r0*r5*x[1]^4
-8*r0*r5*x[1]^2*x[3]^2-4*r0*r6*x[1]*x[2]^2*x[3]-2*r0*r7*x[1]^3*x[3]
-4*r0*r7*x[1]*x[3]^3-r0*r8*x[1]^2*x[2]^2-2*r0*r9*x[1]^2*x[2]*x[3]
-3*r1*r10*x[1]^3*x[2]-9*r1*r3*x[1]^2*x[3]^2-3*r1*r5*x[1]^4
-6*r1*r7*x[1]^3*x[3]-3*r1*r8*x[1]^2*x[2]^2-6*r1*r9*x[1]^2*x[2]*x[3]
-r10^2*x[1]*x[2]^2*x[3]-3*r10*r3*x[2]*x[3]^3-2*r10*r4*x[1]^2*x[2]^2
-3*r10*r5*x[1]^2*x[2]*x[3]-r10*r6*x[1]*x[2]^3-3*r10*r7*x[1]*x[2]*x[3]^2
-r10*r8*x[2]^3*x[3]-2*r10*r9*x[2]^2*x[3]^2-6*r3*r4*x[1]*x[2]*x[3]^2
-6*r3*r5*x[1]*x[3]^3-3*r3*r6*x[2]^2*x[3]^2-3*r3*r7*x[3]^4
-2*r4*r5*x[1]^3*x[2]-4*r4*r7*x[1]^2*x[2]*x[3]-2*r4*r8*x[1]*x[2]^3
-4*r4*r9*x[1]*x[2]^2*x[3]-2*r5^2*x[1]^3*x[3]-r5*r6*x[1]^2*x[2]^2
-5*r5*r7*x[1]^2*x[3]^2-2*r5*r8*x[1]*x[2]^2*x[3]
-4*r5*r9*x[1]*x[2]*x[3]^2-2*r6*r7*x[1]*x[2]^2*x[3]-r6*r8*x[2]^4
-2*r6*r9*x[2]^3*x[3]-2*r7^2*x[1]*x[3]^3-r7*r8*x[2]^2*x[3]^2
-2*r7*r9*x[2]*x[3]^3+4*r1*x[1]^3*x[3]+r10*x[1]*x[2]^3
+r10*x[1]*x[2]*x[3]^2-2*r2*x[2]^3*x[3]+3*r3*x[2]^2*x[3]^2+r3*x[3]^4
+2*r4*x[1]^2*x[2]*x[3]+r5*x[1]^2*x[2]^2+3*r5*x[1]^2*x[3]^2
+2*r7*x[1]*x[2]^2*x[3]+2*r7*x[1]*x[3]^3+r8*x[2]^4
-r8*x[2]^2*x[3]^2+2*r9*x[2]^3*x[3];
        print(degree(f*g,x[1]), degree(h,x[1])):
        print(degree(f*g,x[2]), degree(h,x[2])):
        print(degree(f*g,x[3]), degree(h,x[3])):

        ff:=collect(f*g,[x[1],x[2],x[3]],distributed):
```

```
hh:=collect(h,[x[1],x[2],x[3]],distributed):
u:=[coeffs(ff,[x[1],x[2],x[3]],'l')]:
v:=[coeffs(h,[x[1],x[2],x[3]],'m')]:
print(l,u);
print("==========");
print(m,v);
```

Осталось приравнять коэффициенты при соответствующих слагаемых. Таким образом, мы получим систему уравнений, каждое решение которой будет равносильно тому, что функция в ячейке $(1,2)$ - линейная.
Полученная система:

$$\begin{cases} 4*r0^2*r5-r0*r5-3*r1*r5=0, \\ 4*r0^2*r10-r0*r10-3*r1*r10-2*r4*r5=a*r5, \\ 8*r0^2*r7-12*r0*r1-2*r0*r7-6*r1*r7-2*r5^2+4*r1=-a*r4, \\ 4*r0^2*r8-r0*r8-3*r1*r8-2*r10*r4-r5*r6+r5=a*r10+b*r5, \\ 8*r0^2*r9-8*r0*r4-2*r0*r9-6*r1*r9-3*r10*r5-4*r4*r7+2*r4= \\ =-b*r4+c*r5+a*(-2*r6+2*r7), \\ 12*r0^2*r3-3*r0*r3-8*r0*r5-9*r1*r3-5*r5*r7+3*r5=-a*r10-c*r4, \\ -r10*r6-2*r4*r8+r10=a*r8+b*r10, \\ -4*r0*r6-r10^2-4*r4*r9-2*r5*r8-2*r6*r7+2*r7 \\ =c*r10+b*(-2*r6+2*r7)+a*(-3*r2+2*r9), \\ -4*r0*r10-3*r10*r7-6*r3*r4-4*r5*r9+r10 \\ =c*(-2*r6+2*r7)-b*r10+a*(3*r3-2*r8), \\ -4*r0*r7-6*r3*r5-2*r7^2+2*r7=-a*r9-c*r10, \\ -r6*r8+r8=b*r8, \\ -r10*r8-2*r6*r9-2*r2+2*r9=c*r8+b*(-3*r2+2*r9), \\ -2*r10*r9-3*r3*r6-r7*r8+3*r3-r8=c*(-3*r2+2*r9)+b*(3*r3-2*r8), \\ -3*r10*r3-2*r7*r9=c*(3*r3-2*r8)-b*r9, \\ -3*r3*r7+r3=-c*r9 \end{cases}$$

Аналогичным образом мы можем потребовать линейность функций в остальных ячейках матрицы.
Замечание. При формировании требования линейности функций в других ячейках матрицы, нужно не забывать, что вид функции $(ax+by+cz)$ в разных ячейках может быть разным. Соответственно с добавлением требования линейности каждой новой ячейки, в систему будет добавляться по 3 новые переменные a_i, b_i и c_i.

Полученную систему решить вручную не получилось, поэтому решения мы искали с помощью Maple 17. Код выглядит следующим образом:

Код 3.

```
eq:={4*r0^2*r5-r0*r5-3*r1*r5 = 0,
4*r0^2*r10-r0*r10-3*r1*r10-2*r4*r5 = a*r5,
8*r0^2*r7-12*r0*r1-2*r0*r7-6*r1*r7-2*r5^2+4*r1 = -a*r4,
4*r0^2*r8-r0*r8-3*r1*r8-2*r10*r4-r5*r6+r5 = a*r10+b*r5,
8*r0^2*r9-8*r0*r4-2*r0*r9-6*r1*r9-3*r10*r5-4*r4*r7+2*r4 =
    -b*r4+c*r5+a*(-2*r6+2*r7),
12*r0^2*r3-3*r0*r3-8*r0*r5-9*r1*r3-5*r5*r7+3*r5 = -a*r10-c*r4,
-r10*r6-2*r4*r8+r10 = a*r8+b*r10,
-4*r0*r6-r10^2-4*r4*r9-2*r5*r8-2*r6*r7+2*r7 =
    c*r10+b*(-2*r6+2*r7)+a*(-3*r2+2*r9),
-4*r0*r10-3*r10*r7-6*r3*r4-4*r5*r9+r10 =
    c*(-2*r6+2*r7)-b*r10+a*(3*r3-2*r8),
-4*r0*r7-6*r3*r5-2*r7^2+2*r7 = -a*r9-c*r10,
-r6*r8+r8 = b*r8,
-r10*r8-2*r6*r9-2*r2+2*r9 = c*r8+b*(-3*r2+2*r9),
-2*r10*r9-3*r3*r6-r7*r8+3*r3-r8 = c*(-3*r2+2*r9)+b*(3*r3-2*r8),
-3*r10*r3-2*r7*r9 = c*(3*r3-2*r8)-b*r9,
-3*r3*r7+r3 = -c*r9}:

s:=solve(eq,{r0,r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,a,b,c});
```

7 Классификация линейных операторов Нийенхейса размерности 3

Итак, используя описанный выше алгоритм была найдена полная классификация линейных операторов Нийенхейса размерности 3:

Случай 1

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 + y^2 + z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases}$$

Решений нет

Случай 2

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0x^2 - y^2 + z^2 \\ f_3 = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5x^2z + r_6xy^2 + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz \end{cases}$$

Решения:

1) $$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = z^2 - y^2 \\ f_3 = \alpha \cdot (y+z)^3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (x & \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & -\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z \\ 2y & \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y+z) & -\frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y+z) \\ -2z & \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y+z) & -\frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y+z) \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = z^2 - y^2 \\ f_3 = \alpha \cdot (y-z)^3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z & \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z \\ 2y & \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y-z) & \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y-z) \\ -2z & -\frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y-z) & -\frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot (y-z) \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = z^2 - y^2 \\ f_3 = \alpha \cdot (y+z)^2 \cdot ((\alpha^2+1)z + (\alpha^2-1)y - \alpha x) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & -\frac{1}{2}((\alpha^2-1)y+(\alpha^2+1)z) & \frac{1}{2}((\alpha^2-1)y+(\alpha^2+1)z) \\ 2y & \frac{1}{2}\alpha(3(\alpha^2-1)y+3(\alpha^2+1)z)-\alpha^2 x & -\frac{1}{2}\alpha((3\alpha^2-5)y+(3\alpha^2+1)z)+\alpha^2 x \\ -2z & \frac{1}{2}\alpha((3\alpha^2-1)y+(3\alpha^2+5)z)-\alpha^2 x & -\frac{1}{2}\alpha(3(\alpha^2-1)y+3(\alpha^2+1)z)+\alpha^2 x \end{pmatrix}$$

4) $\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = z^2 - y^2 \\ f_3 = \alpha \cdot (z-y)^2 \cdot ((\alpha^2+1)z - (\alpha^2-1)y - \alpha x) \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x & -\frac{1}{2}((\alpha^2-1)y-(\alpha^2+1)z) & -\frac{1}{2}((\alpha^2-1)y-(\alpha^2+1)z) \\ 2y & -\frac{1}{2}\alpha(3(\alpha^2-1)y-3(\alpha^2+1)z)-\alpha^2 x & -\frac{1}{2}\alpha((3\alpha^2-5)y-(3\alpha^2+1)z)-\alpha^2 x \\ -2z & \frac{1}{2}\alpha((3\alpha^2-1)y-(3\alpha^2+5)z)+\alpha^2 x & \frac{1}{2}\alpha(3(\alpha^2-1)y-3(\alpha^2+1)z)-\alpha^2 x \end{pmatrix}$$

5) $\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = z^2 - y^2 + \frac{1}{3}x \\ f_3 = \frac{\alpha}{3} \cdot (y-z)^3 + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x(z^2-y^2) + \frac{1}{9\alpha} \cdot (y+z)^3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \\ 2y & \frac{1}{6\alpha}((3\alpha^2+1)y-(3\alpha^2-1)z)+\frac{1}{3}x & \frac{1}{6\alpha}((3\alpha^2-1)y-(3\alpha^2+1)z) \\ -2z & -\frac{1}{6\alpha}((3\alpha^2-1)y-(3\alpha^2+1)z) & -\frac{1}{6\alpha}((3\alpha^2+1)y-(3\alpha^2-1)z)-\frac{1}{3}x \end{pmatrix}$$

Случай 3

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = r_0 x^2 - y^2 - z^2 \\ f_3 = r_1 x^3 + r_2 y^3 + r_3 z^3 + r_4 x^2 y + r_5 x^2 z + r_6 x y^2 + r_7 x z^2 + r_8 y^2 z + r_9 y z^2 + r_{10} xyz \end{cases}$$

Решения:

1) $\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = -z^2 - y^2 + \frac{1}{4}x \\ f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 - yz^2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}y & \frac{1}{4}z \\ 2y & \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}z \\ 2z & -z & 0 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = -z^2 - y^2 + \frac{1}{4}x \\ f_3 = -\frac{1}{2}xz^2 + yz^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}y & \frac{1}{4}z \\ 2y & \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}z \\ 2z & z & 0 \end{pmatrix}$$

8 Список литературы

[1] A. Yu. Konyaev. Linearisation of Nijenhuis tensor and left-symmetric algebras, preprint, personed communication.

[2] В. И. Арнольд. Геометрические структуры в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. "Регулярная и хаотическая динамика", МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999, стр. 57-74.

[3] Э. Б. Винберг. Выпуклые однородные конусы. Московское математическое общество. 12 (1963), стр. 340-403.

[4] Б. Кругликов. Дюжина определений тензора Нийенхейса. В печати.

[5] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev. "Algebra and geometry through Hamilronian systems". - In: "Continuons and Distributed systems. Theory and Applications". Series "Solid Mechanics and its Applications". Vol. 211, pp. 3-21. Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer. 2014.

[6] D. Burde, Simple left-symmetric algebras with solvable Lia algebra, Manuscripta Mathematica, 1998, Volume 95, Issue 1, pp 397-411

[7] D. Burde, Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics, 02 (2008)