ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ИНВАРИАНТЫ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

Выполнил студент
607 группы
Ивашковский Максим Александрович

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, доктор физ.-мат. наук Кудрявцева Елена Александровна

подпись научного руководителя

Москва
2018 г.

Содержание

1 Введение

1.1 История вопроса

Дипломная работа посвящена изучению трёхмерных несжимаемых течений, их топологических инвариантов и других динамических свойств. Эти исследования имеют важные приложения в теории гамильтоновых систем, так как 3-мерные несжимаемые течения без нулей совпадают с ограничениями гамильтоновых систем на неособые 3-мерные изоэнергетические многообразия (см. [1] и замечание 2.14).

Задача об описании инвариантов трёхмерных несжимаемых течений — одна из классических задач в дифференциальной геометрии (см. [2], [3]). С ней тесно связана следующая задача: описать широкий класс несжимаемых 3-мерных течений без нулей, совпадающих со своими завихрённостями (или пропорциональные им). Этот специальный класс несжимаемых течений имеет важные приложения в гидродинамике: течения этого класса являются стационарными решениями системы уравнений Эйлера (см. (4)) идеальной гидродинамики (ГД), а согласно [4] все аналитические стационарные решения этой системы, не принадлежащие этому классу, являются интегрируемыми. На богатство динамики течений этого класса указывает тот факт, что в качестве замкнутой траектории такого течения может быть реализован любой узел в любом замкнутом ориентируемом 3-мерном многообразии [5]. П.М. Ахметьевым было обнаружено (см. следствие 4.12), что все геодезические потоки на двумерных римановых многообразиях относятся к указанному классу.

Дадим определение несжимаемого течения (или распределенного зацепления). Пусть дано гладкое ориентированное многообразие $Q = Q^k$, и на нем задана форма объёма μ.

Определение 1.1 (см. определение 2.1)**.** Пару (X, μ), состоящую из векторного поля X и формы объёма μ на Q, назовем *бездивергентным* или *несжимаемым* течением (или *распределенным зацеплением*) на Q, если $L_X\mu = 0$ и $X|_{\partial Q}$ касательно ∂Q, где L_X — производная Ли. Заметим, что $(k-1)$-форма $\beta := i_X\mu$ замкнута, так как $0 = L_X\mu = (i_Xd + di_X)\mu = di_X\mu = d\beta$. Назовем (X, μ) *точным*, если β точна.

Рассмотрим вещественнозначные функционалы на множестве

$$\mathcal{B}(Q) = \{(X, \mu) \mid X|_{\partial Q} \text{ касательно } \partial Q, X \text{ не имеет нулей, 2-форма } i_X\mu \text{ точна, } \mu > 0\}$$

точных несжимаемых течений на Q. Согласно следующему факту, множество $\mathcal{B}(Q)$ непусто в случае замкнутого $Q = Q^3$ (а если $\partial Q^3 = T^2$, то непустота этого множества следует из [5]).

ФАКТ: На любом замкнутом ориентируемом 3-мерном многообразии Q^3 существует точное несжимаемое течение без нулей.

Этот факт следует из известного результата Martinet, 1971 [6] и Lutz, 1977 [7] о существовании контактной 1-формы на любом замкнутом ориентируемом Q^3.

Определение 1.2 (см. определение 5.1)**.** Пусть Q^k — компактное k-мерное многообразие. *Топологическим инвариантом точных несжимаемых течений на* Q^k назовём вещественнозначный функционал $I = I(X, \mu)$ на множестве $\mathcal{B}(Q)$ такой, что для любого диффеоморфизма $h : Q \to Q$, изотопного тождественному, выполнено $I(X, \mu) = I(h_*X, (h^{-1})^*\mu)$. Другими словами, значение инварианта на «распределенном зацеплении» (X, μ) не меняется при деформации «распределенного зацепления» (аналогично определению инвариантов обычных зацеплений в Q^k).

Исследования в данной области не теряют актуальности и в настоящее время — несжимаемые трёхмерные течения возникают во многих физических приложениях, например, в гидродинамике (ГД) и магнитной гидродинамике (МГД). В последние годы проблема поиска новых инвариантов ГД исследуется с помощью новых инструментов, например, КАМ-теории [8].

Пусть на 3-мерном многообразии Q^3 задана форма объёма μ и риманова метрика G (μ необязательно согласована с G). Пусть $u = u(\mathbf{x}, t)$ и $b = b(\mathbf{x}, t)$ — векторные поля на Q^3, зависящие от времени t, $\mathbf{x} \in Q^3$. Идеальное магнитное поле $b = b(\mathbf{x}, t)$ в плазме (т.е. бесконечнопроводящей изотропной и однородной среде без дисперсии) с полем скоростей $u = u(\mathbf{x}, t)$ на (Q^3, μ, G) описывается системой четырех уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД), где первые два уравнения — это уравнения Эйлера гидродинамики (ГД, см. (4)) на поле скоростей u жидкости (плазмы) с «магнитным добавком» $[b \times \operatorname{curl} b]$ в правой части первого уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - [u \times \operatorname{curl} u] = -\operatorname{grad} P + [b \times \operatorname{curl} b], \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

а третье и четвертое уравнения — это уравнения на магнитное поле b: условия «вмороженности магнитных линий» и «несжимаемости» магнитного поля

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{curl}[u \times b] = 0, \\ \operatorname{div} b = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Третье уравнение можно записать в виде $\frac{\partial \beta}{\partial t} + L_u \beta = 0$ (т.е. 2-форма β переносится вместе со средой — «вморожена» в среду), где $i_b \mu = \beta$, а четвертое уравнение в виде $L_b \mu = 0$, т.е. $d\beta = 0$, что фактически сводит вторую систему к 4-му уравнению $\operatorname{div} b = 0$. Важность топологических инвариантов для МГД и ГД состоит в том, что значение такого инварианта на магнитном поле $b(\cdot, t)$ с точным $b(\cdot, 0)$ не меняется со временем. Кроме того, значение такого инварианта на поле скоростей $u(\cdot, t)$ несжимаемой жидкости, удовлетворяющем системе уравнений Эйлера (4) ГД, с замкнутой 1-формой $\downarrow u(\cdot, 0)|_{\partial Q}$ тоже не меняется со временем. То есть, топологические инварианты дают первые интегралы как системы (8), (9) МГД, так и системы (4) ГД.

Особое значение среди изученных инвариантов ГД и МГД занимает так называемый *инвариант спиральности*. Топологический смысл инварианта спиральности выявлен В.И. Арнольдом [9], а именно: спиральность несжимаемого течения в $\mathbb{R}^3$ равна усредненному коэффициенту зацепления его интегральных траекторий. Таким образом, спиральность тесно связана с простейшим инвариантом зацеплений — коэффициентом зацепления. Поэтому особое значение имееют «высшие» аналоги данного инварианта — спиральности высшего порядка. Они были обнаружены и исследованы П.М. Ахметьевым [10].

В [11] Е.А. Кудрявцевой были изучены топологические инварианты, зависящие только от возникающей формы β. А именно: согласно [11], любой «достаточно регулярный» топологический инвариант вида $I = I(i_X \mu)$ (т.е. зависящий лишь от 2-формы $\beta = i_X \mu$, но инвариантный относительно всех диффеоморфизмов Q^3, не обязательно сохраняющих объём) выражается через инвариант спиральности, т.е. имеет вид $I = f \circ \mathcal{H}$ для некоторой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.2 Результаты

В данной работе (в отличие от [11]) изучаются топологические инварианты, зависящие от пары (X, μ), или пары $(\beta = i_X \mu, \mu)$, а не только от β. Иными словами, в данной работе изучаются топологические инварианты, зависящие лишь от точной 2-формы $\beta = i_X \mu$, и инвариантные только относительно диффеоморфизмов Q^3, сохраняющих 3-форму объёма μ.

Основные результаты данной работы изложены в следующих теоремах 5.4, 5.8 (аналогичных результатам D.Serre [2] и Е.А. Кудрявцевой [11]) и 5.12.

Теорема 1.3 (см. теорему 5.4). *Пусть Q^3 — компактное 3-мерное многообразие, и функционал $I : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ на множестве точных несжимаемых 3-мерных течений на Q^3 является интегральным, т.е. имеет вид $I(X,\mu) = \int\limits_Q (F \circ f_\alpha)\mu$, где F — некоторая гладкая функция одной переменной, $f_\alpha := i_X\alpha$ ($\overset{\text{Лемма 1.18}}{\Leftrightarrow}$ $\alpha \wedge d\alpha = f_\alpha \mu$), α — 1-форма на Q со свойствами $d\alpha = i_X\mu$ и (6). Тогда этот функционал является линейной комбинацией инвариантов спиральности и объёма, т.е. $F(t) = c_1 t + c_2$, где c_i — константы. В частности, интегральные функционалы совпадают с интегральными инвариантами.*

Теорема 1.4 (см. теорему 5.8). *Пусть $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие, и $I = I^F : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ — интегральный функционал порядка ≤ 1 на множестве точных несжимаемых течений на Q^3. Тогда этот функционал является линейной комбинацией инвариантов спиральности и объёма, т.е. $I(X,\mu) = c_1\mathcal{H}(i_X\mu) + c_2\mathrm{Vol}(\mu)$, причем $F(t,t_1,t_2,t_3) = c_1 t + c_2 + \sum\limits_{i=1}^{3} a_j(t)t_j$, где c_i — константы, $a = (a_1,a_2,a_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Если $\partial Q \neq \varnothing$, то $a(\mathbb{R}) \subseteq \{n(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \partial Q\}^\perp$, где $n(\mathbf{x})$ — вектор внешней нормали к Q в точке $\mathbf{x} \in \partial Q$. В частности, интегральные функционалы порядка ≤ 1 совпадают с интегральными инвариантами порядка ≤ 1.*

Теорема 1.5 (см. теорему 5.12). *Пусть $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие, и пусть n — натуральное число. Пусть $I = I(X,\mu)$ — интегральный функционал порядка $\leq n$ на множестве $\mathcal{B}(Q)$ точных несжимаемых течений на Q^3. Предположим, что 1-параметрическое семейство диффеоморфизмов $h_t : Q \to Q$, $t \in [0,1]$, удовлетворяет условиям $h_t^*\mu_1 = \mu_1$ и $\int\limits_\Pi i_{dh_t/dt}\mu_1 = 0$ для любой 2-мерной поверхности $\Pi \subset Q$ с краем $\partial\Pi \subset \partial Q$ (т.е. $i_{dh_t/dt}\mu_1 \in \mathrm{Ker(Flux)}$, см. (7)) при любом $t \in [0,1]$, где $\mu_1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Тогда $I((h_0^{-1})_* X, \mu_1) = I((h_1^{-1})_* X, \mu_1)$ для любого точного несжимаемого течения $(X,\mu_1) \in \mathcal{B}(Q)$.*

Помимо этого в дипломной работе доказаны Рибовость и почти Рибовость (определение 2.18) для широкого класса несжимаемых течений, а именно: геодезических [12, Theorem 6.1], магнитных геодезических и биллиардных потоков, включая потенциальные и релятивистские. В качестве приложения изучена завихрённость (определение 2.15) этих течений и показано, что эти течения совпадают со своими завихрённостями по отношению к подходящим римановым метрикам на Q^3. Сформулируем основные из этих результатов.

Следствие 1.6 (см. следствие 3.7). *Биллиардный поток (X,μ) на любой римановой поверхности $(\widehat{Q^2}, g)$ с гладким краем является Рибовым по отношению к контактной паре $(\alpha := \lambda|_{Q^3}, \mu)$, причем соответствующая контактная пара (α,μ) является гладкой на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\} \subset M^4$.*

Теорема 1.7 (см. теорему 3.16). *Магнитный геодезический поток (X_B, μ_B) на любом 2-мерном римановом многообразии $(\widehat{Q^2}, g)$ с магнитным полем $\hat\beta = d\hat\alpha$ на $\widehat{Q^2}$ является почти*

Рибовым на $Q^3 = \{H = 1/2\}$, относительно формы объёма $\mu_B = \mu$ и контактной 1-формы $\alpha_B = (pdq + \pi^* \hat{\alpha})|_{Q^3}$, при условии, что $|a(q)|_{g^{-1}(q)} < 1$ всюду на $\widehat{Q^2}$, где $\hat{\alpha} = a_i(q)dq^i$. Другими словами, $i_{X_B}\mu = d\alpha_B$ и $f_B\mu = \alpha_B \wedge d\alpha_B$ для функции $f_B = i_{X_B}\alpha_B > 0$ на Q^3.

Теорема 1.8 (см. теорему 4.11)**.** *Любой геодезический поток (X, μ) является сильно ротационно Бернуллиевым, т.е.* $\operatorname{curl} X = X$ *по отношению к канонической римановой метрике G на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (определение 4.3). Другими словами, для 1-формы $\alpha := \langle X, \rangle_G$ выполнено $i_X\mu = d\alpha$. Более того, $\mu = \alpha \wedge d\alpha$, $i_X\alpha = 1$ и $\alpha = pdq|_{Q^3}$.*

Следствие 1.9 (см. следствие 4.13)**.** *Любой биллиардный поток является сильно ротационно Бернуллиевым* ($\operatorname{curl} X = X$) *по отношению к «канонической» римановой метрике G на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (определение 4.3). Другими словами, для 1-формы $\alpha := \langle X, \rangle_G$ выполнено $i_X\mu = d\alpha$. Более того, $\mu = \alpha \wedge d\alpha$, $i_X\alpha = 1$ и $\alpha = pdq|_{Q^3}$. При этом X и α — гладкие относительно гладкой структуры из теоремы 3.5 Лазуткина, а «каноническая» риманова метрика G на Q^3, вообще говоря, не является гладкой (см. предложение 4.14).*

1.3 Благодарности

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору Елене Александровне Кудрявцевой, за постановку задачи, постоянное руководство работой и ценные обсуждения за всё время моего обучения на факультете.

2 Несжимаемые течения и их завихрённость

Пусть дано гладкое ориентированное многообразие $Q = Q^k$, и на нем задана форма объёма μ. Повторим определение несжимаемого течения на Q^k.

Определение 2.1. Пару (X, μ), состоящую из векторного поля X и формы объёма μ на Q, назовем *бездивергентным* или *несжимаемым* течением (или *распределенным зацеплением*) на Q, если $L_X\mu = 0$ и $X|_{\partial Q}$ касательно ∂Q, где L_X — производная Ли. Заметим, что $(k-1)$-форма $\beta := i_X\mu$ замкнута, так как $0 = L_X\mu = (i_Xd + di_X)\mu = di_X\mu = d\beta$. Назовем (X, μ) *точным*, если β точна.

Предложение 2.2. *Пусть (X, μ) — несжимаемое течение на $Q = Q^3$, и точка $w_0 \in Q$ не является нулем поля X. Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существуют локальные координаты x, y, z такие, что $X = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$.*

Доказательство. Заметим, что $i_X\beta = i_Xi_X\mu = 0$, откуда $L_X\beta = (i_Xd + di_X)\beta = 0$. Так как $X(w_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности U точки w_0 существуют локальные координаты x_1, y_1, z_1, в которых $X|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$. Так как $i_X\beta = 0$ по доказанному выше, то $\beta|_U = f dx_1 \wedge dy_1$ для некоторой функции f в U. Функция f не зависит от z_1, так как $L_X\beta = 0$ по доказанному выше. Так как $X(w_0) \neq 0$, то и $\beta(w_0) \neq 0$, и $f(w_0) \neq 0$. Без ограничения общности f не имеет нулей в U. Определим искомые координаты $x = x(x_1, y_1)$, $y = y_1$, $z = z_1$ условием $\partial x/\partial x_1 = f$. Тогда $X|_U = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\beta|_U = dx \wedge dy$, что и требовалось. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть (X, μ) — точное несжимаемое течение на Q^3, т.е. $i_X\mu = d\alpha$ для некоторой 1-формы α. Определим функцию $i_X\alpha = f$. Тогда $\alpha \wedge d\alpha = f\mu$.*

Доказательство. Нужно проверить выполнение равенства $\alpha\wedge d\alpha = f\mu$ в любой точке $w_0 \in Q$. Если $X(w_0) = 0$, то равенство очевидно. Пусть далее $X(w_0) \neq 0$. В локальных координатах x, y, z из предложения 2.2 имеем $X = \frac{\partial}{\partial z}$, $\mu = dx\wedge dy\wedge dz$ и $d\alpha = dx\wedge dy$, поэтому $\alpha = f dz + \ldots$, $\alpha \wedge d\alpha = f dx \wedge dy \wedge dz = f\mu$. Лемма доказана. $\square$

2.1 Примеры несжимаемых течений без нулей: нечетномерные гамильтоновы системы

Определение 2.4. Пусть M^{2n} — многообразие с заданной на нём симплектической структурой ω и функцией Гамильтона H. Определим форму объёма $\tilde{\mu}^{2n}$ на M^{2n} таким образом: $\tilde{\mu}^{2n} = \frac{1}{n}\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n}$. Если $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ — локальные координаты на M^{2n}, в которых $\omega = dp \wedge dq = \sum dp_i \wedge dq^i$, то $\tilde{\mu}^{2n} = dp_1 \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq^n$.

Определение 2.5. Определим форму объёма $\mu^{2n-1} = \mu_h^{2n-1}$ на $Q^{2n-1} = Q_h^{2n-1} = \{H = h\}$ так, чтобы в любой точке из Q_h^{2n-1} выполнялось $dH \wedge \mu^{2n-1} = \tilde{\mu}^{2n}$.

Предложение 2.6. *Пусть $\widetilde{X}$ — гамильтоново векторное поле на (M^{2n}, ω) с функцией Гамильтона H. Тогда $(\widetilde{X}, \tilde{\mu})$ является бездивергентным течением на M^{2n}; ограничение X_h гамильтонова векторного поля $\widetilde{X}$ на неособый уровень энергии $Q_h^{2n-1} = \{H = h\}$ является бездивергентным по отношению к форме объёма μ^{2n-1} на Q_h из определения 2.5.*

Доказательство. Напомним, что если (q, p) — локальные координаты на M, такие что $\omega = dp \wedge dq$, то гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 2.7. $\omega(\cdot, \widetilde{X}) = dH$, *где $\widetilde{X}$ — гамильтоново векторное поле.*

Доказательство. По условию $\omega = dp \wedge dq = dp \otimes dq - dq \otimes dp$. Тогда из системы (3) имеем $\widetilde{X} = (\dot{q}, \dot{p}) = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$ и $\omega(\cdot, \widetilde{X}) = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i = dH$. $\square$

Лемма 2.8. $L_{\widetilde{X}} H = i_{\widetilde{X}} dH = 0$, *где $L_{\widetilde{X}}$ — производная Ли.*

Доказательство. Имеем $L_{\widetilde{X}} H = (i_{\widetilde{X}} d + d i_{\widetilde{X}})H = i_{\widetilde{X}} dH \overset{\text{Лемма 2.7}}{=} -i_{\widetilde{X}} i_{\widetilde{X}} \omega = 0$. $\square$

Лемма 2.9. $L_{\widetilde{X}} \omega^{\wedge n} = 0$, *т.е. $(\widetilde{X}, \tilde{\mu}^{2n})$ — несжимаемое течение на M^{2n}.*

Доказательство. Имеем

$$L_{\widetilde{X}}\omega^{\wedge n} = (i_{\widetilde{X}}d + di_{\widetilde{X}})\omega^{\wedge n} = di_{\widetilde{X}}\omega^{\wedge n} =$$

$$= d((i_{\widetilde{X}}\omega)\wedge\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{n-1}+\dots+\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{n-1}\wedge i_{\widetilde{X}}\omega) \overset{\text{Лемма 2.7}}{=} -n\,d(dH\wedge\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{n-1}) = 0.$$

□

Лемма 2.10. $L_{X_h}\mu_h^{2n-1} = 0$ *на* $Q_h^{2n-1} = \{H = h\}$, *т.е.* (X_h, μ_h^{2n-1}) *— несжимаемое течение на* Q_h^{2n-1}.

Доказательство. Распишем $L_{\widetilde{X}}\mu^{2n-1} = (i_{\widetilde{X}}d + di_{\widetilde{X}})\mu^{2n-1} = di_{\widetilde{X}}\mu^{2n-1} = \nu_j\,dx^0\wedge\dots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\dots\wedge dx^{2n-1}$ в локальных координатах $(x^0 = H, x^1, \dots, x^{2n-1})$ на M^{2n}. Аналогично показывается, что $L_X\mu^{2n-1} = \nu_0 dx^1\wedge\dots\wedge dx^{2n-1}$ на Q^{2n-1}.

Нужно доказать, что $\nu_0 = 0$. Имеем

$$0 \overset{\text{Лемма 2.9}}{=} \frac{1}{n}L_{\widetilde{X}}\omega^{\wedge n} = (i_{\widetilde{X}}d + di_{\widetilde{X}})(dH\wedge\mu^{2n-1}) = di_{\widetilde{X}}(dH\wedge\mu^{2n-1}) =$$

$$= d[-dH\wedge(i_{\widetilde{X}}\mu^{2n-1}) + (\underbrace{i_{\widetilde{X}}dH}_{0\text{ по лемме }2.8})\wedge\mu^{2n-1}] = dH\wedge(\underbrace{di_{\widetilde{X}}\mu^{2n-1}}_{\nu_j dx^0\wedge\dots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\dots\wedge dx^{2n-1}}) = \nu_0\,dx^0\wedge\dots\wedge dx^{2n-1}.$$

Отсюда $\nu_0 = 0$. □

Вернёмся к доказательству предложения 2.6. По лемме 2.9 имеем $L_{\widetilde{X}}\tilde{\mu}^{2n} = 0$. По лемме 2.10 имеем $L_{X_h}\mu^{2n-1} = 0$. Значит, по определению 2.1 потоки $(\widetilde{X}, \tilde{\mu}^{2n})$ и (X_h, μ^{2n-1}) бездивергентные. Предложение 2.6 доказано. □

Для полноты изложения докажем аналогичную лемму для 2-формы ω.

Лемма 2.11. $L_{\widetilde{X}}\omega = 0$ *на* M^{2n}, $L_{X_h}(\omega|_{Q_h^{2n-1}}) = 0$ *на* $Q_h^{2n-1} = \{H = h\}$.

Доказательство. Распишем $L_{\widetilde{X}}\omega = (i_{\widetilde{X}}d + di_{\widetilde{X}})\omega \overset{\text{Лемма 2.7}}{=} -d(dH) = 0$. Аналогично показывается, что $L_{X_h}(\omega|_{Q_h^{2n-1}}) = 0$. □

Лемма 2.12. $i_X\mu^{2n-1} = \frac{1}{n-1}\omega^{\wedge(n-1)}|_{Q^{2n-1}}$.

Доказательство. В локальных координатах $(H, t, x^1, y^1, \dots, x^{n-1}, y^{n-1})$ на M^{2n}, таких что $\omega = dH\wedge dt + \sum_{i=1}^{n-1} dx^i\wedge dy^i$ (такие координаты существуют по теореме Дарбу), в силу леммы 2.7 имеем $i_{\widetilde{X}}\omega = -dH$, и $\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t}$.

Так как $dH\wedge\mu = \frac{1}{n}\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{n} = dH\wedge dt\wedge dx^1\wedge dy^1\wedge\dots\wedge dx^{n-1}\wedge dy^{n-1}$, то форма объёма на $Q^{2n-1} = \{H = h\}$ равна $\mu = dt\wedge dx^1\wedge dy^1\wedge\dots\wedge dx^{n-1}\wedge dy^{n-1}$, и $i_X\mu = dx^1\wedge dy^1\wedge\dots\wedge dx^{n-1}\wedge dy^{n-1} = \frac{1}{n-1}(\omega|_{Q^{2n-1}})^{\wedge(n-1)}$. □

Замечание 2.13. Если $\lambda = pdq = \sum p_i dq^i$, $\omega = d\lambda$ и $H(q,p)$ однородна по импульсам p степени однородности s, то $\widetilde{X} = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$, $i_{\widetilde{X}}\lambda = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = sH$, и в локальных координатах из доказательства леммы 2.12 имеем $\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t}$, и $\lambda = sHdt + \dots$, откуда

$$\lambda \wedge (d\lambda)^{\wedge(n-1)} = \lambda \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = (n-1)sHdt \wedge dx^1 \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dy^{n-1} + dH \wedge (\dots),$$

$$\lambda \wedge (d\lambda)^{\wedge(n-1)}|_{Q_h^{2n-1}} = (n-1)sh\mu$$

на $Q_h^{2n-1} = \{H = h\}$. В частности, при $n = 2$ и $h = \frac{1}{s}$ получаем $\lambda \wedge d\lambda|_{Q^3_{1/s}} = \mu$.

Замечание 2.14. В действительности, при $n = 2$ вторая часть предложения 2.6 обратима: любое бездивергентное трёхмерное векторное поле является ограничением гамильтонова векторного поля на неособый уровень энергии (Е.Кудрявцева, 2017) [1, Proposition 1].

2.2 Трёхмерный случай. Завихрённость и Рибовость

Пусть теперь $k = 3$ и задана риманова метрика G на Q^3. Дадим определение *завихрённости* $\operatorname{curl} Y$ векторного поля Y на Q^3 по отношению к форме объёма μ и римановой метрике G на Q.

Определение 2.15. Для любого векторного поля Y на Q определим векторное поле $\operatorname{curl} Y$ на Q формулой

$$i_{\operatorname{curl} Y}\mu = d \downarrow Y,$$

где μ — форма объёма на Q^3 и $\downarrow$ — операция опускания индекса в метрике G на Q^3. Так как Y, μ, G — тензорные поля на Q^3, то $\operatorname{curl} Y$ — тоже тензорное поле.

Если G — евклидова метрика и μ — соответствующая форма объёма, то $\operatorname{curl} Y = \operatorname{rot} Y$.

Пусть Q^3 — ориентированное 3-мерное многообразие с формой объёма μ. Напомним, что 1-форма α на Q^{2n-1} называется *контактной*, если $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ не имеет нулей на Q^{2n-1}.

Теорема 2.16 (Martinet, 1971 [6] или Lutz, 1977 [7])**.** *На любом замкнутом ориентируемом 3-мерном многообразии Q^3 существует контактная 1-форма α.*

Если α — контактная форма на $Q = Q^3$, то $\alpha \wedge d\alpha$ является некоторой формой объёма на Q. Будем считать, что $\alpha \wedge d\alpha$ и μ индуцируют одну и ту же ориентацию на Q (если нужно, то поменяем форму μ на форму $-\mu$).

Рассмотрим множество пар

$$\mathcal{A}^+(Q) := \left\{ (\alpha, \mu) \mid \frac{\alpha \wedge d\alpha}{\mu} > 0,\ d\alpha|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

Оно, очевидно, C^1-открыто. По теореме 2.16 множество $\mathcal{A}^+(Q)$ непусто, если Q замкнуто. Если Q компактно с краем $\partial Q = T^2$, то непустота множества $\mathcal{A}^+(Q)$ следует из [5].

Определение 2.17. Для любого точного бездивергентного течения (X, μ) на Q^3 имеем $i_X\mu = \beta = d\alpha$ для некоторой 1-формы α. Назовем пару (α, μ) *согласованной* с парой (X, μ).

Отметим, что пара (α, μ) определена по бездивергентному течению (X, μ) неоднозначно, а бездивергентное течение (X, μ) однозначно восстанавливается по паре (α, μ). Действительно, для любой пары (α, μ) векторное поле X на Q^3 однозначно определяется формулой $i_X\mu = d\alpha$.

Определение 2.18. Назовем пару (α, μ) *почти контактной*, если $(\alpha, \mu) \in \mathcal{A}^+(Q)$. Назовем точное несжимаемое течение (X, μ) *почти Рибовым*, если пара (X, μ) согласована (определение 2.17) с некоторой почти контактной парой $(\alpha, \mu) \in \mathcal{A}^+(Q)$. Почти Рибово течение (X, μ) назовем *Рибовым* (а пару (α, μ) *контактной*), если $\mu = \alpha \wedge d\alpha$.

2.3 Мотивировка определения почти Рибовости. Стационарные решения уравнений гидродинамики

Теорема 2.19 (Etnyre-Ghrist, 2000 [5]). *Для любой почти контактной пары* $(\alpha, \mu) \in \mathcal{A}^+(Q)$ *соответствующее почти Рибово течение* (X, μ) *на* Q^3 *не имеет нулей и обладает свойством* $\operatorname{curl} X = X$ *по отношению к подходящей римановой метрике на* Q. *И обратно: если* X *не имеет нулей на* Q^3 *и* $\operatorname{curl} X = X$*, то пара* $(\alpha :=\downarrow X, \mu)$ *является почти контактной и согласована с течением* (X, μ)*, и, в частности, течение* (X, μ) *является почти Рибовым.*

Доказательство. Пусть дана любая пара (α, μ). Определим векторное поле X условием $i_X\mu = d\alpha$. Определим функцию f как в лемме 2.3, т.е. $f := i_X\alpha$.

Лемма 2.20. *Рассмотрим любую риманову метрику* G *на* Q^3 *такую, что (a)* $|X|_G^2 = f$ *и* X *ортогонален* $\operatorname{Ker}(\alpha)$*. Если* $f > 0$*, то (b)* $\langle X, \cdot\rangle_G = \alpha$*, т.е.* $\alpha =\downarrow X$*. Обратно: (b)* $\Rightarrow$ *(a).*

Доказательство. Выведем из пункта (b) пункт (a). Из (b) следует, что $f = i_X\alpha = \langle X, X\rangle_G$. Тогда $\forall Y \in \operatorname{Ker}\alpha$ имеем $\langle X, Y\rangle_G = i_Y\alpha = 0$, откуда получаем пункт (a).

В обратную сторону: из пункта (a) следует, что равенство $\langle X, Y\rangle_G = i_Y\alpha$ выполняется для $Y = X$ и для любого $Y \in \operatorname{Ker}\alpha$. Но так как $f > 0$, то $\operatorname{Span}(X, \operatorname{Ker}\alpha) = T_PQ$ для любой точки $P \in Q$, откуда $\alpha =\downarrow X$. $\square$

Лемма 2.21. *Для римановой метрики* G *из леммы 2.20 (b) выполнено* $\operatorname{curl} X = X$.

Доказательство. Имеем $i_X\mu = d\alpha \overset{\text{Лемма 2.20 (b)}}{=} d\downarrow X \overset{\text{опр. 2.15}}{=} i_{\operatorname{curl} X}\mu$. Поэтому $X = \operatorname{curl} X$. $\square$

Вернёмся к доказательству теоремы 2.19. Предположим, что пара (α, μ) почти контактная, т.е. $(\alpha, \mu) \in \mathcal{A}^+(Q)$. Так как $i_X\mu = d\alpha$ не имеет нулей (ввиду того, что $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ по определению 2.18), то и векторное поле X не имеет нулей. Пусть G — риманова метрика из леммы 2.20 (a) (такая риманова метрика существует, так как поле X не имеет нулей и $f = i_X\alpha > 0$ ввиду леммы 2.3 и контактности пары (α, μ)). Тогда по лемме 2.20 выполнено свойство (b) из этой леммы. Тогда по лемме 2.21 $\operatorname{curl} X = X$.

Докажем теорему в обратную сторону. По условию $d\alpha = d\downarrow X \overset{\text{опр. } 2.15}{=} i_{\operatorname{curl} X}\mu = i_X\mu$, т.е. пара (α, μ) согласована с парой (X, μ) (определение 2.17). Поэтому в локальных координатах (x, y, z) из предложения 2.2 имеем $d\alpha = dx \wedge dy$, векторное поле X имеет вид $X = \frac{\partial}{\partial z}$, и форма объёма μ равна $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$. Так как $f := i_X\alpha = |X|_G > 0$, а по лемме 2.3 $\alpha \wedge d\alpha = f\mu$, то пара (α, μ) почти контактная, а значит (X, μ) — почти Рибово несжимаемое течение (определение 2.18).

Теорема доказана в обе стороны. □

Определение 2.22. Пусть на 3-мерном многообразии Q^3 задана форма объёма μ и риманова метрика G (μ необязательно согласована с G). Пусть $u = u(\mathbf{x}, t)$ — векторное поле на Q^3, зависящее от времени t, $\mathbf{x} \in Q^3$. Поле скоростей u идеальной несжимаемой жидкости на (Q^3, μ, G) описывается системой двух *уравнений Эйлера идеальной гидродинамики [3]*:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - [u \times \operatorname{curl} u] = -\operatorname{grad} P, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где t — время, $P = p + \frac{|u|^2}{2}$ — «приведённое» давление, $p = p(\mathbf{x}, t)$ — функция давления, $\uparrow = (\downarrow)^{-1}$ — операция поднятия индекса в метрике G, $[v \times w] :=\uparrow i_w i_v \mu$, $\operatorname{grad} P :=\uparrow dP$, $(\operatorname{div} u)\mu := L_u\mu = di_u\mu$.

По теореме 2.19 (первая часть) для любого почти Рибова течения (X, μ) поле $u := X$ совпадает со своей завихрённостью $\operatorname{curl} u$, а потому является стационарным (т.е. не зависящим от времени) решением системы уравнений Эйлера (4) с $P = \text{const}$, для любой римановой метрики G как в лемме 2.20 (a).

Гипотеза 2.23. *Множество почти Рибовых течений (X, μ) на Q^3 является C^1-открытым в множестве всех точных несжимаемых течений без нулей на Q^3, и состоит из стационарных решений системы (4) уравнений Эйлера идеальной гидродинамики (по отношению к $P = \text{const}$ и любым римановым метрикам из леммы 2.20 (a).*

Доказательство. Второе утверждение следует из теоремы 2.19 (первая часть). Первое утверждение «почти следует» из C^1-открытости множества $\mathcal{A}^+(Q)$ почти контактных пар. □

Лемма 2.24. *Предположим, что для некоторого несжимаемого течения (X, μ) без нулей выполнено $\operatorname{curl} X = fX$, где f — гладкая функция на Q^3. Тогда $i_X df = 0$, т.е. f является первым интегралом векторного поля X.*

Доказательство. Имеем $d\downarrow X \overset{\text{опр. } 2.15}{=} i_{\operatorname{curl} X}\mu = i_{fX}\mu = fi_X\mu = f\beta$. Применяя к полученному равенству внешний дифференциал, получаем $0 = df \wedge \beta$. С другой стороны, в локальных координатах из предложения 2.2 имеем $\beta = dx \wedge dy$, откуда $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. С учетом равенства $X = \frac{\partial}{\partial z}$, получаем $i_X df = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. □

3 Рибовость геодезических и биллиардных потоков, почти Рибовость релятивистских и магнитных геодезических потоков

В этом и следующем разделах 3—4 мы исследуем выполнение следующих свойств (i) и (ii) для следующих классов 3-мерных несжимаемых течений: геодезические, биллиардные и магнитные геодезические потоки, в том числе релятивистские, где

(i) *Рибовость* (т.е. $f = 1$) или хотя бы *почти Рибовость* (т.е. $f > 0$) течения (X, μ) по отношению к «канонической» 1-форме α (для функции $f := i_X \alpha = \frac{\alpha \wedge d\alpha}{\mu}$ из леммы 2.3),

(ii) *усиленная ротационная Бернуллиевость*: $\operatorname{curl} X = X$ (или хотя бы поточечная коллинеарность вместо равенства, т.е. X является векторным полем Бернулли) по отношению к «канонической» контактной форме α и «канонической» римановой метрике G на Q^3.

Замечание 3.1. В силу теоремы 2.19, свойство (i) влечет (ii) по крайней мере для некоторой (необязательно «канонической») римановой метрики G на Q. В этом смысле вопрос о выполнении свойства (i) является более принципиальным, чем (ii), который важен для физических приложений. Отметим также, что выполнение свойства (i) не зависит от выбора римановой метрики G на Q^3 (в отличие от выполнения свойства (ii)). Напомним (раздел 2.3), что свойство (ii) является нашей мотивацией для изучения свойства (i).

Определение 3.2. *Геодезическим потоком* на римановом многообразии $(\widehat{Q^n}, g)$ называется гамильтонова система на $M^{2n} := T^*\widehat{Q^n} \setminus$ (нулевое сечение) с симплектической структурой $\omega = dp \wedge dq$ и функцией Гамильтона $H(q,p) = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j = \frac{|p|^2}{2}$, где $g = g_{ij}(q) dq^i dq^j$ — риманова метрика на $\widehat{Q^n}$.

По лемме 2.10 или предложению 2.6 пара $(X, \mu) = (X_{1/2}, \mu_{1/2})$ является несжимаемым течением на $Q^{2n-1}_{1/2} = \{H = 1/2\}$. Назовем его $(2n-1)$-*мерным геодезическим потоком* на $(\widehat{Q^n}, g)$.

Определение 3.3. Для любого геодезического потока определим «каноническую» 1-форму α на $Q^{2n-1} = Q^{2n-1}_{1/2} = \{H = \frac{1}{2}\}$. А именно, положим $\alpha := \lambda|_{Q^{2n-1}}$, где $\lambda := pdq = \sum p_i dq^i$ — 1-форма Лиувилля на $T^*\widehat{Q}$. Заметим, что $d\lambda = \omega$.

Пусть далее $n = 2$. Для проверки Рибовости течения (X, μ) достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 3.4 (см. [12, Theorem 6.1])**.** *Геодезический поток (X, μ) на любой римановой поверхности $(\widehat{Q^2}, g)$ является Рибовым по отношению к контактной паре $(\alpha := \lambda|_{Q^3}, \mu)$, где $\lambda = pdq$ — форма Лиувилля на $M^4 = T^*\widehat{Q^2}$, μ — каноническая форма объёма на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (определение 2.5), $H(q,p) = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j$ — функция Гамильтона геодезического потока. Другими словами, $i_X \mu = d\alpha$ и $\mu = \alpha \wedge d\alpha$. При этом $(\widehat{Q^2}, g)$ может являться орбиобразием, т.е. иметь конические точки с полным углом $\frac{2\pi}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Доказательство предложения мы выведем из леммы 2.12 и замечания 2.13 к ней при $n = 2$.

По лемме 2.12 при $n = 2$ имеем $i_X\mu = \omega|_Q$. А так как $\omega|_Q = d\alpha$, то пара (α, μ) согласована с парой (X, μ) (определение 2.17). Так как функция Гамильтона H квадратична по импульсам, то по замечанию 2.13 при $n = 2$ имеем $\alpha \wedge d\alpha = \mu$ на $Q^3_{1/2} = \{H = \frac{1}{2}\}$, т.е. пара (α, μ) контактная, т.е. течение (X, μ) является Рибовым по отношению к контактной паре (α, μ).

Если $q_0 \in \widehat{Q^2}$ — коническая точка римановой метрики g с полным углом $\frac{2\pi}{k}$, то существует риманова метрика g_0 в круге $B = B^2_{0,\varepsilon} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < \varepsilon^2\}$, инвариантная относительно поворота R на угол $\frac{2\pi}{k}$; и существуют окрестность $\widehat{U^2}$ точки q_0 в $\widehat{Q^2}$ и гладкое отображение $\pi : B \to \widehat{U^2}$, такие что $\pi \circ R = \pi$, $\widehat{U^2} = \pi(B)$, $\pi|_{B\setminus\{0\}} : B \setminus \{0\} \to \widehat{U^2} \setminus \{q_0\}$ является k-листным накрытием и $\pi^* g|_{\widehat{U^2}\setminus\{q_0\}} = g_0|_{B\setminus\{0\}}$. Так как диффеоморфизм $R^* : T^*B \to T^*B$ сохраняет 1-форму $\lambda_0 = pdq$ и функцию $H_0 = \frac{1}{2} g_0^{ij}(q) p_i p_j$ и порождает свободное действие группы $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ на $U^4 := (T^*B) \setminus (\text{нулевое сечение})$, то пространство орбит $\mathcal{O}^4 = U^4/\langle R^*\rangle$ обладает естественной гладкой структурой, такой что индуцированное накрытие $p : U^4 \to \mathcal{O}^4$ является локальным диффеоморфизмом. Значит, индуцированные 1-форма $(p^{-1})^*\lambda_0$ и функция $H_0 \circ p^{-1}$ на $\mathcal{O}^4$ гладкие в обычном смысле, и их ограничения на $((T^*(B \setminus \{0\})) \setminus (\text{нулевое сечение}))/\langle R^*\rangle$ совпадают с обратными образами 1-формы $\lambda|_{(T^*(\widehat{U^2}\setminus\{q_0\}))\setminus(\text{нулевое сечение})}$ и функции $H|_{(T^*(\widehat{U^2}\setminus\{q_0\}))\setminus(\text{нулевое сечение})}$ при диффеоморфизме $\pi^* \circ p^{-1}|_{((T^*(B\setminus\{0\}))\setminus(\text{нулевое сечение}))/\langle R^*\rangle} : ((T^*(B \setminus \{0\})) \setminus (\text{нулевое сечение}))/\langle R^*\rangle \to (T^*(\widehat{U^2} \setminus \{q_0\})) \setminus (\text{нулевое сечение})$. Приклеивая многообразие $\mathcal{O}^4$ при помощи последнего диффеоморфизма к многообразию $(T^*(\widehat{Q^2}\setminus\{q_0\}))\setminus(\text{нулевое сечение})$, получим многообразие с гладкой структурой и гладкими 1-формой и функцией на нем, совпадающие с $M^4 = T^*\widehat{Q^2} \setminus (\text{нулевое сечение})$, $\lambda = pdq$ и H. Отсюда следует гладкость λ и H на $M^4 = T^*\widehat{Q^2} \setminus (\text{нулевое сечение})$ в любой точке слоя над конической точкой q_0. Так как слой над конической точкой q_0 содержится в замыкании своего дополнения, а вне этого слоя требуемые равенства $i_X\mu = d\alpha$ и $\mu = \alpha \wedge d\alpha$ выполнены по доказанному выше ввиду отсутствия конических точек, то по непрерывности эти равенства выполнены и на самом этом слое. Предложение 3.4 доказано. □

3.1 Рибовость биллиардных потоков

Пусть $(\widehat{Q^n}, g)$ — риманово многообразие с гладким краем $\partial\widehat{Q^n}$. На его внутренности $\overset{\circ}{\widehat{Q}} := \widehat{Q} \setminus \partial\widehat{Q}$ имеем сферизованное кокасательное расслоение $ST^*\overset{\circ}{\widehat{Q^n}} := \{(q, p) \in T^*\overset{\circ}{\widehat{Q^n}} \mid |p|_{g^{-1}} = 1\}$. Определим $2n$-мерное и $(2n-1)$-мерное «склеенные» фазовые пространства

$$M^{2n} := \Big((T^* \overset{\circ}{\widehat{Q^n}} \setminus (\text{нулевое сечение})) \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-\Big)/_\sim, \qquad Q^{2n-1} := (ST^*\overset{\circ}{\widehat{Q^n}} \cup \Gamma^1_+ \cup \Gamma^1_-)/_\sim,$$

где $\sim$ есть отношение эквивалентности $(q, p_-) \sim (q, p_+)$ на $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ и на $\Gamma^1_+ \cup \Gamma^1_-$, определяемое с помощью закона отражения Гюйгенса «угол падения равен углу отражения». Здесь

$$\Gamma_\pm := \{(q,p_\pm) \in T^*_{\partial \widehat{Q^n}} \widehat{Q^n} \mid \langle p_\pm, n\rangle \gtrless 0\}, \qquad \Gamma^1_\pm := \{(q,p_\pm) \in \Gamma_\pm \mid |p_\pm|_{g^{-1}} = 1\},$$

где $n^*(q)$ — единичный ковектор внешней нормали, и $(2n-2)$-мерное многообразие $\Gamma^1 = (\Gamma^1_+ \cup \Gamma^1_-)/_\sim$ называют *фазовым пространством Бирхгофа*.

Теорема 3.5 (Lazutkin, 1993, [13])**.** *Если $\sim$ совпадает с законом отражения Гюйгенса «угол падения равен углу отражения», то на «склеенном» фазовом пространстве M^{2n} существует гладкая структура, совпадающая со стандартной на $(T^* \overset{\circ}{\widehat{Q^n}}) \setminus$(нулевое сечение) и такая, что H и ω — гладкие. В частности, на $Q^{2n-1} \subset M^{2n}$ существует гладкая структура, совпадающая со стандартной на $ST^*\overset{\circ}{\widehat{Q^n}}$ и такая, что $\omega|_{Q^{2n-1}}$ гладкая.*

Определение 3.6. *Биллиардным потоком* на римановом многообразии $(\widehat{Q^n}, g)$ с краем называется гамильтонова система на «склеенном» многообразии M^{2n} с гладкой структурой из теоремы 3.5, симплектической структурой ω и функцией Гамильтона H как в определении 3.2. Соответствующее «склеенное» течение (X,μ) на $Q^{2n-1} = \{H = 1/2\}$ назовем $(2n-1)$-*мерным биллиардным потоком* на $(\widehat{Q^n}, g)$.

Из предложения 3.4 получаем

Следствие 3.7. *Биллиардный поток (X,μ) на любой римановой поверхности $(\widehat{Q^2}, g)$ с гладким краем является Рибовым по отношению к контактной паре $(\alpha := \lambda|_{Q^3}, \mu)$, причем X и соответствующая контактная пара (α,μ) являются гладкими на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\} \subset M^4$.*

Доказательство. Рибовость вне Γ^1 следует из предложения 3.4. Обозначим $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$. Из закона Гюйгенса отражения следует, что 1-форма $\lambda|_\Gamma$ сохраняется при «склеивающей инволюции» $\Gamma \to \Gamma$, $(q,p_+) \leftrightarrow (q,p_-)$. Значит, в силу [14, Теорема 2.6], H и λ являются гладкими на M^4 относительно гладкой структуры на M^4 из теоремы 3.5. Значит, «склеенные» 1-форма $\alpha = \lambda|_Q$, 3-форма μ и векторное поле X — гладкие на всем Q^3. Значит, из Рибовости (т.е. справедливости равенств $i_X\mu = d\alpha$ и $\mu = \alpha \wedge d\alpha$) вне гиперповерхности Γ^1 получаем по непрерывности Рибовость и на всем Q^3. Следствие доказано. $\square$

3.2 Почти Рибовость потенциальных и релятивистских геодезических потоков

Рассмотрим натуральную механическую систему на римановом многообразии $(\widehat{Q^n}, g)$ с потенциалом $\phi : \widehat{Q^n} \to \mathbb{R}$, т.е. гамильтонову систему на симплектическом многообразии $(M^{2n} = T^*\widehat{Q^n}, \omega = dp \wedge dq)$ с функцией Гамильтона

$$H(q,p) = \frac{1}{2m} g^{ij}(q) p_i p_j + e\phi(q).$$

Система описывает движение частицы массы m по конфигурационному многообразию $(\widehat{Q^n}, g)$ в поле сил с потенциалом $e\phi$. Пусть $\widetilde{X}$ — гамильтоново векторное поле этой системы. Рассмотрим на $Q^{2n-1} = Q^{2n-1}_E = \{H = E\}$ векторное поле $X_E := \widetilde{X}|_{Q^{2n-1}_E}$ и каноническую форму объёма μ^{2n-1}_E (см. определение 2.5), т.е. $dH \wedge \mu^{2n-1}_E = \tilde{\mu}^{2n}$ на Q^{2n-1}_E.

Предложение 3.8 (принцип Мопертюи [15]). *Множество уровня $Q^{2n-1} = Q^{2n-1}_E = \{H = E\}$ функции Гамильтона H, описывающей натуральную механическую систему на римановом многообразии $(\widehat{Q^n}, g)$ с потенциалом $\phi : \widehat{Q^n} \to \mathbb{R}$, совпадает с множеством уровня $\{H_E = \frac{1}{2}\}$ функции Гамильтона $H_E(q,p) = \frac{1}{2mf_E(q)} g^{ij}(q)p_ip_j$ некоторого геодезического потока (без потенциала), а именно отвечающего римановой метрике $g_E = f_E g$ на $\widehat{Q^n}$, если $E > e\sup(\phi)$, где $f_E := 2E - 2e\phi$. Фазовые траектории соответствующих двух гамильтоновых систем на множестве Q^{2n-1} совпадают с точностью до перепараметризации (т.е. эти системы на Q^{2n-1} конформно эквивалентны, где «конформно» означает «с точностью до замены времени»).* □

Рассмотрим геодезический поток из предложения 3.8, т.е. гамильтонову систему $(M^{2n}, \omega = dp \wedge dq, H_E)$. Для этого геодезического потока рассмотрим гамильтоново векторное поле $\widetilde{X}^{\mathrm{geod}}_E$ на M^{2n}, его ограничение $X^{\mathrm{geod}}_E := \widetilde{X}_E|_{Q^{2n-1}_E}$ на Q^{2n-1}_E, и каноническую форму объёма $(\mu^{2n-1}_E)^{\mathrm{geod}}$ на Q_E (см. определение 2.5, т.е. $dH_E \wedge (\mu^{2n-1}_E)^{\mathrm{geod}} = \tilde{\mu}^{2n}$).

Замечание 3.9. В силу предложения 3.8, $dH = \tilde{f}_E dH_E$ в любой точке из Q_E, для некоторой гладкой функции $\tilde{f}_E \neq 0$ на Q_E. Оказывается, «конформный множитель» $\tilde{f}_E$ совпадает с f_E и, в частности, не зависит от импульса p. Действительно: из равенства $dH = \tilde{f}_E dH_E$ получаем $\frac{\partial H}{\partial p_i}|_{Q_E} = \tilde{f}_E \frac{\partial H_E}{\partial p_i}|_{Q_E}$. Последнее равенство переписывается в виде $1 = \tilde{f}_E \frac{1}{f_E}$, откуда $\tilde{f}_E = f_E$. Поэтому несжимаемые течения (X_E, μ_E) и $(X^{\mathrm{geod}}_E, \mu^{\mathrm{geod}}_E)$ на Q_E связаны соотношением

$$(X_E, \mu_E) = (f_E X^{\mathrm{geod}}_E, \frac{1}{f_E}\mu^{\mathrm{geod}}_E).$$

Применим предложение 3.4 и теорему 4.11 к геодезическому потоку $(X^{\mathrm{geod}}_E, \mu^{\mathrm{geod}}_E)$ на Q_E. Из предложения 3.8 и теоремы 4.11, с учетом замечания 3.9, получаем

Следствие 3.10. (a) *Несжимаемое течение (X_E, μ_E), являющееся ограничением натуральной механической системы на уровень энергии $E > e\sup\phi$, является почти Рибовым относительно канонической формы объёма μ_E на Q^{2n-1}_E (определение 2.5) и контактной 1-формы $\alpha_E = pdq|_{Q^{2n-1}_E}$. Другими словами, $i_{X_E}\mu_E = d\alpha_E$ и $f_E\mu_E = \alpha_E \wedge d\alpha_E$.*

(b) *При $n = 2$ геодезический поток $(X^{\mathrm{geod}}_E, \mu^{\mathrm{geod}}_E)$, «пропорциональный» несжимаемому течению $(X_E, \mu_E) = (f_E X^{\mathrm{geod}}_E, \frac{1}{f_E}\mu^{\mathrm{geod}}_E)$, полученному ограничением натуральной механической системы на уровень энергии $E > e\sup\phi$, является сильно ротационно Бернуллиевым* ($\operatorname{curl} X^{\mathrm{geod}}_E = X^{\mathrm{geod}}_E$) *по отношению к канонической римановой метрике G_E на Q^3_E (определение 4.1), построенной по римановой метрике $g_E = f_E g$ на $\widehat{Q^2_E}$ с использованием конструкции 4.2. Другими словами, для 1-формы $\alpha_E = pdq|_{Q^3_E}$ выполнено $\alpha_E = \langle X^{\mathrm{geod}}_E, \rangle_{G_E}$ и $i_{X^{\mathrm{geod}}_E}\mu^{\mathrm{geod}}_E = d\alpha_E$. Более того, $\mu^{\mathrm{geod}}_E = \alpha_E \wedge d\alpha_E$ и $i_{X^{\mathrm{geod}}_E}\alpha_E = 1$.* □

Предложение 3.11 («релятивистский» принцип Мопертюи). *Множество уровня $Q^{2n-1} = Q^{2n-1}_{E,c} = \{H = E\}$ функции Гамильтона $H_c(q,p) = c\sqrt{m^2c^2 + g^{ij}(q)p_ip_j} + e\phi(q)$, описывающей релятивисткую натуральную механическую систему на римановом многообразии $(\widehat{Q^n}, g)$*

с потенциалом $e\phi : \widehat{Q^n} \to \mathbb{R}$, совпадает с множеством уровня $\{H_{E,c} = \frac{1}{2}\}$ функции Гамильтона $H_{E,c} = \frac{1}{2mf_{E,c}(q)} g^{ij}(q)p_ip_j$ некоторого геодезического потока (без потенциала и без релятивизма), а именно отвечающего римановой метрике $g_{E,c} = f_{E,c}g$ на $\widehat{Q^n}$, если $E > mc^2 + e\sup\phi$, где $f_{E,c}(q) := \frac{(E-e\phi(q))^2}{c^2} - m^2c^2$. Фазовые траектории соответствующих двух гамильтоновых систем на множестве Q^{2n-1} совпадают с точностью до перепараметризации (т.е. эти системы на Q^{2n-1} конформно эквивалентны, где «конформно» означает «с точностью до замены времени»).

Доказательство. Введём обозначение $U(q) := e\phi(q)$. Рассмотрим уровень энергии E функции H_c. Тогда:

$$H_c = c\sqrt{m^2c^2 + g^{ij}p_ip_j} + U = E,$$
$$c\sqrt{m^2c^2 + g^{ij}p_ip_j} = E - U,$$
$$c^2(m^2c^2 + g^{ij}p_ip_j) = (E-U)^2,$$
$$g^{ij}p_ip_j = \frac{(E-U)^2 - m^2c^4}{c^2} =: f_{E,c},$$
$$\frac{1}{f_{E,c}} g^{ij}(q)p_ip_j = 1.$$

Неравенство на E гарантирует, что новая метрика $g_{E,c} = f_{E,c}g$ на $\widehat{Q^n}$ действительно является римановой метрикой, т.е. положительно определена всюду на $\widehat{Q^n}$. Таким образом мы получили, что множество уровня E функции Гамильтона H_c изначальной релятивистской натуральной механической системы с потенциалом U совпадает с множеством уровня $1/2$ функции Гамильтона $H_{E,c} = \frac{1}{2}g^{ij}_{E,c}(q)p_ip_j$ нового геодезического потока (без потенциала и релятивизма), отвечающего метрике $g_{E,c}$ на $\widehat{Q^n}$. Осталось заметить, что для любой гамильтоновой системы $i_X(\omega|_{Q^{2n-1}}) = (i_{\tilde{X}}\omega)|_{Q^{2n-1}} \overset{\text{Лемма 2.7}}{=} -dH_c|_{Q_h^{2n-1}} = 0$, т.е. интегральные кривые поля X совпадают с интегральными кривыми поля $\mathrm{Ker}(\omega|_{Q^{2n-1}})$. Так как рассматриваемые системы имеют одно и то же Q^{2n-1} и одну и ту же $\omega = dp \wedge dq$, то и их интегральные траектории на Q совпадают без учета времени. Предложение 3.11 доказано. □

Применим предложение 3.4 и теорему 4.11 к геодезическому потоку $(X^{\mathrm{geod}}_{E,c}, \mu^{\mathrm{geod}}_{E,c})$ на $Q_{E,c}$ для риманова многообразия $(\widehat{Q^n}, g_{E,c} = f_{E,c}g)$. Заметим, что $dH_c = \tilde{f}_{E,c}dH_{E,c}$ в любой точке из $Q_{E,c}$, где $\tilde{f}_{E,c} = \frac{mc^2}{E-e\phi}f_{E,c}$. Отсюда и из предложения 3.4 и теоремы 4.11 получаем

Следствие 3.12. (a) *Несжимаемое течение $(X_{E,c}, \mu_{E,c})$, являющееся ограничением релятивистской натуральной механической системы на уровень энергии $E > mc^2 + e\sup\phi$, является почти Рибовым относительно канонической формы объёма $\mu_{E,c}$ на $Q^{2n-1}_{E,c}$ (определение 2.5) и контактной 1-формы $\alpha_{E,c} = pdq|_{Q^{2n-1}_{E,c}}$. Другими словами, $i_{X_{E,c}}\mu_{E,c} = d\alpha_{E,c}$ и $\tilde{f}_{E,c}\mu_{E,c} = \alpha_{E,c} \wedge d\alpha_{E,c}$.*

(b) *При $n = 2$ геодезический поток $(X^{\mathrm{geod}}_E, \mu^{\mathrm{geod}}_E)$, «пропорциональный» несжимаемому течению $(X_E, \mu_E) = (\tilde{f}_E X^{\mathrm{geod}}_E, \frac{1}{\tilde{f}_E}\mu^{\mathrm{geod}}_E)$, полученному ограничением релятивистской натуральной механической системы на уровень энергии $E > mc^2 + e\sup\phi$, является сильно* *ротационно Бернуллиевым* ($\operatorname{curl} X^{\mathrm{geod}}_{E,c} = X^{\mathrm{geod}}_{E,c}$) *по отношению к канонической римановой метрике* $G_{E,c}$ *на* $Q^3_{E,c}$ *(определение 4.1), построенной по римановой метрике* $g_{E,c} = f_{E,c}g$ *на* $\widehat{Q^2_{E,c}}$ *с использованием конструкции 4.2. Другими словами, для 1-формы* $\alpha_{E,c} = pdq|_{Q^3_{E,c}}$ *выполнено* $\alpha_{E,c} = \langle X^{\mathrm{geod}}_{E,c}, \rangle_{G_{E,c}}$ *и* $i_{X^{\mathrm{geod}}_{E,c}}\mu^{\mathrm{geod}}_{E,c} = d\alpha_{E,c}$. *Более того,* $\mu^{\mathrm{geod}}_{E,c} = \alpha_{E,c} \wedge d\alpha_{E,c}$ *и* $i_{X^{\mathrm{geod}}_{E,c}}\alpha_{E,c} = 1$. □

3.3 Почти Рибовость магнитных геодезических потоков со слабым магнитным полем

Рассмотрим магнитный геодезический поток на римановом многообразии $(\widehat{Q^n}, g)$ с магнитным полем $\hat\beta = \hat\beta_{ij}(q)dq^i \wedge dq^j \in \Lambda^2(\widehat{Q^n})$. Он задаётся гамильтоновой системой на $M^{2n} = T^*\widehat{Q^n}$ с симплектической структурой $\omega_B = dp \wedge dq + \pi^*\hat\beta = dp \wedge dq + \hat\beta_{ij}(q)dq^i \wedge dq^j$ и функцией Гамильтона $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_ip_j$. Гамильтоново векторное поле этой системы обозначим через $\widetilde{X}_B$, оно разлагается в сумму вида $\widetilde{X}_B = (\widetilde{X}_B)_h + (\widetilde{X}_B)_v$ (см. определение 4.1).

Лемма 3.13. *В случае магнитного геодезического потока на* M^{2n} *вертикальная компонента равна* $(\widetilde{X}_B)_v = k_m(q,p)\frac{\partial}{\partial p_m}$, *где* $k_m = p_j\hat\beta_{mi}g^{ij}$. *При этом* $(\widetilde{X}_B)_h$ *совпадает с аналогичной компонентой для случая* $B = 0$, *т.е.* $(\widetilde{X}_B)_h = (\widetilde{X}_B)_0 = \widetilde{X}$.

Доказательство. Введем обозначение $\widetilde{Y} := (\widetilde{X}_B)_v$. Покажем, что $(\widetilde{X}_B)_h = \widetilde{X}$. Для этого достаточно (согласно лемме 2.7) подобрать вертикальное $\widetilde{Y}$ так, чтобы выполнялось равенство $-dH = i_{\widetilde{X}+\widetilde{Y}}[\omega + \pi^*\hat\beta]$, где $\omega = \omega_0 = dp \wedge dq$. Распишем его:

$$-dH = i_{\widetilde{X}}[\omega + \pi^*\hat\beta] + i_{\widetilde{Y}}[\omega + \pi^*\hat\beta] \overset{\text{Лемма 2.7, } \widetilde{Y} \text{ вертикален}}{=} -dH + i_{\widetilde{X}}\pi^*\hat\beta + i_{\widetilde{Y}}\omega.$$

То есть, искомое вертикальное поле $\widetilde{Y} = k_m\frac{\partial}{\partial p_m}$ должно удовлетворять уравнению $i_{\widetilde{X}}\pi^*\hat\beta + i_{\widetilde{Y}}\omega = 0$. Формально $i_{\widetilde{X}}\pi^*\hat\beta = i_{\pi_*\widetilde{X}}\hat\beta = g^{ij}p_j\hat\beta_{im}dq^m$. В то же время, $i_{\widetilde{Y}}\omega = k_m dq^m$. Мы использовали, что $\pi_*\widetilde{X} = \frac{\partial H}{\partial p} =\uparrow p$. Выражая ковектор $k = (k_m)$, находим решение нашего уравнения:

$$k_m = -g^{ij}p_j\hat\beta_{im} = p_j\hat\beta_{mi}g^{ij} =: p_jA^j_m. \tag{5}$$

Векторное поле $\widetilde{Y} = \widetilde{X}_B - \widetilde{X}_0$ всюду касается слоев расслоения $T^*\widehat{Q}$. □

Замечание 3.14. Если $g_{ij}(q_0) = \delta_{ij}$ и $n = 2$, то $\hat\beta = B(q)dq^1 \wedge dq^2$, и оператор $A|_{q_0}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -B(q_0) \\ B(q_0) & 0 \end{pmatrix}$. То есть, оператор A из (5) действует как поворот ковектора до направления, перпендикулярного изначальному, и домножение его на $B(q_0)$.

Вернёмся к вопросу почти Рибовости данного потока. Вначале проверим, что форма объёма μ_B^{2n-1} на $Q^{2n-1} = \{H = \frac{1}{2}\}$ из определения 2.5 совпадает с формой объёма $\mu^{2n-1} = \mu_0^{2n-1}$ на Q^{2n-1}, которая была при отсутствии магнитного поля.

Лемма 3.15. *Для магнитного геодезического потока на* $Q^{2n-1} = \{H = \frac{1}{2}\}$ *формы объёма совпадают:* $\mu_B^{2n-1} = \mu^{2n-1}$.

Доказательство. Пусть $\hat\beta = d\hat\alpha$ на $\widehat{Q^n}$. По определению

$$dH \wedge \mu_B^{2n-1} = \frac{1}{n}\underbrace{\omega_B \wedge \dots \wedge \omega_B}_{n} = \frac{1}{n}(dp_i \wedge dq^i + d\hat\alpha) \wedge \dots \wedge (dp_i \wedge dq^i + d\hat\alpha) = \tilde\mu^{2n} = dH \wedge \mu^{2n-1}.$$

Таким образом, $\mu_B^{2n-1} = \mu^{2n-1}$. Лемма доказана. □

Пусть $n = 2$. По лемме 3.13 имеем $\widetilde{X}_B = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$, где $\widetilde{X} = \widetilde{X}_0$ и $\widetilde{Y}$ вертикально. Обозначим

$$X := \widetilde{X}|_{Q^3}, \qquad Y := \widetilde{Y}|_{Q^3}, \qquad X_B := \widetilde{X}_B|_{Q^3} = X + Y.$$

Заметим, что $i_X dH = i_Y dH = 0$, т.е. X и Y касательны к Q^3 (так как X и X_B касательны к Q^3). Для доказательства почти Рибовости требуется доказать, что $i_{X+Y}\mu_B = d\alpha_B$, где $\alpha_B = (pdq + \pi^*\hat\alpha)|_{Q^3}$ (т.е. что пары $(X+Y, \mu_B^3)$ и (α_B, μ_B^3) согласованы, см. определение 2.17), и что $i_{X+Y}\alpha_B = f_B > 0$ (почти Рибовость, см. определение 2.18 и лемму 2.3).

Теорема 3.16. *Магнитный геодезический поток (X_B, μ_B) на любом 2-мерном римановом многообразии $(\widehat{Q^2}, g)$ с магнитным полем $\hat\beta = d\hat\alpha$ на $\widehat{Q^2}$ является почти Рибовым на $Q^3 = \{H = 1/2\}$, относительно формы объёма $\mu_B = \mu$ и контактной 1-формы $\alpha_B = (pdq + \pi^*\hat\alpha)|_{Q^3}$, при условии, что $|a(q)|_{g^{-1}(q)} < 1$ всюду на $\widehat{Q^2}$, где $\hat\alpha = a_i(q)dq^i$. Другими словами, $i_{X_B}\mu = d\alpha_B$ и $f_B\mu = \alpha_B \wedge d\alpha_B$ для функции $f_B = i_{X_B}\alpha_B > 0$ на Q^3.*

Доказательство. Докажем, что пары $(X+Y, \mu_B^3)$ и (α_B, μ_B^3) согласованы: $i_{X_B}\mu_B \overset{\text{Лемма 2.12}}{=} \omega_B|_Q = d\alpha_B$.

Докажем вторую часть про почти Рибовость. Посчитаем $f_B(q,p) = i_{X+Y}(pdq + \pi^*\hat\alpha) = i_X(pdq + \pi^*\hat\alpha) + i_Y(pdq + \pi^*\hat\alpha) \overset{\text{Предл. 3.4, } Y \text{ вертикален по Лемме 3.13}}{=} 1 + i_X\pi^*\hat\alpha$. Проанализируем, когда получившееся выражение больше 0 на Q^3. Так как $X = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}) = (\uparrow p, -\frac{\partial g^{ij}(q)}{\partial q}p_i p_j) = g^{ij}(q)p_j\frac{\partial}{\partial q^i} + (\dots)\frac{\partial}{\partial p^k}$, то $i_X\pi^*\hat\alpha = g^{ij}(q)p_j a_i(q) = \langle p, a(q)\rangle_{g^{-1}(q)}$. Таким образом, $\min_p(f_B(q,p)) = 1 + \min_p(i_X\pi^*\hat\alpha) = 1 - |a(q)|_{g^{-1}(q)}$. При условии, что $|a(q)|_{g^{-1}(q)} < 1$ получаем, что $f_B > 0$ (почти Рибовость). □

4 Совпадение геодезических и биллиардных потоков, в том числе релятивистских, со своими завихрённостями

Для любого геодезического потока (любой размерности) определим «каноническую» риманову метрику G_h на Q_h^{2n-1} и изучим ее свойства; в частности проверим выполнение равенства $X = \operatorname{curl} X$ при $n = 2$.

Определение 4.1. Пусть $(\widehat{Q^n}, g)$ — риманово многообразие, $\pi : M^{2n} = T^*\widehat{Q^n} \to \widehat{Q^n}$ — проекция. Рассмотрим разложение $2n$-мерного касательного пространства $T_{(q,p)}M^{2n}$ в прямую сумму n-мерного «вертикального» подпространства $T_{(q,p)}\pi^{-1}(q)$ и n-мерного «горизонтального», где «горизонтальное» подпространство определяется с помощью конструкции 4.2 ниже. Пусть $v(q,p) : T_{(q,p)}M^{2n} \to T_{(q,p)}\pi^{-1}(q)$ — проекция на первую (вертикальную) компоненту этого разложения. Для любого вектора $Y \in T_{(q,p)}M^{2n}$ обозначим $Y_v := v_{(q,p)}(Y)$. Определим метрику $\widetilde{G}$ на $M^{2n} = T^*\widehat{Q^n}$ с помощью формулы

$$\langle X, Y\rangle_{\widetilde{G}} := \langle \pi_* X, \pi_* Y\rangle_g + \langle X_v, Y_v\rangle_{g^{-1}},$$

где в правой части равенства первое слагаемое $\langle \pi_* X, \pi_* Y\rangle_g = g_{ij}(q)(\pi_* X)^i(\pi_* Y)^j$, а второе слагаемое $\langle X_v, Y_v\rangle_{g^{-1}} = g^{ij}(q)(X_v)_i(Y_v)_j$. В частности, «вертикальное» и «горизонтальное» подпространства ортогональны друг другу относительно $\widetilde{G}$.

Конструкция 4.2. Пусть $\widehat{U}$ — малая окрестность точки $q \in \widehat{Q^n}$ такая, что любую точку $q' \in \widehat{U}$ можно соединить геодезической qq' в $\widehat{U}$ (такая окрестность всегда существует). Построим локальное сечение $s_{(q,p)} : \widehat{U} \to M$ над $\widehat{U}$, проходящее через точку (q,p) так: для любой точки $q' \in \widehat{U}$ определим $s_{(q,p)}(q')$ как результат параллельного переноса ковектора $p \in T^*_q\widehat{Q^n}$ из q в q' вдоль геодезической qq'. Тогда $s_{(q,p)}(q')$ — это ковектор в точке q', значит $s_{(q,p)}$ — локальное сечение кокасательного расслоения $T^*\widehat{Q^n}$ над $\widehat{U}$. Так как $s_{(q,p)}(q) = p$, то это сечение (точнее, его образ) проходит через точку (q,p). Требуемое «горизонтальное» подпространство в точке (q,p) положим равным $T_{(q,p)}\{(q', s_{(q,p)}(q')) \mid q' \in \widehat{U}\} = ds_{(q,p)}(T_q\widehat{Q^n}) \subset T_{(q,p)}M^{2n}$.

Определение 4.3. Определим риманову метрику $G = G_h$ на $Q^{2n-1}_h = \{H = h\}$ таким образом: $G = \widetilde{G}|_{Q^{2n-1}}$.

Лемма 4.4. *Для геодезического потока* $\downarrow X_h = (\downarrow \widetilde{X})|_{Q^{2n-1}}$*, где* $X_h := \widetilde{X}|_{Q^{2n-1}_h}$*,* $Q^{2n-1}_h = \{H = h\}$*.*

Доказательство. Имеем $\langle \widetilde{X}, \cdot\rangle_{\widetilde{G}} =\downarrow \widetilde{X}$ на $T_{(q,p)}M^{2n}$. Аналогично $\langle X_h, \cdot\rangle_{G_h} =\downarrow X_h$ на $T_{(q,p)}Q^{2n-1}_h$. Так как по лемме 2.8 H — первый интеграл $\widetilde{X}$, то в любой точке $(q,p) \in Q^{2n-1}_h$ имеем $X_h = \widetilde{X} \in T_{(q,p)}Q^{2n-1}_h \subset T_{(q,p)}M^{2n}$. Отсюда $\downarrow \widetilde{X}|_{T_{(q,p)}Q^{2n-1}} =: \downarrow X_h$. □

Лемма 4.5. *Для геодезического потока* $|\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}} = \sqrt{2H}$*, где градиент функции и длина вектора понимаются в смысле римановой метрики* $\widetilde{G}$ *на* M^{2n}*.*

Доказательство. Проверим, что значение dH на любом «горизонтальном» векторе равно 0. Действительно, из конструкции 4.2 и из сохранения длины ковектора при параллельном переносе $H(s_{(q,p)}(q')) = H(q,p)$, следовательно $dH(ds_{(q,p)}(T_qQ)) = 0$.

Так как для любого горизонтального вектора Z_h имеем $\langle \operatorname{grad} H, Z_h\rangle_{\widetilde{G}} = dH(Z_h) = 0$, то $\operatorname{grad} H \in (dS_{(q,p)}(T_qQ))^{\perp}_{\widetilde{G}}$, т.е. вектор $\operatorname{grad} H$ вертикален (определение 4.1).

Таким образом, $|\operatorname{grad} H(q,p)|_{\widetilde{G}} \overset{\text{grad H вертикален}}{=} |p|_{g^{-1}(q)} = \sqrt{|p|^2_{g^{-1}(q)}} = \sqrt{2H(q,p)}$. □

Предложение 4.6. *Для любого геодезического потока форма объёма* $\tilde{\mu}^{2n}$ *на* M^{2n} *из определения 2.4 совпадает с формой объёма* $\tilde{\mu}^{2n}_{\widetilde{G}}$*, отвечающей римановой метрике* $\widetilde{G}$ *на* M^{2n} *из определения 4.1 и канонической ориентации на* M^{2n}*, а форма объёма* μ^{2n-1} *на* $Q^{2n-1} = \{H = \frac{1}{2}\}$ *из определения 2.5 совпадает с формой объёма* μ^{2n-1}_G*, отвечающей* *римановой метрике $G = G_{\frac{1}{2}}$ на Q^{2n-1} из определения 4.3 и «канонической» ориентации на Q^{2n-1}.*

Доказательство. Фиксируем точку $(q,p) \in M^{2n}$. В точке любая риманова метрика эквивалентна евклидовой метрике, то есть $g(q) = E$ в подходящих локальных координатах $q^1, \dots, q^n$ на $\widehat{Q^n}$. Тогда $\widetilde{G}(q,p) = \begin{pmatrix} E + AA^T & A \\ A^T & E \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы A. Докажем это.

Пусть $\frac{\partial}{\partial q^i}|_{(q,p)} = e_i$ и $\frac{\partial}{\partial p_j}|_{(q,p)} = f_j$. Введем матрицу A с помощью скалярных произведений $\langle e_i, f_j \rangle_{\widetilde{G}} = A_{ij}$. Посчитаем горизонтальные составляющие $(e_i)_h$ векторов e_i. Компонента $(e_i)_h = e_i + B_i^j f_j$, где второе слагаемое соответствует $-(e_i)_v$ — вертикальной составляющей вектора e_i, взятой со знаком «$-$». С одной стороны, скалярное произведение $\langle B_i^j f_j, f_k \rangle_{\widetilde{G}} = B_i^j \delta_{jk} = B_i^k$, с другой стороны $\langle B_i^j f_j, f_k \rangle_{\widetilde{G}} = \langle -e_i, f_k \rangle_{\widetilde{G}} = -A_{ik}$. Отсюда получаем, что $B_i^k = -A_{ik}$.

Посчитаем скалярные произведения векторов e_i с e_k. Получаем, что $\langle e_i, e_k \rangle_{\widetilde{G}} = \langle (e_i)_h + A_{ij} f_j, (e_k)_h + A_{kl} f_l \rangle_{\widetilde{G}} = \delta_{ik} + \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} A_{kj} = (E + AA^T)_{ik}$. Таким образом, матрица метрики $\widetilde{G}$ будет иметь указанный выше вид.

Лемма 4.7. *Определитель* $\det \widetilde{G} = 1$.

Доказательство. Докажем двумя способами.

Способ 1. Разделим мысленно матрицу на верхнюю и нижнюю половины. Будем вычитать из строк верхней половины матрицы строки из нижней половины матрицы (с подобранными коэффициентами) так, чтобы в правом верхнем углу матрица A перешла в нулевую матрицу. Тогда левая верхняя матрица $E + AA^T$ перейдет в единичную матрицу E. Определитель получившейся матрицы будет равен 1. Но так как преобразования выше не меняли определитель, то определитель изначальной матрицы $\widetilde{G}$ тоже равен 1.

Способ 2. $\widetilde{G} = \begin{pmatrix} E + AA^T & A \\ A^T & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ A^T & E \end{pmatrix}$, откуда $|\widetilde{G}| = 1 \cdot 1 = 1$. □

Продолжим доказательство предложения 4.6. Предположим, что $|p|_{g^{-1}(q)} = 1$, т.е. $(q,p) \in Q^{2n-1}$. В силу леммы 4.7 форма объёма в точке (q,p), соответствующая метрике $\widetilde{G}$ и канонической ориентации на M^{2n}, имеет вид $\tilde{\mu}^{2n}_{\widetilde{G}}|_{(q,p)} \overset{\text{Лемма 4.7}}{=} dp_1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^n|_{(q,p)} \overset{\text{опр. 2.4}}{=} \tilde{\mu}^{2n}|_{(q,p)}$.

Выберем положительно ориентированный ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{2n}$ в $(T_{(q,p)}M^{2n}, \widetilde{G})$, такой что $e_1 = \frac{\operatorname{grad} H}{|\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}}} \overset{\text{Лемма 4.5}}{=} \operatorname{grad} H(q,p)$. Для $e_m, m = 2, \dots, 2n$ выполнено $0 = \langle e_1, e_m \rangle_{\widetilde{G}} = \widetilde{G}_{ij} e_1^i e_m^j = \widetilde{G}_{ij} \widetilde{G}^{ik} (dH)_k e_m^j = (dH)_j e_m^j = dH(e_m)$. Это значит, что $e_2, \dots, e_{2n} \in T_{(q,p)} Q^{2n-1}_{1/2}$. Пусть $e^1, \dots, e^{2n} \in T^*_{(q,p)} M^{2n}$ — двойственный базис.

Тогда $\tilde{\mu}^{2n} = \tilde{\mu}^{2n}_{\widetilde{G}} = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^{2n}$ и $\widetilde{G} = (e^1)^{\otimes 2} + (e^2)^{\otimes 2} + \dots + (e^{2n})^{\otimes 2}$. В то же время, в выбранном базисе $\mu^{2n-1} = A\, e^2 \wedge \dots \wedge e^{2n}$, где $A > 0$, откуда $\tilde{\mu}^{2n} \overset{\text{опр. 2.5}}{=} dH \wedge \mu^{2n-1} = A |\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}} e^1 \wedge \dots \wedge e^{2n}$. Поэтому $A = \frac{1}{|\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}}}$.

Подставляя $A = \frac{1}{|\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}}}$ в μ^{2n-1}, получаем $\mu^{2n-1} = \frac{1}{|\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}}} e^2 \wedge \dots \wedge e^{2n}$. А значит, $\mu_G^{2n-1} = e^2 \wedge \dots \wedge e^{2n} = |\operatorname{grad} H|_{\widetilde{G}} \mu^{2n-1}$. По лемме 4.5 получаем, что формы совпадают. $\square$

Утверждение 4.8. *Для геодезического потока евклидовой метрики g при $n = 2$ производная Ли $L_{\widetilde{X}} \widetilde{G} \neq 0$ и $L_X G \neq 0$. Для геодезического потока любой метрики $L_{\widetilde{X}} \lambda = dH$ и $L_X(\lambda|_Q) = 0$, где $\lambda = pdq$. Для произвольного несжимаемого течения (X, μ) производная Ли $L_X \alpha = df_\alpha$, где $f_\alpha = i_X \alpha$, $i_X \mu = d\alpha$.*

Доказательство. Пусть $g = (dq^1)^2 + (dq^2)^2$. Метрику $\widetilde{G}$ можно представить в виде диагональной единичной матрицы 4×4. Или $\widetilde{G} = (dq^1)^2 + (dq^2)^2 + (dp_1)^2 + (dp_2)^2$.

Геодезический поток $\Phi^t_{\widetilde{X}}(q^1, q^2, p_1, p_2) = (q + tp, p) =: (\tilde{q}, \tilde{p})$.

Поэтому $(\Phi^t_{\widetilde{X}})^* \widetilde{G} = \sum\limits_{i=1}^{2} (d\tilde{q}^i)^2 + (d\tilde{p}_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \Big(d(q^i + tp_i) \Big)^2 + dp_i^2 = \widetilde{G} + \sum\limits_{i=1}^{2} (2t dq^i dp_i + t^2 dp_i^2)$.

Отсюда $L_{\widetilde{X}} \widetilde{G} = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi^t_{\widetilde{X}})^* \widetilde{G} = 2 \sum\limits_{i=1}^{2} dq^i dp_i \neq 0$.

Докажем второе соотношение. Так как $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, то на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ риманова метрика $G = \widetilde{G}|_{Q^3} = (dq^1)^2 + (dq^2)^2 + d\varphi^2$. Здесь функция $\varphi : Q^3 \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ определена условиями $p_1|_{Q^3} = \cos\varphi$ и $p_2|_{Q^3} = \sin\varphi$. В координатах q^1, q^2, φ на Q^3 геодезический поток $\Phi^t_X(q^1, q^2, \varphi) = (q^1 + t\cos\varphi, q^2 + t\sin\varphi, \varphi) =: (\tilde{q}, \varphi)$.

Поэтому $(\Phi^t_X)^* G = \sum\limits_{i=1}^{2} (d\tilde{q}^i)^2 + d\varphi^2 = \Big(d(q^1 + t\cos\varphi) \Big)^2 + \Big(d(q^2 + t\sin\varphi) \Big)^2 + d\varphi^2 = G + 2t(-\sin\varphi dq^1 + \cos\varphi dq^2) d\varphi + t^2 d\varphi^2$.

Отсюда $L_X G = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi^t_X)^* G = 2(-\sin\varphi dq^1 + \cos\varphi dq^2) d\varphi \neq 0$.

Для геодезического потока любой метрики $L_{\widetilde{X}} \lambda = (i_{\widetilde{X}} d + d i_{\widetilde{X}}) \lambda = i_{\widetilde{X}} \omega + d i_{\widetilde{X}} \lambda \overset{\text{лемма 2.8, замечание 2.13}}{=} -dH + d(2H) = dH$. Отсюда $L_X(\lambda|_Q) = 0$.

Для произвольного несжимаемого течения $L_X \alpha = (i_X d + d i_X) \alpha = i_X i_X \mu + df_\alpha = df_\alpha$. $\square$

Теорема 4.9. *Для любого геодезического потока 1-форма $\downarrow X$ на $Q^{2n-1} = \{H = \frac{1}{2}\}$, полученная опусканием индекса из векторного поля X с помощью канонической римановой метрики G на Q^{2n-1} (определение 4.3), совпадает с $\alpha = pdq|_{Q^{2n-1}}$.*

Доказательство. По лемме 4.4 имеем $\downarrow X = (\downarrow \widetilde{X})|_{Q^{2n-1}}$ на Q^{2n-1}, где $\downarrow$ — операция опускания индекса относительно канонической метрики G на Q^{2n-1} или $\widetilde{G}$ на M^{2n}. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\downarrow \widetilde{X} = \lambda$ на M^{2n}.

Лемма 4.10. $\downarrow \widetilde{X} = \lambda = pdq = p_i dq^i$ *для любой римановой метрики g на $\widehat{Q^n}$ и построенной по ней канонической римановой метрики $\widetilde{G}$ на M^{2n}. Операция опускания индекса рассматривается относительно метрики $\widetilde{G}$.*

Доказательство. Шаг 1. Проверим, что векторное поле $\widetilde{X} = (\dot{q}, \dot{p})$ является горизонтальным, т.е. перпендикулярным слою $T_q^* Q$ относительно римановой метрики $\widetilde{G}$. Фиксируем точку $(q, p) \in M^{2n}$.

Пусть $\gamma(t) \in \widehat{Q^n}$ — геодезическая из $q = \gamma(0)$, $\dot{\gamma}(0) =\uparrow p$, где $\uparrow$ — оператор поднятия индекса в метрике g. Пусть $\tilde{\gamma}(t) \in M^{2n}$ — параллельный перенос ковектора p вдоль γ. Тогда $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \widetilde{X}$, так как $\tilde{\gamma}$ является интегральной траекторией $\widetilde{X}$. По конструкции 4.2 $\tilde{\gamma}$ содержится в локальном сечении $s_{(q,p)}$ расслоения $T^*\widehat{Q^n}$.

Таким образом $\tilde{\gamma}$ является горизонтальной кривой. Отсюда $\widetilde{X} = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$ тоже является горизонтальным вектором в точке (q,p). Отсюда $\widetilde{X}_v = 0$.

Шаг 2. Рассмотрим произвольное векторное поле Y на M^{2n}. В любой точке $(q,p) \in M^{2n}$ имеем

$$(\downarrow \widetilde{X})(Y) = \langle \widetilde{X}, Y \rangle_{\widetilde{G}} \overset{\text{опр. 4.1}}{=} \langle \pi_* \widetilde{X}, \pi_* Y \rangle_g + \langle \widetilde{X}_v, Y_v \rangle_{g^{-1}} \overset{\text{шаг 1}}{=}$$
$$\overset{\text{шаг 1}}{=} \langle \pi_* \widetilde{X}, \pi_* Y \rangle_g = \langle \uparrow p, \pi_* Y \rangle_g = p(\pi_* Y) = p_i dq^i(Y) = \lambda(Y).$$

Значит $\downarrow \widetilde{X} = \lambda$. □

Эта лемма завершает доказательство теоремы. □

Пусть опять $n = 2$. В определении 2.15 была определена завихрённость $\operatorname{curl} X$ в смысле построенной римановой метрики G на Q^3.

Теорема 4.11. *Любой геодезический поток (X, μ) является сильно ротационно Бернуллиевым, т.е. $\operatorname{curl} X = X$ по отношению к канонической римановой метрике G на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (определение 4.3). Другими словами, для 1-формы $\alpha := \langle X, \rangle_G$ выполнено $i_X \mu = d\alpha$. Более того, $\mu = \alpha \wedge d\alpha$, $i_X \alpha = 1$ и $\alpha = pdq|_{Q^3}$.*

Доказательство. По лемме 2.12 при $n = 2$, ввиду гамильтоновости геодезического потока относительно симплектической структуры $\omega = dp \wedge dq$ (определение 3.2), имеем $i_X \mu = \omega|_{Q^3} = d(pdq|_{Q^3})$. По теореме 4.9 $\downarrow X = pdq|_{Q^3} =: \alpha$, т.е. риманова метрика G на Q^3 из определения 4.3 удовлетворяет условиям леммы 2.20 (b). По лемме 2.21 имеем $\operatorname{curl} X = X$. Поскольку $f := i_X \alpha = pdq(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}) = |p|^2_{g^{-1}(q)} = 1$, то по лемме 2.3 имеем $\alpha \wedge d\alpha = f\mu = \mu$. □

Из теоремы 4.11 получаем

Следствие 4.12 (теорема П.М. Ахметьева)**.** *Любой геодезический 3-мерный поток (X, μ) является ротационно Бернуллиевым (т.е. $\operatorname{curl} X$ коллинеарен X и не имеет нулей) по отношению к канонической римановой метрике G на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (определение 4.3). Другими словами, дифференциал 1-формы $\alpha := \langle X, \rangle_G$ коллинеарен 2-форме $i_X \mu$ и не имеет нулей.* □

4.1 Приложение к биллиардным потокам, потенциальным и релятивистским геодезическим потокам

Из теоремы 4.11, с учетом следствия 3.7 и предложения 4.14 (см. ниже), также получаем

Следствие 4.13. *Любой биллиардный поток является сильно ротационно Бернуллиевым* ($\operatorname{curl} X = X$) *по отношению к «канонической» римановой метрике G на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (определение 4.3). Другими словами, для 1-формы $\alpha := \langle X, \rangle_G$ выполнено $i_X\mu = d\alpha$. Более того, $\mu = \alpha \wedge d\alpha$, $i_X\alpha = 1$ и $\alpha = pdq|_{Q^3}$. При этом X и α — гладкие относительно гладкой структуры из теоремы 3.5 Лазуткина, а «каноническая» риманова метрика G на Q^3, вообще говоря, не является гладкой (см. предложение 4.14).* $\square$

Аналогичные следствия для натуральных механических систем и релятивистских натуральных механических систем с 2 степенями свободы (точнее, для «пропорциональных» им 3-мерных несжимаемых течений) сформулированы в разделе 3.2, см. следствия 3.10 (b) и 3.12 (b). Для 3-мерных магнитных геодезических потоков аналогичное следствие тоже имеет место, в силу их почти Рибовости (теорема 3.16) и теоремы 2.19, однако соответствующая риманова метрика G на Q^3 не будет «канонической».

Предложение 4.14. *Пусть $(\widehat{Q^2}, g)$ — любая риманова поверхность с гладким краем. Если ее граница не является геодезической, то каноническая риманова метрика G на $Q^3 = \{H = \frac{1}{2}\}$ (а потому и каноническая риманова метрика $\widetilde{G}$ на M^4) не является гладкой относительно гладкой структуры из теоремы 3.5 Лазуткина. Здесь $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_ip_j$ — функция Гамильтона биллиардного потока на «склеенном» фазовом пространстве M^4. То есть, римановы метрики G и $\widetilde{G}$ являются гладкими лишь вне гиперповерхностей Γ^1 и Γ, а на этих гиперповерхностях имеют, вообще говоря, «излом».*

Доказательство. Рассмотрим случай евклидовой метрики $g = (dq^1)^2 + (dq^2)^2$ (в общем случае рассуждение аналогично). Предположим, что граница биллиардного стола — не прямая линия. Тогда она имеет ненулевую кривизну в некоторой точке $q_0 \in \partial\widehat{Q^2}$. Значит, граница биллиардного стола $(\widehat{Q^2}, g)$ либо строго вогнута, либо строго выпукла в некоторой окрестности $\widehat{U}$ точки q_0 в $\widehat{Q^2}$.

Шаг 1. Изучим свойства римановой метрики G на Q^3 в случае евклидовой метрики g на $\widehat{Q^2}$. Пусть q^1, q^2, φ — координаты на Q^3 из доказательства утверждения 4.8. Согласно этому утверждению $G = \widetilde{G}|_{Q^3} = (dq^1)^2 + (dq^2)^2 + d\varphi^2$. Поэтому геодезические на (Q^3, G) в координатах q^1, q^2, φ имеют вид $\gamma(t) = (q^1_* + at, q^2_* + bt, \varphi_* + ct)$, где $q^1_*, q^2_*, \varphi_*, a, b, c$ — вещественные константы.

В частности, проекция любой геодезической на конфигурационное риманово многообразие $(\widehat{Q^2}, g)$ является либо геодезической (т.е. прямолинейна), либо точкой, либо (в случае биллиарда) ломаной с вершинами на границе биллиардного стола.

Шаг 2. Пусть $n^*(q) \in T^*_q\widehat{Q^2}$ — единичный ковектор внешней нормали в точке $q \in \partial\widehat{Q^2}$.

Предположим, что риманова метрика G является гладкой в точке $(q_0, n^*(q_0)) \in \Gamma^1$. Тогда существует окрестность $U = U^3$ этой точки в Q^3 такая, что любые две точки $(q, p), (q', p') \in U$ можно соединить единственной геодезической $(q, p)(q', p')$ в (U, G). Выберем окрестность U столь малой, чтобы $\pi(U) \subset \widehat{U}$, где $\pi : M^4 \to \widehat{Q^2}$ — проекция.

Рассмотрим точку $q_1 \in \widehat{U} \cap \partial\widehat{Q^2}$, $q_1 \neq q_0$, столь близкую к точке q_0, что $(q_1, n^*(q_1)) \in U$. Согласно шагу 1, проекция геодезической $(q_0, n^*(q_0))(q_1, n^*(q_1))$ на биллиардный стол является ломаной в $\widehat{U}$ с вершинами на $\partial\widehat{Q^2}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: граница биллиардного стола строго вогнута в окрестности $\widehat{U}$ точки q_0. Тогда точки q_0 и q_1 нельзя соединить ломаной в $\widehat{U}$ с вершинами на $\partial\widehat{Q^2}$. Получили противоречие.

Случай 2: граница биллиардного стола строго выпукла в окрестности $\widehat{U}$ точки q_0. Тогда точки q_0 и q_1 можно соединить отрезком q_0q_1 в $\widehat{U}$. Над этим отрезком имеем геодезическую $(q_0, n^*(q_0))(q_1, n^*(q_1))$ в U, которая в координатах q^1, q^2, φ имеет вид $\gamma(t) = ((1-t)q_0^1 + tq_1^1, (1-t)q_0^2 + tq_1^2, (1-t)\varphi_0 + t\varphi_1)$, $0 \leq t \leq 1$.

Рассмотрим аналогичную геодезическую $(q_0, -n^*(q_0))(q_1, -n^*(q_1))$ вида $\tilde{\gamma}(t) = ((1-t)q_0^1 + tq_1^1, (1-t)q_0^2 + tq_1^2, \pi + (1-t)\varphi_0 + t\varphi_1)$. Ввиду закона отражения Гюйгенса, эти две геодезические имеют общие концы: $(q_0, n^*(q_0)) = (q_0, -n^*(q_0))$ и $(q_1, n^*(q_1)) = (q_1, -n^*(q_1))$. Но сами геодезические не имеют общих точек кроме своих концов. Итак, мы имеем две геодезические $(q_0, n^*(q_0))(q_1, n^*(q_1))$ и $(q_0, -n^*(q_0))(q_1, -n^*(q_1))$ в U с общими концами, что противоречит выбору U.

Полученное противоречие доказывает предложение 4.14. $\square$

5 Инварианты точных несжимаемых 3-мерных течений

Определение 5.1. Пусть Q^k — компактное k-мерное многообразие. *Топологическим инвариантом точных несжимаемых течений на* Q^k назовём вещественнозначный функционал $I = I(X, \mu)$ на множестве

$$\mathcal{B}(Q) = \{(X, \mu) \mid X|_{\partial Q} \text{ касательно } \partial Q,\ X \text{ не имеет нулей},\ \ 2\text{-форма } i_X\mu \text{ точна},\ \mu > 0\}$$

такой, что для любого диффеоморфизма $h : Q \to Q$, изотопного тождественному, выполнено $I(X, \mu) = I(h_*X, (h^{-1})^*\mu)$. Другими словами, значение инварианта на «распределенном зацеплении» (X, μ) не меняется при деформации «распределенного зацепления» (аналогично определению инвариантов обычных зацеплений в Q^k).

Замечание 5.2. Дадим другое определение топологического инварианта, эквивалентное определению 5.1. Пусть $I = I(X, \mu)$ — вещественнозначный функционал на множестве $\mathcal{B}(Q)$. Рассмотрим на множестве $\mathcal{B}(Q, \mu_0) := \{X \mid (X, \mu_0) \in \mathcal{B}(Q)\}$ функционал $I_0 = I_0(X) := I(X, \mu_0)$, где μ_0 — стандартная форма объёма на Q. Ясно, что если I является топологическим инвариантом, то для любого диффеоморфизма $h : Q \to Q$, изотопного тождественному и сохраняющего форму объёма μ_0, выполнено $I_0(X) = I_0(h_*X)$. Функционал $I_0 : \mathcal{B}(Q, \mu_0) \to \mathbb{R}$ с последним свойством назовем *топологическим инвариантом точных несжимаемых течений на* (Q, μ_0). Верно и обратное: любой функционал $I_0 = I_0(X)$ на

$\mathcal{B}(Q,\mu_0)$ продолжается единственным образом до функционала $I = I(X,\mu)$ на $\mathcal{B}(Q)$ со свойством $I(\frac{1}{c}X, c^2\mu) = c^2 I(X,\mu)$ для любого $c \neq 0$ (функционал I с последним свойством назовем *хорошо масштабированным*). Если I_0 — топологический инвариант, то и его «хорошо масштабированное продолжение» I тоже является топологическим инвариантом. Значит, два определения топологического инварианта фактически эквивалентны (по крайней мере для хорошо масштабированных функционалов). Все рассматриваемые ниже функционалы (спиральность, объём и остальные интегральные функционалы) кроме потока (7) являются хорошо масштабированными.

Пусть всюду далее $k = 3$. По теореме 2.16 множество $\mathcal{B}(Q)$ непусто, если $\partial Q = \varnothing$. В случае $\partial Q = T^2$ непустота этого множества следует из [5]. Пусть (X,μ) — точное несжимаемое течение на $Q = Q^3$, $\beta := i_X\mu = d\alpha$. Определим его спиральность и объём.

Определение 5.3. Определим *спиральность* $I_1(X,\mu) = \mathcal{H}(\beta) := \int\limits_Q \alpha\wedge d\alpha$ и *объём* $I_2(X,\mu) = \mathrm{Vol}(\mu) := \int\limits_Q \mu$. Здесь 1-форма α выбирается так, что $\beta := i_X\mu = d\alpha$ и (в случае $\partial Q \neq \varnothing$)

$$\oint\limits_\gamma \alpha = 0 \text{ для любой петли } \gamma \subset \partial Q \text{ класса гомологий } [\gamma] \in \varkappa, \tag{6}$$

где $\varkappa \subset H_1(\partial Q;\mathbb{Q})$, такое что $H_1(\partial Q;\mathbb{Q}) = \varkappa \oplus \mathrm{Ker}[j_* : H_1(\partial Q;\mathbb{Q}) \to H_1(Q;\mathbb{Q})]$, где $j : \partial Q \to Q$ — отображение включения [11].

Известно, что спиральность $\mathcal{H}(\beta)$ определена корректно, т.е. не зависит от выбора 1-формы α с указанными свойствами [11]. Спиральность и объём являются примерами топологических инвариантов точных несжимаемых течений на Q^3. Если край Q^3 непуст, то еще есть *поток* $I_3 : \mathcal{B}(Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_2(Q,\partial Q;\mathbb{Q})/\operatorname{Im}[p_* : H_2(Q;\mathbb{Q}) \to H_2(Q,\partial Q;\mathbb{Q})],\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^k$:

$$I_3(X,\mu) = \mathrm{Flux}(\beta), \qquad \mathrm{Flux}(\beta)[\Pi] := \int\limits_\Pi \beta = \oint\limits_{\partial\Pi} \alpha, \tag{7}$$

где $(\Pi = \Pi^2, \partial\Pi) \subset (Q,\partial Q)$, $H_2(Q,\partial Q;\mathbb{Q})/\operatorname{Im}[p_* : H_2(Q;\mathbb{Q}) \to H_2(Q,\partial Q;\mathbb{Q})] \cong \mathrm{Ker}[j_* : H_1(\partial Q;\mathbb{Q}) \to H_1(Q;\mathbb{Q})] \cong \mathbb{Q}^k$, а спиральность зависит от «калибровки» $\varkappa$ из (6) [11].

Согласно [11], любой «достаточно регулярный» топологический инвариант вида $I = I(i_X\mu)$ (т.е. зависящий лишь от 2-формы $\beta = i_X\mu$, но инвариантный относительно всех диффеоморфизмов Q^3, не обязательно сохраняющих объём) выражается через инвариант спиральности, т.е. имеет вид $I = f\circ\mathcal{H}$ для некоторой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В данной работе (в отличие от [11]) изучаются топологические инварианты, зависящие от пары (X,μ), или пары $(\beta = i_X\mu, \mu)$, а не только от β. Иными словами, мы изучаем топологические инварианты, зависящие лишь от точной 2-формы $\beta = i_X\mu_0$, и инвариантные только относительно диффеоморфизмов Q^3, сохраняющих 3-форму объёма μ_0.

5.1 Мотивировка определения инварианта. Первые интегралы уравнений магнитной гидродинамики (МГД)

В условиях определения 2.22 идеальное магнитное поле $b = b(\mathbf{x},t)$ в плазме (т.е. бесконечнопроводящей изотропной и однородной среде без дисперсии) с полем скоростей

$u = u(\mathbf{x}, t)$ на (Q^3, μ, G) описывается системой четырех уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД), где первые два уравнения — это уравнения (4) на поле скоростей u жидкости (плазмы) с «магнитным добавком» $[b \times \operatorname{curl} b]$ в правой части первого уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - [u \times \operatorname{curl} u] = -\operatorname{grad} P + [b \times \operatorname{curl} b], \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{8}$$

а третье и четвертое уравнения — это уравнения на магнитное поле b: условия «вмороженности магнитных линий» и «несжимаемости» магнитного поля:

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{curl}[u \times b] = 0, \\ \operatorname{div} b = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Третье уравнение можно записать в виде $\frac{\partial \beta}{\partial t} + L_u \beta = 0$ (т.е. 2-форма β переносится вместе со средой — «вморожена» в среду), где $i_b \mu = \beta$, а четвертое уравнение в виде $L_b \mu = 0$, т.е. $d\beta = 0$, что фактически сводит систему (9) к 4-му уравнению $\operatorname{div} b = 0$.

Если $I = I(X, \mu)$ — инвариант точных несжимаемых течений на Q^3, то для любого решения $(u(\mathbf{x}, t), b(\mathbf{x}, t))$ системы (8), (9) МГД с точным $b(\cdot, 0)$ величина $I(b(\cdot, t), \mu)$ не меняется со временем, и для любого решения $u(\mathbf{x}, t)$ системы (4) ГД с замкнутой 1-формой $\downarrow u(\cdot, 0)|_{\partial Q}$ (т.е. такого, что $\operatorname{curl} u(\cdot, 0)$ касается ∂Q) величина $I(\operatorname{curl} u(\cdot, t), \mu)$ тоже не меняется со временем. То есть, топологические инварианты дают первые интегралы как системы (8), (9) МГД, так и системы (4) ГД.

5.2 Описание интегральных функционалов 0-го порядка

Следующая теорема аналогична теореме D.Serre [2], 1984, и Е.А. Кудрявцевой [11], 2016.

Теорема 5.4. *Пусть Q^3 — компактное 3-мерное многообразие, и функционал $I : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ на множестве точных несжимаемых 3-мерных течений на Q^3 является интегральным, т.е. имеет вид $I(X, \mu) = \int_Q (F \circ f_\alpha)\mu$, где F — некоторая гладкая функция одной переменной, $f_\alpha := i_X \alpha$ ($\overset{\text{Лемма 1.18}}{\Leftrightarrow}$ $\alpha \wedge d\alpha = f_\alpha \mu$), α — 1-форма на Q со свойствами $d\alpha = i_X \mu$ и (6). Тогда этот функционал является линейной комбинацией инвариантов спиральности и объёма, т.е. $F(t) = c_1 t + c_2$, где c_i — константы. В частности, интегральные функционалы совпадают с интегральными инвариантами.*

Доказательство. Напомним, что $i_X \mu = d\alpha$ и $i_X \alpha =: f_\alpha$. Согласно лемме 2.3, $\alpha \wedge d\alpha = f_\alpha \mu$.

Предложение 5.5. *Для любого течения $(X, \mu) \in \mathcal{B}(Q)$ функция $F' \circ f_\alpha$ на Q^3 постоянна вдоль интегральных траекторий поля X, т.е. $(F'' \circ f_\alpha) i_X df_\alpha = 0$ на Q^3.*

Доказательство. Рассмотрим форму $\check{\alpha} = \alpha + df_1$, где f_1 — любая гладкая функция на Q^3.

Лемма 5.6. *$(i_X df_1)\mu = df_1 \wedge d\alpha = d(f_1 d\alpha)$.*

Доказательство. Посчитаем $f_{\check{\alpha}} = i_X \check{\alpha} = i_X(\alpha + df_1) = f_\alpha + i_X df_1$. С одной стороны,

$$f_{\check{\alpha}} \mu = \check{\alpha} \wedge d\check{\alpha} = (\alpha + df_1) \wedge d\alpha = f_\alpha \mu + df_1 \wedge d\alpha,$$

а с другой стороны
$$f_{\check\alpha}\mu = (f_\alpha + i_X df_1)\mu.$$
Отсюда и получаем, что $(i_X df_1)\mu = df_1 \wedge d\alpha = d(f_1 d\alpha)$. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство предложения 5.5. Посчитаем
$$\int\limits_{Q^3}(F\circ f_{\check\alpha})\mu = \int\limits_{Q^3}(F\circ(f_\alpha + i_X df_1))\mu = \int\limits_{Q^3}[F\circ f_\alpha + (F'\circ f_\alpha)i_X df_1 + \dots]\mu \overset{\text{Лемма 5.6}}{=}$$
$$\overset{\text{Лемма 5.6}}{=} \int\limits_{Q^3}(F\circ f_\alpha)\mu + \int\limits_{Q^3}(F'\circ f_\alpha)df_1\wedge d\alpha + \dots =$$
$$= \int\limits_{Q^3}(F\circ f_\alpha)\mu + \int\limits_{Q^3} d[(F'\circ f_\alpha)f_1 d\alpha] - \int\limits_{Q^3} f_1 d[(F'\circ f_\alpha)d\alpha] + \dots =$$
$$= \int\limits_{Q^3}(F\circ f_\alpha)\mu + \underbrace{\int\limits_{\partial Q^3}(F'\circ f_\alpha)f_1 d\alpha}_{0} - \int\limits_{Q^3} f_1 d[(F'\circ f_\alpha)d\alpha] + \dots \overset{d\alpha|_{\partial Q^3}=0}{=}$$
$$\overset{d\alpha|_{\partial Q^3}=0}{=} \int\limits_{Q^3}(F\circ f_\alpha)\mu - \int\limits_{Q^3} f_1 d[(F'\circ f_\alpha)d\alpha] + \dots,$$
где невыписанные слагаемые имеют более высокие порядки малости по степеням ε (считаем, что $f_1 = \varepsilon\bar f_1$, где $0 < \varepsilon \ll 1$).

С помощью дифференцирования по ε при $\varepsilon = 0$ и цепочки равенств получаем, ввиду независимости $I(X,\mu)$ от выбора α, соотношение
$$\int\limits_{Q^3}\bar f_1 d[(F'\circ f_\alpha)d\alpha] = 0. \tag{10}$$
В локальных координатах (x,y,z) на Q^3, из предложения 2.2 имеем $d\alpha = dx\wedge dy$, $X = \frac{\partial}{\partial z}$, $\mu = dx\wedge dy\wedge dz$, и в силу леммы 5.6 соотношение (10) выглядит так: $\int\limits_Q \bar f_1 \frac{\partial[(F'\circ f_\alpha)]}{\partial z}dx\wedge dy\wedge dz = 0$. Отсюда получаем (ввиду произвольности $\bar f_1$), что $\frac{\partial[(F'\circ f_\alpha)]}{\partial z} = 0$ в рассматриваемой координатной окрестности.

Таким образом (так как $X = \frac{\partial}{\partial z}$) предложение 5.5 доказано. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 5.4. Без ограничения общности будем считать, что $f_\alpha(w_0) \neq 0$ для некоторой точки $w_0 \in Q^3$ (иначе вместо α возьмем $\check\alpha = \alpha + df_1$ для подходящей функции f_1). Значит (см.ниже), $F''(t) = 0$ на $\mathcal{Q} := \{t\in\mathbb{R} \mid f_\alpha(w_0)t > 0\}$. Имеем $F'(t) = c_1$ на $\mathcal{Q}$. Решая полученное дифференциальное уравнение, получаем, что $F(t) = c_1 t + c_2$.

Осталось показать, что функция $F'(t)$ постоянна на $\mathcal{Q}$. Производная функции f_α вдоль X равна $i_X df_\alpha$. Если $f_2 > 0$ и (X,μ) — точное несжимаемое течение без нулей на Q^3, то $(\widehat X, \hat\mu) = (f_2 X, \frac{1}{f_2}\mu)$ — тоже точное несжимаемое течение без нулей, причем $i_{\widehat X}\hat\mu = i_X\mu = d\alpha$ и $\hat f_\alpha = i_{\widehat X}\alpha = f_2 i_X\alpha = f_2 f_\alpha$. Значит для любой точки $w_0 \in Q^3$, в которой $f_\alpha(w_0) \neq 0$, и любого

$t_0 \in \mathcal{Q}$, можно подобрать f_2 в окрестности точки w_0 так, что $\hat{f}_\alpha(w_0) = t_0$ и $i_X d\hat{f}_\alpha(w_0) \neq 0$, откуда $i_{\hat{X}} d\hat{f}_\alpha(w_0) \neq 0$, и по предложению 5.5 имеем $F''(t_0) = 0$. То есть, функция F действительно линейна на луче $\mathcal{Q}$. $\square$

5.3 Описание интегральных функционалов 1-го порядка

Пусть компактное 3-мерное многообразие Q содержится в $T^3 = (S^1)^3$ и зафиксированы координаты $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ на торе T^3.

Определение 5.7. Отображение $I = I^F : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ назовём интегральным функционалом порядка ≤ 1, если существует гладкая функция $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall (X, \mu_c = c\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \in \mathcal{B}(Q)$, где $c = \mathrm{const} > 0$, выполнено $I^F(X, \mu_c) = \int\limits_{Q^3} F(f(\mathbf{x}), f'_{x^1}(\mathbf{x}), f'_{x^2}(\mathbf{x}), f'_{x^3}(\mathbf{x}))\mu_c(\mathbf{x}) = \int\limits_{Q^3} F(f(\mathbf{x}), df(\mathbf{x}))\mu_c(\mathbf{x})$, где $f = f_\alpha := i_X\alpha \in C^\infty(Q^3)$ ($\Leftrightarrow \alpha \wedge d\alpha = f\mu_c$), α — 1-форма на Q со свойствами $i_X\mu_c = d\alpha$ и (6).

Следующий результат — аналог теоремы 5.4 для интегральных функционалов порядка ≤ 1.

Теорема 5.8. *Пусть $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие, и $I = I^F : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ — интегральный функционал порядка ≤ 1 на множестве точных несжимаемых течений на Q^3. Тогда этот функционал является линейной комбинацией инвариантов спиральности и объёма, т.е. $I(X, \mu) = c_1\mathcal{H}(i_X\mu) + c_2\mathrm{Vol}(\mu)$, причем $F(t, t_1, t_2, t_3) = c_1 t + c_2 + \sum\limits_{i=1}^{3} a_j(t)t_j$, где c_i — константы, $a = (a_1, a_2, a_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Если $\partial Q \neq \varnothing$, то $a(\mathbb{R}) \subseteq \{n(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \partial Q\}^\perp$, где $n(\mathbf{x})$ — вектор внешней нормали к Q в точке $\mathbf{x} \in \partial Q$. В частности, интегральные функционалы порядка ≤ 1 совпадают с интегральными инвариантами порядка ≤ 1.*

Доказательство. Обозначим $F'_j(t_0, t_1, t_2, t_3) := \frac{\partial}{\partial t_j} F(t_0, t_1, t_2, t_3)$, где $j = 0, 1, 2, 3$. Обозначим $(\cdot)_{x^j} := \frac{\partial}{\partial x^j}(\cdot)$, где $j = 1, 2, 3$.

Предложение 5.9. *Для любого несжимаемого течения $(X, \mu = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \in \mathcal{B}(Q)$ функция $F'_0(f, df) - \sum\limits_{j=1}^{3}(F'_j(f, df))_{x^j}$ постоянна вдоль интегральных траекторий векторного поля X, где $f := f_\alpha = i_X\alpha$.*

Доказательство. Напомним, что $\check{\alpha} = \alpha + df_1$, $f_1 = \varepsilon \bar{f}_1$, $f_{\check{\alpha}} = i_X\check{\alpha} = i_X(\alpha + df_1) = f_\alpha + i_X df_1$. Имеем

$$\int\limits_{Q^3} F(f, df)\mu \overset{I \text{ корректно определен}}{=} \int\limits_{Q} F(f + i_X df_1, d(f + i_X df_1))\mu =$$

$$= \int\limits_{Q} F(f + i_X df_1, \{f_{x^j} + (i_X df_1)_{x^j}\}_{j=1}^3)\mu =$$

$$= \int\limits_{Q} [F(f, df) + F'_0(f, df) i_X df_1 + \sum_{j=1}^{3} F'_j(f, df)(i_X df_1)_{x^j} + \dots]\mu \overset{\text{Лемма 5.6}}{=}$$

$$\overset{\text{Лемма 5.6}}{=} \int\limits_Q F(f,df)\mu + \int\limits_Q F_0'(f,df)d(f_1 d\alpha) + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_Q F_j'(f,df)(i_X df_1)_{x^j}\mu + \dots . \tag{11}$$

Вычислим третье слагаемое в последней сумме. Для этого посчитаем $\mu(i_X df_1)_{x^j} = [i_{[X_{x^j}]}df_1 + i_X d((f_1)_{x^j})]\mu \overset{\text{Лемма 5.6}}{=} -(i_X df_1)\mu_{x^j} + d((f_1)_{x^j}) \wedge d\alpha + df_1 \wedge d(\alpha_{x^j})$. Действительно, продифференцировав равенство из леммы 5.6

$$(i_X df_1)\mu = df_1 \wedge d\alpha$$

по переменной x^j, получаем, что

$$(i_{[X_{x^j}]}df_1)\mu + (i_X d((f_1)_{x^j}))\mu + (i_X df_1)\mu_{x^j} = d((f_1)_{x^j}) \wedge d\alpha + df_1 \wedge d(\alpha_{x^j}).$$

Таким образом, третье слагаемое равно

$$\sum_{j=1}^{3}\int\limits_Q F_j'(f,df)(i_X df_1)_{x^j}\mu = \sum_{j=1}^{3}\int\limits_Q F_j'(f,df)[-(i_X df_1)\mu_{x^j} + d((f_1)_{x^j}) \wedge d\alpha + df_1 \wedge d(\alpha_{x^j})] \overset{\mu_{x^j}=0}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int\limits_Q d[F_j'(f,df)((f_1)_{x^j}d\alpha + f_1 d(\alpha_{x^j}))] - \int\limits_Q ((f_1)_{x^j})d[F_j'(f,df)d\alpha] - \int\limits_Q f_1 d[F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})] =$$

$$\overset{\text{Теор. Стокса, } d\alpha|_{\partial Q^3}=0}{=} \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\partial Q^3} f_1 F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j}) - \int\limits_{Q^3} (f_1)_{x^j}d[F_j'(f,df)d\alpha] - \int\limits_{Q^3} f_1 d[F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})].$$

Вернёмся к цепочке равенств (11):

$$\int\limits_{Q^3} F(f,df)\mu \overset{(11)}{=} \int\limits_Q F(f,df)\mu + \int\limits_Q F_0'(f,df)d(f_1 d\alpha) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\partial Q^3} f_1 F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j}) - \int\limits_{Q^3} (f_1)_{x^j}d[F_j'(f,df)d\alpha] - \int\limits_{Q^3} f_1 d[F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})] + \dots .$$

Из последнего равенства с помощью дифференцирования по ε при $\varepsilon = 0$, где $f_1 = \varepsilon \bar{f}_1$, получим

$$0 = \int\limits_{Q^3} \underbrace{F_0'(f,df)d(\bar{f}_1 d\alpha)}_{d[\bar{f}_1 F_0'(f,df)d\alpha] - \bar{f}_1 d[F_0'(f,df)d\alpha]} + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\partial Q^3} \bar{f}_1 F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{Q^3} (\bar{f}_1)_{x^j}d[F_j'(f,df)d\alpha] - \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{Q^3} \bar{f}_1 d[F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})] \overset{\text{Теор. Стокса, } d\alpha|_{\partial Q^3}\,=\,0}{=}$$

$$\overset{\text{Теор. Стокса, } d\alpha|_{\partial Q^3}\,=\,0}{=} - \int\limits_{Q^3} \bar{f}_1 d[F_0'(f,df)d\alpha + \sum_{j=1} F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})] -$$

$$- \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{Q^3} (\bar{f}_1)_{x^j} d[\underbrace{F_j'(f,df)}_{:=g_j} d\alpha] + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\partial Q^3} \bar{f}_1 F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j}) \overset{\text{Лемма 5.10}}{=}$$

$$\overset{\text{Лемма 5.10}}{=} -\int\limits_{Q^3} \bar f_1 \Big[d[F_0'(f,df)d\alpha + \sum_{j=1}^{3} F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})] - \sum_{j=1}^{3} [i_X d(F_j'(f,df))]_{x^j}\mu \Big] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\partial Q^3} \bar f_1 [F_j'(f,df)d\alpha_{x^j} - i_X d(F_j'(f,df)) dx^{j+1}\wedge dx^{j+2}].$$

Здесь и далее мы обозначаем $x_{j+3} := x_j$ при любом $j = 1,2,3$.

В последней цепочке равенств мы использовали следующую лемму.

Лемма 5.10. *Если* $j \in \{1,2,3\}$ *и* $g_j := F_j'(f,df)$, *то*

$$\int\limits_{Q^3} (\bar f_1)_{x^j} d(g_j d\alpha) = \int\limits_{\partial Q^3} \bar f_1 [i_X d(F_j'(f,df))] dx^{j+1}\wedge dx^{j+2} - \int\limits_{Q^3} \bar f_1 [i_X d(F_j'(f,df))]_{x^j}\mu.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde g_j := i_X dg_j$. Имеем

$$\int\limits_{Q^3} (\bar f_1)_{x^j} d(g_j d\alpha) \overset{\text{Лемма 5.6}}{=} \int\limits_{Q^3} (\bar f_1)_{x^j}\tilde g_j \mu = \int\limits_{Q^3} (\bar f_1 \tilde g_j)_{x^j}\mu - \int\limits_{Q^3} \bar f_1 (\tilde g_j)_{x^j}\mu \overset{\text{Теор. Стокса}}{=}$$

$$\overset{\text{Теор. Стокса}}{=} \iint\limits_{\partial Q^3} \bar f_1 \tilde g_j dx^{j+1}\wedge dx^{j+2} - \int\limits_{Q^3} \bar f_1 (\tilde g_j)_{x^j}\mu =$$

$$= \int\limits_{\partial Q^3} \bar f_1 [i_X d(F_j'(f,df))] dx^{j+1}\wedge dx^{j+2} - \int\limits_{Q^3} \bar f_1 [i_X d(F_j'(f,df))]_{x^j}\mu.$$

Лемма доказана. □

Вернёмся к доказательству предложения 5.9. Так как равенство, полученное перед леммой 5.10, выполнено $\forall \bar f_1 \in C^\infty(Q^3)$, в частности для $\bar f_1 = \delta(w - w_0)$, $w_0 \in Q^3$, то

$$\begin{cases} d[F_0'(f,df)d\alpha + \sum\limits_{j=1}^{3} F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j})] - \sum\limits_{j=1}^{3}[i_X d(F_j'(f,df))]_{x^j}\mu = 0 \quad \text{на } Q^3; & \text{(a)} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} F_j'(f,df)d(\alpha_{x^j}) - [i_X d(F_j'(f,df))] dx^{j+1}\wedge dx^{j+2} = 0 \quad \text{на } \partial Q^3. & \text{(b)} \end{cases} \tag{12}$$

Условие (12.a) равносильно тому, что $\frac{[dF_0'(f,df)]\wedge d\alpha}{\mu} - \sum\limits_{j=1}^{3}[i_X d(F_j'(f,df))]_{x^j} = -\sum\limits_{j=1}^{3} \frac{d(F_j'(f,df))\wedge d(\alpha_{x^j})}{\mu}$, где второе слагаемое в левой части можно заменить, используя правило Лейбница и лемму 5.6, на $-\sum\limits_{j=1}^{3}[i_X d(F_j'(f,df))]_{x^j} \overset{\text{Лемма 5.6}}{=} -[\frac{d(F_j'(f,df))\wedge d\alpha}{\mu}]_{x^j} = -\frac{d[F_j'(f,df)]_{x^j}\wedge d\alpha}{\mu} - \frac{d(F_j'(f,df))\wedge d(\alpha_{x^j})}{\mu}$.

Используя это, получим $[dF_0'(f,df)]\wedge d\alpha = \sum\limits_{j=1}^{3} d[F_j'(f,df)]_{x^j}\wedge d\alpha$. А это равносильно тому, что $d[F_0'(f,df) - \sum\limits_{j=1}^{3}(F_j'(f,df))_{x^j}]\wedge d\alpha = 0$ на Q^3. В свою очередь, по лемме 5.6, получаем требуемое $i_X d[F_0'(f,df) - \sum\limits_{j=1}^{3}(F_j'(f,df))_{x^j}] = 0$. Предложение 5.9 доказано. □

Вернёмся к доказательству теоремы 5.8.

Шаг 1. Из предложения 5.9 следует, что константа из этого предложения равна $F'_0(t_0,0,0,0) = F'_0(0,0,0,0) =: c_1$ для любого $t_0 \in \mathbb{R}$. В частности, эта константа постоянна на всем Q, и не зависит от выбора траектории. Действительно: на траектории, проходящей через данную точку $w_0 \in Q$, можно выбрать другую точку и взять ее малую окрестность U, замыкание которой не содержит точку w_0, и в этой окрестности поменять f на тождественную константу t_0 путем изменения α на $\breve{\alpha} = \alpha + df_1$ в немного большей окрестности. Тогда изучаемая константа не изменится, так как в окрестности точки w_0 мы не меняли α. Но в то же время она станет равной $F'_0(t_0,0,0,0)$, так как данная траектория проходит через окрестность U, в которой $f_{\breve{\alpha}}|_U \equiv t_0$.

Из предложения 5.9 и специального вида константы c_1 в нем (см. выше) получаем равенство

$$F'_0(f(\mathbf{x}),f'_1(\mathbf{x}),f'_2(\mathbf{x}),f'_3(\mathbf{x})) - \sum_{j=1}^{3} F''_{j0}(f(\mathbf{x}),f'_1(\mathbf{x}),f'_2(\mathbf{x}),f'_3(\mathbf{x}))f'_j(\mathbf{x}) +$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{3} F''_{jk}(f(\mathbf{x}),f'_1(\mathbf{x}),f'_2(\mathbf{x}),f'_3(\mathbf{x}))f''_{jk}(\mathbf{x}) = c_1 \qquad \forall \mathbf{x} \in Q^3. \tag{13}$$

Шаг 2. Фиксируем точку $w_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in Q$ и любые константы $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Пусть U — малая окрестность точки w_0 в Q. Заменяя α на $\breve{\alpha} = \alpha + df_1$, можно добиться того, чтобы функция $f_{\breve{\alpha}}|_U$ являлась многочленом степени 2 с заданной линейной частью, точнее $f_{\breve{\alpha}}|_U = t_0 + \sum t_j(x^j - x_0^j) + \sum t_{jk}(x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k)$. Подставив эту функцию в равенство (13) в точке $\mathbf{x} = w_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, получим

$$F'_0(t_0,t_1,t_2,t_3) - \sum_{j=1}^{3} F''_{j0}(t_0,t_1,t_2,t_3)t_j + \sum_{j,k=1}^{3} F''_{jk}(t_0,t_1,t_2,t_3)t_{jk} = c_1. \tag{14}$$

Так как равенство (14) верно для любых t_{jk} (при фиксированных t_0, t_1, t_2, t_3), то $F''_{jk}(t_0,t_1,t_2,t_3) = 0$ при всех $j,k = 1,2,3$. Так как t_0, t_1, t_2, t_3 любые, то

$$F''_{jk} = 0 \qquad \text{всюду при всех} \quad j,k = 1,2,3. \tag{15}$$

Значит, равенство (14) переписывается в виде

$$F'_0(t_0,t_1,t_2,t_3) - \sum_{j=1}^{3} F''_{j0}(t_0,t_1,t_2,t_3)t_j = c_1. \tag{16}$$

Шаг 3. Фиксируем t_0 и рассмотрим функцию $G(t_1,t_2,t_3) := F'_0(t_0,t_1,t_2,t_3)$. В силу (16) имеем $G(t_1,t_2,t_3) = \sum\limits_{j=1}^{3} G'_j(t_1,t_2,t_3)t_j + c_1$, где c_1 — константа. Отсюда нетрудно выводится, что $G(t_1,t_2,t_3) = c_1 + \sum\limits_{j=1}^{3} b_j t_j$ для некоторых констант b_j.

Значит, $F_0'(t_0,t_1,t_2,t_3) = c_1 + \sum\limits_{j=1}^{3} b_j(t_0)t_j$ для некоторых функций $b_j = b_j(t_0)$. Отсюда получаем $F(t_0,t_1,t_2,t_3) = c_1t_0 + \sum\limits_{j=1}^{3} \tilde a_j(t_0)t_j + g(t_1,t_2,t_3)$ для некоторой функции $g = g(t_1,t_2,t_3)$, где $\tilde a_j(t_0) := \int\limits_0^{t_0} b_j(t)dt$. Ввиду тождества (15) получаем, что $g''_{jk}(t_1,t_2,t_3) = 0$, откуда функция $g(t_1,t_2,t_3) - g(0,0,0)$ линейна. Следовательно,

$$F(t_0,t_1,t_2,t_3) = c_1t_0 + c_2 + \sum_{j=1}^{3} a_j(t_0)t_j =: c_1t_0 + c_2 + F_1(t_0,t_1,t_2,t_3) \tag{17}$$

для некоторых функций $a_j = a_j(t_0)$ и констант c_i.

Проверим, что любая функция F вида (17) удовлетворяет равенству (13), т.е. условию из предложения 5.5. Действительно: $F_0'(t_0,t_1,t_2,t_3) = c_1 + \sum\limits_{j=1}^{3} a_j'(t_0)t_j$, $F''_{j0}(t_0,t_1,t_2,t_3)t_j = \sum\limits_{j=1}^{3} a_j'(t_0)t_j$, $F''_{jk} = 0$ при всех $j,k = 1,2,3$, откуда получаем (13), что и требовалось.

Шаг 4. Мы показали на шагах 1–3, что функция F удовлетворяет условию (12.a) тогда и только тогда, когда она имеет вид (17). Поэтому $I(X,\mu) = c_1\mathcal{H}(i_X\mu) + c_2\mathrm{Vol}(\mu) + I_1(X,\mu)$, где

$$I_1(X,\mu) = \int\limits_Q \sum_{j=1}^{3} a_j(f(\mathbf{x}))f_j'(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) \overset{\text{Теор. Стокса}}{=}$$

$$\overset{\text{Теор. Стокса}}{=} \int\limits_{\partial Q} \sum_{j=1}^{3} A_j(f(\mathbf{x}))dx^{j+1}\wedge dx^{j+2} = \int\limits_{\partial Q} \langle A(f(\mathbf{x})), n(\mathbf{x})\rangle d\sigma. \tag{18}$$

Здесь $n(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали в точке $\mathbf{x}\in\partial Q$; $d\sigma$ — ориентированная форма площади на ∂Q; $A_j(t_0) := \int\limits_0^{t_0} a_j(t)dt$.

Если $\partial Q = \varnothing$, то $I_1(X,\mu) = 0$ в (18), и всё доказано.

Предположим, что $\partial Q \ne \varnothing$. Исследуем, когда функция F вида (17) удовлетворяет граничному условию (12.b).

Для функции F вида (17) граничное условие (12.b) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{3} a_j(f(\mathbf{x}))\beta_{x^j} - (i_X df(\mathbf{x}))\sum_{j=1}^{3} a_j'(f(\mathbf{x}))dx^{j+1}\wedge dx^{j+2} = 0 \text{ для любой точки } \mathbf{x}\in\partial Q. \tag{19}$$

Фиксируем точку $w_0 \in \partial Q$ и любое число $t_0\in\mathbb{R}$. Пусть U — малая окрестность этой точки в Q. Заменяя α на $\check\alpha = \alpha + df_1$, можно добиться того, чтобы функция $f_{\check\alpha}|_U \equiv t_0$, а потому $i_X df_{\check\alpha}|_U = 0$, т.е. чтобы второе слагаемое из (19) занулилось в U.

Поэтому из граничного условия (12.b) следует, что $\sum\limits_{j=1}^{3} a_j(t_0)\beta_{x^j} = 0$ для любой точки $\mathbf{x}\in\partial Q$ и любого течения $(X, \mu = dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) \in \mathcal{B}(Q)$. Отсюда нетрудно вывести, что граничное условие (12.b) равносильно следующему условию:

$$a(t_0) = (a_1(t_0), a_2(t_0), a_3(t_0)) \in \{n(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in\partial Q\}^{\perp}, \qquad t_0\in\mathbb{R}, \tag{20}$$

т.е. вектор $a(t_0)$ должен быть ортогонален вектору нормали $n(\mathbf{x})$ в любой точке $\mathbf{x} \in \partial Q$. Действительно: если $\langle a(t_0), n(\mathbf{x}_0)\rangle \neq 0$ для некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in \partial Q$, то явно строится замкнутая 2-форма $\beta \neq 0$ в малой окрестности U точки $\mathbf{x}_0$ в Q такая, что $\beta|_{U\cap\partial Q} = 0$, а производная 2-формы β вдоль вектора $a(t_0)$ отлична от нуля, т.е. $\sum\limits_{j=1}^{3} a_j(t_0)\beta_{x^j} \neq 0$.

Возможны 2 случая.

Случай 1: векторы нормали $n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial Q$, не компланарны, т.е. не содержатся ни в какой двумерной плоскости, проходящей через начало координат. Тогда граничное условие (20) означает, что $a(t_0) = (a_1(t_0), a_2(t_0), a_3(t_0)) = (0,0,0)$, и $F(t_0,t_1,t_2,t_3) = c_1t_0 + c_2$.

Случай 2: векторы нормали $n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial Q$, компланарны. Тогда ортогональное дополнение к системе этих векторов (из граничного условия (20)) одномерно или двумерно.

Итак, в первом случае функция F и функционал $I = I(X,\mu)$ имеют требуемый вид. А во втором случае возникают «добавки», а именно: «добавочная» функция $F_1(t_0,t_1,t_2,t_3) = \sum\limits_{j=1}^{3} a_j(t_0)t_j$ и соответствующий «добавочный» функционал (18) вида

$$I_1(X,\mu) \overset{(18)}{=} \int\limits_{\partial Q} \langle A(f(\mathbf{x})), n(\mathbf{x})\rangle d\sigma = \int\limits_{\partial Q} \int\limits_{0}^{t_0} \langle a(f(\mathbf{x})), n(\mathbf{x})\rangle dt\, d\sigma \overset{(20)}{=} 0.$$

Итак, «добавочный» функционал $I_1(X,\mu)$ равен нулю, т.е. функционал $I = I(X,\mu)$ имеет требуемый вид — линейная комбинация спиральности и объёма. Теорема 5.8 доказана. $\square$

5.4 Интегральные функционалы высших порядков

Пусть компактное 3-мерное многообразие Q содержится в $T^3 = (S^1)^3$ и зафиксированы координаты $\mathbf{x} = (x^1,x^2,x^3)$ на торе T^3.

Определение 5.11. Функционал $I = I^F : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ назовём *интегральным функционалом порядка* $\leq n$ точных несжимаемых течений на $Q = Q^3$, если существует гладкая функция $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ такая, что $N = \sum\limits_{s=0}^{n} C^2_{s+2}$ и $\forall (X, \mu_c = c\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) \in \mathcal{B}(Q)$, где $c = \mathrm{const} > 0$, выполнено

$$I^F(X,\mu_c) = \int\limits_{Q^3} F(f(\mathbf{x}), df(\mathbf{x}), d^2f(\mathbf{x}), \ldots, d^nf(\mathbf{x}))\mu_c(\mathbf{x}),$$

где $f = f_\alpha := i_X\alpha \in C^\infty(Q^3)$ ($\Leftrightarrow \alpha\wedge d\alpha = f\mu_c$), α — 1-форма на Q со свойствами $i_X\mu_c = d\alpha$ и (6). Если функция F является однородным многочленом степени ℓ, то функционал I^F назовем *однородным интегральным функционалом степени однородности* ℓ.

Теорема 5.12. *Пусть $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие, и пусть n — натуральное число. Пусть $I = I(X,\mu)$ — интегральный функционал порядка $\leq n$ на множестве $\mathcal{B}(Q)$ точных несжимаемых течений на Q^3. Предположим, что 1-параметрическое семейство диффеоморфизмов $h_t : Q \to Q$, $t \in [0,1]$, удовлетворяет* *условиям* $h_t^*\mu_1 = \mu_1$ *и* $\int\limits_\Pi i_{dh_t/dt}\mu_1 = 0$ *для любой 2-мерной поверхности* $\Pi \subset Q$ *с краем* $\partial\Pi \subset \partial Q$ *(т.е.* $i_{dh_t/dt}\mu_1 \in \mathrm{Ker(Flux)}$, *см. (7)) при любом* $t \in [0,1]$, *где* $\mu_1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. *Тогда* $I((h_0^{-1})_*X, \mu_1) = I((h_1^{-1})_*X, \mu_1)$ *для любого точного несжимаемого течения* $(X, \mu_1) \in \mathcal{B}(Q)$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{B}(Q,\mu)$ — векторное поле без нулей, бездивергентное относительно формы объёма $\mu = \mu_1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ на $Q = Q^3$. Покроем Q конечным набором карт U_j, в каждой из которых (X,μ) имеет канонический вид $(\frac{\partial}{\partial z}, dx \wedge dy \wedge dz)$ по предложению 2.2. Пусть $\{f_j\}_{j=1}^m$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию Q этими картами, такое что $\overline{\{\mathbf{x} \in Q \mid f_j(\mathbf{x}) > 0\}} \subset U_j$ для любого j (такое разбиение единицы всегда существует).

Обозначим через $\mathrm{SDiff}(Q,\mu)$ группу диффеоморфизмов Q, сохраняющих форму объёма μ. Если $U \subset Q$ — открытое подмножество, обозначим через $\mathrm{SDiff}(\overline{U},\mu)$ подгруппу в $\mathrm{SDiff}(Q,\mu)$, состоящую из диффеоморфизмов с носителем в $\overline{U}$. Обозначим через $\mathrm{SDiff}^0(\overline{U},\mu)$ компоненту связности единицы в группе $\mathrm{SDiff}(\overline{U},\mu)$.

Лемма 5.13. *Пусть* $(X,\mu) \in \mathcal{B}(Q)$, *и пусть* $\{U_j\}_{j=1}^m$ *— соответствующий атлас на* Q. *Пусть задан любой диффеоморфизм* $h \in \mathrm{SDiff}^0(\overline{U_j},\mu) \subset \mathrm{SDiff}^0(Q,\mu)$ *с носителем в карте* $\overline{U_j}$, *где* $j \in \{1,\dots,m\}$. *Тогда для любого интегрального функционала* $I : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ *порядка* $\le n$ *выполнено* $I(X,\mu) = I((h^{-1})_*X,\mu)$.

Доказательство. По условию функционал I однозначен, т.е. его значение на паре $(X, \mu = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \in \mathcal{B}(Q)$ не зависит от выбора 1-формы α со свойствами $d\alpha = \beta$ и (6). Заменим α на $\alpha + df_1$, где f_1 подберем ниже, тогда $f = f_\alpha$ заменится на $f + i_X df_1$. Легко подобрать f_1 так, чтобы «добавок» $i_X df_1$ был равен любой наперед заданной функции в данной карте $U := U_j$ (это следует из того, что пара (X,μ) имеет специальный вид в карте U). Поэтому получим, что f заменится на 0 в U.

Так как $h \in \mathrm{SDiff}^0(\overline{U},\mu) \subset \mathrm{SDiff}^0(Q,\mu)$, то его можно соединить с тождественным диффеоморфизмом некоторым путем $h_t \in \mathrm{SDiff}(\overline{U},\mu) \subset \mathrm{SDiff}(Q,\mu)$, $t \in [0,1]$, где $h_0 = \mathrm{id}_Q$, $h_1 = h$. Из тождеств $f \equiv 0$ на U и $h_t = \mathrm{id}$ вне U получаем

$$\frac{d}{dt} I((h_{-t})_*X,\mu) = \frac{d}{dt} I((h_{-t})_*X, h_t^*\mu) =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_Q F(h_t^*f, d(h_t^*f),\dots,d^n(h_t^*f))\mu = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_U + \int\limits_{Q\setminus U}\right) F(h_t^*f, d(h_t^*f),\dots,d^n(h_t^*f))\mu =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int\limits_U F(0,\dots,0)\mu + \int\limits_{Q\setminus U} F(f, df,\dots,d^n f)\mu\right) = 0.$$

Итак, функция $t \mapsto I((h_{-t})_*X,\mu)$ постоянна на $[0,1]$, откуда получаем требуемое равенство. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 5.12. Пусть задано 1-параметрическое семейство диффеоморфизмов $h_t : Q \to Q$ как в условии теоремы 5.12, причем $h_0 = \mathrm{id}_Q$. Определим 1-параметрическое семейство μ-бездивергентных векторных полей V_t на Q условием

$$V_t(h_t(\mathbf{x})) = \frac{d}{dt}h_t(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in Q, \quad t \in [0,1].$$

Так как каждая 2-форма $i_{V_t}\mu$ точна (поскольку ее поток через любую замкнутую поверхность в Q равен нулю, так как она принадлежит $\mathrm{Ker(Flux)}$), то $i_{V_t}\mu = d\alpha_t$ и (6) для некоторого 1-параметрического семейства 1-форм α_t на Q. Так как поток 2-формы $i_{V_t}\mu$ через любую (а не только через любую замкнутую) поверхность $\Pi \subset Q$ с краем $\partial\Pi \subset \partial Q$ равен нулю (ввиду принадлежности $i_{V_t}\mu \in \mathrm{Ker(Flux)}$), то с учетом (6) 1-форма $\alpha_t|_{\partial Q}$ точна, т.е. $(\alpha_t + df_{1,t})|_{\partial Q} = 0$ для некоторого 1-параметрического семейства функций $f_{1,t}$ на Q. «Подправим» 1-форму α_t, заменив ее на $\check\alpha_t := \alpha_t + df_{1,t}$; тогда $i_{V_t}\mu = d\check\alpha_t$ и $\check\alpha_t|_{\partial Q} = 0$.

Определим 1-параметрическое семейство (бездивергентных относительно формы объёма μ) векторных полей $V_{j,t}$ условием $i_{V_{j,t}}\mu = d(f_j\check\alpha_t)$, где f_j — функции из разбиения единицы, откуда $V_t = \sum\limits_{j=1}^{m} V_{j,t}$ и $V_{j,t}|_{Q\setminus U'_j} = 0$. Эти векторные поля касаются ∂Q, так как $f_j\check\alpha_t|_{\partial Q} = 0$ (ввиду $\check\alpha_t|_{\partial Q} = 0$). Поэтому Q инвариантно относительно потока каждого из этих полей, т.е. потоки этих полей определяют диффеоморфизмы Q в себя, сохраняющие форму объёма μ.

Напомним, что число карт равно m. Определим $(m+1)$-параметрическое семейство диффеоморфизмов $h_{t,t_1,\dots,t_m} : Q \to Q$ условиями

$$h_{0,t_1,\dots,t_m} = h_0 = \mathrm{id}_Q, \quad \sum_{j=1}^{m} t_j V_{j,t}(h_{t,t_1,\dots,t_m}(\mathbf{x})) = \frac{d}{dt}h_{t,t_1,\dots,t_m}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in Q, \quad t, t_1, \dots, t_m \in [0,1].$$

Эти диффеоморфизмы сохраняют Q и форму объёма μ, так как поля $V_{j,t}$ касаются ∂Q и бездивергентны относительно формы объёма μ. Положим

$$J(t, t_1, \dots, t_m) := I((h^{-1}_{t,t_1,\dots,t_m})_* X, \mu).$$

Заметим, что диффеоморфизм $h_{t,t_1,\dots,t_m}$ близок к $h_{0,t_1,\dots,t_m} = h_0 = \mathrm{id}_Q$ при любых $t_1, \dots, t_m \in [0,1]$ и любом $t \in [0,\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Выберем чуть меньшую карту $U'_j \subset U_j$ такую, что $\overline{\{\mathbf{x} \in Q \mid f_j(\mathbf{x}) > 0\}} \subset U'_j$ и $\overline{U'_j} \subset U_j$. Так как по лемме 5.13 функционал $I|_{\mathcal{B}(Q,\mu)}$ постоянен на орбите (близкого к векторному полю $(h_0^{-1})_* X = X$) векторного поля $(h^{-1}_{t,t_1,\dots,t_m})_* X$ относительно действия группы $\mathrm{SDiff}^0(\overline{U'_j}, \mu) \subset \mathrm{SDiff}^0(Q, \mu)$, то

$$\frac{\partial}{\partial t_j} J(t, t_1, \dots, t_m) = 0 \quad \text{при всех} \quad t_1, \dots, t_m \in [0,1], \quad t \in [0,\varepsilon], \quad j = 1, \dots, m,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Значит, $\partial J(t, t_1, \dots, t_1)/\partial t_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j} J(t, t_1, \dots, t_1) = \sum\limits_{j=1}^{m} 0 = 0$ при любых $t_1 \in [0,1]$ и $t \in [0,\varepsilon]$. Поэтому $J(t, 1, \dots, 1) = J(t, 0, \dots, 0) = J(0, 0, \dots, 0) = I((h_0^{-1})_* X, \mu) = I(X, \mu)$ для любого $t \in [0,\varepsilon]$.

Но $h_{t,1,\dots,1} = h_t$, так как $V_t = \sum\limits_{j=1}^{m} V_{j,t}$. Поэтому равенство $J(t,1,\dots,1) = I(X,\mu)$, доказанное выше при любом $t \in [0,\varepsilon]$, переписывается в виде $I((h_t^{-1})_*X,\mu) = I(X,\mu)$.

Итак, мы доказали равенство $I((h_t^{-1})_*X,\mu) = I((h_0^{-1})_*X,\mu)$ при любом $t \in [0,\varepsilon]$ в случае $h_0 = \mathrm{id}_Q$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Отсюда следует, что это равенство выполнено и без предположения $h_0 = \mathrm{id}_Q$. Отсюда также получаем, что в условиях теоремы выполнено равенство $I((h_t^{-1})_*X,\mu) = I((h_{t_0}^{-1})_*X,\mu)$ при любых $t_0, t \in [0,1]$ таких, что $|t-t_0| \ll 1$. Иными словами, функция $t \mapsto I((h_t^{-1})_*X,\mu)$ локально постоянна на $[0,1]$, а значит постоянна.

Теорема 5.12 доказана. $\square$

5.5 Однородные интегральные инварианты. Открытые проблемы

Пусть, как выше, $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие.

Лемма 5.14. *Пусть $I = I(X,\mu)$ — топологический инвариант на $\mathcal{B}(Q)$. Тогда для любого $a > 0$ функционал $I_a = I_a(X,\mu) := I(aX,\mu)$ на $\mathcal{B}(Q)$ тоже является топологическим инвариантом. В частности, функционалы $\frac{d^\ell}{da^\ell}|_{a=0} I_a(X,\mu)$ тоже являются топологическими инвариантами на $\mathcal{B}(Q)$ (если указанные производные существуют), $\ell \geq 0$.*

Доказательство. Обозначим $Y := aX$. Принадлежность $(X,\mu) \in \mathcal{B}(Q)$ означает, что $X \neq 0$, X касается ∂Q и $i_X\mu = d\alpha$. Отсюда $Y \neq 0$, Y касается ∂Q и $i_Y\mu = d(a\alpha)$, т.е. $(Y,\mu) \in \mathcal{B}(Q)$.

Так как I — топологический инвариант на $\mathcal{B}(Q)$, то для любого диффеоморфизма $h : Q \to Q$, изотопного тождественному, выполнено $I(Y,\mu) = I(h_*^{-1}Y, h^*\mu)$. Так как $h_*^{-1}Y = h_*^{-1}(aX) = ah_*^{-1}X$, то $I_a(X,\mu) = I(aX,\mu) = I(Y,\mu) = I(h_*^{-1}Y, h^*\mu) = I(ah_*^{-1}X, h^*\mu) = I_a(h_*^{-1}X, h^*\mu)$, т.е. I_a тоже является топологическим инвариантом на $\mathcal{B}(Q)$. $\square$

Предложение 5.15. *Пусть $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие, и пусть n — натуральное число. Пусть $I = I^F : \mathcal{B}(Q) \to \mathbb{R}$ — интегральный топологический инвариант порядка $\leq n$ на множестве точных несжимаемых течений на Q. Пусть ряд Тейлора функции F в $(0,\dots,0)$ равен $\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} F_{(\ell)}$, где $F_{(\ell)} = F_{(\ell)}(t_1,\dots,t_N)$ — однородный многочлен степени ℓ. Тогда каждый однородный интегральный функционал $I^{F_{(\ell)}}$ на $\mathcal{B}(Q)$ тоже является топологическим инвариантом порядка $\leq n$, степени однородности ℓ.*

Доказательство. Для любой положительной константы $a \in \mathbb{R}$ рассмотрим отображение множества $\mathcal{B}(Q)$ в себя, переводящее $(X,\mu) \mapsto (aX,\mu)$. Тогда у полученного несжимаемого течения $(aX,\mu_1) \in \mathcal{B}(Q)$ в качестве 1-формы α, функции f и 3-формы $F(f,df,\dots,d^nf)\mu_1$ получим 1-форму $a\alpha$, функцию a^2f и 3-форму $F(a^2f, a^2df,\dots,a^2d^nf)\mu_1$.

Ряд Тейлора этой 3-формы по a в 0 равен $\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} a^{2\ell} F_{(\ell)}(f,df,\dots,d^nf)\mu_1$. Значит, функционал $I^{F_{(\ell)}}(X,\mu)$ равен коэффициенту при $a^{2\ell}$ ряда Тейлора функции $I_a(X,\mu)$ по a в 0, и по лемме 5.14 он является топологическим инвариантом. Предложение 5.15 доказано. $\square$

В заключение сформулируем несколько открытых проблем.

Пусть $Q^3 \subset T^3$ — компактное 3-мерное многообразие.

Проблема 1. *Описать все однородные интегральные (определение 5.11) топологические инварианты (определение 5.1) заданных степени однородности ℓ и порядка $\le n$ на множестве $\mathcal{B}(Q)$ точных несжимаемых течений на Q. Они образуют конечномерное векторное пространство $\mathcal{I}_{(\ell),\le n}(Q)$ размерности $\dim \mathcal{I}_{(\ell),\le n}(Q) \le C_{N+\ell-1}^{N-1}$, где $N = C_{n+2}^2$.*

Проблема 2. *Описать факторпространство $\mathcal{I}_{(\ell),n}(Q) := \mathcal{I}_{(\ell),\le n}(Q)/\mathcal{I}_{(\ell),\le n-1}(Q)$ и найти (или оценить) его размерность — для заданных степени однородности ℓ и порядка n.*

Определим *r-кратные интегральные функционалы порядка $\le n$* на $\mathcal{B}(Q)$ — это функционалы $I = I^F$, имеющие вид

$$I^F(X, \mu_c) = \tag{21}$$
$$= \int\limits_{(Q^3)^r} F\left(f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_r); df(\mathbf{x}_1), \dots, df(\mathbf{x}_r); \dots; d^n f(\mathbf{x}_1), \dots, d^n f(\mathbf{x}_r)\right) \mu_c(\mathbf{x}_1) \wedge \dots \wedge \mu_c(\mathbf{x}_r),$$

где $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3) \in Q_i^3 \approx Q^3$, $\mu_c(\mathbf{x}) = c\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $c = \mathrm{const} > 0$. Без ограничения общности можно считать функцию $F = F(t_1, \dots, t_r; t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{r1}, t_{r2}, t_{r3}; \dots)$ симметричной (по перестановкам, индуцированным перестановками аргументов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$).

Проблема 3. *Описать все r-кратные однородные интегральные топологические инварианты заданных степени однородности ℓ и порядка $\le n$ на множестве $\mathcal{B}(Q)$ точных несжимаемых течений на Q, т.е. имеющие вид (21), где F — однородный многочлен степени ℓ, симметричный по перестановкам, индуцированным перестановками аргументов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$. Такие инварианты образуют конечномерное векторное пространство $\mathcal{I}^r_{(\ell),\le n}(Q)$ размерности $\dim \mathcal{I}^r_{(\ell),\le n}(Q) \le C_{N^r+\ell-1}^{N^r-1}$, где $N = C_{n+2}^2$.*

Проблема 4. *Описать факторпространство $\mathcal{I}^r_{(\ell),n}(Q) := \mathcal{I}^r_{(\ell),\le n}(Q)/\mathcal{I}^r_{(\ell),\le n-1}(Q)$ и найти (или оценить) его размерность — для заданных кратности r, степени однородности ℓ и порядка n.*

Список литературы

[1] Kudryavtseva E. Continuous orbital invariants of integrable Hamiltonian systems // Lobachevskii Journal of Mathematics, 38:6 (2017). C. 1027–1041.

[2] Serre D. Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 289:4 (1979), 267-270; Phys. D, 13:1-2 (1984), 105-7-136.

[3] V.I. Arnold, B. Khesin. Topological Methods in Hydrodynamics // Berlin: Springer, 1998.

[4] V.I. Arnold. Sur la géométrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 316–361.

[5] Etnyre J., Ghrist R. Contact topology and hydrodynamics: I. Beltrami fields and the Seifert conjecture // Nonlinearity. 13 (2000), 441–458.

[6] J. Martinet. Forms de Contact sur les Variétés de Dimension 3. (Springer Lecture Notes in Mathematics, vol 209). 1971. 142–163.

[7] R. Lutz. Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois // Ann. Inst. Fourier. 27:3 (1977), 1–15.

[8] B. Khesin S. Kuksin D. Peralta-Salas. KAM theory and the 3D Euler equation // Adv. Math. 267 (2014) 498–522.

[9] Арнольд В.И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения // В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая — 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Арм. ССР, 1974. 229–255. [См. также В.И. Арнольд. Избранное-50. М.: Фазис, 1997. 215–235.].

[10] П.М. Ахметьев. Квадратичные спиральности и энергия магнитного поля // Труды математического института им. В.А. Стеклова, 278 (2012), 16—28.

[11] Кудрявцева Е. А. Спиральность - единственный инвариант несжимаемых течений с непрерывной в C^1 топологии производной // Математические заметки. 99:4 (2016), 626–630.

[12] J.B. Etnyre. Contact manifolds. In: Encyclopedia of Mathematical Physics, eds. J.-P. Françoise, G.L. Naber and S.T. Tsou, Oxford: Elsevier, v.1, 2006, 631–636.

[13] Lazutkin V. KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions. Berlin: Springer, 1993.

[14] Кудрявцева Е. А. Интегрируемые по Лиувиллю обобщенные биллиардные потоки и теоремы типа Понселе // Фунд. прикл. матем. 20:3 (2015), 113–152.

[15] Болсинов А.В. Козлов В.В. Фоменко А.Т. Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела, Успехи математических наук, 50:3 (1995), 3–32.