ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«Проблема Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа: случай трехточечных метрических пространств»

Выполнила студентка
607 группы
Феклина Анастасия Вадимовна

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, доктор физ.-мат. наук Тужилин Алексей Августинович

подпись научного руководителя

Москва
2018 г.

Содержание

1. Введение

Речь пойдёт об обобщении *задачи Штейнера* о поиске кратчайших деревьев, то есть деревьев минимальной длины, соединяющих данное множество точек. Вместо минимальных деревьев Штейнера нас будут интересовать *минимальные заполнения в смысле Громова*, то есть графы минимальной длины, соединяющие данное конечное множество при его изометричных вложениях в различные метрические пространства. В качестве элементов граничного множества будут рассматриваться метрические компакты (в данной работе это будут тройки трехточечных метрических компактов). Эти метрические компакты — элементы *пространства Громова–Хаусдорфа*, наделенного метрикой Громова–Хаусдорфа. Об этом можно подробнее прочитать в [4].

Минимальные деревья Штейнера и минимальные заполнения в пространстве Громова–Хаусдорфа появились в работах Иванова, Николаевой, Тужилина, где было доказано существование таких деревьев для границ, составленных из конечных метрических пространств. В общем случае границ, состоящих из метрических компактов, эта задача до сих пор не решена.

Объект, о котором пойдет речь — минимальные заполнения в пространстве Громова–Хаусдорфа для границы, состоящей из трех трехточечных метрических пространств. В [2] показано, что семейство классов изометричности трехточечных метрических пространств, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа, является метрическим пространством, изометричным многогранному конусу $\mathcal{C} = \{(a, b, c) \mid 0 < a \le b \le c \le a + b\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3_\infty$. А Овсянников показал, что каждое минимальное дерево Штейнера в $\mathbb{R}^n_\infty$ является минимальным заполнением. Таким образом, в некоторых случаях это позволяет понять, чему равна длина кратчайшего дерева и как выглядит это дерево в пространстве Громова–Хаусдорфа. Этот вопрос и будет изучаться в работе.

2. Постановка задачи и предварительные результаты

В этой работе рассматриваются тройки трехточечных метрических пространств и их минимальные заполнения.

Для простоты будем далее вместо трехточечных метрических пространств говорить о точках $A = (a^1, a^2, a^3) \in \mathcal{C}$.

В разделе 4 будут полностью описаны точки Штейнера S для троек точек $A_i = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n) \in \mathbb{R}^n_\infty$, и, как следствие, для троек точек из $\mathbb{R}^3_\infty$.

Доказаны следующие факты:

1. В случае, если в некотором метрическом пространстве точка A_i лежит между двумя другими, получаем, что точка Штейнера для $A_1A_2A_3$ существует, единственна и совпадает с A_i. Если же речь идёт о точках из пространства $\mathbb{R}^n_\infty$, то свойство точки лежать между двумя другими равносильно тому, что существует l такое, что все три расстояния $|A_jA_k|$ достигаются по l-ой координате.
2. Если для трех точек $A_i = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n) \in \mathbb{R}^n_\infty$ расстояния $|A_iA_j|$ достигаются ровно по m координатам, где $2 \le m \le n$, и при этом ни по одной из координат не достигаются все три расстояния, то для них множеством точек Штейнера в $\mathbb{R}^n_\infty$ будет параллелепипед размерности $n - m$, со сторонами, параллельными координатным осям.

Следствием из пункта 2 является то, что если для $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^n_\infty$ по каждой из координат достигается какое-нибудь из расстояний $|A_iA_j|$, точка Штейнера существует единственная.

При $n = 3$ получаем, что множеством точек Штейнера для A_1, A_2, A_3 будет либо точка, либо отрезок. Их подробное описание и формулы для вычисления координат точек S собраны в таблице 1.

В разделе 5 показано, как для трех трехточечных пространств из пространства Громова–Хаусдорфа понять, будет ли их минимальным заполнением звезда с дополнительной вершиной S, также являющейся трехточечным метрическим компактом из пространства Громова–Хаусдорфа.

3. Основные определения

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$.
Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств пространства X.

Определение 3.1. Для $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *расстоянием Хаусдорфа* называется

$$d_H(A,B) = \max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ab|\bigr\}.$$

Пусть $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X. Хорошо известно ([4]), что сужение d_H на $\mathcal{H}$ является метрикой.

Определение 3.2. Для метрических пространств X, Y *реализацией пары* (X, Y) называется тройка (X', Y', Z), состоящая из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y.

Определение 3.3. *Расстоянием Громова—Хаусдорфа d_{GH} между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Определение 3.4. Через $\mathcal{M}$ обозначим множество всех компактных метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии), наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа, и будем называть *пространством Громова–Хаусдорфа*.

Хорошо известно ([4]), что сужение d_{GH} на $\mathcal{M}$ является метрикой.
Более подробно о расстоянии Громова–Хаусдорфа и его реализации можно почитать в [4], [1].

Определение 3.5. *Длина минимального дерева Штейнера* для некоторого подмножества метрического пространства — это точная нижняя грань длин всех деревьев с вершинами из нашего метрического пространства и длинами ребер, равными расстояниям между соответствующими точками метрического пространства, содержащих данное подмножество в качестве вершин. *Деревом Штейнера* называется граф на котором эта минимальная длина реализуется.

Определение 3.6. Для трёх точек A_1, A_2, A_3 минимальным деревом Штейнета является звезда с дополнительной вершиной S и рёбрами SA_i. Такие точки S будем называть *точками Штейнера*, а множество всех таких точек — *множеством Штейнера*.

Определение 3.7. Пусть дано конечное метрическое пространство M. *Заполнение метрического пространства* (M, ρ) — это взвешенный граф (G, ω), содержащий M как подмножество множества своих вершин, и такой, что расстояние по графу между вершинами из M, индуцированное весом рёбер ω, не меньше расстояний в M. Граф G называется *типом заполнения. Вес заполнения* — это сумма весов всех его рёбер. Заполнение называется *минимальным*, если не существует заполнения с меньшим весом, в этом случае его вес называется *весом минимального заполнения* для множества M и обозначается $\mathrm{mf}(M)$.

Замечание 3.1. Длину минимального заполнения также можно определить как точную нижнюю грань длин кратчайших деревьев при всевозможных изометрических вложениях границы в метрические пространства.

Замечание 3.2. В [3] показано, что минимальное заполнение существует для любого конечного метрического пространства, и минимальное заполнение — это дерево Штейнера для изометрического вложения граничного множества в некоторое метрическое пространство.

Напомним, что пространство $\mathbb{R}^3_\infty$ — это метрическое пространство, состоящее из точек $A = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ с n действительными координатами и нормой $|AB| = \max\bigl\{|a^i - b^i|\bigr\}$.

В [2] показано, что семейство классов изометричности трехточечных метрических пространств, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа, является метрическим пространством, изометричным многогранному конусу $\mathcal{C} = \bigl\{(a, b, c) \mid 0 < a \le b \le c \le a + b\bigr\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3_\infty$. Соответствующая изометрия сопоставляет треугольнику со сторонами $0 < a \le b \le c$ точку с координатами $1/2(a, b, c)$.

Введём ещё несколько определений для точек $A = (a^1, a^2, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n_\infty$.

Определение 3.8. Будем говорить, что точка Z некоторого метрического пространства лежит между точками X и Y того же пространства, если $|XY| = |XZ| + |ZY|$.

Определение 3.9. Будем говорить, что расстояние между точками $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $Y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ *достигается по i-ой координате*, если $|XY| = |x^i - y^i|$.

4. Точки Штейнера в пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$

В этом разделе будет показано, как, зная координаты трех точек $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^n_\infty$, определить их множество Штейнера.

Пусть даны три точки $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^n_\infty$ с координатами $A_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n)$ и расстояниями $|A_iA_j| = l_k$ между точками. Напомним, что для точек $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и $Y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ из $\mathbb{R}^n_\infty$ расстояние $|XY|$ определяется следующим образом: $|XY| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$. Цель этого раздела — поиск всех таких точек $S \in \mathbb{R}^n_\infty$, что сумма $|A_1S| + |A_2S| + |A_3S|$ минимальна. Так как $\mathbb{R}^n_\infty$ — ограниченно компактное пространство, то такие S всегда существуют (доказательство непосредственно получается из результатов [7]). Более того, по теореме Овсянникова, см. [2], каждое минимальное дерево Штейнера в $\mathbb{R}^n_\infty$

является минимальным заполнением. Из неравенства треугольника для пространства $\mathbb{R}^n_\infty$ следует, что $|A_iS| + |A_jS| \geq |A_iA_j|$. Из всего вышесказанного вытекает следующее замечание.

Замечание 4.1. Для трех точек $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^n_\infty$ с расстояниями $|A_iA_j| = l_k$ существует точка Штейнера $S \in \mathbb{R}^n_\infty$, при этом звезда G с подвижной вершиной S и граничными точками A_1, A_2, A_3 является минимальным заполнением. Таким образом, из [3] заключаем, что $d_i := |A_iS| = \frac{1}{2}(l_j + l_k - l_i)$ и вес минимального заполнения G равен $\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3)$.

Ниже мы опишем, как устроены множества таких точек S.

Утверждение 4.2. Точка A_k лежит между A_i и A_j, если и только если минимальным заполнением (и, значит, минимальным деревом Штейнера) будет граф с ребрами A_kA_i и A_kA_j. Более того, вес такого минимального заполнения равен $|A_kA_i| + |A_kA_j| = |A_iA_j|$ и это минимальное заполнение единственно.

Доказательство. **П**усть S — произвольная точка Штейнера для границы A_1, A_2, A_3. Из замечания 4.1 вытекает, что $|A_kS| = 0$, если и только если $|A_iA_j| = |A_iA_k| + |A_kA_j|, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

$\square$

Оказывается, условие "одна из трех точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ лежит между двумя другими" можно сформулировать в терминах того, по каким координатам достигаются расстояния между этими точками.

Теорема 4.3. *Одна из точек A_1, A_2, A_3 лежит между двумя другими, если и только если существует такая координата k, что все три расстояния $|A_iA_j|$, $i \neq j$, достигаются по k-ой координате. Причём, если A_i лежит между A_j и A_l, то для каждого k такого, что по k-ой координате достигается расстояние $|A_jA_l|$, два остальных расстояния также достигаются по k-ой координате.*

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. Без ограничения общности будем считать, что A_1 лежит между A_2 и A_3, а расстояние A_2A_3 достигается по 1-ой координате. Тогда выполнено следующее:

$$|a^1_2 - a^1_3| = |A_2A_3| = |A_1A_2| + |A_1A_3| \geq |a^1_1 - a^1_2| + |a^1_1 - a^1_3|.$$

Но мы знаем, что для любых действительных значений a^i_j выполнено неравенство $|a^1_2 - a^1_3| \leq |a^1_1 - a^1_2| + |a^1_1 - a^1_3|$. Откуда получаем, что верны равенства $|a^1_2 - a^1_3| = |A_2A_3| = |A_1A_2| + |A_1A_3| = |a^1_1 - a^1_2| + |a^1_1 - a^1_3|$, а это возможно только в случае, когда все три расстояния $|A_iA_j|$ достигаются по 1-ой координате.

Отметим, что мы за одно доказали прямое утверждение первой части теоремы. Теперь докажем обратное утверждение. Без ограничения общности будем считать, что все расстояния достигаются по 1-ой координате. И пусть также $a^1_1 \leq a^1_2 \leq a^1_3$. Но тогда $|A_1A_3| = |a^1_1 - a^1_3| = |a^1_1 - a^1_2| + |a^1_2 - a^1_3| = |A_1A_2| + |A_2A_3|$, а это как раз означает, что точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3. $\square$

Следствие 4.4. *Точка Штейнера (дополнительная вершина S минимального заполнения) для границы $\{A_1, A_2, A_3\}$ совпадает с одной из граничных точек, если и только если существует такое k, что все три расстояния $|A_iA_j|$, $i \neq j$, достигаются по k-ой координате.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы 4.3 и утверждения 4.2. □

Теперь посмотрим, что будет в случае невырожденного треугольника.

Замечание 4.5. Пусть даны три точки $A_i \in \mathbb{R}^n_\infty$, а S — их точка Штейнера. Так как для любых i, j выполнено равенство $|A_iS| + |A_jS| = |A_iA_j|$, то, из теоремы 4.3 вытекает, что для каждых i и j оба расстояния $|A_iS|$ и $|A_jS|$ достигаются по крайней мере по тем координатам, по которым достигается расстояние $|A_iA_j|$.

Лемма 4.6. *Пусть даны точки $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^n_\infty$, расстояние $|A_iA_j| \neq 0$ достигается по k-ой координате (так что $a_i^k \neq a_j^k$), а S — их точка Штейнера. Тогда ее координата s^k определена однозначно и равна $s^k = a_i^k + d_i = a_j^k - d_j$, если $a_i^k < a_j^k$.*

Доказательство. Из замечания 4.1 следует, что расстояния d_i однозначно задаются расстояниями l_i, причем, $d_i + d_j = l_k$. Пусть расстояние l_1 достигается по k-ой координате. Тогда из замечания 4.5 следует, что d_2 и d_3 также достигаются по k-ой координате. Таким образом, $d_2 = |A_2S| = |a_2^k - s^k|$, $d_3 = |A_3S| = |a_3^k - s^k|$ и $|A_2A_3| = |A_2S| + |SA_3| = |a_3^k - a_2^k|$. Пусть, для определенности, $a_2^k \leq a_3^k$, тогда $s^k = a_2^k + d_2 = a_3^k - d_3$, а значит, координата s^k определена однозначно. □

Замечание 4.7. Отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ пересекаются по невырожденному отрезку, если и только если выполнены неравенства $a < d$ и $b > c$; при этом, $[a, b] \cap [c, d] = \bigl[\max\{a, c\}, \min\{b, d\}\bigr]$.

Лемма 4.8. *Если для трех точек $A_i = (a_i^1, a_i^2, \dots a_i^n) \in \mathbb{R}^n_\infty$ ни по какой из координат не достигаются все три расстояния, то $d_i \neq 0$.*

Доказательство. Этот факт вытекает из следствия 4.4. □

Лемма 4.9. *Если $|AB| = d$ и достигается по j-ой координате, то при каждом $i \neq j$ имеем $b^i \in [a^i - d, a^i + d]$. Обратно, если для некоторого j число $d := |a^j - b^j|$ таково, что при всех $i \neq j$ выполняется $b^i \in [a^i - d, a^i + d]$, то $|AB| = d$.*

Доказательство. Из условия следует, что $|AB| = d = |a^j - b^j| \geq |a^i - b^i|$ для всех $i \neq j$, но неравенство $d \geq |a^i - b^i|$ равносильно тому, что $b^i \in [a^i - d, a^i + d]$. Теперь обратно: $b^i \in [a^i - d, a^i + d]$ равносильно тому, что $|a^i - b^i| \leq d = |a^j - b^j|$, а значит, $|AB| = d$. □

Из доказанного выше критерия следует, что для невырожденного треугольника нет координаты, по которой достигаются все три расстояния $|A_iA_j|$. Но каждое из расстояний достигается по некоторым координатам. А значит, существует k: $2 \leq k \leq n$, а расстояния $|A_iA_j|$ достигаются ровно по k координатам.

Теорема 4.10. *Для трех точек $A_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) \in \mathbb{R}^n_\infty$ существует ровно k координат, по которым достигается хотя бы одно из расстояний $|A_iA_j|$, где $1 \leq k \leq n$, и при этом ни по одной из координат не достигаются все три расстояния (так что, на самом деле, $k \geq 2$), то для них множеством точек Штейнера в $\mathbb{R}^n_\infty$ будет параллелепипед размерности $n - k$, со сторонами, параллельными координатным осям.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что расстояния достигаются по $1, \dots, k$-ой координатам, но не достигаются по $k+1, \dots, n$-ой координатам. Через расстояния l_i однозначно определяются d_i. Тогда из леммы 4.6 следует, что при $1 \le l \le k$ координаты s^l каждой точки Штейнера S определены однозначно и равны $s^l = a_i^l + d_i = a_j^l - d_j$, если расстояние $|A_iA_j|$ достигается по l-ой координате и $a_i^l < a_j^l$.

Теперь определим, чему могут быть равны координаты s^l, где $k+1 \le l \le n$. Так как $|A_iS| = d_i$, из леммы 4.9 следует, что s^i может быть любой точкой из U, где

$$U := [a_1^l - d_1, a_1^l + d_1] \cap [a_2^l - d_2, a_2^l + d_2] \cap [a_3^l - d_3, a_3^l + d_3].$$

Остается доказать, что пересечение этих отрезков будет невырожденным отрезком. Зафиксируем l. Пусть $a_1^l \le a_2^l \le a_3^l$. Никакое из расстояний $|A_iA_j| = l_k = d_i + d_j$ не достигается по l-ей координате, значит, $|a_i^l - a_j^l| < d_i + d_j$ для всех i, j, тогда выполняется и неравенство $a_j^l - a_i^l < d_i + d_j$; последнее равносильно $a_j^l - d_j < a_i^l + d_i$. (здесь неравенства строгие, так как $d_i \neq 0$ по лемме 4.8).

Рассмотрим отрезки $[a_1^l - d_1, a_1^l + d_1]$ и $[a_2^l - d_2, a_2^l + d_2]$. Из замечания 4.7 и неравенств $a_j^l - d_j < a_i^l + d_i$следует, что

$$[a_1^l - d_1, a_1^l + d_1] \cap [a_2^l - d_2, a_2^l + d_2] = [\max\{a_1^l - d_1, a_2^l - d_2\}, \min\{a_1^l + d_1, a_2^l + d_2\}]$$

— невырожденный отрезок.

Из тех же неравенств для оставшихся пар $i < j$ и замечания 4.7 для отрезков

$$[\max\{a_1^l - d_1, a_2^l - d_2\}, \min\{a_1^l + d_1, a_2^l + d_2\}] \quad \text{и} \quad [a_3^l - d_3, a_3^l + d_3]$$

следует, что U — невырожденный отрезок.

Итак, координаты $s^1, \dots, s^k$ точки Штейнера для A_1, A_2, A_3 определены однозначно, а оставшиеся могут принимать произвольные значения из соответствующих отрезков. То есть множество всех точек Штейнера является параллелепипедом размерности $n-k$, где $0 \le n-k \le n-2$, со сторонами, параллельными координатным осям. $\square$

Следствие 4.11. *Для невырожденного треугольника $A_1A_2A_3$ в $\mathbb{R}^n_\infty$ единственность точки Штейнера равносильна тому, что по каждой координате достигается хотя бы одно из расстояний A_iA_j.*

Следствие 4.12. *Множество Штейнера для точек $A_i \in \mathbb{R}^n_\infty$ не может иметь коразмерность 1.*

Доказательство. Множество Штейнера является параллелепипедом коразмерности k в том и только в том случае, если расстояния $|A_iA_j|$ достигаются ровно по k координатам, но нет такой координаты, по которой достигаются все три расстояния $|A_iA_j|$. Но случай $k = 1$ как раз и означает, что все расстояния достигаются по одной и той же координате. $\square$

Следствие 4.13. *Если для трех точек $A_i = (a_i^1, a_i^2, \dots a_i^n) \in \mathbb{R}^n_\infty$ по каждой координате достигается какое-нибудь из расстояний $|A_iA_j|$, то для них существует единственная точка Штейнера в $\mathbb{R}^n_\infty$.*

Следствие 4.14. *В пространстве $\mathbb{R}^3_\infty$ множеством точек Штейнера для произвольных A_1, A_2, A_3 будет точка или невырожденный отрезок. Все возможные случаи описаны в следующей таблице.*

Описание случая	Описание точек Штейнера
1. Все расстояния $\|A_kA_l\|$ достигаются по одной и той же координате.	Точка Штейнера определена однозначно и совпадает с одной из A_j.
2. По каждой координате достигается некоторое из расстояний $\|A_kA_l\|$.	Если по i-ой координате достигается расстояние $\|A_kA_l\|$, и $a^i_k < a^i_l$, то $s^i = a^i_k + d_k = a^i_l - d_l$.
3. Все расстояния $\|A_iA_j\|$ достигаются по двум координатам, скажем, по k-ой и по l-ой, но ни одно из этих расстояний не достигается по оставшейся m-ой координате.	В этом случае множество точек Штейнера будет отрезком, параллельным m-ой координатной оси: s^k и s^l определены однозначно и считаются по формулам из второго случая, а s^m может быть любой точкой промежутка $U := [a^m_1 - d_1, a^m_1 + d_1] \cap [a^m_2 - d_2, a^m_2 + d_2]$ $\cap [a^m_3 - d_3, a^m_3 + d_3]$.

5. Следствия для троек трехточечных компактов в пространстве Громова-Хаусдорфа

Напомним, что $\mathcal{C} = \{(a, b, c) \mid 0 < a \le b \le c \le a + b\}$ — конус в $\mathbb{R}^3_\infty$, и каждой точке $c = (c^1, c^2, c^3) \in \mathcal{C}$ соответствует трехточечное метрическое пространство в пространстве Громова–Хаусдорфа с расстояниями $2c^1, 2c^2, 2c^3$ между точками.

Таким образом, каждой тройке точек $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3_\infty$ соответствует три трехточечных метрических пространства A^*_i в пространстве Громова-Хаусдорфа. В [2] показано, что расстояния между A^*_i в пространстве Громова–Хаусдорфа равны расстояниям между A_i в $\mathbb{R}^3_\infty$. Если же для координат точки из $\mathbb{R}^3_\infty$ не выполнено неравенство треугольника, ей не будет соответствовать трехточечный компакт.

Из скзанного в разделе 2 следует, что дерево Штейнера для A_i в $\mathbb{R}^3_\infty$ имеет длину $\frac{1}{2}\big(|A_1A_2| + |A_1A_3| + |A_2A_3|\big)$, а значит, соответствует минимальному заполнению для A^*_i в пространстве Громова–Хаусдорфа, если и только если точке Штейнера S также соответствует трехточечный метрический компакт S^*, в этом случае длина минимального заполнения для A^*_i равна длине дерева Штейнера для A_i, а S^* — точка Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа для границы A^*_1, A^*_2, A^*_3.

Пример 5.1. В [6] для точки $S \notin \mathcal{C}$ строятся такие тройки точек $A_i \in \mathcal{C}$, что S является для A_i единственной точкой Штейнера:

$S = (a, b, c)$;
$A_1 = (a + d, b + \alpha_1, c + d)$;
$A_2 = (a + \alpha_2, b - d, c - d)$;
$A_3 = (a - d, b + d, c - \alpha_3)$.

При этом должны быть выполнены следующие условия:

$0 < a \le b \le c$;
$a + b < c$;
$2b - c \ge 0$;
$c - (a + b) \le \min(a, 2b - c)$;
$d > 0$;

$d < a$;
$d \leq 2b - c$;
$d \geq c - (a + b)$;
$\alpha_1 \geq a + d - b$;
$\alpha_1 \leq c + d - b$;
$\alpha_1 \geq c - a - b$;
$\alpha_2 \leq b - d - a$;
$\alpha_2 \geq c - a - b$;
$\alpha_3 \leq c - b - d$;
$\alpha_3 \geq c - a - b$.

Замечание 5.1. Так как мы выбираем $d > 0$, не найдется такой координаты, по которой достигались бы все три расстояния $|A_i A_j|$.

Замечание 5.2. В [6] подробно описано, почему выполнение приведенных неравенств достаточно для корректности примера. А также доказывается, что подходящие параметры d и α_i всегда можно подобрать для выбранной точки S. Здесь $A_i \in \mathcal{C}$, а $S \notin \mathcal{C}$ — их точка Штейнера. При этом, $0 \leq \alpha_i \leq d$, откуда следует, что расстояния $|A_i A_j|$ в описанных примерах достигаются по каждой из координат. Значит, выполнено условие теоремы 4.9, и точка S в них — единственная точка Штейнера, и она не лежит в конусе $\mathcal{C}$. Отсюда следует, что дерево Штейнера для $A_i \in \mathcal{C}$ не соответствует минимальному заполнению той же длины для A_i^* в пространстве Громова–Хаусдорфа.

6. Минимальные заполнения в пространстве Громова–Хаусдорфа

Опираясь на результаты, полученные в разделе 4, мы можем по тройке точек $A_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3) \in \mathcal{C} \in \mathbb{R}^3_\infty$ определить все их точки Штейнера и понять, соответствует ли их дерево Штейнера для A_i в $\mathbb{R}^3_\infty$ минимальному заполнению для соответствующих A_i^* пространстве Громова–Хаусдорфа.

Перед тем, как описывать случаи, докажем, что условие $S \in \mathcal{C}$ действительно равносильно существованию "подходящей" точки Штейнера.

Теорема 6.1. *Если никакая точка Штейнера S для $A_i \in \mathcal{C}$ не лежит в конусе $\mathcal{C}$, то для A_i^* не существует в пространстве Громова–Хаусдорфа минимального заполнения с дополнительной вершиной S, являющейся трехточечным метрическим компактом.*

Доказательство. Предположим противное, то еесть что в пространстве Громова–Хаусдорфа существует минимальное дерево Штейнера, являющееся минимальным заполнением и у которого точка Штейнера S^* — трехточечное пространство. Вложим A_i^* и S^* в конус $\mathcal{C}$. Так как вложение изометрично, то получаем минимальное заполнение в $\mathbb{R}^3_\infty$, для которого S — точка Штейнера, противоречие. $\square$

Итак, определим, по какому количеству координат достигаются расстояния $|A_i A_j|$. Получаем уже известные случаи.

1. Пусть все расстояния достигаются по одной и той же координате. Из следствия 4.6 следует, что точка Штейнера для этих A_i единственная и совпадает с одной из A_i. Это значит, что все точки дерева Штейнера лежат в конусе $\mathcal{C}$, и оно соответствует минимальному заполнению.

2. Пусть по каждой координате достигается какое-нибудь из расстояний $|A_iA_j|$. Из теоремы 4.10 следует, что точка Штейнера для этих A_i существует единственная, а ее координаты определяются по формуле $s^i = a^i_k + d_k = a^i_l - d_l$, где расстояние $|A_kA_l|$ достигается по i-ой координате, и $a^i_k < a^i_l$. Остается определить, принадлежит ли она конусу $\mathcal{C}$. Если да, то дерево Штейнера соответствует минимальному заполнению, если нет — не соответствует.

3. Пусть расстояния $|A_iA_j|$ достигаются только по каким-то двум координатам, но ни по одной из координат не достигаются все три расстояния. Из теоремы 4.10 следует, что в этом случае множество точек Штейнера — отрезок. Первые две координаты подходящих точек S вычисляются аналогично второму случаю, а третья принадлежит отрезку $U = [u^1, u^2]$[1]. Нужно проверить, пересекается ли этот отрезок с конусом $\mathcal{C}$. Если пересекается хотя бы по одной точке, то существует дерево Штейнера, соответствующее минимальному заполнению.

Утверждение 6.2. Для того, чтобы $U \cap \mathcal{C}$ было непусто, должны выполняться следующие неравенства.

Случай	Условия
1. Отрезок параллелен первой координатной оси.	(1) $(0, s^2] \cap [u_1, u_2] \neq \varnothing$; (2) $s^2 \leq s^3 \leq \min\{s^2, u_2\}$.
2. Отрезок параллелен второй координатной оси.	(1) $0 < s^1$; (2) $[u_1, u_2] \cap \big[\max\{s^1, s^3 - s^1\}, s^3\big] \neq \varnothing$.
3. Отрезок параллелен третьей координатной оси.	(1) $0 < s^1 \leq s^2$; (2) $[s^2, s^1 + s^2] \cap [u_1, u_2] \neq \varnothing$.

Теперь приведем примеры для всех случаев.

Во всех примерах рассматриваем точки $A_i \in \mathcal{C}$.

Пример 6.1. Вырожденный треугольник. Точка Штейнера совпадает с A_2. Пусть точки A_i:

$A_1 = (10, 13, 21)$;
$A_2 = (20, 22, 30)$;
$A_3 = (40, 40, 40)$.

Все расстояния достигаются по первой координате, A_2 лежит между A_1 и A_3. А значит, действительно, $S = A_2$ и определена однозначно, дерево Штейнера соответствует минимальному заполнению для A^*_i.

[1] $U := [a^m_1 - d_1, a^m_1 + d_1] \cap [a^m_2 - d_2, a^m_2 + d_2] \cap [a^m_3 - d_3, a^m_3 + d_3]$

Пример 6.2. Точка Штейера единственна и лежит в конусе $\mathcal{C}$.
Пусть точки A_i:

$A_1 = (12, 21, 27)$;
$A_2 = (11, 18, 23)$;
$A_3 = (8, 22, 24)$.

Расстояния достигаются по всем трем координатам, $S = (10, 20, 25) \in \mathcal{C}$, значит, дерево Штейнера соответствует минимальному заполнению для A_i^*.

Пример 6.3. Точка Штейера единственна и лежит в конусе $\mathcal{C}$.[2]
Пусть точки A_i:

$A_1 = (8, 22, 29.5)$;
$A_2 = (11.5, 18, 29)$;
$A_3 = (12, 21.5, 33)$.

Расстояния достигаются по всем трем координатам, $S = (10, 20, 31) \notin \mathcal{C}$, а значит, дерево Штейнера не соответствует минимальному заполнению для A_i^* в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Пример 6.4. Множество точек Штейнера — отрезок, пересекающийся с конусом $\mathcal{C}$, но не лежащий в нем.
Пусть точки A_i:

$A_1 = (11, 20, 30)$;
$A_2 = (12, 18, 29)$;
$A_3 = (8, 22, 29)$.

В этом случае никакое расстояние не достигается по третьей координате. Из теоремы 4.10 следует, что первые две координаты точки S определены однозначно. Это будут $s^1 = 10.5$ и $s^2 = 19.5$, $d_1 = 0.5, d_2 = 1.5, d_3 = 2.5$. Тогда $s^3 \in [29.5, 30.5] \cap [27.7, 30.5] \cap [26.5, 31.5] = [29.5, 30.5]$. А значит, есть точки Штейнера лежащие и не лежащие в $\mathcal{C}$: например, подходят $S_1 = (10.5, 19.5, 29, 5) \in \mathcal{C}$ и $S_2 = (10, 5, 19.5, 30.5) \notin \mathcal{C}$. Соответственно, существует дерево Штейнера, которое соответствует минимальному заполнению для A_i^*.

Пример 6.5. Множество точек Штейнера — отрезок, не пересекающийся с конусом $\mathcal{C}$.
Пусть точки A_i:

$A_1 = (11, 20, 30.75)$;
$A_2 = (12, 18, 29.75)$;
$A_3 = (8, 22, 29.75)$.

Здесь никакое из расстояний $|A_iA_j|$ по прежнему не достигается по 3-ей координате, $s^1 = 10.5, s^2 = 19.5$, а вот $s^3 \in U = [30.25, 31.25]$, и $U \cap \mathcal{C} = \varnothing$, так как для координат всех точек Штейнера S не выполняется неравенство треугольника, и никакое дерево Штейнера не соответствует минимальному заполнению для A_i^*.

[2]этот пример был приведен в [2]

7. Выводы

Итак, в данной работе получены следующие результаты:

1. Приведён алгоритм, позволяющий по координатам трёх точек $A_i \in \mathbb{R}^3_\infty$ определить их множество Штейнера. Оказалось, что множеством Штейнера является параллелепипед размерности k, где $0 \le k \le n-2$, со сторонами, параллельными координатным осям.
2. Отдельно описаны все случаи при $n = 3$.
3. Описано, как для троек трехточечных метрических пространств в пространстве Громова–Хаусдорфа понять, существует ли минимальное заполнение с дополнительной вершиной S, также являющейся трехточечным пространством. В случае, если оно существует, описаны все подходящие точки S.

8. Заключение

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.*, ArXiv eprints, arXiv:1603.08850, 2016.

[2] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.*, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116, 2016.

[3] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, сс. 65-118.

[4] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[5] Овсянников З.Н. *Курсовая работа*, Мех-мат МГУ, Москва, 2010.

[6] Феклина А.В. *Проблема Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа: случай трехточечных метрических пространств*, курсовая работа, мех-мат МГУ, Москва, 2016.

[7] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. CRC Press, 1994.