

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

ТОПОЛОГИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ
СИСТЕМ НА 2-СФЕРЕ ВРАЩЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Курсовая работа
студента 5 курса
Климова Р.К.

Научный руководитель:
Академик, доктор физ.-мат. наук А.Т. Фоменко

Москва, 2017 г.

Содержание

1	Введение.	2
2	Утверждения и доказательства.	3
3	Список литературы.	21

1 Введение.

Рассмотрим риманово многообразие, диффеоморфное сфере, $M \simeq S^2$ с метрикой g , на которой эффективно действует группа S^1 . Такая метрика называется метрикой вращения, а многообразие M – многообразием вращения. Пусть N и S – неподвижные точки действия группы. Назовем их соответственно северным и южным полюсами многообразия M . Метрику g можно записать в виде $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$, где $f(r) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, положительная на $(0, L)$, с условиями $f(0) = f(L) = 0$. Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении T^*M к M со стандартной симплектической структурой $\omega = dp \wedge dq$ и гамильтонианом $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j$. Хорошо известно, что такая система интегрируема и ее интегральные траектории $q(t)$ являются решением уравнения геодезических $\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = 0$ (см. [3]). Большой интерес представляет изучение систем похожего вида с добавлением потенциального и магнитного полей. Случай потенциального поля широко изучен в работах Е. О. Кантонистой (см. [1,2]).

В данной работе изучается случай геодезического потока с добавлением магнитного поля. Математически это означает, что, не изменяя гамильтониан, рассматривается новая симплектическая форма $\tilde{\omega} = \omega + \Lambda'(q)dq_i \wedge dq_j$. В координатах на многообразии вращения $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$ гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{f^2(r)}).$$

Новая форма запишется в следующем виде:

$$\tilde{\omega} = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi = dp_r \wedge dr + d(p_\varphi + \Lambda(r)) \wedge d\varphi.$$

Делая замену

$$\tilde{p}_r = p_r, \tilde{p}_\varphi = (p_\varphi + \Lambda(r)), \tilde{r} = r, \tilde{\varphi} = \varphi,$$

в новых координатах (\tilde{p}, \tilde{q}) имеем уже стандартную форму $\tilde{\omega} = d\tilde{p} \wedge d\tilde{q}$ и измененный гамильтониан

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(\tilde{p}_r^2 + \frac{(\tilde{p}_\varphi - \Lambda(r))^2}{f^2(r)}).$$

Далее везде уберем значки "волн" с координат и приступим к изучению полученной механической системы.

2 Утверждения и доказательства.

Определение 1. Механическую систему, заданную функциями $f(r)$ и $\Lambda(r)$, назовем системой общего положения, если выполнено следующее:

1) $f(r)$ – функция Морса на $(0, L)$. $\Lambda(r)$ – функция Морса на $[0, L]$.

2) $\Lambda'(r)^2 + f'(r)^2 > 0$

Далее, если не оговорено противное, считаем, что $f(r)$ и $\Lambda(r)$ удовлетворяют условиям общего положения.

Лемма 1. Пусть метрика на 2-сфере вращения g и функция на многообразии $\Lambda(r)$ удовлетворяют необходимым условиям гладкости в полюсах (см. [2]). Тогда гамильтониан H является гладкой функцией тогда и только тогда, когда $\Lambda(0) = \Lambda(L) = 0$.

Доказательство.

Введем в окрестности полюса локальные координаты (p_x, p_y, x, y) на фазовом пространстве:

$$x = f(r)\cos(\varphi), y = f(r)\sin(\varphi).$$

Поскольку в полюсах $|f'(r)| = 1$, метрика в полюсе примет следующий вид:

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2 = f'(r)^2 dr^2 + f^2(r)d\varphi^2 = dx^2 + dy^2.$$

Гамильтониан перепишем слежующим образом:

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{f^2(r)}) + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2(r)}{f^2(r)} - \frac{p_\varphi \Lambda(r)}{f^2(r)}.$$

Первое слагаемое здесь – это просто гамильтониан стандартного геодезического потока. В полюсе оно примет вид:

$$\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2).$$

Далее перепишем компоненту импульса p_φ в координатах (p_x, p_y, x, y) возле полюса:

$$p_\varphi = xp_y - yp_x.$$

Поскольку $x^2 + y^2 = f^2(r)$, то $\Lambda(r) = \Lambda(f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}))$. По предположению $\Lambda(r)$ – функция Морса, поэтому в малой окрестности полюса

$$\Lambda(r) = \Lambda(f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})) = c_0 + c_1(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2), c_1 \neq 0.$$

Тогда имеем следующее:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} \frac{c_0^2 + 2c_0c_1(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{(xp_y - yp_x)(c_0 + c_1(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2}.$$

Иначе:

$$H = \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{x^2 + y^2} + \frac{c_0(xp_y - yp_x)}{x^2 + y^2} + g(x, y, p_x, p_y),$$

где g – гладкая по каждому аргументу функция. Отсюда видно, что если $c_0 \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{c_0^2}{x^2 + y^2} + \frac{c_0(xp_y - yp_x)}{x^2 + y^2} \right) = \infty,$$

что противоречит условию гладкости. Следовательно, $c_0 = 0$
 \square .

Утверждение 1. Система на T^*M с гамильтонианом H является вполне интегрируемой по Лиувиллю.

Доказательство.

1. Фазовое пространство системы – четырехмерное. С координатами $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$. Здесь (r, φ) – координаты точки, (p_r, p_φ) – ее импульсы (рис. 1).

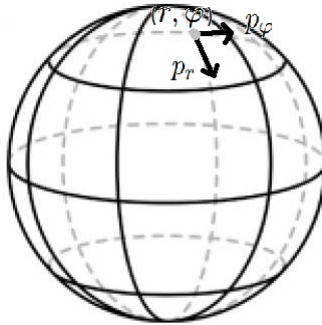


Рис. 1:

2. Система имеет два независимых первых интеграла: гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{(p_\varphi - \Lambda(r))^2}{f^2(r)})$$

и дополнительный интеграл $K = p_\varphi$ (из $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$). Легко проверяется, что скобка Пуассона $\{H, K\} = 0$. Условие Леммы 1 обеспечивает H гладкость в полюсах. Заметим, что K тоже гладкий в полюсах.

3. Движение точки задается уравнением Гамильтона:

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \dot{p}_r = \frac{\partial H}{\partial r}$$

Таким образом, система вполне интегрируема. \square

Теорема 1. Система с магнитным полем, определенная на M , такая что $f'(r)^2 + \Lambda'(r)^2 > 0$, имеет две особые точки (в T^*M) ранга 0: точку $(p, q) = (0, N)$ и точку $(p, q) = (0, S)$. Эти особые точки невырождены тогда и только тогда, когда $V''(0) \neq 0, V''(L) \neq 0$. В этом случае они имеют тип центр-центр. Бифуркационная диаграмма образа особых точек ранга 0 состоит из одной точки $(h, k) = (0, 0)$. Также система имеет 2-параметрическое семейство особых точек ранга 1 следующих двух видов:

(1) $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (0, k(r), r, \varphi)$ с параметрами $(r, \varphi) \in I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Здесь $k(r) = \Lambda(r) - f(r)\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)}$, I – открытое подмножество интервала $(0, L)$, состоящее из конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов $I_i = (r_1^i, r_2^i)$. На концах интервалов либо $f'(r) = 0$, либо $r = 0, r = L$.

(2) $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (0, \Lambda(r), r, \varphi)$ с параметрами $(r, \varphi) \in (0, L) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Бифуркационная диаграмма образа особых точек ранга 1 имеет вид

$$(h, k)_1 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)^2, \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right); (h, k)_2 = (0, \Lambda(r)).$$

Доказательство.

Рассмотрим гамильтонову систему с двумя первыми интегралами H и K . Точки ранга 0 здесь – это положения равновесия обоих интегралов, т.е. такие x , что $dH(x) = dK(x) = 0$. В локальных координатах $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$ вне полюсов дифференциал dK имеет следующий вид:

$$dK = (K'_{p_r}, K'_{p_\varphi}, K'_r, K'_\varphi) = (0, 1, 0, 0).$$

Поскольку на интервале $(0, L)$ он не обращается в 0, вне полюсов точек ранга 0 нет. В окрестностях полюсов, как раньше,

введем локальные координаты (p_x, p_y, x, y) . В них

$$dK = (K'_{p_x}, K'_{p_y}, K'_x, K'_y) = (-y, x, p_y, -p_x).$$

Отсюда стационарные точки интеграла K – это полюсы с нулевыми импульсами. Запишем их формально в виде $(p, q) = (0, N)$ и $(p, q) = (0, S)$, где N – северный полюс 2-сферы вращения (соответствует $r = 0$), S – южный полюс ($r = L$). Непосредственно проверяется, что найденные точки – стационарные для интеграла H .

Теперь проверим точки ранга 0 на невырожденность и найдем их тип. Симплектическая структура в точках ранга 0 (в полюсах) задается канонической матрицей $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Критическая точка x невырождена тогда и только тогда, когда существуют вещественные α и β такие, что матрица $\alpha A_H + \beta A_K$ не вырождена и имеет различные собственные значения. Здесь $A_H = \Omega^{-1} d^2 H|_x$, $A_K = \Omega^{-1} d^2 K|_x$. В окрестности полюса

$$\Lambda(f^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})) = c_1(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2), c_1 \neq 0,$$

$$K = xp_y - yp_x.$$

Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}c_1^2(x^2 + y^2) - c_1(xp_y - yp_x) + o(x^2 + y^2).$$

Имеем:

$$dH = (p_x + c_1 y) dp_x + (p_y - c_1 x) dp_y + (c_1^2 x - c_1 p_y) dx + (c_1^2 y + c_1 p_x) dy,$$

$$dK = -y dp_x + x dp_y + p_y dx - p_x dy.$$

Затем вычисляем матрицы вторых дифференциалов:

$$d^2 H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -c_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & c_1^2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_1^2 \end{pmatrix}, d^2 K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, формы d^2H и d^2K независимы. Далее вычисляем формы $A_H = \Omega^{-1}d^2H$ и $A_K = \Omega^{-1}d^2K$. Так как $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получаем:

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & -c_1^2 & 0 \\ -c_1 & 0 & 0 & -c_1^2 \\ 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}, A_K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы

$$\alpha A_H + \beta A_K = \begin{pmatrix} 0 & \alpha c_1 - \beta & -\alpha c_1^2 & 0 \\ -\alpha c_1 + \beta & 0 & 0 & -\alpha c_1^2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha c_1 - \beta \\ 0 & \alpha & -\alpha c_1 + \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица имеет 4 различных мнимых собственных значения: $\pm i\beta, \pm i(\beta - 2\alpha c_1)$. Это означает, что обе точки ранга 0 имеют тип *центр-центр*.

Точки ранга 1 системы – это такие x , в которых дифференциалы dH и dK линейно зависимы и одновременно не равны нулю. Заметим, что это условие достаточно проверять вне полюсов, то есть на интервале $r \in (0, L)$, используя регулярные координаты $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$. Тогда явный вид точек ранга 1 следует непосредственно из определения. \square

Лемма 2. (*вид бифуркационной диаграммы в окрестности образа точек ранга 0*) В малой окрестности образа точек ранга 0 бифуркационная диаграмма имеет следующий вид (рис. 2):

1) Окрестность образа $(p, q) = (0, N)$ – точка $(0, 0)$ и выходящая из нее пара кривых с векторами скоростей $\text{sign}(c_1) \frac{(2c_1, -1)}{\sqrt{1+4c_1^2}}$ и $\text{sign}(c_1)(0, 1)$ в натуральной параметризации, где $c_1 = \Lambda''(0)$.

2) Окрестность образа $(p, q) = (0, S)$ – точка $(0, 0)$ и выходящая из нее пара кривых с векторами скоростей $\text{sign}(c_1) \frac{(2c_1, -1)}{\sqrt{1+4c_1^2}}$ и $\text{sign}(c_1)(0, 1)$ в натуральной параметризации, где $c_1 = \Lambda''(L)$.

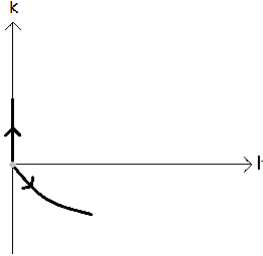


Рис. 2:

Доказательство.

1) Рассмотрим малое изменение параметра r в правой окрестности точки 0. Тогда, как и в Теореме 1, вводятся регулярные координаты $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$, в которых образ отображения момента состоит из двух видов кривых :

$$(h, k)_1 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)^2, \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right); (h, k)_2 = \left(0, \Lambda(r) \right).$$

Заметим, что при $r \rightarrow 0$, $(h, k)_1 = (h, k)_2 = (0, 0)$. Далее в окрестности 0:

$$\Lambda(r) = c_1 r^2 + c_2 r^4 + o(r^4), c_1 \neq 0$$

$$f(r) = r + a_1 r^3 + o(r^3).$$

Вычислим вектора скорости кривой каждого вида по формуле:

$$\dot{\gamma}(s)|_{s=0} = \frac{\dot{\gamma}(r)}{|\dot{\gamma}(r)|} \Big|_{r \rightarrow 0}.$$

Имеем

$$\dot{\gamma}_1(s)|_{s=0} = \frac{c_1(2c_1r, -r)}{|(c_1r)\sqrt{1+4c_1^2}|} \Big|_{r \rightarrow 0} = \text{sign}(c_1) \frac{(2c_1, -1)}{\sqrt{1+4c_1^2}},$$

$$\dot{\gamma}_2(s)|_{s=0} = \frac{(0, 2c_1r)}{|2c_1r|} \Big|_{r \rightarrow 0} = \text{sign}(c_1)(0, 1).$$

2) Теперь рассматриваем изменение параметра r в левой окрестности точки L . Сделав замену $r \rightarrow L - r$ и произведя аналогичные вычисления, получаем утверждение леммы. \square

Определение 2. Будем говорить, что кривая γ имеет особенность "невырожденная точка возврата" в точке r^* , если

$$\gamma'(r^*) = 0, \gamma''(r^*) = 0, \langle \gamma'''(r^*), w \rangle,$$

где W – единичный вектор, ортогональный вектору $v := \frac{\gamma''(r^*)}{|\gamma''(r^*)|}$, \langle, \rangle – скалярное произведение. Локально окрестность точки возврата выглядит как на рис. 3.

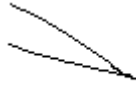


Рис. 3:

Определение 3. Дугой бифуркационной диаграммы с номером i (дугой с номером i) назовем часть бифуркационной кривой, определенной на интервале (r_1^i, r_2^i) .

Определение 4. Поддугой дуги бифуркационной кривой с номером i назовем гладкую часть дуги бифуркационной кривой, лежащую либо между соседними точками возврата, либо определенную на интервале (r_1^i, r_1^*) . или (r_k^*, r_2^i) , где r_1^*, r_k^* – первая и последняя точки возврата на дуге.

Изучим геометрию кривых вида 1. Напомним, это такие семейства точек $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (0, k(r), r, \varphi)$, где $k(r) = \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)}$, образ отображения момента котрых следующий:

$$(h, k) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)^2, \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right).$$

Лемма 3. *Вектор скорости в точках бифуркационной кривой вида 1 меняется следующим образом:*

1. *Лежит в первой (третьей) четверти, возможно обращается в 0 (в точках возврата), затем лежит в третьей (первой) четверти (рис. 4а).*

2. *Лежит во второй (в четвертой) четверти, возможно обращается в 0 (в точках возврата), затем лежит в четвертой (во второй) четверти (рис. 4б).*

3. *Лежит во второй (в третьей) четверти, затем гладко переходит в первую (четвертую) четверть (в окрестности точки $(h, k) = (0, \Lambda(r_i))$, где r_i такая, что $\Lambda'(r_i) = 0$, $r_i \neq 0, L$) (рис. 4в).*

Доказательство.

Имеем следующую параметризацию кривой:

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)^2, \Lambda - f \frac{\Lambda'}{f'} \right).$$

Тогда вектор скорости

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)' \left(\frac{\Lambda'}{f'}, -f \right).$$

Поскольку $f > 0$ на $(0, L)$, то $\dot{\gamma} = 0 \iff \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)' = 0$. Обозначим за $F := \frac{\Lambda'}{f'}$. При прохождении параметра r локального экстремума r^* функции F , знак $F' = \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)'$ меняется на

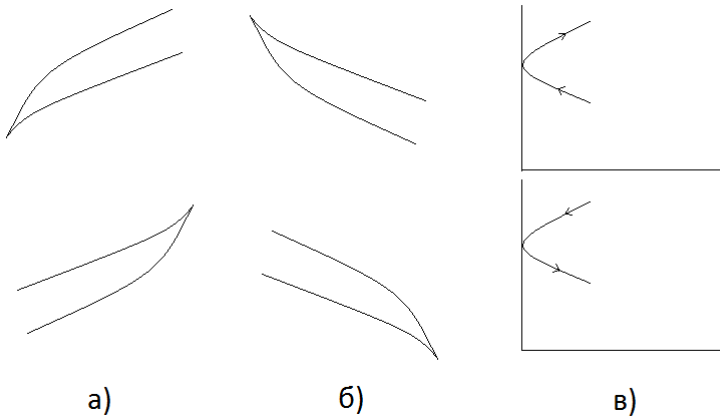


Рис. 4:

противоположный. Знак самой F в малой окрестности r^* не меняется. ”Плохая” ситуация, когда знак F мог бы меняться, возможна, если $F(r^*) = 0$. Но это равносильно $\Lambda'(r^*) = 0$. Это соответствует случаю 3 Леммы. Разберем его отдельно.

Пусть параметр r на кривой подходит к такому r_i , в котором $\Lambda'(r_i) = 0$. Покажем, что вектор скорости $\dot{\gamma}$ не равен нулю в этой точке. Имеем:

$$F'(r_i) = \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)' \Big|_{r_i} = \frac{\Lambda'' f' - \Lambda' f''}{f'^2} \Big|_{r_i} = \frac{\Lambda''(r_i)}{f'(r_i)}.$$

Но по предположению $\Lambda(r)$ – функция Морса, поэтому $F'(r_i) \neq 0$. Получили, что в малой окрестности r_i $F'(r)$ не меняет знака, а $F(r)$ меняет знак из соображений морсовости $\Lambda(r)$.

Наконец, легко видно, что такому r_i , что $\Lambda'(r_i) = 0$ соответствует точка $(h, k) = (0, \Lambda(r_i))$ бифуркационной диаграммы. \square

Определение 5. *Дугой простого типа 1 называется гладкая (всюду, кроме, возможно, точки на оси ОК) дуга,*

имеющая одну точку, лежащую на оси OK , и уходящая на $+\infty$ по h и на $+\infty$ (или $-\infty$) по k (рис. 5а).

Определение 6. Дугой составного типа 1 называется непрерывная дуга, имеющая одну точку на оси OK , состоящая из гладких (всюду, кроме, возможно, "вершины") поддуг, разделенных точками возврата, и уходящая на $+\infty$ по h и на $+\infty$ (или $-\infty$) по k (рис. 5б).

Определение 7. Дугой простого типа 2 называется дуга, состоящая из двух гладких (всюду, кроме, возможно одной из точек на оси OK) поддуг, разделенных точкой возврата, и имеющая две точки, лежащие на оси OK (рис. 5в).

Определение 8. Дугой составного типа 2 называется непрерывная дуга, имеющая две точки, лежащие на оси OK , и состоящая из гладких (всюду, кроме, возможно одной из точек на оси OK) поддуг, разделенных точками возврата (рис. 5г).

Определение 9. Дугой простого типа 3 называется дуга, состоящая из двух гладких поддуг, разделенных точкой возврата, и уходящий на бесконечность по обоим координатам одновременно ($+\infty$ по h и на $+\infty$ (или $-\infty$) по k) (рис. 5д).

Определение 10. Дугой составного типа 3 называется дуга, состоящая из гладких поддуг, разделенных точками возврата, и уходящих на бесконечность по двум координатам одновременно ($+\infty$ по h и на $+\infty$ (или $-\infty$) по k) (рис. 5е).

Дуга простого типа является частным случаем дуги составного типа. Далее под дугой будем подразумевать именно составной тип.

Определение 11. Поддугой типа A называется поддуга диаграммы, прообразу каждой точки которой соответствует атом A .

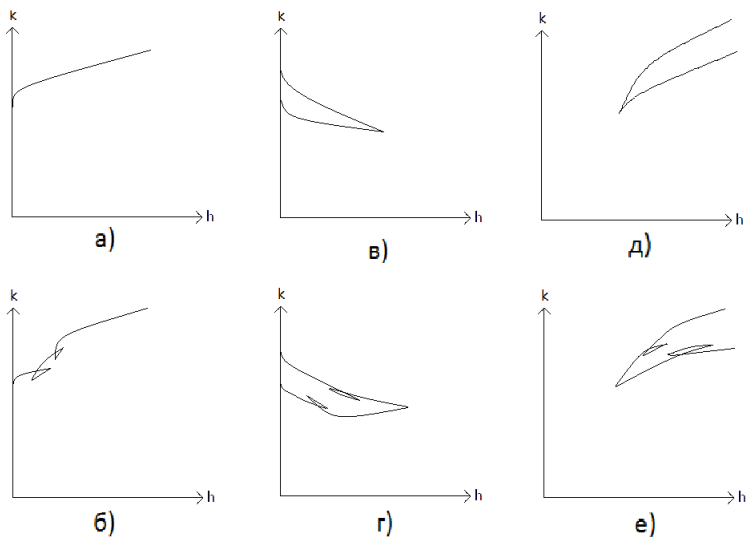


Рис. 5:

Поддугой типа V_p называется поддуга диаграммы, образуемая каждой точкой которой соответствует атом V_p (в частности, атом B).

Определение 12. Пусть H и K – гамильтониан и дополнительный первый интеграл системы. Особая точка x отображения момента (и содержащая ее фазовая траектория), такая что $dH(x) \neq 0$, называется невырожденной, если матрица

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial p_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 K}{\partial q_2 \partial q_2} \end{pmatrix}$$

невырождена в точке x .

Если $\det J(x) > 0$ или < 0 , то точка x (и содержащая ее фазовая траектория) имеет эллиптический (А) или гиперболический (В) тип соответственно.

Определение 13. Рассмотрим функцию, определенную на отрезке $[0, L]$, называемую эффективным потенциалом:

$$U_k(r) = \frac{(k - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)}.$$

Лемма 4. Для точек ранга 1 верно следующее:

1) точки параметризации вида 1 имеют эллиптический тип, либо являются вырожденными в таких $r_s, s \in \mathbb{N}$, где $\Lambda'(r_s) = 0$.

2) точки параметризации вида 2 имеют эллиптический, гиперболический тип, либо являются вырожденными в таких $r_s, s \in \mathbb{N}$, где $\Lambda'(r_s) = 0$ или $k'(r_s) = 0$. Причем при прохождении параметром r точек r_s тип меняется на противоположный.

Доказательство.

Применим определение к изучаемой системе, поменяв местами интегралы H и K . Имеем:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_r} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial r} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial r} & \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 U_k}{\partial r \partial r} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial r \partial r}$$

Подставим параметризованные точки ранга 1 обоих видов в выражение выше.

1) Для вида 2: $k(r) = \Lambda(r)$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial r \partial r} \Big|_{k(r)} = 2 \frac{\Lambda'(r)^2}{f^2(r)} \geq 0.$$

Причем выражение равно 0 только там, где $\Lambda'(r) = 0$. Следовательно, точки ранга 1, параметризованные видом 1 имеют почти всюду эллиптический тип за исключением таких r_s , что $\Lambda'(r_s) = 0, s \in \mathbb{N}$.

2) Для вида 1: $k(r) = \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)}$. Здесь

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial r \partial r} \Big|_{k(r)} = 2 \frac{\Lambda'(r)}{f(r)} \left(\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)'$$

Выражение равно нулю $\iff \Lambda'(r) = 0$ или $\left(\frac{\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)' = k'(r) =$

0. При морсовости функции $k(r)$, все ее точки экстремума изолированы, причем они не могут являться точками экстремума функции Λ . Действительно, пусть r^* такой, что $\Lambda'(r^*) = 0$. Тогда

$$k'(r^*) = \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)' \Big|_{r^*} = \frac{\Lambda'' f' - \Lambda' f''}{f'^2} \Big|_{r^*} = \frac{\Lambda''(r^*)}{f'(r^*)} \neq 0,$$

т.к. $\Lambda(r)$ – морсовская. Следовательно область определения бифуркационной кривой вида 1 разбивается на подинтервалы, отсекаемые такими значениями r_s , что либо $\Lambda'(r_s) = 0$, либо $k'(r_s) = 0$, $s \in \mathbb{N}$, при прохождении параметра r через которые происходит смена типа поддуги бифуркационной кривой (с эллиптической на гиперболическую, и наоборот). В самих r_s точки ранга 1 вырожденные. Отметим, что число таких r_s может быть счетным \square .

Лемма 5. (достаточное условие невырожденности точки возврата). Для любого промежутка (r_1^i, r_2^i) следующие условия равносильны:

1) функция $k(r)$ – морсовская на (r_1^i, r_2^i)

2) в любой критической точке r_0 функции $k(r)$ на (r_1^i, r_2^i) выполнены следующие достаточные условия на полукубическую точку возврата:

$$U'_{k(r_0)}(r_0) = 0$$

$$U''_{k(r_0)}(r_0) = 0$$

$$U'''_{k(r_0)}(r_0) \neq 0$$

$$\Lambda'(r_0) \neq 0$$

3) любая нерегулярная точка r дуги бифуркационной кривой на (r_1^i, r_2^i) является невырожденной точкой возврата (полукубической).

Доказательство.

Доказательство является чисто вычислительным. Оно основано на том, что точка r_0 является невырожденной (полукубической) точкой возврата параметрически заданной кривой $(h(r), k(r))$ только тогда, когда выполнено следующее, эквивалентное определению 2 условие:

$$h'(r_0) = 0, k'(r_0) = 0, h'''(r_0)k''(r_0) - h''(r_0)k'''(r_0) \neq 0.$$

Прямыми вычислениями устанавливается, что это эквивалентно условиям 2) на приведенный потенциал \square .

Лемма 6. *В окрестности точки возврата регулярный участок бифуркационной кривой, состоящий из точек, отвечающих атому A , лежит левее регулярного участка бифуркационной кривой, состоящего из точек, отвечающих атому B (рис. 6).*



Рис. 6:

Доказательство.

Доказательство использует свойство эффективного потенциала и полностью аналогично доказательству, представленному в [2]. \square

Теорема 2. (классификации бифуркационных дуг вида 1).

Рассмотрим натуральную механическую систему на многообразии вращения M , заданную парой функций $(f(r), L(r))$, $r \in [0, L]$. Предположим, что выполнено следующее:

а) $f(r)$ – функция Морса на интервале $(0, L)$, $\Lambda(r)$ – функция Морса на $[0, L]$ такая, что $\Lambda(0) = \Lambda(L) = 0$.

б) $\Lambda'(r)^2 + f'(r)^2 > 0$

Пусть r_j^i – все такие точки, в которых либо $f'(r_j^i) = 0$, либо $\Lambda'(r_j^i) = 0$ $j = 1, 2$, здесь $r_1^0 = 0 < r_2^0 < \dots < r_1^N < r_2^N = l$.

Рассмотрим параметризованную бифуркационную кривую вида 2, дуги которой определены на промежутках

$$I = \text{union}(r_1^i, r_2^i), N \in \mathbb{N}.$$

Тогда верно следующее:

1) параметризованная бифуркационная дуга регулярна в окрестности любого r_j^i .

2) если функция $k(r)$ является морсовской на I , то бифуркационная кривая не имеет точек накопления нерегулярных точек (т.е. в каждой ограниченной области (h, k) их конечное число) и все нерегулярные точки являются невырожденными точками возврата.

3) если $k(r)$ – морсовская на I , то точки возврата, а также точки $(h, k) = (0, \Lambda(r_j^i))$, где r_j^i такая, что $\Lambda'(r_j^i) = 0$, $r_i \neq 0, L$, делят дугу на участки двух видов (типа A и типа B), каждый из которых является образом 1-параметрического семейства эллиптических или гиперболических окружностей соответственно. Типы поддуг чередуются вдоль дуги.

4) Бифуркационная диаграмма состоит из дуг трех видов: 1, 2 и 3.

а) если $f'(r_1^i) = \Lambda'(r_2^i) = 0$ (или $\Lambda'(r_1^i) = f'(r_2^i) = 0$), то дуга на интервале I_i имеет тип 1.

б) если $\Lambda'(r_1^i) = \Lambda'(r_2^i) = 0$, то дуга на интервале I_i имеет тип 2.

в) если $f'(r_1^i) = f'(r_2^i)$, то дуга на интервале I_i имеет тип 3.

г) В точках $r_j^i \neq 0, L$, где $\Lambda'(r_j^i) = 0$, бифуркационная кривая является гладкой и касается оси ОК.

Доказательство.

1) Следует из явного вида параметризации бифуркационной кривой.

2) Следует из Леммы 5

3) Следует из Леммы 4

4) Пункты а), б) и в) следуют из явного вида параметризации бифуркационной кривой. Пункт г) следует из Леммы 2 и того факта, что

$$\dot{\gamma}|_{r_j^i} = \left(\frac{\Lambda'}{f'}\right)' \left(\frac{\Lambda'}{f'}, -f\right)|_{r_j^i} = C \left(0, -f(r_j^i)\right), C \neq 0. \square$$

Пример. (полная бифуркационная диаграмма простого вида). Пусть на интервале $(0, L)$ функция $\Lambda(x)$ имеет единственный экстремум в точке r_1 , а функция $f(x)$ – единственный экстремум в r_2 , т.ч. $r_1 < r_2$.

1) Тогда бифуркационная диаграмма системы может иметь вид как на рис. 7а.

2) При устремлении функции $\Lambda(x)$ к 0 в том смысле, что рассматривается функция $\varepsilon\Lambda(x)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$, бифуркационная диаграмма такой системы стремится к диаграмме геодезического потока без магнитного поля (рис. 7б).

Доказательство.

1) Поскольку $\Lambda'(0) = \Lambda'(r_1) = 0$, то на интервале $(0, r_1)$ бифуркационная кривая имеет тип 2. При предположении, что на этом интервале функция $k(r)$ имеет ровно один экстремум, тип является простым, то есть поддуги разделены одной точкой возврата. Далее, поскольку $\Lambda'(r_1) = f'(r_2) = 0$, то на интервале (r_1, r_2) бифуркационная кривая имеет тип 1. Если

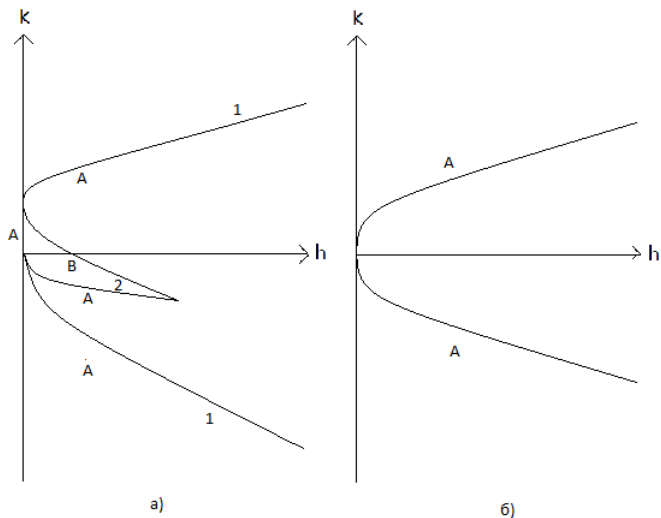


Рис. 7:

на (r_1, r_2) $k(r)$ не имеет экстремумов, то тип также является простым, т.е. без точек возврата. Окончательно, на (r_2, L) кривая тоже имеет тип 1 ($f'(r_2) = \Lambda'(L) = 0$). Если на (r_2, L) $k(r)$ не имеет экстремумов, то тип является простым типом 2. Тогда полная диаграмма может иметь вид как на рисунке. Отметим, что такая диаграмма не является однозначной. Возможно пересечение дугой типа 2 нижней поддуги типа 1.

2) Заменим $\Lambda(x)$ на $\varepsilon\Lambda(x)$ и пересчитаем явную параметризацию бифуркационных дуг. Для видов 1 и 2 :

$$(h, k)_1 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon\Lambda'(r)}{f'(r)} \right)^2, \varepsilon\Lambda(r) - f(r) \frac{\varepsilon\Lambda'(r)}{f'(r)} \right); (h, k)_2 = \left(0, \varepsilon\Lambda(r) \right).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, обе координаты для дуг вида 2 стремятся к 0. Дуга вида 1, определенная на интервале $(0, r_1)$, также стремится к 0 по обоим координатам. Таким образом, бифуркационная

диаграмма стягивается к началу координат как на рис. 8. \square

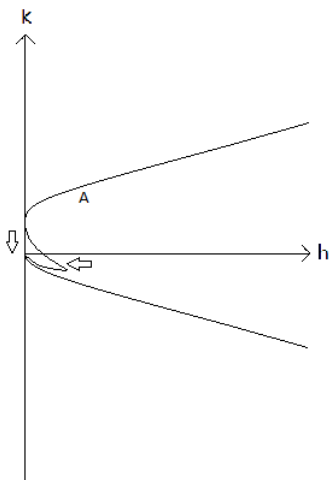


Рис. 8:

3 Список литературы.

1. Кантонистова Е. О. Лиувиллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2015. — № 5. — С. 41–44.

2. Кантонистова Е. О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Математический сборник. — 2016. — Т. 207, № 3. — С. 47–92.

3. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.