

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Топология слоений Лиувилля на поверхностях постоянной энергии
для аналога случая интегрируемости Ковалевской

Курсовая работа
студента 5 курса
Кибкало Владислава Александровича

Научный руководитель:
Академик А.Т. Фоменко

Москва, 2017 г.

1 Введение

1.1 Аннотация

И.В. Комаров обнаружил, что случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, найденный С.В. Ковалевской, можно вложить в однопараметрическое семейство интегрируемых систем на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. В работе описывается топология слоений Лиувилля таких систем на некоторых подмногообразиях в случае алгебре Ли $so(4)$. Рассматривалось две основных задачи — описать слоения на неособых подмногообразиях и описать устройство множества особых подмногообразий. Найден инварианты Фоменко-Цишанга этих слоений на всех неособых трехмерных поверхностях постоянной энергии, на которой постоянны три первых интеграла системы — гамильтониан и аналоги интеграла площадей и геометрического интеграла. Как следствие, установлены эквивалентности с другими известными системами механики и интегрируемыми бильярдами. Более обнаружено, что случай Ковалевской из механики, являющийся системой на алгебре Ли $e(3)$, может быть гладко вложен в аналогичную систему на алгебре Ли $so(4)$ за вычетом нулевого значения постоянной площадей. Кроме того, было найдено устройство множества этих троек, которым соответствуют особые поверхности. Данное множество описано с помощью матриц инцидентности как двумерный полиэдр, вложенный в трехмерное пространство. Оно же является границей множества неособых поверхностей.

Автор благодарит академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, а также Ивана Константиновича Козлова за ценные обсуждения и замечания.

1.2 Постановка задачи, основные этапы

Рассматривается интегрируемая система на алгебре Ли $so(4)$, являющаяся аналогом случая интегрируемости Ковалевской из динамики твердого тела (далее будем называть систему из механики *классическим случаем Ковалевской*). Если точнее, то это семейство динамических систем уравнений Эйлера на пучке алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, параметризованным вещественным \varkappa . Положительным значениям соответствуют системы на алгебре $so(4)$. Классический случай вкладывается в данное семейство при $\varkappa = 0$, причем имеется предельный переход к нему при $\varkappa \rightarrow +0$ [3]. Можно считать, что $\varkappa = 1$, проведя растяжение-сжатие координат.

Данная система на пуассоновом многообразии имеет четыре первых интеграла — аналог геометрического интеграла f_1 , аналог интеграла площадей f_2 , гамильтониан H и дополнительный интеграл K . Две первые функции являются функциями Казимира скобки Пуассона. Каждой паре (b, a) : $f_1 = a, f_2 = b$ — значениям функций Казимира — соответствует орбита коприсоединенного действия. Неособые орбиты (пояснено далее, во введении) являются симплектическими листами данной скобки Пуассона и совместными поверхностями уровня функций f_1, f_2 . Они компактны и связны. На таких симплектических многообразиях система является интегрируемой по Лиувиллю с парой интегралов H, K . Т.е. наша система является двухпараметрическим семейством интегрируемых систем с двумя степенями свободы на симплектических многообразиях M^4 и некоторых особых систем.

Проводится анализ топологии данной системы на алгебре Ли $so(4)$. Данные исследования опираются на развитую А.Т. Фоменко и его школой теорию топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем (подробнее в [1]). В рамках рассматриваемой задачи автором прежде были найдены допустимые базисы вблизи всех дуг бифуркационной диаграммы при всех a, b . Данные базисы заданы "единообразно что позволяет вычислить матрицы склейки для любой допустимой кривой. Во-вторых, данное рассуждение требовало только знания того, в каком множестве из I-XII находится пара (b, a) . Тогда по предложенной нам бифуркационной диаграмме (комбинаторное устройство бифуркационного комплекса известно для каждого множества I-XII и не зависит от конкретной точки этого множества) и кривой, пересекающей дуги этой диаграммы в заданном порядке (не проходя через особые точки бифуркационной диаграммы), мы умеем находить инвариант Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля на прообразе такой кривой, т.е. на трехмерной неособой Q^3 .

Целью работы является анализ топологии данной системы на алгебре Ли $so(4)$ на трехмерных поверхностях $Q_{a,b,h}^3$, являющихся совместными поверхностями уровня f_1, f_2, H . Их называют

изоэнергетическими поверхностями. А именно, будет найден инвариант Фоменко-Цишвига слоения Лиувилля на всех неособых $Q_{a,b,h}^3$. Требуется установить, какие классы лиувиллевой эквивалентности слоений встречаются, и как расположены множества троек (a, b, h) , которым соответствует каждый из классов эквивалентности. В силу компактности каждой паре (b, a) соответствует ограниченный промежуток значений h гамильтониана, при которых $Q_{a,b,h}^3$ непуста. Такие тройки далее назовем *содержательными*. Рассматривается множество \mathbb{A} содержательных троек, вложенное в \mathbb{R}^3 . В нем хотим выделить подмножества троек с неособыми Q^3 . Будет доказано, что данные подмножества являются несвязными объединениями трехмерных областей. Вообще, \mathbb{A} имеет структуру трехмерного клеточного комплекса. Его трехмерные клетки σ_i^3 — связные компоненты этих подмножеств. Их границы являются объединением клеток меньших размерностей $\sigma_i^2, \sigma_i^1, \sigma_i^0$. Этот комплекс и связанные с его клетками инварианты и бифуркации требует описать.

Ответ будет представлен в следующем виде:

1. список инвариантов Фоменко-Цишвига для регулярных $Q_{a,b,h}^3$,
2. список эквивалентностей данной системы с другими системами динамики и бильярдами на разных уровнях энергии.
3. соответствие этих меченых молекул 3-камерам комплекса \mathbb{A} ,
4. матрица инцидентности клеток комплекса, размерности которых отличаются на единицу,
5. граф G , вершины которого соответствуют 3-камерам, а ребра — двумерным граням.

Основные шаги:

1. определим проекции ребер 1-остова комплекса особых троек (a, b, h) на плоскость (b, a) . Они поделят плоскость на несколько областей.
 - (а) найдем уравнения разделяющих кривых на плоскости (a, b) . Уравнение соответствует некоторому условию на особые точки бифуркационной диаграммы.
 - (б) найдем те фрагменты на этих кривых, парам (a, b) с которых соответствуют бифуркационным диаграммам, в которые не вошла бы хоть одна особая точка из предыдущего пункта (значит, при таком (a, b) диаграмма не изменяется).
 - (с) построим разделяющее множество на плоскости (b, a) и докажем, что это есть вложенный в плоскость граф.
2. определим, какие 3-камеры проецируются в каждую из полученных двумерных областей при проекции $((a, b, h) \rightarrow (a, b))$
3. найдем перебором все меченые молекулы, встречающиеся в системе
4. сравним полученные инварианты с инвариантами других систем.
5. опишем, что понимается под вложением классического случая Ковалевской, и как это произведено.
6. составим граф трехмерных областей G
7. опишем в терминах инцидентности 2-остов A^2
8. заполним формально матрицу инцидентности клеток всех размерностей комплекса \mathbb{A}

1.3 Основные определения

1.3.1 Введение пучка алгебр Ли и семейства динамических систем на нем

Подробное описание системы было приведено в статье "Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре и $so(4)$ " [3] И.К. Козловым. Для полноты изложения приведем его здесь.

Пусть \mathfrak{g} - конечномерная вещественная алгебра Ли, \mathfrak{g}^* - ее двойственное пространство. Имеет место каноническое отождествление алгебры Ли и ее второго двойственного пространства в этом случае. Зададим скобку Пуассона на \mathfrak{g}^* следующим образом:

$$\{f, g\} = \langle x, [df|_x, dg|_x] \rangle. \quad (1.1)$$

. Запись $\langle \cdot, \cdot \rangle$ кодирует спаривание ковектора из \mathfrak{g}^* и вектора \mathfrak{g} , а через $[\cdot, \cdot]$ обозначен коммутатор в алгебре Ли \mathfrak{g} .

Обозначим через x_1, \dots, x_n линейные координаты в двойственном пространстве \mathfrak{g}^* , H — некая гладкая функция на \mathfrak{g}^* . Определим, как можно задать динамическую систему на коалгебре:

Определение 1. Уравнениями Эйлера для алгебры Ли \mathfrak{g} называются уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad (1.2)$$

задающие динамическую систему на \mathfrak{g}^* .

Классический случай Ковалевской можно задать уравнениями Эйлера на алгебре Ли $e(3)$. И.В Комаров в работе "Базис Ковалевской для атома водорода" (4) предложил следующим образом включить его в однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем, заданных на пучке алгебр Ли $so(4) - e(3) - so(3, 1)$.

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^6 и некоторый его базис $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$. Введем семейство коммутаторов, зависящих от параметра $\varkappa \in \mathbb{R}$:

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k, \quad [e_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k, \quad [f_i, f_j] = \varkappa \varepsilon_{ijk} e_k, \quad (1.3)$$

где ε_{ijk} — знак перестановки $\{123\} \rightarrow \{ijk\}$. Случай $\varkappa > 0$ соответствует алгебре Ли $so(4)$, случай $\varkappa = 0$ — алгебре Ли $e(3)$, а $\varkappa < 0$ — алгебре Ли $so(3, 1)$.

Обозначим через $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$ базис в двойственном пространстве, взаимный для введенного выше базиса $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$. Чтобы записать скобку Ли-Пуассона в базисе коалгебры, достаточно заменить квадратные скобки коммутатора на фигурные — скобки, а базис из \mathbb{R}^6 на взаимный:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (1.4)$$

Определение 2. Функцией Казимира некоторой скобки Пуассона назовем функцию, коммутирующую с любой другой функцией относительно данной скобки.

Введенная выше скобка имеет две функции Казимира при любом $\varkappa \in \mathbb{R}$. А именно,

$$f_1 = \mathbf{x}^2 + \varkappa \mathbf{J}^2, \quad f_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{J} \rangle, \quad (1.5)$$

где через \mathbf{x} и \mathbf{J} обозначены трёхмерные вектора (x_1, x_2, x_3) и (J_1, J_2, J_3) соответственно, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение двух векторов из \mathbb{R}^3 .

Совместные поверхности уровня

$$M_{a,b} = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \mid f_1(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = a, \quad f_2(\mathbf{J}, \mathbf{x}) = b\} \quad (1.6)$$

являются орбитами коприсоединённого представления, за исключением случая, когда $\varkappa \leq 0, a = 0, b = 0$ (в этом случае поверхность уровня является объединением нескольких орбит коприсоединённого представления). Во всех остальных случаях поверхности $M_{a,b}$ являются симплектическими

листами скобки (1.4), в частности, скобка (1.4) задаёт на них структуру симплектического многообразия. Если $\varkappa > 0$ и $a > 2\sqrt{\varkappa}|b|$, то эти орбиты $M_{a,b}$ являются четырёхмерными подмногообразиями $\mathbb{R}^6(\mathbf{J}, \mathbf{x})$. При $\varkappa < 0$ орбиты некомпактны.

Рассматриваемая ниже система на пучке алгебр задана следующим гамильтонианом H и интегралом K

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1x_1, \quad (1.7)$$

а интеграл имеет вид

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1J_2 - 2c_1x_2)^2, \quad (1.8)$$

здесь c_1 — произвольная постоянная. Можно считать, что $c_1 = 1$ и $\varkappa \in \{-1, 0, 1\}$.

1.3.2 Слоение Лиувилля на $M_{a,b}^4$

В данном пункте приведем основные понятия и факты о слоениях Лиувилля вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Систематически и подробно данная теория изложена в книгах А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация", [1].

Каждой паре вещественных значений (b, a) функций Казимира f_2 и f_1 соответствует некоторое подмножество точек x исходного пространства \mathbb{R}^6 , обозначаемое $M_{a,b}^4$:

$$M_{a,b}^4 := \{x \in \mathbb{R}^6 \mid f_1(x) = a, f_2(x) = b\}.$$

Для почти всех (b, a) это есть четырехмерное симплектическое многообразие, диффеоморфное $S^2 \times S^2$. Отметим, что взаимно-однозначная функциональная замена $(f_1, f_2) \rightarrow (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ в классе функций Казимира, регулярная в точке (a, b) , переведет гладкие $M_{a,b}^4$ и $Q_{a,b,h}^3$ в гладкие многообразия, и сохранит структуру слоения Лиувилля, о котором скажем чуть ниже.

Определение 3. *Отображением момента* назовем отображение $M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathfrak{F} = (H, K)$.

Определение 4. Точка $x \in M^4$ называется *критической*, если $\text{rank} \mathfrak{F}|_x < 2$

Если множество $M_{a,b}^4$ компактно, то образ \mathfrak{F} на плоскости \mathbb{R}^2 ограничен. В нашем случае он является связным компактным множеством размерности 2 с кусочно-гладкой границей.

Определение 5. *Бифуркационной диаграммой отображения момента* называется образ множества критических точек отображения момента $\mathfrak{F} = (H, K)$.

Бифуркационная диаграмма Σ обычно состоит из некоторого числа кусочно гладких дуг и изолированных точек. Обычно $\text{rk} \mathfrak{F} = 1$ в каждой внутренней точке ребра. Точки пересечения, касания и возврата данных кривых называются ее особыми (сингулярными) точками. В нашей системе изолированная точка встречается только при $a = 0, b = 0$ (возможно, при $u = 2, v = 2$). Отметим, что положение данных кривых и особых точек на плоскости (h, k) зависит от значений параметров (b, a) .

Определение 6. Система $v = \text{sgrad} H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n таких, что

1. f_1, \dots, f_n — первые интегралы системы,
2. они функционально независимы на M^{2n} (т.е. их градиенты линейно независимы почти на всем M^{2n}),
3. $\{f_i, f_j\} = 0$ для всех i, j ,
4. все векторные поля $\text{sgrad} f_i$ полны.

Совместную поверхность уровня n таких первых интегралов вполне интегрируемой системы назовем *регулярной*, если всюду на ней градиенты функций f_i линейно независимы.

Определение 7. Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, назовем разбиение M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня функций f_1, \dots, f_n .

Слоение Лиувилля в окрестности регулярной поверхности описывается теоремой Лиувилля:

Теорема 1 (Лиувилль). Пусть T_ξ есть регулярная совместная поверхность уровня n первых интегралов $\{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \xi_i\}$ вполне интегрируемой системы $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) . Тогда

1. T_ξ является гладким лагранжесвым подмногообразием, инвариантным относительно потоков $\text{sgrad } H, \text{sgrad } f_i$,
2. если T_ξ связно и компактно, то оно диффеоморфно n -мерному тору (называемому тором Лиувилля),
3. слоение в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению $D^n \times T^n$,
4. в такой окрестности существуют координаты действие-угол, в которых гамильтоновы выпрямляются, т.е. в них на каждом торе из окрестности задано условно-периодическое движение, и траектории являются прямолинейными обмотками.

Замечание 1. 1) Полная формулировка приведена в книге 1.

2) Последний пункт означает, что торы Лиувилля нерезонансных систем являются замыканиями решений исходной интегрируемой системы.

3) Рассматриваемые в работе системы являются боттовскими на трехмерных поверхностях, топологически устойчивыми и нерезонансными, и dH не равен нулю на неособых Q^3 . Подробнее об этих требованиях можно прочитать в главах 1,3,4 первого тома [1].

1.3.3 Лиувиллева эквивалентность слоений на Q^3 . Меченые молекулы как полный инвариант

Определение 8. Допустимой назовем кривую γ на плоскости (h, k) , которая не пересекает себя, не проходит через особые точки бифуркационной диаграммы и, если пересекает ее дуги, то трансверсально.

Прообразом допустимой кривой является гладкое трехмерное многообразие Q^3 . Такие и только такие трехмерные гладкие многообразия Q^3 разбиваются в объединение связных компонент совместных поверхностей уровня интегралов H и K . Оно не пересекается с прообразами сингулярных точек бифуркационной диаграммы. Считаем также, что dH не равен нулю на Q^3 .

Определение 9. Функция f на трехмерном многообразии называется функцией Ботта, если ее критические точки организованы в невырожденные критические многообразия.

Это означает, что d^2f невырожден на подпространстве, трансверсальном к многообразию, и функция f является там функцией Морса. Критические подмногообразия для f могут быть окружностями, торами или бутылками Клейна, но в нашей системе присутствуют только критические окружности. Трехмерная поверхность расслаивается на особые слои, соответствующие точкам пересечения ее образа с ребрами бифуркационной диаграммы, и неособые торы, семейства которых соответствуют интервалам между точками пересечения γ и Σ . Типичные перестройки ранга 1 хорошо описываются в терминах атомов:

Определение 10. 3-атомом назовем класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля.

3-атом является трехмерным многообразием с одним связным особым слоем. В системе Ковалевской встречаются атомы типов A, A^*, B, C_2 . По теореме А.Т. Фоменко всякая такая трехмерная окрестность особого слоя слоения Лиувилля окажется расслоением Зейферта, все слои которого лежат на каком-то из торов Лиувилля, а особые слои при их наличии обязательно имеют тип $(2,1)$.

Целью работы является описание лиувиллевой эквивалентности слоений Лиувилля на трехмерных поверхностях. Для этого напомним понятие такой эквивалентности. Вообще, различают несколько отношений эквивалентности гладких динамических систем. В книгах А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [1] развита и подробно изложена теория классификации для интегрируемых гамильтоновых систем на четырехмерных многообразиях M^4 и на трехмерных Q^3 .

Определение 11. Две интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на M_1^4 и M_2^4 (соответственно, Q_1^3 и Q_2^3) называются лиувиллево эквивалентными, если существует послойный диффеоморфизм M_1^4 на M_2^4 (соответственно, Q_1^3 на Q_2^3), переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй.

От послойного диффеоморфизма $\sigma : Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ часто требуют дополнительно, чтобы он сохранял ориентацию Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию критических окружностей дополнительного интеграла (интегралы предполагают боттовскими на соответствующих поверхностях).

Изучение системы на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности будет называть *лиувиллевым анализом*.

Слоения на Q^3 можно описать и классифицировать с помощью некоторых графов. *Грубой молекулой* или *графом Фоменко* называют граф, вершины которого соответствуют особым слоям слоения, а ребра — семействам регулярных торов. Классификация послойных окрестностей особых слоев (называемых 3-атомами) известна, и каждой вершине молекулы сопоставлено обозначение для окрестности такого особого слоя. В реальных системах чаще встречаются атомы A, B, A^*, C_2, D_1 . Атом A — эллиптический, имеет структуру полнотория, расслоенного на торы и одну особую окружность. Остальные атомы седловые. Атомам без звездочек соответствуют ориентируемые сепаратрисные диаграммы, а атомам со звездочками — неориентируемые. Граница каждого 3-атома — один или несколько торов. Отметим, что грубые молекулы позволяют различать системы с точностью до *грубой лиувиллевой эквивалентности*.

Для собственно лиувиллева анализа требуется более детальное описание. Разрежем трехмерную расслоенную поверхность по границам 3-атомов. Поскольку семейства торов, соответствующие ребрам графа, регулярны, то задание базиса в группе $\pi_1(T^2)$ или $H_1(T^2)$ на одном из двух граничных торов такого семейства задает этот же базис и на втором. Значит, можно задать диффеоморфизм склейки граничных торов двух атомов. Он задается автоморфизмом группы $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т.е. целочисленной матрицей C с определителем $\det C = -1$, называемой *матрицей склейки*. Такая матрица переводит базис на границе одного атома в базис на границе другого. Рассматриваемые базисы должны удовлетворять ряду условий — такие и только такие базисы будут называться *допустимыми базисами*. Отметим, что определение допустимого атома несколько отличается в разных работах по данной тематике, и при использовании результатов других авторов желательнее обращать на это внимание.

Набор матриц склейки для каждого из торов разреза, получим *избыточное оснащение молекулы*. Посчитав по данным матрицам некоторые числа (*метки* r, ε, n), и приписав их ребрам и некоторым группам атомов грубой молекулы, получим *меченую молекулу*. Она также называется *инвариантом Фоменко-Цишанга* слоения Лиувилля на данной трехмерной поверхности. Он является полным инвариантом — верна следующая теорема:

Теорема 2 (Фоменко–Цишанг). *Две системы на трехмерных поверхностях лиувиллево эквивалентны \iff их меченые молекулы одинаковы.*

Если быть чуть строже, разрешено менять ориентацию Q^3 , направление движения по ребрам молекулы, ориентацию гамильтонова векторного поля. Подробно эти конструкции описаны в главах 3 – 4 первого тома [1].

1.3.4 Регулярные и особые тройки (a, b, h) . Разделяющее множество на плоскости (a, b)

В работе более детально будет рассматриваться более узкий класс трехмерных многообразий:

Определение 12. *Изоэнергетической поверхностью $Q_{a,b,h}^3$ назовем множество*

$$\{x \in \mathbb{R}^6 \mid f_1(x) = a, f_2(x) = b, H(x) = h\}.$$

Образом изоэнергетической поверхности $Q_{a,b,h}^3$ является вертикальная прямая $H = h$, проведенная в образе отображения момента для $M_{a,b}^4$. Поскольку при всех значениях a, b образ отображения момента компактен, то многие тройки в пространстве $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ соответствуют пустому множеству. Далее такие тройки не рассматриваем:

Определение 13. Назовем значение h гамильтониана H *содержательным* для данной пары (b, a) , если поверхность $Q_{a,b,h}^3$ соответствующая тройке (a, b, h) , непуста. Аналогично будем называть саму тройку (a, b, h) и точку на оси Oh бифуркационной диаграммы для данных (a, b) . Пару a, b назовем *содержательной*, если существует содержательная тройка (a, b, h) .

В статье И.К. Козлова [3] было построено пять кривых на плоскости b, a , которым соответствуют перестройки бифуркационной диаграммы. Только пары (a, b) , попавшие на эти кривые, имеют хотя бы две точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) с принципиально разными соответствующими им бифуркационными диаграммами в каждой малой своей окрестности.

При любом значении (b, a) , не лежащем на этих пяти кривых, в бифуркационную диаграмму входят только типичные особые точки (точки пересечения, касания, возврата ее дуг и изолированные ее точки). В работе 3 они обозначались как $y_1 \dots y_{13}, z_1 \dots z_{11}$. Зафиксируем пару значений (b, a) и упорядочим множество этих точек по возрастанию их абсцисс.

Определение 14. *Набором символов, соответствующим данной паре значений (b, a) (кратко, набором пары (b, a) или набором точки плоскости (b, a)), назовем множество названий особых точек бифуркационной диаграммы, входящих в нее при данном значении (b, a) , упорядоченное по возрастанию абсцисс этих особых точек.*

Под символом особой точки понимаем ее обозначение из работы [3], где такие точки касания и пересечения ровно двух дуг бифуркационной диаграммы и точки возврата параметрической кривой были обозначены y_1, \dots, z_{11} .

Определение 15. Назовем *регулярными* трехмерные изоэнергетические поверхности $Q_{a,b,h}^3$, не содержащие прообразов особых точек бифуркационной диаграммы. Так же будем называть саму тройку (a, b, h) .

Термином "неособые" тоже будем называть регулярные тройки или пары значений параметров и соответствующие многообразия.

Определение 16. *Особыми $Q_{a,b,h}^3$ назовем изоэнергетические поверхности, содержащие особые точки бифуркационной диаграммы или имеющие меньшую чем 3 размерность.*

Замечание 2. Позднее увидим, у регулярной $Q_{a,b,h}^3$ существует целая окрестность в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$, поверхности всех точек которой регулярны.

Наравне с набором особых точек предложим еще одно описание для (b, a) .

Определение 17. Набором графов, соответствующим паре значений (b, a) назовем описанные ниже инварианты для точек оси Oh из некоторого множества. В данное упорядоченное множество входит по одной внутренней точке h_i из каждого отрезка оси Oh , несовпадающие концы которого являются проекциями особых точек бифуркационной диаграммы, а все его внутренние точки такими не являются. Инвариантом является молекула Фоменко с приписанным каждому атому названием соответствующей ему дуги бифуркационной диаграммы для изоэнергетической поверхности Q_{a,b,h_i}^3 . Данное множество инвариантов упорядочим по росту значения гамильтониана.

Данное определение корректно: инвариант не меняется при изменении h , не проходящем через проекции особых точек. Инвариант для каждой неособой $Q_{a,b,h}^3$ соответствует одному из элементов набора графов для точки (b, a) . Граф неособой поверхности для каждого из отрезков оси Oh не входит в набор графов дважды, отрезки несодержательных значений h не добавляют графов в набор. Особые $Q_{a,b,h}^3$ не могут попасть в набор, и если две особые точки имеют одинаковую абсциссу при данных (b, a) , то набор графов такой точки будет отличаться от наборов графов для точки с несовпадающими абсциссами особых точек.

По сути, мы выбираем набор "разных" топологически устойчивых систем на $Q_{a,b,h}^3$ при фиксированных a, b и запоминаем их инварианты

Определение 18. Назовем *комбинаторно одинаковыми* бифуркационные диаграммы, соответствующие двум точкам плоскости параметров, если они изоморфны как графы, вершины которых помечены названиями особых точек, а ребра — названиями дуг.

Определение 19. Назовем *одинаковыми* бифуркационные диаграммы, соответствующие двум точкам плоскости параметров, имеющим одинаковые наборы особых точек.

Определение 20. *Разделяющим множеством на плоскости (b, a) (или (u, v))* назовем те ее точки, в любой окрестности которых имеются хотя бы две точки, для которых M_{a_i, b_i}^4 имеют не одинаковые бифуркационные диаграммы.

Автоматически в разделяющее множество вошли пять найденных И.К. Козловым кривых, все точки падения размерности $M_{a,b}$, все граничные точки множества содержательных (b, a) . Также туда попадет луч $b = 0, a > 0$ — в отличие от соседних с ним областей, некоторые особые точки на бифуркационных диаграммах, соответствующих его точкам, склеиваются или просто их абсциссы совпадают.

Определение 21. *Регулярной* назовем пару (b, a) , не принадлежащую разделяющему множеству. Соответствующее ей $M_{a,b}^4$ также назовем регулярным.

Плоскость Oab будет разделена на некоторые множества (двумерные, одномерные и нульмерные), точки которых имеют одинаковые наборы символов особых точек. Каждому из таких двумерных подмножеств будет построен набор его графов. В первую очередь найдем все двумерные фрагменты множеств I-IX и одномерные фрагменты множеств X-XII, лежащих на луче $b = 0, a \geq 0$. Между данными подобластями областей I-IX находятся кривые и точки разделяющего множества. Описав возникающие во всех таких подмножествах наборы графов, найдем ответ на вопрос, какие неособые $Q_{a,b,h}^3$ встречаются в системе.

Утверждение 1. *Встречающимся в системе регулярным поверхностям $Q_{a,b,h}^3$ соответствуют ровно 32 попарно различных грубых молекулы, чьи вершины помечены названиями дуг бифуркаций.*

В регулярные $M_{a,b}^4$ входят только особые $Q_{a,b,h}^3$, соответствующие строго одной из списка описанных И.К. Козловым особых точек $y_1 \dots z_{11}$. Все остальные особые $Q_{a,b,h}^3$ могут входить лишь в $M_{a,b}^4$ для (a, b) из разделяющего множества. Множество особых $Q_{a,b,h}^3$ будет представлено в виде полиэдра. Неособые $Q_{a,b,h}^3$ будут охарактеризованы сначала графом Фоменко с названиями дуг бифуркационной диаграммы, а затем меченой молекулой.

Замечание 3. Разделим сферу употребления слов "особый" и "критический" —

Критические точки — пары интегралов H, K в $M_{a,b}^4$.

Особые — точки бифуркационной диаграммы (точки касания, пересечения, возврата ее дуг), особая тройка (a, b, h) и особое многообразие $Q_{a,b,h}^3$, содержащее такую критическую точку (ранга 0) или одномерную вырожденную орбиту.

Будем стараться не называть критическими — точки бифуркационной диаграммы, а особыми — точки падения ранга \mathfrak{F} в M^4 .

1.3.5 Допустимые базисы и ориентация

Определение допустимого базиса было дано в книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [1]. Для каждого из типов атома сложным вопросом является нахождение направления одного из базисных циклов. В случае атома A цикл λ определен однозначно, а цикл μ — с точностью до прибавления циклов λ . Направление цикла μ , в качестве которого подходит ось полнотория, определяется по направлению поля $sgrad H$ на критической окружности. Направление цикла λ выбирается исходя из некоторых условий на ориентации. В [1] предложено сравнивать ориентацию многообразия Q^3 с ориентацией, задаваемой касательными векторами к циклам λ, μ . Данные условия даны в терминах ориентации многообразия Q^3 и направления обхода некоторого сечения данного атома. Многообразие Q^3 ориентируемо, и его ориентация дополняется вектором $grad H$ до ориентации M^4 , которое является симплектическим, следовательно ориентируемым.

П.В. Морозов в работе 5 сформулировал эквивалентное условие в терминах внешней нормали к 3-атому изоэнергетического многообразия. Правильное направление цикла mi выбирается из следующего условия: тройка $(\lambda, \mu, grad F)$, где λ и μ — первый и второй базисные циклы на данном граничном торе атома, должна быть положительно ориентирована в изоэнергетическом многообразии на положительном торе и отрицательно — на отрицательном. Ориентация на Q^3 полагается фиксированной изначально. Отрицательные торы — соответствующие уровню $d - \varepsilon$, положительные торы — соответствующие уровню $d + \varepsilon$, где особый слой атома является поверхностью уровня $F = d$. Т.е. отрицательными границами атома называют те граничные торы, на которых значение F является минимальным в этом атоме.

Для доказательства теоремы об особенностях типа центр-центр, с помощью которой находятся допустимые базисы на новых дугах бифуркационной диаграммы, нам требуется выразить это условие в терминах явно заданной четверки векторных полей $grad H, N, \gamma_1, \gamma_2$ — градиента функции H , внешней нормали N к 3-атому, приложенной к его граничному тору и полей векторов скорости γ_1, γ_2 базисных циклов λ, μ на нем. Ориентация четырехмерного симплектического многообразия (M^4, ω) определяется симплектической 2-формой ω , выраженной через скобку Пуассона (для неособых (b, a) симплектический лист). Рассмотрим допустимую кривую на бифуркационной диаграмме отображения момента. Её прообразом является трехмерное многообразие Q^3 . Берем прообраз 3-атома, вблизи которого хотим строить базисы на торах.

На плоскости (h, k) всякая допустимая кривая, пересекающая трансверсально не вертикальную дугу бифуркационной диаграммы (вертикальных дуг в нашем случае нет), может быть локально продеформирована к малому вертикальному отрезку в окрестности точки пересечения. Он является образом 3-атома. Вектор внешней нормали N к граничному тору такого многообразия будет коллинеарен вектору градиента дополнительного $grad K$. Значит, малый сдвиг вдоль поля N по-прежнему оставляет точку в рассматриваемом Q^3 . Знак определителя четверки векторов постоянен.

В прообразе точек, лежащих ниже рассматриваемой дуги бифуркационной диаграммы, векторные поля $grad K$ и N направлены противоположно, а выше — одинаково. Потому вблизи от точки пересечения с дугой диаграммы четверка $(grad H, N, \gamma_1, \gamma_2)$ совпадает с $(grad H, \eta grad K, \gamma_1, \gamma_2)$, где η — требуемый П.В. Морозовым знак ориентированного объема тройки векторных полей $\gamma_1, \gamma_2, grad K$.

1.3.6 Аналог случая Ковалевской-Яхья на $so(4)$

Х.М. Яхья в работе 19 предложил интегрируемый аналог классического случая Ковалевской, усложненный наличием гиростатических сил. При $\lambda = 0$ имеем стандартный случай Ковалевской на алгебре Ли $e(3)$. Данная система, как и система Ковалевской, допускает обобщение на пучок алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ — следующие интегралы находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, зависящей от знака \varkappa :

$$\tilde{H} = \frac{J_1^2}{4} + \frac{J_2^2}{4} + \frac{(J_3 + \lambda)^2}{2} - 2c_1 x_1$$

$$\tilde{K} = \left(\frac{J_1^2}{4} - \frac{J_2^2}{4} + 2c_1x_1 + 4\kappa c_1^2\right)^2 + \left(\frac{2J_1J_2}{4} + 2c_1x_2\right)^2 - \frac{\lambda}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 16\kappa c_1^2)(J_3 + 2\lambda) - 4c_1x_3\lambda J_1$$

Данные формулы встречались, например, в работе Видно, что данная система при $\lambda = 0$ есть случай Ковалевской на $so(4)$, а при $\text{varkappa} = 0$ — случай Ковалевской-Яхьи на алгебре Ли $e(3)$. Если для данной системы существует непрерывный предельный переход, сохраняющий типы особых точек и бифуркации на "выживающих" ребрах к случаю Ковалевской-Яхьи и к случаю Ковалевской на $so(4)$, то при анализе этого случая можно будет пользоваться результатами классификации слоений Лиувилля для обоих случаев — т.к. выбор базисов будет согласованным на дугах классического случая Ковалевской, и условия на ориентацию базисов эквивалентны.

1.4 История вопроса

1.4.1 Топологический анализ системы при $\kappa = 0$

Система при $\kappa = 0$ является широко известным случаем интегрируемости Ковалевской. В работе она зачастую будет называться "классическим случаем". В работе А.В.Болсинова, П.Рихтера и А.Т.Фоменко "Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской"[2] проводился лиувиллев анализ такой системы — при помощи нового метода круговых молекул были найдены меченые молекулы всех изоэнергетических поверхностей в случае $\kappa = 0$.

В той статье было перечислено много результатов исследования системы Ковалевской, достигнутых с использованием других подходов. В работах [14], [15] предлагалось рассматривать $\Sigma_{h,k,l}$ — множество особых троек (h, k, l) в соответствующем $\mathbb{R}^3(h, k, l)$ значений H, K, L . Оно имеет структуру объединения нескольких поверхностей. В этом пространстве имеется 5 областей регулярности. Здесь H, K, L — гамильтониан, дополнительный интеграл и интеграл площадей системы, есть функции от переменных, линейно зависящих от координат x_1, \dots, J_3 из нашей задачи. Для задачи Ковалевской в работе 2 предлагалось рассматривать не только трехмерные бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,k,l}$, но и их проекции на плоскость двух параметров (h, l) или сечения $\Sigma_{h,k,l}$ плоскостью $L = l$ с переменными (h, k) . В сечении получаем бифуркационную диаграмму отображения момента. В проекции $\Sigma_{h,l}$ увидим, когда меняются топологические типы изоэнергетических поверхностей (с точностью до гомеоморфизма), и когда перестраиваются слоения на торы Лиувилля без смены топологического типа многообразия. Множество $\Sigma_{h,k,l}$ в работах Г.Г. Апфельрота 16 было разделено на 4 класса. Они могут быть описаны в терминах 3-атомов. При переходе от одного класса к другому имеются вырождения одномерных орбит. В бифуркационной диаграмме дуги соответствуют одному из классов Апфельрота, а особые точки являются пересечением плоскости $L = l$ и одномерного остова $\Sigma_{h,k,l}$, обозначенного как $\Sigma_{h,k,l}^1$. Если $Q^3(1, l, h)$ является особым в смысле нашего определения, то в бифуркационную диаграмму попадают т.н. суперсингулярные точки из нульмерного остова $\Sigma_{h,k,l}^0$. Сингулярным кривым соответствует движение определенного типа (подвешенный или стоящий вертикально спящий волчок и карусельное движение) или вырождения классов Апфельрота, а суперсингулярным точкам — некоторые их комбинации, неформально говоря.

Вообще, бифуркационная диаграмма данной системы рассматривалась в работах [18, 17, 1]. Также были известны грубые молекулы этой системы, разбиение плоскости h, l на области с одинаковыми слоениями. А именно, в системе присутствовало 17 открытых связных компонент множеств неособых изоэнергетических поверхностей с одинаковыми слоениями. Положение в плоскости h, l симметрично относительно луча $l = 0$. Из этих 17 множеств 3 включают в себя промежутки этого луча, еще 7 имеют симметричную область относительно него.

В статье [2] были найдены матрицы склейки на ребрах грубых молекул, известных ранее:

Теорема 3 (Болсинов, Рихтер, Фоменко). *В системе волчка Ковалевской встречается в точности 10 слоений Лиувилля, которые попарно не лиувиллево эквивалентны. Их меченые молекулы, вычисленные с единообразным выбором ориентации, приведены в таблице 1.*

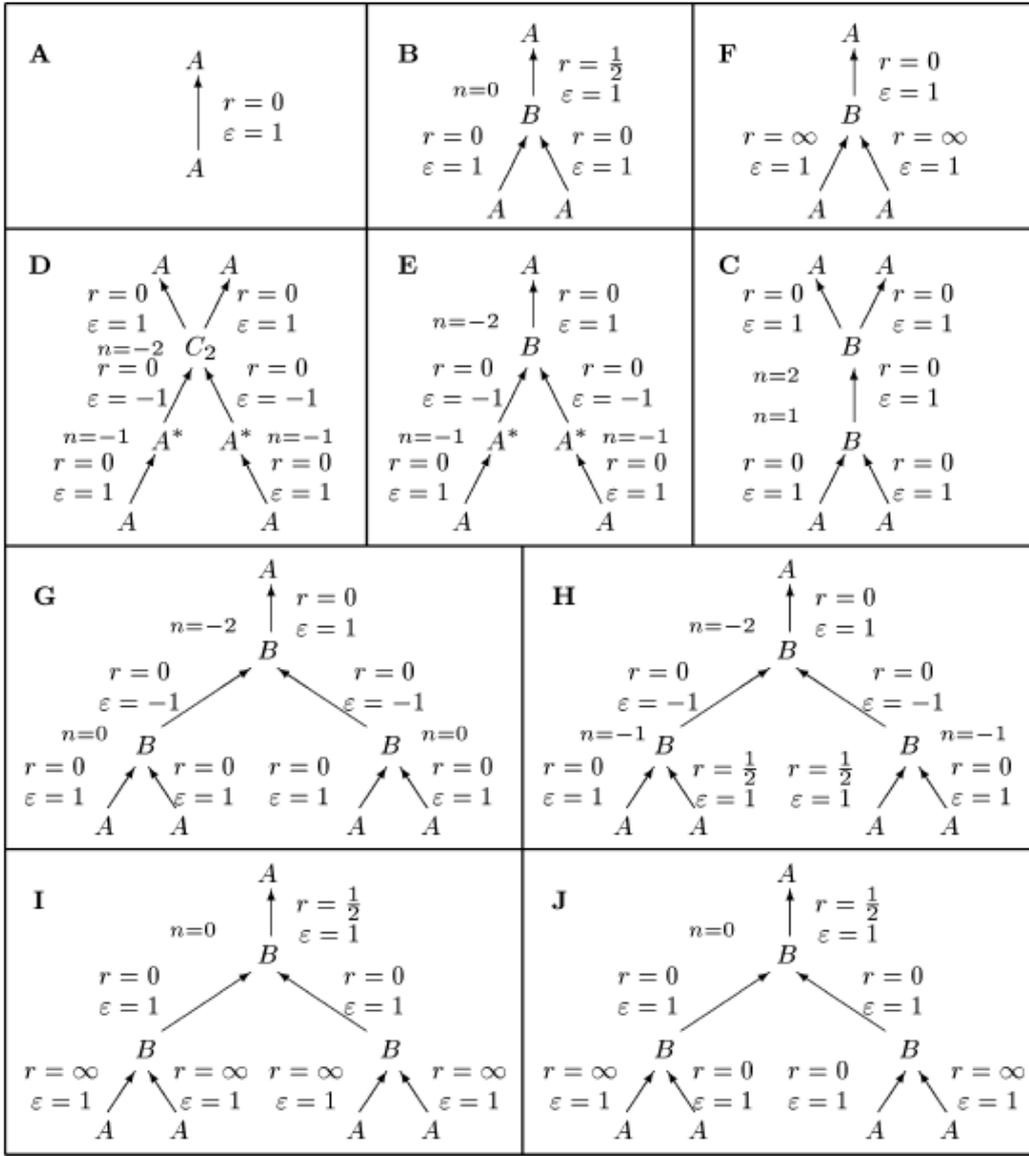


Таблица 1: Меченые молекулы для классического случая Ковалевской.

Здесь и далее допустимые базисы будут выражаться через найденные в [2] однозначно определенные λ -циклы. Рассматривался тор Лиувилля, представленный как фактор-пространство плоскости по решетке Γ . В той работе базисные циклы обозначались как λ_i , где индекс совпадал с обозначением соответствующей дуги, например, λ_{α_1} как λ -цикл на дуге α_1 . Кроме такого обозначения будет записывать циклы стрелками, соответствующими элементам решетки Γ . Соответствующие рисунки 1 – 5 взяты из работы [2].

1.4.2 Результаты И.К. Козлова: бифуркационные диаграммы и типы особых точек

Наши исследования опираются на результаты, полученные И.К. Козловым в работе “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ ” [3]. В ней построены бифуркационные диаграммы при разных значениях функций Казимира (параметров (b, a)), определено, какие перестройки происходят на дугах бифуркационной диаграммы, найдены ранги и типы ее особых точек и круговые молекулы этих особых точек. Приведенные в этом разделе теоремы, леммы, замечания и рисунки были взяты из [3]. Сами бифуркационные диаграммы будут приведены в разделе, посвященном меченым молекулам изоэнергетических многообразий. Напомним, что регулярными называем пары (b, a) , для которых $a^2 - 4\kappa b^2 > 0$ и $b > 0$.

Лемма 1.1. Пусть $b \neq 0$ и $\kappa \neq 0$. Тогда для любой неособой орбиты $M_{a,b}$ (то есть для любой такой орбиты, что $a^2 - 4\kappa b^2 \neq 0$) бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ интегрируемой гамильтоновой

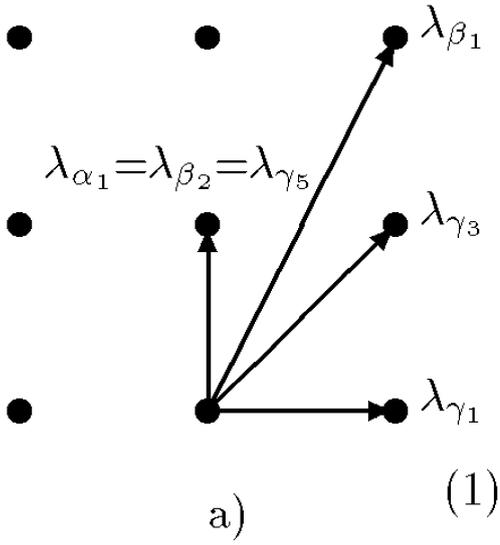


Рис. 1: базисы семейства (1) при $\varkappa = 0$

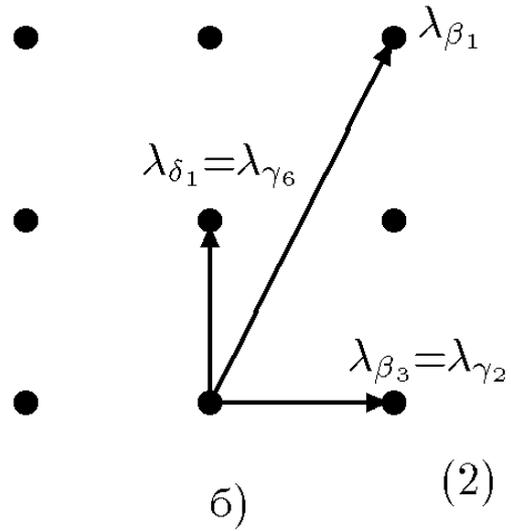


Рис. 2: базисы семейства (2) при $\varkappa = 0$

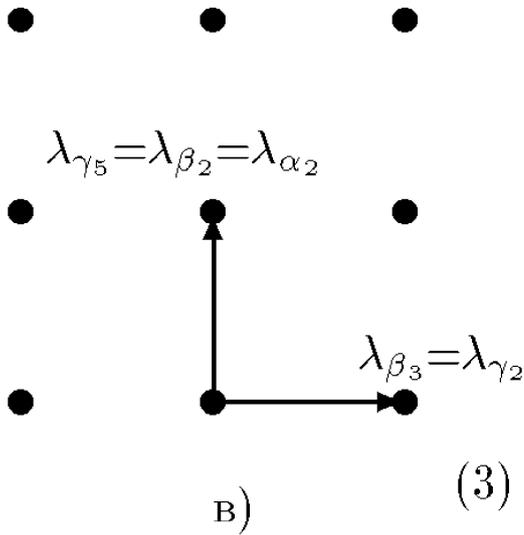


Рис. 3: базисы семейства (3) при $\varkappa = 0$

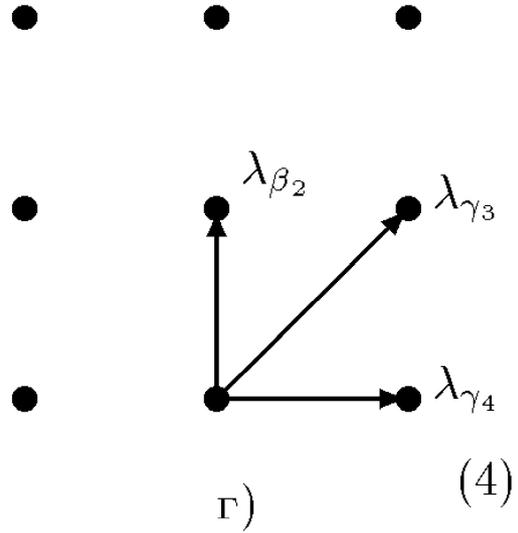


Рис. 4: базисы семейства (4) при $\varkappa = 0$

системы с гамильтонианом (1.7) и интегралом (1.8) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$:

1. Прямая

$$k = 0 \tag{1.9}$$

2. Параметрическая кривая,

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \quad k(z) = \left(4ac_1^2 - \frac{4b^2 c_1^2}{z} + \frac{b^4 c_1^4}{z^4} \right) - 2\kappa c_1^2 h(z) + \kappa^2 c_1^4, \tag{1.10}$$

где $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3. Объединение двух парабол

$$k = \left(h - \kappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\varkappa} \right)^2 \tag{1.11}$$

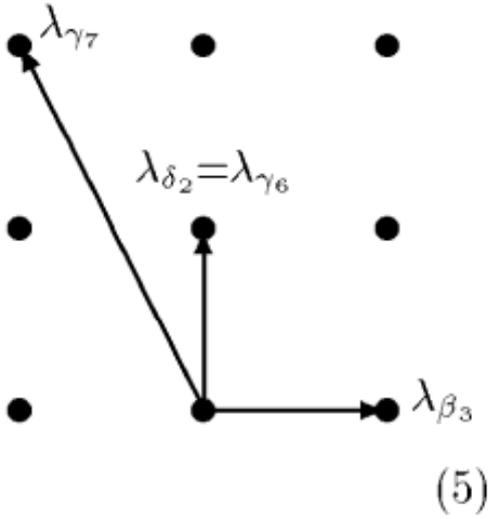


Рис. 5: базисы семейства (5) при $\varkappa = 0$

u

$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{a}{\varkappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\varkappa b^2}}{\varkappa} \right)^2 \quad (1.12)$$

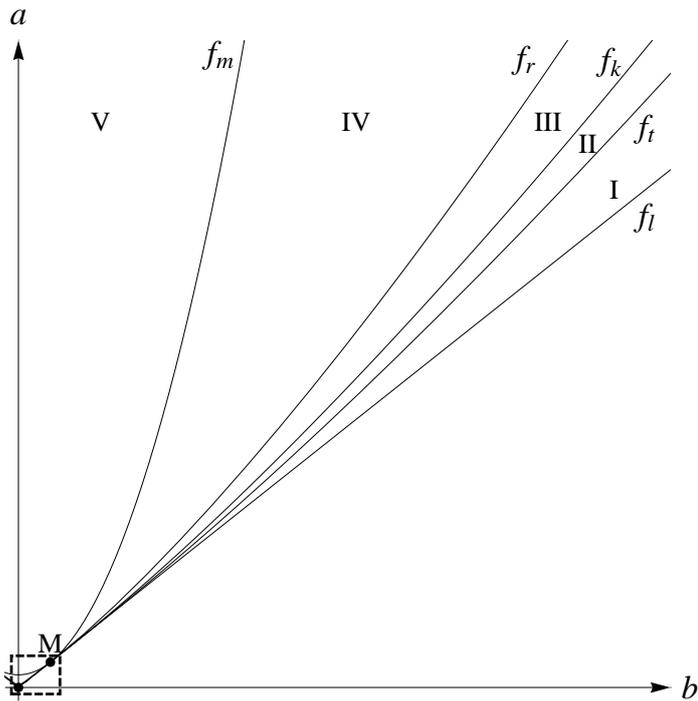


Рис. 6: Разбиение области параметров

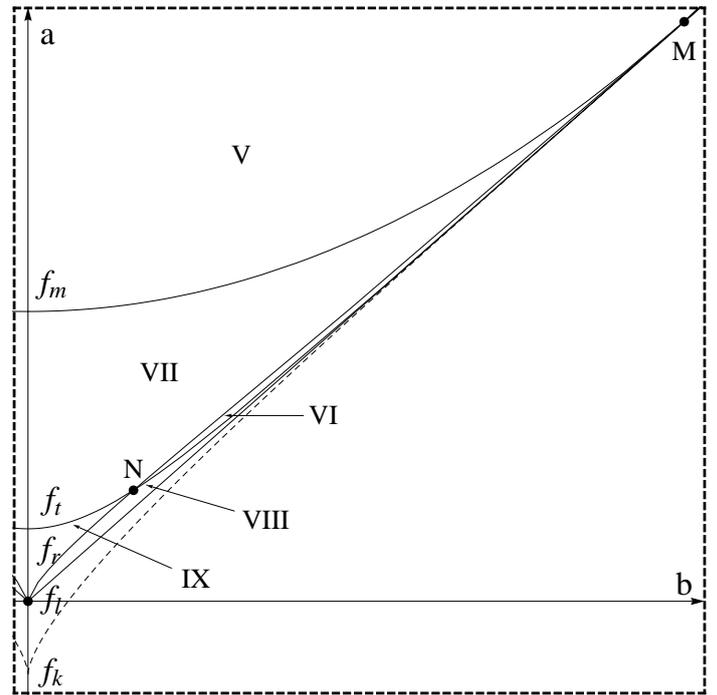


Рис. 7: Увеличенный фрагмент рис. 6

Теорема 4. (И.К. Козлов) Пусть $\varkappa > 0$ и $b > 0$. Функции f_k, f_r, f_m, f_t и f_l заданные формулами

$$f_k(b) = \frac{3b^{4/3} + 6\varkappa b^{2/3} c_1^{4/3} - \varkappa^2 c_1^{8/3}}{4c_1^{2/3}} \quad (1.13)$$

$$f_r(b) = \frac{b^{4/3}}{c_1^{2/3}} + \varkappa b^{2/3} c_1^{2/3} \quad (1.14)$$

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2 \quad (1.15)$$

$$f_t(b) = \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right)^2 + \varkappa t^2, \quad \text{где } b = t \left(\frac{\varkappa c_1^2 + t^2}{2c_1} \right) \quad (1.16)$$

$$f_l(b) = 2\sqrt{\varkappa}|b| \quad (1.17)$$

делят область $\{b > 0, a > 2\sqrt{\varkappa}b\} \subset \mathbb{R}^2(a, b)$ на 9 областей. В каждом из случаев I-IX указано, из каких частей прямой $k = 0$, кривой (1.10) и двух парабол (1.11) и (1.12) состоит бифуркационная диаграмма отображения момента.

Лемма 1.2. Пусть $\varkappa \neq 0$ и $b = 0$. Тогда для любой неособой орбиты $M_{a,0}$ (т.е. для тех орбит, для которых $a \neq 0$) бифуркационная диаграмма $\Sigma_{h,k}$ интегрируемой гамильтоновой системы с гамильтонианом (1.7) и интегралом (1.8) содержится в объединении следующих трёх семейств кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$:

1. Прямая $k = 0$;

2. Объединение параболы

$$k = (h - \varkappa c_1^2)^2 + 4a c_1^2 \quad (1.18)$$

и касательной к этой параболе в точке $h = 0$

$$k = -2\varkappa c_1^2 h + (4a c_1^2 + \varkappa^2 c_1^4); \quad (1.19)$$

3. Объединение двух парабол

$$k = (h - \varkappa c_1^2)^2 \quad (1.20)$$

и

$$k = \left(h - \varkappa c_1^2 - \frac{2a}{\varkappa} \right)^2. \quad (1.21)$$

Теорема 5. (И.К. Козлов) В случае, когда $\varkappa > 0$ и $b = 0$, вид бифуркационной диаграммы зависит от значения параметра a . В следующих трёх случаях получают качественно различные диаграммы:

$$1. 0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4},$$

$$2. \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \varkappa^2 c_1^2,$$

$$3. \varkappa^2 c_1^2 < a.$$

В каждом из случаев X-XII указано, из каких частей прямых и парабол из леммы 1.2 состоит бифуркационная диаграмма отображения момента.

Напомним, что бифуркационная диаграмма для орбиты $M_{a,b}$ с $b < 0$ совпадает с бифуркационной диаграммой для орбиты $M_{a,-b}$

Замечание 4. На бифуркационных диаграммах дуги $y_8 z_2, z_2 z_1, y_5 z_3, z_8 z_9, z_8 z_{11}$ и $z_9 z_{11}$ принадлежат параметрической кривой (1.10). Остальные дуги бифуркационных диаграмм очевидным образом распределяются между кривыми.

Также были описаны круговые молекулы особых точек. Их круговые молекулы приведены в двух таблицах — таблице 2 "старых" точек (обозначенных буквами y , имеющих аналоги при $\varkappa = 0$) и таблице 3 "новых" точек (обозначенных буквами z , аналогов не имеют). Данные понятия аккуратнее описаны в пункте 2.4.

Замечание 5. Для точек, лежащих на границе бифуркационных диаграмм, круговая молекула в таблицах 2 и 3 обходится против часовой стрелки. Хотя единственная неоднозначность в данном случае может возникнуть только для точки z_2 . Для этой точки круговая молекула должна состоять из двух одинаковых молекул, каждая из которых имеет такой же вид, как и для вырожденной особенности типа эллиптическая бифуркация удвоения периода.

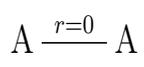
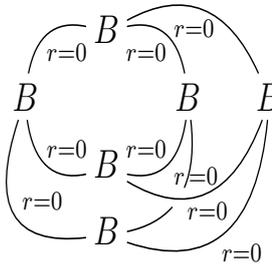
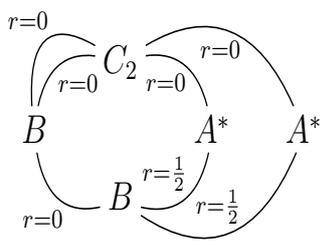
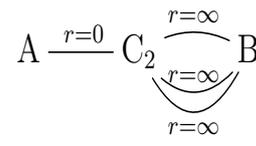
y_1	$A \xrightarrow{r=0} A$		
y_2	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=0} B$	y_7	
y_3		y_8	$A \xrightarrow{r=1/2} B \xrightarrow{r=\infty} A^*$ дважды
		y_9	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=\infty} A$ дважды
y_4	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=0} B$	y_{10}	$A \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=0} A$
y_5	$A \xrightarrow{r=0} C_2 \xrightarrow{r=\infty} B$ 	y_{11}	$A \xrightarrow{r=\infty} B \xrightarrow{r=\infty} A$ дважды
		y_{12}	$A \xrightarrow{r=\infty} B \xrightarrow{r=\infty} A$ $A \xrightarrow{r=\infty} B$
y_6	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=\infty} A$	y_{13}	$A \xrightarrow{r=0} B \xrightarrow{r=0} A$ $A \xrightarrow{r=0} B$ дважды

Таблица 2: Круговые молекулы, классический случай Ковалевской.

z_1	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$	z_6	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=\infty} A \end{array}$
z_2	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=1/2} A \\ A \xrightarrow{r=0} A^* \xrightarrow{r=1/2} A \end{array}$	z_7	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=0} A \\ A \xrightarrow{r=0} A \end{array}$
z_3	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \begin{array}{l} \nearrow^{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$	z_8	$\begin{array}{c} A \begin{array}{l} \searrow_{r=0} \\ \nearrow_{r=0} \end{array} B \xrightarrow{r=0} A \end{array}$
z_4	$A \xrightarrow{r=0} A$	z_9	$A \xrightarrow{r=0} A$
z_5	$\begin{array}{c} A \begin{array}{l} \searrow_{r=\infty} \\ \nearrow_{r=\infty} \end{array} C_2 \begin{array}{l} \nearrow_{r=\infty} \\ \searrow_{r=\infty} \end{array} A \\ A \begin{array}{l} \searrow_{r=\infty} \\ \nearrow_{r=\infty} \end{array} C_2 \begin{array}{l} \nearrow_{r=\infty} \\ \searrow_{r=\infty} \end{array} A \end{array}$	z_{10}	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{r=\infty} B \begin{array}{l} \nearrow^{r=\infty} A \\ \searrow_{r=\infty} A \end{array} \end{array}$
		z_{11}	$A \xrightarrow{r=0} A$

Таблица 3: Новые круговые молекулы.

2 Инвариант Фоменко-Цишанга прообраза допустимой кривой

Данные результаты получены в ходе работы на 3-4 курсе, вошли в курсовые работы и подаются в ЛЖМ.

Прообразом каждой фиксированной допустимой кривой, проведенной в образе отображения момента \mathfrak{F} , является трехмерное многообразие, целиком состоящее из слоев Лиувилля. Для него можно посчитать инвариант Фоменко-Цишанга. Задачу нахождения инвариантов Фоменко-Цишанга для всех трехмерных расслоенных на слои Лиувилля подмногообразий в $\mathbb{R}^6(\mathbf{x}, \mathbf{J})$ не ставят — пространство параметров a, b, h, k четырехмерно, и нашему подмногообразию отвечала бы кривая в нем. Положив $f_1 = const, f_2 = const$, мы сможем воспользоваться уже найденными И.К. Козловым в [3] бифуркационными диаграммами Σ , зависящими от (a, b) . Бифуркационные диаграммы Σ_{a_1, b_1} и Σ_{a_2, b_2} , соответствующие двум точкам (a_1, b_1) и (a_2, b_2) одного и того же множества из списка I..XII, получаются друг из друга гладкой изотопией вложенных в плоскость графов. При ней будут сохраняться структура графа и наборы допустимых базисов на торах Лиувилля, расположенных вблизи каждой из дуг Σ .

Замечание 6. Менее формально будем говорить о допустимом базисе *вблизи данной дуги* или о допустимом базисе самой дуги, уточняя, о торах какой из двух разделяемых дугой камер мы говорим — торы из разных камер нельзя соединить кривой в пространстве (a, b, h, k) кривой, идущей только по точкам для которых $T_{a,b,h,k}^2$ регулярен, т.е. не является особым слоем слоения.

Допустимые базисы определены неоднозначно, но их изменение не влияет на метки, инвариант Фоменко-Цишанга и лиувиллеву эквивалентность. Важное свойство введенных в [2] обозначений $\alpha_1, \dots, \delta_2$ для дуг бифуркационных диаграмм — если одинаково обозначены дуга из Σ_1 и дуга из Σ_2 , то допустимые базисы вблизи этих дуг можно сравнивать, и допустимый базис вблизи одной из дуг является допустимым базисом вблизи другой. Значит, достаточно рассматривать лишь конечное число бифуркационных диаграмм.

Другое соображение, рекомендуемое уточнить задачу, заключается в следующем. Даже при фиксированных a, b можно провести допустимую кривую, пересекающую дуги бифуркационной диаграммы сколь угодно большое число раз. Такая кривая описывается последовательностью пересекаемых ею дуг (атомы) и камер бифуркационной диаграммы, по которым она проходит (семейства торов). Каждому семейству регулярных торов, концы которого расположены вблизи дуг, ограничивающих одну камеру, можно каждому фрагменту такой кривой приписать невырожденную матрицу, переводящую допустимый базис вблизи одного конца в допустимый базис вблизи другого.

В данной главе опишем алгоритмическое правило вычисления инварианта Фоменко-Цишанга для произвольной допустимой кривой в плоскости фиксированных (a, b) , пересечения которой с бифуркационной диаграммой известны. Пусть выбраны и зафиксированы допустимые базисы вблизи каждой дуги, встречающейся в бифуркационных диаграммах случаев I-XII. Тогда для вычисления искомого инварианта достаточно выписать матрицы склейки, соответствующие каждому фрагменту кривой. Допустимые базисы вблизи дуг бифуркационной диаграммы, имеющих аналоги в классическом случае, выберем те же, что и в статье [2]. Вблизи новых дуг xi_1, \dots, xi_5 базисы будут найдены в данном разделе. Детальное значение терминов "новые дуги" и "аналоги" будет дано далее. Базисные циклы базиса будут заданы векторы в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (группа одномерных гомологий тора).

Замечание 7. В данной главе, при строгом определении "старых" и "новых" дуг бифуркационной диаграммы, т.е. имеющих или не имеющих аналога в классическом случае, мы называем α_1, \dots, ξ_5 не дугами, а классами дуг. Дело в том, что по такому обозначению нельзя сказать, какие именно особые точки являются концами обозначенного таким символом ребра графа бифуркационной диаграммы.

В остальных главах допускаем называть α_1, \dots, ξ_5 просто дугами, т.к. допустимые базисы вблизи всех таких дуг — одинаковы. Значит, совпадут и меченые молекулы.

2.1 Порядок особых точек в случае $b = 0$.

Данный результат был получен автором в курсовой работе 3 курса и вошел в заметку в журнале "Вестник Московского Университета".

При $b = 0$ на бифуркационной диаграмме системы при разных значениях a имеются следующие особые точки: $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_5, z_7, z_8, z_9, z_{10}$. Их координаты по оси H приведены в таблице 4:

точка	координата h
y_1	$-2\sqrt{ac_1}$
y_2	$\varkappa c_1^2$
y_3	a/\varkappa
y_4	0
z_1	$2a/\varkappa + \varkappa_1^2/2$
z_2	$2a/\varkappa$
z_5	$a/\varkappa + \varkappa_1^2$
z_7	$2\sqrt{ac_1}$
z_8	$2a/\varkappa$
z_9	$2\sqrt{ac_1}$
z_{10}	$2\sqrt{ac_1}$

Таблица 4: Абсциссы особых точек при $b = 0$.

Следующая лемма – некоторое развитие автором результата И.К.Козлова, сформулированного в теореме 5:

Лемма 2.1. *Существует в точности пять промежутков на оси $b = 0$ $a > 0$, таких что наборы изоэнергетических поверхностей, соответствующих двум точкам одного промежутка одинаковы, разным – различны. Их обозначим через $XII, XI_1, XI_1, X_2, X_1$. Так же приведем в таблице те пары особых точек, порядок проекций которых различает подмножества 1 и 2 промежутков X и XI .*

№	промежуток	точки
XII	$0 < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{4}$	
XIb	$\frac{\varkappa^2 c_1^2}{4} < a < \frac{\varkappa^2 c_1^2}{2}$	$z_8 < y_2$
XIa	$\frac{\varkappa^2 c_1^2}{2} < a < \varkappa^2 c_1^2$	$y_2 < z_8$
Xb	$\varkappa^2 c_1^2 < a < 4\varkappa^2 c_1^2$	$y_3 < z_7$
Xa	$4\varkappa^2 c_1^2 < a$	$z_7 < y_3$

Таблица 5: Промежутки при $b = 0$.

Доказательство. Доказательство легко следует из сравнения приведенных выше абсцисс особых точек. \square

В работах [2] и [3] обозначения особых точек отличаются. Приведем соответствие названий точек, встречающихся на бифуркационных диаграммах и при $b = 0$, и при $\varkappa = 0$:

$$H - y_1, \quad S_0 - y_4, \quad e_1 - y_2, \quad U_1 - y_3.$$

2.2 Краткое напоминание

Данные результаты были получены автором в курсовой работе 4 курса и составили подаваемую в LJM статью. Обозначения согласованы с разделом 1.3 настоящей работы.

Напомним некоторые понятия и определения из теории топологической классификации интегрируемых систем. Гладкая кривая без самопересечений в \mathbb{R}^2 называется допустимой, если она пересекает дуги бифуркационной диаграммы Σ трансверсально и не проходит через особые точки Σ . Точка из Σ называется особой точкой бифуркационной диаграммы если она является изолированной

точкой Σ или в ней происходит пересечение, касание или излом дуг бифуркационной диаграммы. Прообраз допустимой кривой является трехмерным гладким многообразием, расслоенным на торы Лиувилля и особые слои.

А.Т. Фоменко и Х. Цишанг предложили классифицирующий инвариант слоения Лиувилля на трехмерном многообразии. Он был назван инвариантом Фоменко-Цишанга или меченой молекулой. Данный инвариант является графом, ребра которого соответствуют семействам торов Лиувилля, а вершины — их перестройкам. Для каждого типа таких бифуркаций также были введены допустимые базисы. Иначе говоря, был описан способ выбора двух базисных циклов на всех граничных торах Лиувилля. Связанные с ребрами графа числовые *метки* r, ε, n находятся по матрицам склейки, являющимися матрицами перехода от одного допустимого базиса на торе Лиувилля к другому. Было доказано, что

Теорема 6 (Фоменко–Цишанг). *Два слоения Лиувилля на трехмерном многообразии являются гомеоморфными \Leftrightarrow их меченые молекулы одинаковы.*

Для нахождения допустимых базисов вблизи "новых" дуг бифуркационной диаграммы мы будем использовать схожую с 2 технику. Для всех дуг будут единообразно выбраны допустимые базисы, которые удастся выразить через однозначно определенные циклы λ , как и в классическом случае Ковалевской.

Для того, чтобы единообразно определить допустимые базисы на дугах бифуркационной диаграммы, мы рассмотрим для каждой дуги небольшой вертикальный интервал I на прямой линии $H = const$, который пересекает данную дугу трансверсально. Затем единообразно выберем ориентацию на трехмерных прообразах таких интервалов. Эти ориентации находятся исходя из ориентации симплектического многообразия $M_{a,b}^4$ и векторного поля градиента $gradH$. Мы выбрали допустимые базисы для всех дуг одновременно, так что автоматически получим подходящие матрицы склейки для молекул всех изоэнергетических поверхностей. В частности, это означает равенство определителей этих матриц -1 . Если мы рассмотрим поверхности с постоянным значением дополнительного интеграла $K = const$, а не гамильтониана, то все определители будут равны 1.

Определение допустимого базиса для всех типов 3-атомов было дано в [1]. Напомним здесь эту конструкцию для атома А, который является полноторием $S^1 \times D^2$, расслоенным на торы Лиувилля и особую эллиптическую орбиту очевидным способом. Пара базисных циклов будет называться допустимой, если выполнены следующие условия:

1. цикл λ является стягиваемым по полноторию на его ось,
2. циклы λ и μ не гомологичны и имеют индекс пересечения, равный 1,
3. ориентация цикла μ определяется гамильтоновым векторным полем на особом слое,
4. ориентации на граничном торе, определенная допустимым базисом и определенная ориентацией трехмерного полнотория, должны совпадать

2.3 Теорема об особенностях типа центр-центр

В данном разделе мы опишем меченую молекулу критической точки типа центр-центр. Известно, что круговая молекула в данном случае имеет вид $A - A$ и метку $r = 0$. Остается только найти ε -метку. Мы рассмотрим только случай, когда критическая точка типа центр-центр является единственной точкой в прообразе. Общий случай можно свести к данному, рассмотрев подходящий лист бифуркационного комплекса. В работах [10] и [12] А.Т. Фоменко предложил конструкцию бифуркационного комплекса для систем произвольной размерности. Свойства этого объекта были описаны там же. Некоторые приложения этой конструкции и связи с другими топологическими инвариантами обсуждались в [13]. В нашей системе следует рассматривать особую точку типа центр-центр на подходящем листе комплекса системы.

Определение 22. Особой точкой типа центр-центр назовем особую точку бифуркационного комплекса, прообраз которой при отображении момента является критической точкой типа центр-центр.

Бифуркационная диаграмма в случае особой точки типа центр-центр является углом. Мы рассмотрим касательные векторы γ_1 и γ_2 к дугам, имеющие начало в особой точке и направленные по сторонам угла, а не их продолжениям. Производной функции H в направлении дуги назовем производную функции H в направлении такого касательного вектора к этой дуге. Докажем следующую теорему:

Теорема 7. Пусть точка является особой точкой типа центр-центр бифуркационной диаграммы. Обозначим знаки производных функции H в направлении пересекающихся дуг $\gamma_i, i = 1, 2$ как $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2$ соответственно. Тогда допустимые базисы (λ_i, μ_i) для этих дуг могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

Доказательство. 1. Известно, что существуют локальные координаты p_1, p_2, q_1, q_2 , в которых симплектическая форма ω в некоторой окрестности особой точки типа центр-центр записывается в виде :

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2,$$

В той же окрестности функции H, K имеют вид $H = H(\alpha_1, \alpha_2)$ и $K = K(\alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha_1 = (p_1^2 + q_1^2)$ и $\alpha_2 = (p_2^2 + q_2^2)$. Мы предполагаем, что $\alpha_i = 0$ для дуги $\gamma_i, i = 1, 2$.

Рассмотрим два векторных поля u_1, u_2 :

$$u_1 = (-q_1, 0, p_1, 0), \quad u_2 = (0, -q_2, 0, p_2).$$

Каждый тор Лиувилля в малой окрестности критической точки типа центр-центр является декартовым произведением двух окружностей φ_1, φ_2 с полями касательных векторов u_1, u_2 соответственно.

2. Можно утверждать, что допустимые базисы для дуг γ_1, γ_2 имеют следующий вид:

$$(\lambda_1, \mu_1) = \left(\varphi_1, \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right) \varphi_2 \right), \quad (\lambda_2, \mu_2) = \left(\varphi_2, \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right) \varphi_1 \right)$$

3. Обозначим поля касательных векторов к циклам μ_1, μ_2 через v_1, v_2 :

$$v_1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} u_2, \quad v_2 = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} u_1.$$

Ориентация циклов μ_i определена гамильтоновым векторным полем $sgrad H$:

$$sgrad H = \omega^{-1} dH = \left(-2q_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, -2q_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, 2p_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, 2p_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right).$$

Чтобы проверить, что ориентация λ -циклов была выбрана корректно, нам необходимо проверить, что четверки векторов

$$(\overline{grad H}, N_i, u_i, v_i), \quad i = 1, 2$$

ориентированы положительно относительно формы объема $\omega \wedge \omega$. Здесь символом N_i обозначена внешняя нормаль в изоэнергетической поверхности к ее 3-атому A , соответствующему дуге $\gamma_i, i = 1, 2$. Несложно проверить, что

$$N_1 = -\operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} \right) N, \quad N_2 = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right) N,$$

где N есть следующий вектор, ортогональный векторам $gradH, u_i, v_i$:

$$N = \left(-p_1\alpha_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, p_2\alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, -q_1\alpha_2 \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, q_2\alpha_1 \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right).$$

□

Следствие 1. При изменении требуемую ориентацию четверки векторов из определения допустимого базиса, то все элементы матрицы склейки из теоремы 7 изменят знак.

Знак верхнего правого элемента матрицы склейки называется ε -меткой, если он не равен нулю. Иначе ε -меткой назван верхний левый элемент матрицы. Поскольку допустимые базисы не определены однозначно, то матрицы склейки могут изменяться. Тем не менее, их определитель и ε -метка постоянны.

2.4 Новые дуги бифуркационных диаграмм и их допустимые базисы

И.К. Козловым было доказано, что существует ровно 12 типов комбинаторно различных бифуркационных диаграмм для неособой орбиты $M_{a,b}^4$. Бифуркационные диаграммы классического случая Ковалевской могут быть получены из этих диаграмм переходом к пределу $\kappa \rightarrow +0$. Данное преобразование сохраняет типы критических точек ранга ноль, типичные бифуркации (3-атомы) торов Лиувилля на дугах бифуркационной диаграммы и круговые молекулы особых точек отображения момента.

Определение 23. Особую точку бифуркационной диаграммы $\Sigma_{a,b}$ будем называть *старой точкой*, если она "выживает" при переходе к пределу по κ или получается из таких точек в результате непрерывного изменения параметров (a, b) .

Новыми точками назовем остальные особые точки бифуркационных диаграмм.

Замечание 8. В этом разделе не будем рассматривать особые точки, соответствующие совпадению хотя бы двух особых точек из списка y_1, \dots, z_{11} (т.е. такие точки, что особые точки в ее малой окрестности в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ не принадлежат к строго одному из типов y_1, \dots, z_{11}). Их не будем называть старыми или новыми, и запретим в определении 23 проходить через них при непрерывном изменении параметров.

В работе [3] старые особые точки обозначались $y_i, i = 1, \dots, 13$, а новые — $z_j, j = 1..11$. Точно так же определим "новые" и "старые" дуги бифуркационных диаграмм в случае алгебры Ли $so(4)$.

Определение 24. *Новыми дугами* назовем те дуги бифуркационной диаграммы, которые соединяют две новые особые точки z_j . Все остальные дуги назовем *старыми*.

Старые дуги очевидным образом соотносятся с дугами бифуркационных диаграмм классического случая. Будем использовать для них обозначения из статьи [2]. Мы введем пять классов $\xi_i, i = 1..5$ для новых дуг. Дуги из одного класса могут быть получены друг из друга непрерывной по (a, b) деформацией, в том числе и через разделяющие значения (a, b) . Достаточно, чтобы хоть одна из конечных точек этой дуги сохраняла там свой тип z_i . Так же на двух дугах одного и того же класса происходит одинаковая перестройка одних и тех же семейств торов Лиувилля, которые тоже были рассмотрены в [2]. Далее будем называть ξ_i просто дугами. В таблице 6 содержится вся необходимая информация о новых дугах и семействах торов Лиувилля, испытывающих на них перестройку.

А.В Болсинов, П.Х. Рихтер and А.Т. Фоменко в статье [2] доказали, что для волчка Ковалевской (т.е. классического случая Ковалевской как системы на алгебре Ли $e(3)$) допустимые базисы вблизи всех дуг бифуркационной диаграммы могут быть выражены через однозначно определенные λ -циклы. Следующая теорема утверждает, что данный результат остается верен и для системы на алгебре Ли $so(4)$.

класс	дуги бифуркационных диаграмм	атом	семейство торов
ξ_1	$(z_4, z_3), (z_4, z_5), (z_4, z_{11}), (z_4, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(1)
ξ_2	$(z_3, z_2), (z_5, z_2)$	2 A	(3)
ξ_3	$(z_2, z_1), (z_{10}, z_1)$	2 A	(2)
ξ_4	$(z_6, z_5), (z_6, z_8), (z_7, z_5), (z_7, z_8)$	A	(4)
ξ_5	$(z_8, z_9), (z_8, z_{10}), (z_{11}, z_{10}), (z_{11}, z_9)$	A	(1)

Таблица 6: Классы новых дуг бифуркационных диаграмм

Теорема 8 (автор). *Следующие пары циклов $(\lambda_{\xi_i}, \mu_{\xi_i})$ являются допустимыми базисами на торах Лиувилля, расположенных вблизи дуг $\xi_i, i = 1..5$:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \mu_{\xi_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_1} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_2} \\ \mu_{\xi_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_2} \\ -\lambda_{\beta_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_4} \\ \lambda_{\gamma_3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_5} \\ \mu_{\xi_5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Доказательство. Вычисление допустимых базисов для всех $\xi_i, i = 1..5$ основано на хорошо известных фактах об устройстве слоения Лиувилля в окрестности невырожденных критических точек ранга ноль. Метка r равна бесконечности для ребра круговой молекулы точки типа центр-седло, потому λ -циклы для соответствующих дуг будут равны с точностью до знака. Также используем доказанную теорему 7 о допустимых базисах для точки типа центр-центр.

1) На примере дуги x_{i_1} покажем вычисление допустимого базиса — допустимые базисы вблизи дуг ξ_3, ξ_4, ξ_5 могут быть найдены аналогично. Поскольку z_5 является образом особой точки типа центр-седло, то $\lambda_{\xi_1} = \pm\lambda_{\beta_2} = \pm(\lambda_{\gamma_3} - \lambda_{\gamma_1})$. Точка z_1 является образом критической точки типа центр-центр, поэтому выбираем знак "минус" и $\mu_{\xi_1} = \lambda_{\gamma_1}$.

2) Точка z_3 является особой точкой типа центр-седло, поэтому возьмем $\lambda_{\xi_2} = \sigma\lambda_{\beta_2}$ and $\mu_{\xi_2} = -\sigma\lambda_{\gamma_2}$, где $\sigma = \pm 1$. Поскольку z_2 является образом вырожденной одномерной орбиты ранга 1, то потребуем, чтобы $\mu_{\xi_2} = \lambda_{\gamma_2}$ and $\sigma = 1$ (т.к. оба цикла определены с помощью $sgradH$).

3) Вблизи точки z_{10} типа центр-седло между дугами ξ_3 β_1 метка $r = \infty$, потому $\lambda_{\xi_3} = \varepsilon_{10}^- \lambda_{\beta_1}$.

Данная дуги ξ_3 и δ_1 в точке пересечения образуют особенность типа центр-центр. Базис на торах вблизи дуги δ_1 может быть записан так: $\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_1}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы равен -1 . Согласно утверждению об особенности типа центр-центр, метка ε будет равна -1 , то есть $c = -1 - ad$, $\lambda_{\xi_3} = a\lambda_{\delta_1} - \lambda_{\beta_1}$.

$$\varepsilon_{10}^- \lambda_{\beta_1} = a\lambda_{\delta_1} - \lambda_{\beta_1}$$

$$\begin{cases} a - 2 = 2\varepsilon_{10}^-, & \uparrow \\ -1 = \varepsilon_{10}^-, & \rightarrow. \end{cases}$$

$$\varepsilon_{10}^- = -1, a = 0, c = -1.$$

Целое число d имеем право выбрать произвольно по причинам, описанным выше. Положим его равным нулю.

$$\text{Т.е.} \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\delta_1} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}$$

4) Матрица склейки для дуги ξ_4 совпадает с матрицей для x_{i_1} . Соответственно, в базисе надо γ_1 заменить на γ_4 .

5) Рассмотрим допустимую кривую, проходящую в малой окрестности точки z_{10} типа центр-седло и соединяющую дуги ξ_4 и β_1 . Метка $r = \infty$, потому $\lambda_{\xi_4} = \varepsilon_{10}^+ \lambda_{\beta_1}$.

Данная дуга на другом конце имеет особенность типа эллиптической вилки, образованной в точке пересечения с ребром γ_3 . Бифуркация на этой дуге имеет тип B . Допустимый базис на нижней границе этого атома B имеет вид $\lambda_{\gamma_3}, \lambda_{\beta_1}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ — матрица склейки.}$$

Векторные поля $gradH, sgradH$ не имеют особенности в точке z_8 . Поле внешних нормалей, определенных на атомах типа A на ребре $z_8 - z_{10}$ также гладко зависит от точки. Потому можем положить μ_{ξ_4} равным однозначно определенному циклу λ_{γ_3} бифуркации типа B на ребре γ_3 .

Получили $a = 0, b = 1, \det C = 1$, т.е $c = -1$. Тогда $\lambda_{\beta_1} = -\varepsilon_{10}^+ \lambda_{\beta_1} + d\lambda_{\gamma_3}$. Отсюда $d = 0, \varepsilon_{10}^+ = -1, \lambda_{\xi_4} = -\lambda_{\beta_1}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix}$$

Теорема доказана. □

Замечание 9. В статье для LJM новые дуги были перенумерованы в сравнении с курсовой работой 4 курса. В новых обозначениях (для LJM) дугой ξ_5 названа дуга ξ_4 из курсовой работы за 4 курс, а дуга ξ_4 теперь — та дуга, которая пересекается с γ_4 в точке z_{+r} (т.е. точках z_6) (ранее для нее отсутствовало отдельное обозначение).

Запишем циклы базисов на новых дугах как элементы целочисленной решетки, отвечающей тору Лиувилля. Обозначения соответствуют приведенным в работе [2].

$$\begin{aligned} \xi_1 - \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \mu_{\xi_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \downarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \\ \xi_2 - \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_2} \\ \mu_{\xi_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \downarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \\ \xi_3 - \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_3} \\ \mu_{\xi_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_1} \\ \downarrow \end{pmatrix} \\ \xi_4 - \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \downarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} \\ \xi_5 - \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_5} \\ \mu_{\xi_5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_1} \\ \nearrow \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Разделяющее множество на плоскости значений функций Казимира

3.1 Основная теорема главы 3

В данной главе установим множество всех пар (b, a) значений параметров функций Казимира (f_1, f_2) , для которых $M_{a,b}^4$ не является регулярным. Это означает наличие малой окрестности данной точки в плоскости (a, b) , разным точкам из которой соответствуют разные $M_{a,b}^4$. Мы называем два множества M_{a_1, b_1}^4 и M_{a_2, b_2}^4 различными, если их бифуркационные диаграммы не являются одинаковыми, т.е. в них входят разные множества особых точек, или если абсциссы этих точек упорядочены по-разному.

Замечание 10. 1. Поскольку случаи I–XII имеют попарно комбинаторно различные бифуркационные диаграммы, а их подмножества различаются внутри своего случая лишь порядком особых точек, то из совпадения наборов особых точек следует совпадение набора графов.

2. Верно и обратное, хотя это будет основано на явном переборе подслучаев.

Из работы И.К. Козлова известно, какие особые точки входят в бифуркационную диаграмму при всех значениях параметров a, b . Здесь будут найдены условия на a и b , гарантирующие определенный порядок абсцисс этих особых точек. Оказывается, множество содержательных точек плоскости (a, b) разбивается лишь на конечное число подобластей, где любым двум точкам одной подобласти соответствует одинаковая грубая молекула с приписанными её атомам названиями соответствующих дуг бифуркационной диаграммы. Тем самым мы сможем утверждать, что в системе Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ имеется лишь конечное число неэквивалентных неособых слоений Лиувилля. Для каждого из них будет предъявлено множество точек a, b, h с именно таким слоением на $Q_{a,b,h}^3$. Инварианты слоений и их эквивалентности будут описаны в следующей главе. Разделяющее множество на плоскости (a, b) содержит проекцию $(a, b, h) \rightarrow (a, b)$ одномерного остова множества особых $Q_{a,b,h}^3$.

Система определений была приведена во главе 1. Будем пользоваться понятиями набора графов, набора (символов) особых точек, особыми изоэнергетическими поверхностями. Определение разделяющего множества и регулярных $M_{a,b}^4$ здесь повторим. Разделяющим множеством на плоскости (b, a) (или (u, v)) мы называли те ее точки, в любой окрестности которых имеются хотя бы две точки (a_i, b_i) , для которых M_{a_i, b_i}^4 имеют не одинаковые бифуркационные диаграммы. Соответственно, содержательную пару (b, a) и её многообразие $M_{a,b}^4$ называли регулярными, если она не принадлежит разделяющему множеству.

Сформулируем **основную теорему** данной главы, описывающую устройство разделяющего множества на плоскости (b, a) :

Теорема 9. 1) Каждая точка разделяющего множества на плоскости (b, a) удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:

- она лежит на одной из пяти кривых f_l, f_t, f_k, f_r, f_m , найденных в работе 3
- координаты h хотя бы двух особых точек бифуркационной диаграммы для данных (b, a) совпадают.
- $b = 0, a \geq 0$

2) Все такие точки (b, a) лежат на связных фрагментах некоторых кривых, для каждой из которых имеются свои координаты (u_i, v_i) , в которых она задается явной функцией $v_i = f_i(u_i)$. Каждый фрагмент является непрерывным образом связного промежутка при отображении f_i . Число точек данного фрагмента, где система координат не регулярна или отображение не дифференцируемо, конечно.

3) число точек пересечения любых двух фрагментов, входящих в разделяющее множество, конечно. Т.е. разделяющее множество на плоскости (a, b) является конечным одномерным графом, вложенным в плоскость.

4) Всякий достаточно короткий отрезок, пересекающий ребро графа трансверсально во внутренней точке этого ребра, имеет с графом единственную общую точку. Остальные точки (b, a) такого отрезка регулярны.

5) Данный граф делит множество \hat{D} на открытые подобласти. Общая граница любых двух подобластей состоит или из одной точки, или из одного ребра и двух его вершин (или из уходящего в бесконечность ребра и одной его вершины).

6) Любым двум точкам из одной подобласти соответствуют одинаковые наборы особых точек. Если граничное ребро двух подобластей не лежит на кривых f_t, f_k, f_r, f_m , то точкам из разделяемых им подобластей соответствуют наборы особых точек, отличающиеся лишь порядком их абсцисс, но не числом особых точек и не их типом. Если граничное ребро лежит на одной из этих кривых, то наборы отличаются числом особых точек или их типом.

3.2 Структура доказательства основной теоремы 9

1. разделим множество особых точек на два подмножества.
2. для попарного сравнения абсцисс точек из второго множества введем некоторую замену (u, v) , регулярную при $b \neq 0, a > 2\sqrt{\kappa b}$.
3. Выразим абсциссы особых точек из второй группы как функции новых координатах (u, v) .
4. Сравним абсциссы этих особых точек как функции от (u, v) .
5. Опишем найденные кривые разделяющего множества как образы некоторых отрезков при явных отображениях. Опишем, абсциссы каких особых точек бифуркационной диаграммы совпадают на каждом из этих фрагментов
6. Предложим некоторые замены для исследования положения особых точек бифуркационной диаграммы из другой группы.
7. обоснуем, почему отдельного исследования требует лишь несколько точек данных кривых, а остальные точки пересечения с найденными кривыми расположены именно так, как видно по графикам. Прежде всего, важно показать конечность числа пересечений данных кривых в малой окрестности этих точек с найденными ранее кривыми. **(сделано за исключением нескольких пар в окрестности нескольких точек)**

По сути. таких точек две — $(2, 2)$ и бесконечность.

Для удобства вычисления удобно особые точки бифуркационных диаграмм разделить на два множества. В первое поместим нули параметрической кривой (точки ее пересечения с прямой $k = 0$), а во второе — все остальные особые точки. Сначала для каждой пары точек из второй группы опишем условия на значения функций Казимира, при которых абсцисса одной из них больше абсциссы другой. Это удобнее делать в координатах, отличных от (b, a) . Такая замена (u, v) оказывается биективной и регулярной внутри области. Опишем данную замену и ее свойства ниже.

3.3 Замена в области параметров, ее невырожденность

Сделаем замену $(b, a) \rightarrow (u, v)$:

$$\begin{cases} u = a - \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} \\ v = a + \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} \end{cases}$$

Обратные формулы замены имеют вид:

$$\begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b^2 = \frac{uv}{4\kappa} \end{cases}$$

Утверждение 2. 1. Данная замена осуществляет биективное отображение области $a > 2\sqrt{\kappa}b, b > 0$ и области $v > u, u \geq 0$. Граница $a = 2\sqrt{\kappa}b, b > 0$ биективно отображается в границу $v > 0, u = 0$, а граница $a > 0, b = 0$ — в границу $v = u, u > 0$. Точка $(a = 0, b = 0)$ переходит в точку $(u = 0, v = 0)$.

2. Замена регулярна внутри данной области.

Доказательство. 1. Это несложно понять:

$$v = u, u > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} = 0, \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{\kappa}b$$

$$v > 0, u = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}, \Leftrightarrow a > 0, b = 0$$

Взяв точку $a = 3\kappa^2 c_1^2, b = \pm\sqrt{\kappa^2 c_1^4}$, получим точку $u = (3 - \sqrt{9-4})\kappa c_1, v = (3 + \sqrt{9-4})\kappa c_1$. Данные точки принадлежат рассматриваемым областям. Таким образом, из гладкости отображения внутри области и попадания образа точки одной области в другую — получили двулистное накрытие областью $a > 2\sqrt{\kappa}|b|$ области $v > u, u > 0$.

2. Вычислим матрицу Якоби в точке (b, a) :

$$J = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} - a & 4\kappa b \\ \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} + a & -4\kappa b \end{pmatrix}$$

$$\det J = \frac{-8\kappa b}{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}$$

Таким образом, внутри области определитель не равен нулю и знаменатель тоже не нуль. Значит, замена регулярна. □

Замечание 11. При фиксированных b имеем $a_1 < a_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$

Следует из формулы для $v = a + \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}$.

3.4 Координаты особых точек второй группы в новых переменных

Есть набор особых точек точек, лежащих на параметрической кривой при следующих значениях z : $z_{+r}, z_{-r}, z_{+l}, z_{-l}, z_{rt}, z_{lt}, z_{cusp}$.

И.К. Козлов нашел для них в 3 значение абсциссы или параметра на 1.10:

Утверждение 3. (И.К. Козлов)

1. Пусть $\kappa \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда у кривой (1.10) и левой параболы (1.11) две точки пересечения и одна точка касания. Соответствующие значения параметра z_{+l} и z_{-l} точек пересечения задаются соотношением

$$z^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2} c_1^2. \quad (3.1)$$

Точка касания соответствует значению параметра

$$z_{lt} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2\kappa}. \quad (3.2)$$

2. Аналогично, у кривой (1.10) и правой параболы (1.12) две точки пересечения, при этом соответствующие значения параметра z_{+r} и z_{-r} задаются соотношением

$$z^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2} c_1^2, \quad (3.3)$$

и одна точка касания, соответствующая значению параметра

$$z_{rt} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2\kappa} \quad (3.4)$$

3. Точка касания левой параболы с осью $k = 0$ имеет абсциссу

$$h = \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\kappa}.$$

4. Точка пересечения парабол имеет абсциссу

$$h = \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa}.$$

5. Пусть $\kappa \neq 0$. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, кривая (1.10) содержит одну точку возврата

$$z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2} \quad (3.5)$$

и две точки экстремума

$$z_{+ext} = \frac{|b|}{\sqrt{\kappa}} \quad u \quad z_{-ext} = -\frac{|b|}{\sqrt{\kappa}}. \quad (3.6)$$

Запишем значения параметров для особых точек в новых координатах.

Утверждение 4. Пусть $\kappa > 0$, $v > u$, $u > 0$. Тогда общим точкам параметрической кривой и парабол и точке возврата этой кривой соответствуют следующие значения параметра z как функции от новых координат:

$$\begin{aligned} z_{-l} &= -\sqrt{\frac{v}{2}} c_1, & z_{+l} &= \sqrt{\frac{v}{2}} c_1, & z_{lt} &= \frac{u}{2\kappa} \\ z_{-r} &= -\sqrt{\frac{u}{2}} c_1, & z_{+r} &= \sqrt{\frac{u}{2}} c_1, & z_{rt} &= \frac{v}{2\kappa} \\ z_{cusp} &= \left(\frac{uv}{4} c_1^2\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Абсциссы точки h_{int} пересечения парабол и точки h_l касания левой параболы и оси абсцисс равны

$$\begin{aligned} h_l &= \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\kappa} \\ h_{int} &= \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa} \end{aligned}$$

Доказательство. Данные выражения (кроме z_{cusp}) очевидно получаются из исходных после подстановки формул замены координат.

$$z_{cusp} = \sqrt[3]{b^2 c_1^2} = \sqrt[3]{\frac{uv}{4\kappa} c_1^2} = \left(\frac{uv}{4} \frac{c_1^2}{\kappa}\right)^{1/3}$$

□

Обозначим $\tau = \sqrt{2\kappa c_1}$.

Теперь запишем координату h всех этих особых точек

Утверждение 5. Абсциссы h особых точек $z_{+r}, z_{-r}, z_{+l}, z_{-l}, z_{rt}, z_{lt}, z_{cusp}, h_l, h_{int}$ бифуркационных диаграмм в системе переменных (u, v) имеют вид:

$$\begin{aligned} h_{-l} &= \frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} & h_{+l} &= \frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} & h_{-r} &= \frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} & h_{+r} &= \frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \\ h_{lt} &= \frac{v}{u}\kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa} & h_{rt} &= \frac{u}{v}\kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa} \\ h_{cusp} &= 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{1/3}, & h_l &= \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}, & h_{int} &= \kappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\kappa} \end{aligned}$$

Доказательство.

$$h(z) = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z, \quad b^2 = \frac{uv}{4\kappa}, \quad a = \frac{a+b}{2}$$

Т.е.

$$h(z) = \frac{uv}{z^2} \frac{c_1^2}{4\kappa} + 2z$$

$$h_{+r} = \frac{uv}{\frac{v^2}{2} c_1^2} \frac{c_1^2}{4\kappa} + 2\sqrt{\frac{u}{2}} c_1 = \frac{v}{2\kappa} + \sqrt{2} c_1 \sqrt{u} = \frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

Точка $-r$ получается из $+r$ сменой знака при втором члене, а точки $\pm l$ получаются из $\pm r$ путем u на v и наоборот, т.к. выражение $h(z)$ симметрично по u, v , а $z_{\pm l}, z_{\pm r}$ получаются друг из друга такой заменой.

$$h_{-r} = \frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

$$h_{+l} = \frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa}$$

$$h_{-l} = \frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa}$$

$$h_{rt} = \frac{uv}{z^2} \frac{c_1^2}{4\kappa} + 2z = \frac{uv}{\frac{v^2}{4\kappa^2}} \frac{c_1^2}{4\kappa} + 2\frac{v}{2\kappa} = \frac{uv}{v^2} \frac{4\kappa^2 c_1^2}{4\kappa} + \frac{2v}{2\kappa} = \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa} = \frac{uv}{\frac{v^2}{2\kappa}} \frac{c_1^2}{4\kappa} + \frac{2v}{2\kappa} = \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa}$$

$$h_{lt} = \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

$$z_{cusp} = \left(\frac{uv}{4} \frac{c_1^2}{\kappa} \right)^{1/3}$$

$$h_{cusp} = \frac{b^2 c_1^2}{z^2} + 2z = \frac{uv}{z^2} \frac{c_1^2}{4\kappa} + 2z = \frac{uv}{(uv)^{2/3} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{2/3}} \frac{c_1^2}{4\kappa} + 2 \left(\frac{uv}{4} \frac{c_1^2}{\kappa} \right)^{1/3} = 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{1/3}$$

$$h_l = \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{\kappa} = \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

$$h_l = \kappa c_1^2 + \frac{a}{\kappa} = \kappa c_1^2 + \frac{a}{2\kappa} - \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2\kappa} + \frac{a}{2\kappa} + \frac{\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2}}{2\kappa} = \kappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\kappa}$$

□

3.5 Сравнение абсцисс особых точек второй группы

В данном разделе найдем подмножества плоскости (b, a) , на которых абсцисса одной особой точки больше абсциссы другой особой точки. Для удобства введем следующие обозначения D и \hat{D} :

$$D := \{(u, v) | u \geq 0, v \geq u\}, \quad \hat{D} := \{(u, v) | u > 0, v > 0\}.$$

Замена регулярна лишь в \hat{D} , потому что прямые $v = u, v = 0$ надо проверять отдельно. Для прямой $u = 0$ результат известен: там $z(-r) = z(+r), cusp \in \gamma_1$. Пары точек, абсциссы которых могут совпадать, найдены при анализе случая $b = 0$. Из взаимной однозначности следует, что именно в них будет совпадение абсцисс точек в координатах (u, v) . Будем формулировать утверждение для \hat{D} , но ясно, как его продолжить на данный луч. Вопрос с множеством $v = u$ несколько сложнее. Для каждой пары особых точек (обозначим их абсциссы за h_1, h_2 , а их сами — за 1 и 2). Множество \hat{D} представим в виде:

$$\hat{D} = G_{1,2} \cap G_{1,2} \cap B_{1,2}^e \cap B_{1,2}^0 \cap B_{2,1}^0 \cap S.$$

Здесь $G_{1,2} = G_{1<2} = \{(b, a) : h_1(b, a) < h_2(b, a)\}$, $G_{2,1} = \{(b, a) : h_2(b, a) < h_1(b, a)\}$ — два двумерных множества.

Также есть три одномерных множества, соответствующих равенству $h_1 = h_2$: $B_{1,2}^0$ и $B_{2,1}^0$ — кривые, граничащие лишь с множеством $G_{1,2}$ или $G_{2,1}$, соответственно (возможно, оно лежит на граничной прямой $v = u$). Третье одномерное множество $B_{1,2}^e = B_{1,2}^e$ состоит из кривых, разделяющих $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$, т.е. существенных их границ. Все оставшиеся точки включим в нульмерное множество $S_{1,2}$. Если конструкция не работает корректно, то укажем это, когда встретимся с таким примером.

Обозначим символом \vee искомый знак больше-меньше-равно. Будем находить область G_{12} области типа B и S_{12} . До тех пор пока не рассмотрен луч $u = 0, v \geq 0$ будем ставить над этими символами крышку.

Для кривых, возникающих в результате дальнейших вычислений будут приводиться их графики в координатах u, v . Части графика, попадающие в D , представлены жирной линией, а не попадающие в D — тонкой. Цвет данной кривой совпадает с цветом, которым она будет построена на совместных графиках, при нахождении разбиения D на подмножества. Также на всех этих графиках проведены кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m и координатные оси. f_m, f_k проведены черной сплошной линией, оси и f_l — черной пунктирной. f_r проведена как светло-красная пунктирная линия, f_t — как серая сплошная.

3.5.1 $-1 \vee +1$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa}$$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa}$$

$h(-l) = h(+l)$ при $v = 0 \rightarrow u = 0$, в точке $(0, 0)$.

$h(-l) < h(+l)$ в $D \setminus (0, 0)$.

$G_{-l+l} = D \setminus \{(0, 0)\}$

$S_{-l+l} = \{(0, 0)\}$

3.5.2 $-1 \vee -r$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

$$u - 2\tau\sqrt{v} + \tau^2 \vee v - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

$$u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2 \vee v + 2\tau\sqrt{v} + \tau^2$$

$$(\sqrt{u} + \tau)^2 \vee (\sqrt{v} + \tau)^2$$

$$0 \vee (\sqrt{v} - \sqrt{u})(\sqrt{v} + \sqrt{u} + 2\tau)$$

На множестве \hat{D} второй сомножитель положителен, т.е. знак всего выражения совпадает со знаком первого:

$$0 \leq (\sqrt{v} - \sqrt{u})$$

$$\sqrt{u} \leq \sqrt{v}$$

$$u \leq v$$

$$h(-l) = h(-r) \Leftrightarrow v = u$$

$$\hat{G}_{-l-r} = \{v > u, u > 0\}$$

$$\hat{G}_{-r-l} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{-l-r}^0 = \{v = u, u > 0\}$$

$$\hat{S} = \emptyset$$

3.5.3 $-l \vee +r$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\tau} \vee \frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\tau}$$

$$u - 2\tau\sqrt{v} + \tau^2 \vee v + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

$$u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2 \vee v + 2\tau\sqrt{v} + \tau^2$$

$$(\sqrt{u} - \tau)^2 \vee (\sqrt{v} + \tau)^2$$

$$0 \vee (\sqrt{v} + \sqrt{u})(\sqrt{v} - \sqrt{u} + 2\tau)$$

На множестве \hat{D} первый сомножитель положителен, т.е. знак всего выражения совпадает со знаком второго:

$$0 \leq \sqrt{v} - \sqrt{u} + 2\tau$$

$$\sqrt{u} - 2\tau \leq \sqrt{v}$$

$$h(-l) \leq h(+r) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{u} - 2\tau < 0 \\ \sqrt{v} \geq \sqrt{u} > 0 > \sqrt{u} - 2\tau \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u < 4\tau^2 \\ v \geq u \\ u \geq 4\tau^2 \\ v \geq u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2 \end{array} \right]$$

При $u > \tau^2$ имеем $u > u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$. Потому тогда достаточно, чтобы $v > u$

При $u < \tau^2$ & $(u, v) \in \hat{D}$ достаточно $v > u$, при этом $h(-l) < h(+r)$ строго.

Т.е. $\hat{G}_{-l+r} = \{v > u, u > 0\} \setminus (\tau^2, \tau^2)$.

$\hat{G}_{+r-l} = \emptyset$.

$\hat{S}_{-l+r} = \{(\tau^2, \tau^2)\}$.

3.5.4 $+1 \vee -r$

$$\frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

$$u + 2\tau\sqrt{v} + \tau^2 \vee v - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

$$u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2 \vee v - 2\tau\sqrt{v} + \tau^2$$

$$(\sqrt{u} + \tau)^2 \vee (\sqrt{v} - \tau)^2$$

$$0 \vee (\sqrt{v} + \sqrt{u})(\sqrt{v} - \sqrt{u} - 2\tau)$$

На множестве \hat{D} первый сомножитель положителен, т.е. знак всего выражения совпадает со знаком второго:

$$0 \vee \sqrt{v} - \sqrt{u} - 2\tau$$

$$\sqrt{u} + 2\tau \vee \sqrt{v}$$

Обе части неотрицательны, возведем в квадрат.

$$u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2 \vee v$$

При $u = 0$ левая часть равна $4\tau^2$, при $u > 0$ она больше чем $u + 2\sqrt{u} > u$ — кривая лежит целиком в \hat{D}

Эта существенная граница:

$\hat{B}_{+l,-r} = \{v = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2, u > 0\}$.

$\hat{G}_{+l,-r} = \{v > u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2, u > 0\}$.

$\hat{G}_{-r+l} = \{u < v < u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2, u > 0\}$.

3.5.5 $+1 \vee +r$

$$\frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

$$u + 2\tau\sqrt{v} + \tau^2 \vee v + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

$$u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2 \vee v - 2\tau\sqrt{v} + \tau^2$$

$$(\sqrt{u} - \tau)^2 \vee (\sqrt{v} - \tau)^2$$

$$0 \vee (\sqrt{v} - \sqrt{u})(\sqrt{v} + \sqrt{u} - 2\tau)$$

В \hat{D} $\sqrt{v} - \sqrt{u} \geq 0$, равенство в \hat{D} достигается лишь при $v = u, u > 0$. Т.е. эти точки лежат в множествах типа B .

В точках $D \setminus \{v = u, u > 0\}$ имеем:

$$0 \vee \sqrt{v} + \sqrt{u} - 2\tau$$

$$2\tau - \sqrt{u} \vee \sqrt{v}$$

$$h(+l) \leq h(+r) \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{u} + 2\tau < 0 \\ \sqrt{v} \geq \sqrt{u} > 0 > -\sqrt{u} + 2\tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > 4\tau^2 \\ v \geq u \\ u < 4\tau^2 \\ v \geq u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2 \end{cases}$$

Свойства кривой $v = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2 = 4\tau^2$:

При $u = 0$ имеем $v = 4\tau^2$.

При $u = 4\tau^2$ имеем $v = 0$:

$$0 = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2,$$

$$0 = 4\tau^2 - 4\tau\sqrt{4\tau^2} + 4\tau^2$$

Прямую $v = u$ эта кривая пересекает в точке (τ^2, τ^2)

Вернемся к задаче:

При $u > 4\tau^2$ имеем $u > u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$. Потому тогда достаточно, чтобы $v > u$

При $u < 4\tau^2$: $v(u) > u$ при $u < \tau^2$ и $v(u) < u$ при $4\tau^2 \geq u > \tau^2$.

Потому $h(+l) > h(+r)$ при $v < u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$, $u \in (0, \tau^2)$.

$$\hat{B}_{+l+r}^0 = \{v = u, u \in (\tau^2, +\infty)\}$$

$$\hat{B}_{+r+l}^0 = \{v = u, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{B}_{+l,+r} = \{v = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{G}_{+r,+l} = \{v < u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{S} = (\tau^2, \tau^2)$$

$$\hat{G}_{+l,+r} = \hat{D} \setminus \left(\hat{G}_{+r+l} \cup (\cup_{\alpha} B_{\alpha}) \right)$$

$$\setminus (4\tau^2, 4\tau^2).$$

3.5.6 $-r \vee +r$

$$\frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

$$0 \vee \frac{4\tau\sqrt{u}}{2\kappa}$$

$h(-r) = h(+r)$ при $u = 0$, не входит в \hat{D} .

$h(-r) < h(+r)$ в \hat{D} .

$$G_{-r+r} = \hat{D}$$

$$S_{-l+l} = \emptyset$$

3.5.7 $-l \vee lt$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa u$.

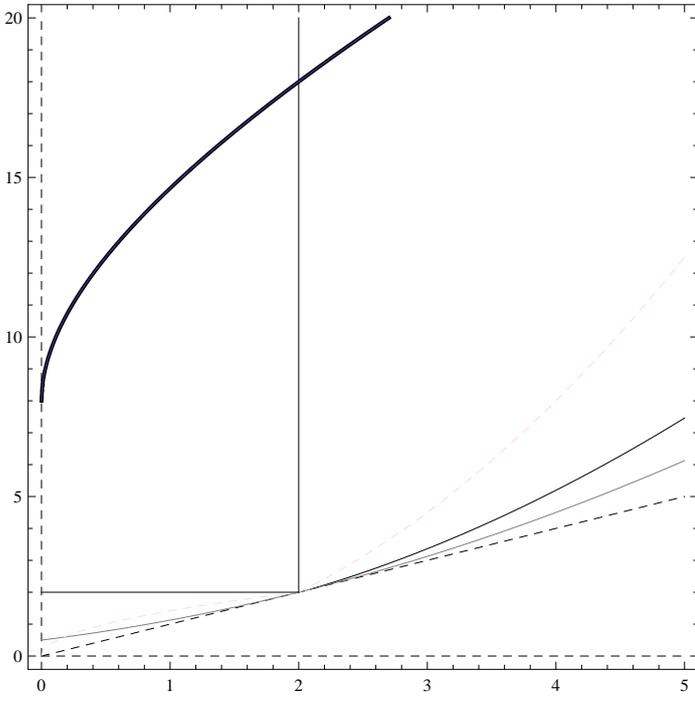


Рис. 8: y_2 : кривая $v = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$

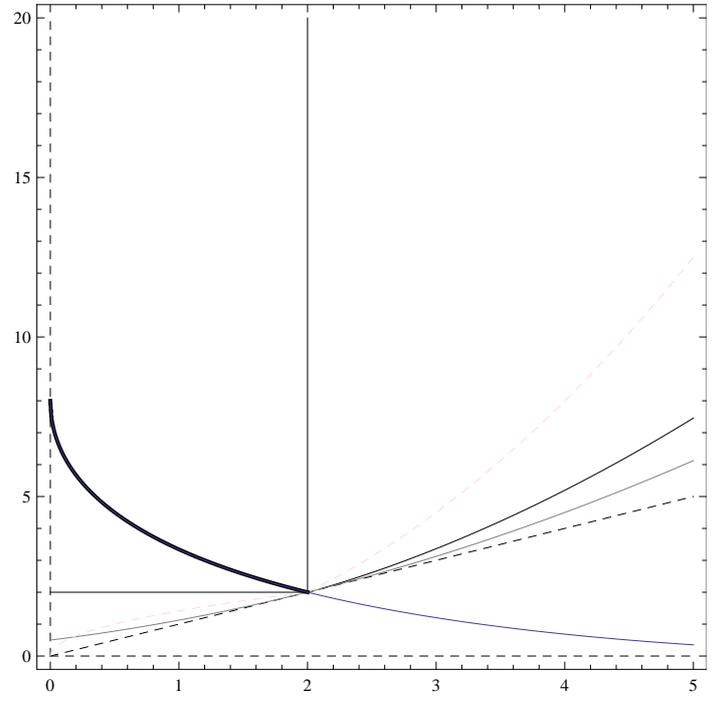


Рис. 9: y_3 : кривая $v = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$

$$\frac{-2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{2\kappa}$$

$$0 \vee +2\tau\sqrt{vu} + v\tau^2 + u^2$$

$$0 \vee (u + \tau\sqrt{v})^2$$

При $u > 0, v > 0$ выражение справа больше нуля, поэтому $\hat{G}_{-ut} = \hat{D}$.

3.5.8 $-l \vee rt$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa v$.

$$uv - 2\tau v^{3/2} \vee u\tau^2 + 2v^2$$

$$u(v - \tau^2) \vee 2v^{3/2}(\sqrt{v} + \tau)$$

$$u(\sqrt{v} - \tau)(\sqrt{v} + \tau) \vee 2v^{3/2}(\sqrt{v} + \tau)$$

$$0 \vee (2v^{3/2} - u(\sqrt{v} - \tau))(\sqrt{v} + \tau)$$

В \hat{D} выражение $\sqrt{v} + \tau$ положительно. Потому $h(-l) \vee h(rt) \Leftrightarrow 0 \vee 2v^{3/2} - u(\sqrt{v} - \tau)$.

$$u(\sqrt{v} - \tau) \vee 2v^{3/2}$$

$$h(-l) \leq h(rt) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{v} - \tau < 0 \\ \sqrt{v} \geq \sqrt{u} > 0 > u(\sqrt{v} - \tau) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v < \tau^2 \\ v \geq u \\ v \geq \tau^2 \\ u \geq \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} - \tau} \end{cases}$$

Поведение функции $y(x) = \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x-\tau}}$:

$$y(x) = \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x-\tau}} = 2x + 2\tau\sqrt{x} + 2\tau^2 + \frac{2\tau^3}{\sqrt{x-\tau}}$$

При $x \in (0, \tau^2)$ имеем $\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x-\tau}} < 0$.

В точке $x = \tau^2$ значение равно бесконечности.

Когда $\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x-\tau}} = x$?

$$2x^{3/2} = x(\sqrt{x} - \tau)$$

$$x^{3/2} = -x\tau$$

$$\sqrt{x} = -\tau$$

Таких значений нет. При $x = \tau^2 + 0$ значение функции — большое положительное.

Значит, при $x \in (\tau^2, +\infty)$ имеем $\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x-\tau}} > x$.

Рассмотрим

$$\begin{cases} v \geq \tau^2 \\ v \geq u \\ h(-l) \vee h(+rt) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq \tau^2 \\ v \geq u \\ u \vee \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} - \tau} \end{cases}$$

При $v = \tau^2$ имеем $u = 0$. Такие точки не входят в \hat{D}

При $v > \tau^2$ имеем

$$\begin{cases} v > \tau^2 \\ v \geq u \\ u \vee \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} - \tau} \end{cases}$$

Т.к. при $v > \tau^2$

имеем $v < \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v}-\tau}$, то $h(-l) < h(+rt)$ при $v > \tau^2$

$$\hat{G}_{-lrt} = \hat{D}$$

$$\hat{S}_{-lrt} = \emptyset$$

3.5.9 $+1 \vee It$

$$\frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa u$.

$$\frac{2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{2\kappa}$$

$$0 \vee -2\tau\sqrt{v}u + v\tau^2 + u^2$$

$$0 \vee (u - \tau\sqrt{v})^2$$

Выражение справа неотрицательно. Равенство достигается при

$$u = \tau\sqrt{v}, u > 0$$

$$v = \frac{u^2}{\tau^2}, u > 0$$

$$B_{+l,lt}^0 = \{v = \frac{u^2}{\tau^2}, u \in (\tau^2, +\infty)\}$$

$$\hat{G}_{+l,lt} = \{v > u, u > 0\} \setminus B_{+l,lt}^0$$

3.5.10 +l \vee rt

$$\frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa v$.

$$uv + 2\tau v^{3/2} \vee u\tau^2 + 2v^2$$

$$u(v - \tau^2) \vee 2v^{3/2}(\sqrt{v} - \tau)$$

$$u(\sqrt{v} - \tau)(\sqrt{v} + \tau) \vee 2v^{3/2}(\sqrt{v} - \tau)$$

$$0 \vee (2v^{3/2} - u(\sqrt{v} + \tau))(\sqrt{v} - \tau)$$

В \hat{D} выражение $\sqrt{v} - \tau$ меняет знак. Выражение $(\sqrt{v} + \tau) > 0$ положительно в \hat{D} . Найдем сначала множества типа G :

$$G_{+lrt} \Leftrightarrow h(-l) \leq h(+rt) \Leftrightarrow 0 \leq (2v^{3/2} - u(\sqrt{v} + \tau))(\sqrt{v} - \tau) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{v} - \tau < 0 \\ 2v^{3/2} - u(\sqrt{v} + \tau) < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{v} - \tau \geq 0 \\ 2v^{3/2} - u(\sqrt{v} + \tau) > 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v < \tau^2 \\ u > \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} v > \tau^2 \\ u < \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau} \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Свойства функции $u(v) = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau}$

При $v > 0$ имеем $u > 0$.

Когда график пересечет прямую $u = v$:

$$\frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau} = v$$

$$2v^{3/2} = v(\sqrt{v} + \tau)$$

$$v^{3/2} = v\tau$$

$$\sqrt{v} = +\tau$$

$$v = \tau^2$$

Когда он лежит выше:

В точке $v = \tau^2/4$ значение $u(v) = u(\tau^2/4) = \frac{\tau^3}{8(\tau/2+\tau)} = \frac{\tau^2}{12} < \tau^2/4 = v$.

В \hat{D} лежит следующая часть кривой $\{u = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v+\tau}}, v \in (0, \tau^2)\}$.

Т.е. $\hat{G}_{rt,+l} = \{0 < u < \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v+\tau}}, v \in (0, \tau^2)\}$

$\hat{G}_{+l,rt} = \{\frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v+\tau}} < u < v, v \in (0, \tau^2)\} \cup \{u < v, v \in (\tau^2, +\infty)\} \cup \{\tau^2 < v, u \in (0, \tau^2)\}$

Равенство достигалось на фрагментах двух кривых: $\{v = \tau^2, u \in (0, \tau^2)\} \cup \{u = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v+\tau}}, v \in (0, \tau^2)\}$

$\hat{B}_{+l,rt} = \{v = \tau^2, u \in (0, \tau^2)\} \cup \{u = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v+\tau}}, v \in (0, \tau^2)\}$

$\hat{S}_{+l,rt} = \{(\tau^2, \tau^2)\}$

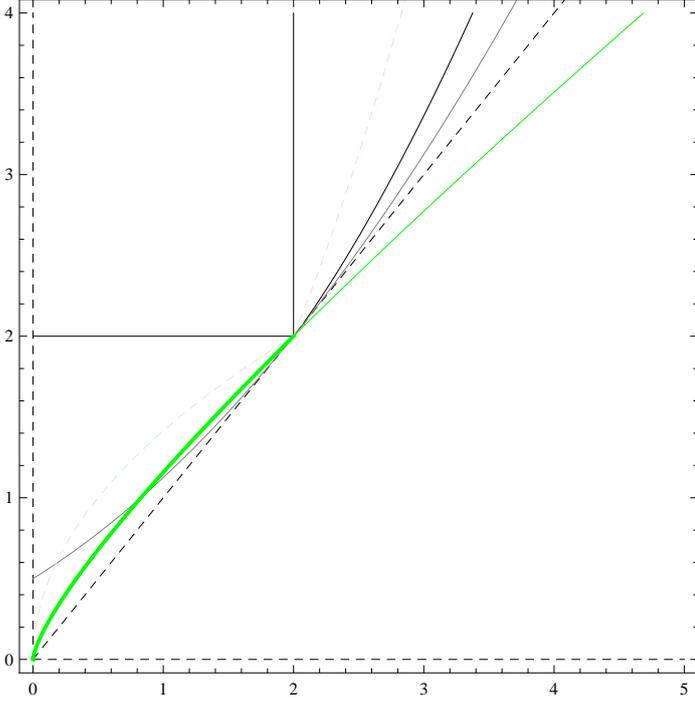


Рис. 10: x_6 : кривая $u = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v+\tau}}$

3.5.11 $-r \vee lt$

$$\frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa u$.

$$uv - 2\tau u^{3/2} \vee v\tau^2 + 2u^2$$

$$v(u - \tau^2) \vee 2u^{3/2}(\sqrt{u} + \tau)$$

$$v(\sqrt{u} - \tau)(\sqrt{u} + \tau) \vee 2u^{3/2}(\sqrt{u} + \tau)$$

$$0 \vee (2u^{3/2} - v(\sqrt{u} - \tau))(\sqrt{u} + \tau)$$

Выражение $(\sqrt{u} + \tau) > 0$ положительно в \hat{D} , сократим на него.

$$0 \vee 2u^{3/2} - v(\sqrt{u} - \tau)$$

$$v(\sqrt{u} - \tau) \vee 2u^{3/2}$$

В \hat{D} выражение $\sqrt{u} - \tau$ меняет знак. Найдем сначала множества типа G :

$$h(-r) \leq h(lt) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u} - \tau < 0 \\ v \geq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < \tau^2 \\ v \geq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u} - \tau \geq 0 \\ v \leq \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq \tau^2 \\ v \leq \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau} \end{cases}$$

Т.к. при $v > \tau^2$ имеем $u < \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$, то кривая $v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$, $u \in (\tau^2, +\infty)$ лежит выше прямой $v = u$ и является существенной границей.

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{lt, -r} = \{v > \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}, v \in (\tau^2, +\infty)\}$$

$$\hat{G}_{-r, lt} = \{\{u < v, u \in (0, \tau^2)\} \cup \{u < v < \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}, u \in (\tau^2, +\infty)\}\}$$

$$\hat{B}_{-r, lt} = \{v = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}, u \in (\tau^2, +\infty)\}$$

$$\hat{S}_{-r, lt} = \emptyset$$

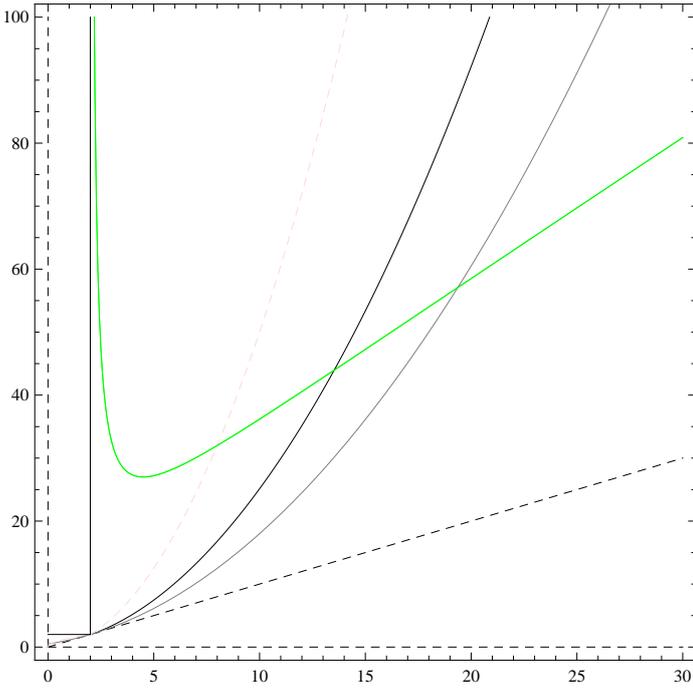


Рис. 11: y_τ : кривая $v = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$

3.5.12 $-r \vee rt$

$$\frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa v$.

$$\frac{-2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{2\kappa}$$

$$0 \vee +2\tau\sqrt{uv} + u\tau^2 + v^2$$

$$0 \vee (v + \tau\sqrt{u})^2$$

При $u > 0, v > 0$ выражение справа больше нуля, поэтому $\hat{G}_{-r,rt} = \hat{D}$.

3.5.13 +r \vee lt

$$\frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

Умножаем на $2\kappa u$.

$$uv + 2\tau u^{3/2} \vee v\tau^2 + 2u^2$$

$$v(u - \tau^2) \vee 2u^{3/2}(\sqrt{u} - \tau)$$

$$v(\sqrt{u} - \tau)(\sqrt{u} + \tau) \vee 2u^{3/2}(\sqrt{u} - \tau)$$

$$0 \vee (2u^{3/2} - v(\sqrt{u} + \tau))(\sqrt{u} - \tau)$$

В \hat{D} выражение $\sqrt{u} - \tau$ меняет знак. Выражение $(\sqrt{u} - \tau) > 0$ положительно в \hat{D} , разделим на него, когда оно появится.

Найдем сначала множества типа G :

$$h(+r) \leq h(lt) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \sqrt{u} - \tau \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 > \sqrt{u} - \tau \\ 0 \geq 2u^{3/2} - v(\sqrt{u} + \tau) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \sqrt{u} - \tau \\ 0 \leq 2u^{3/2} - v(\sqrt{u} + \tau) \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau^2 = u \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 > u \\ v(\sqrt{u} + \tau) \geq 2u^{3/2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 < u \\ v(\sqrt{u} + \tau) \leq 2u^{3/2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \tau^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} u < \tau^2 \\ v \geq \frac{2u^{3/2}}{(\sqrt{u} + \tau)} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u > \tau^2 \\ v \leq \frac{2u^{3/2}}{(\sqrt{u} + \tau)} \end{array} \right. \end{cases}$$

$u = \frac{2u^{3/2}}{(\sqrt{u} + \tau)}$ при $u = \tau^2$. При $0 < u < \tau^2$ график $v(u) = \frac{2u^{3/2}}{(\sqrt{u} + \tau)}$ лежит ниже граничной прямой, а при $u > \tau^2$ — выше.

Т.е.

$$h(+r) \leq h(lt) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \tau^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} u < \tau^2 \\ v \geq u \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u > \tau^2 \\ v \leq \frac{2u^{3/2}}{(\sqrt{u} + \tau)} \end{array} \right. \end{cases}$$

Граница является существенной.

Т.е. $\hat{G}_{lt,+r} = \{u < v < \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}, v \in (\tau^2, +\infty)\}$

$\hat{G}_{+r,lt} = \{\{v > u, u \in (0, \tau^2]\} \cup \{v > \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}, u \in (\tau^2, +\infty)\}\}$

Равенство достигалось на фрагментах двух кривых: $\{u = \tau^2, v \in (0, \infty)\} \cup \{v = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}, u \in (\tau^2, \infty)\}$

$$\begin{aligned}\hat{B}_{+r,lt} &= \{v = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u+\tau}}, u \in (\tau^2, +\infty)\} \cup \{u = \tau^2, v \in (\tau^2, \infty)\} \\ \hat{B}_{+r,lt}^0 &= \{v = u, u \in (0, \tau^2)\} \\ \hat{B}_{lt,+r}^0 &= \{v = u, u \in (\tau^2, +\infty)\} \\ \hat{S}_{+r,lt} &= \emptyset\end{aligned}$$

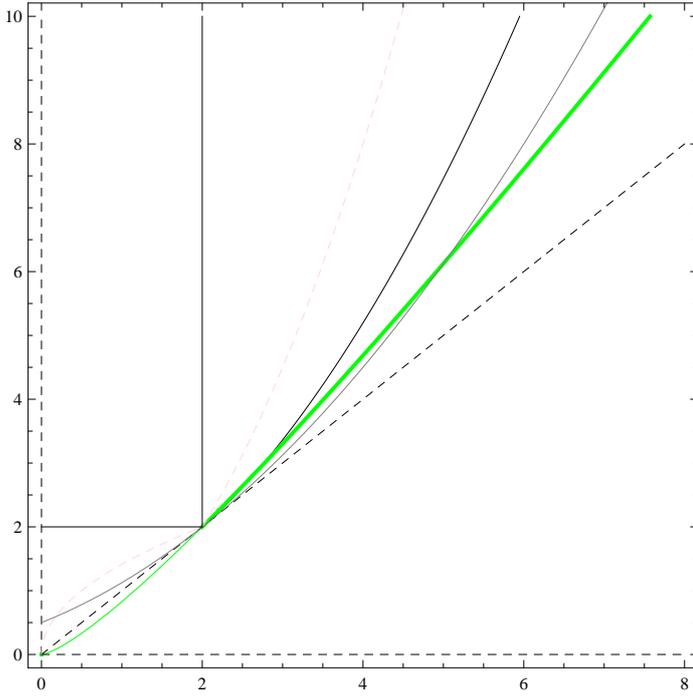


Рис. 12: y_8 : кривая $v = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u+\tau}}$

3.5.14 $+r \vee rt$

Дословно как $+l \vee lt$ с заменой l на r .

$$\begin{aligned}\frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{\kappa} \\ \frac{2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \frac{u}{v} \kappa c_1^2 + \frac{v}{2\kappa}\end{aligned}$$

Умножаем на $2\kappa v$.

$$0 \vee -2\tau\sqrt{uv} + u\tau^2 + v^2$$

$$0 \vee (v - \tau\sqrt{u})^2$$

Выражение справа неотрицательно. Равенство достигается при

$$v = \tau\sqrt{u}, u > 0$$

$$u = \frac{v^2}{\tau^2}, v > 0$$

$u < v$ при $v < \tau^2$.

Т.е. $B_{+r,rt}^0 = \{u = \frac{v^2}{\tau^2}, v \in (0, \tau^2)\}$

$$\hat{G}_{+r,rt} = \hat{D} \setminus B_{+r,rt}^0$$

$$\hat{G}_{rt,+r} = \emptyset$$

$$\hat{S}_{+r,rt} = \{(\tau^2, \tau^2)\}$$

3.5.15 $lt \vee rt$

$$\frac{v}{u} \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa} \vee \frac{u}{v} \varkappa c_1^2 + \frac{v}{\varkappa}$$

Умножаем на $\varkappa uv$.

$$v \varkappa^2 c_1^2 + u^2 v \vee u^2 \varkappa^2 c_1^2 + v^2 u$$

$$0 \vee uv(v - u) + \varkappa^2 c_1^2 (u^2 - v^2)$$

$$0 \vee (v - u)(uv - \varkappa^2 c_1^2 (u + v))$$

$$0 \vee (v - u)(uv - \tau^2 (u + v))/2$$

$v \geq u$ в D . Сократим на $(v - u)$, учтя равенство при $v = u, u \in (0, +\infty)$. Эти точки лежат в множествах типа B^0 и S .

$$0 \vee (uv - \tau^2 (u + v))/2$$

$$\tau^2 u/2 \vee v(u - \tau^2/2)$$

$$h(lt) \leq h(rt) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u - \tau^2/2 < 0 \\ v < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u - \tau^2/2 \geq 0 \\ \frac{u\tau^2}{2(u - \tau^2/2)} \leq v \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq \frac{\tau^2}{2} \\ v \geq \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2}\right) \end{cases}$$

Кривая имеет вертикальную асимптоту при $u = \tau^2/2$, монотонно убывает. Пересекает прямую $v(u) = u$ при $u = \tau^2$:

$$u(u - \tau^2/2) = \tau^2/2(u - \tau^2/2 + \tau^2/2)$$

График кривой при $u \in (0, \tau^2/2)$ находится ниже прямой $v = u$

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{lt,rt} = \{v > \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2}\right), u \in (\tau^2/2, \tau^2)\} \cup \{v > u, u \in (\tau^2, +\infty)\}$$

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{rt,lt} = \{v > u, u \in (0, \tau^2/2)\} \cup \{u < v < \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2}\right), u \in (\tau^2/2, \tau^2)\}$$

$$\hat{B}_{lt,rt}^0 = \{v = u, u \in (\tau^2, +\infty)\}$$

$$\hat{B}_{rt,lt}^0 = \{v = u, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{B}_{lt,rt} = \{v = \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2}\right), u \in (\tau^2/2, \tau^2)\}$$

$$\hat{S}_{lt,rt} = \{\tau^2, \tau^2\}$$

3.5.16 $-l \vee \text{cusp}$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\varkappa} \vee 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa}\right)^{1/3}$$

$$\frac{u}{2\varkappa v^{1/2}} - \sqrt{2}c_1 \vee 3\left(\frac{u^2}{v}\right)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa}\right)^{1/3}$$

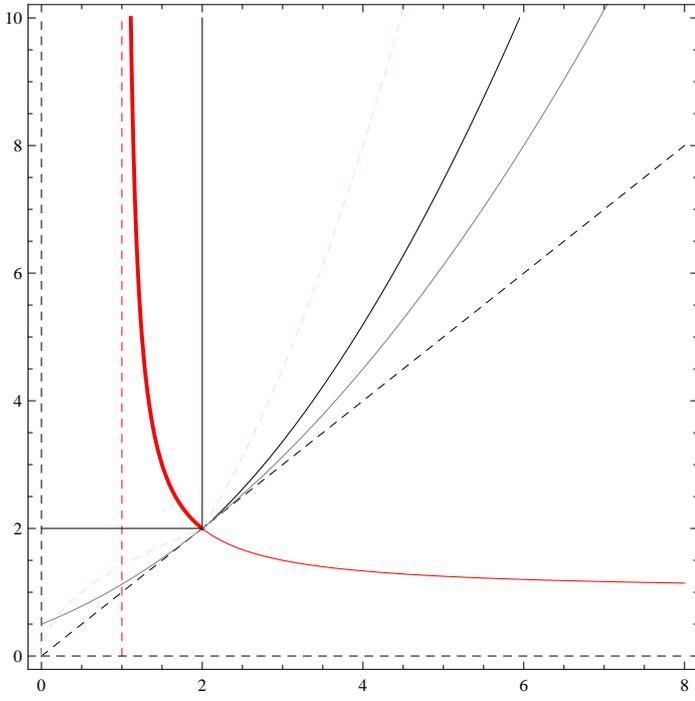


Рис. 13: y_{11} : кривая $v = \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2}\right)$

$$w := \sqrt[6]{\frac{u^2}{v}}$$

$$\frac{1}{2\kappa} w^3 - \sqrt{2}c_1 - 3w \left(\frac{c_1^2}{2^2\kappa}\right)^{1/3} \vee 0 \quad * 2^{1/2} : c_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}c_1\kappa} w^3 - 2 - 3\frac{w}{(2^{1/2}c_1\kappa)^{1/3}} \vee 0$$

$$s := \frac{w}{2^{1/6}\kappa^{1/3}c_1^{1/3}} = \sqrt[6]{\frac{u^2}{2\kappa^2c_1^2v}} = \sqrt[6]{\frac{u^2}{\tau^2v}}$$

$$s^3 - 3s - 2 \vee 0$$

$$s = 2; \quad \text{дважды } s = -1$$

При $s = -1, s = 2$ имеем $h_{-l} = h_{cusp}$

При $s < 2, s \neq -1$ имеем $h_{-l} < h_{cusp}$. По смыслу $s \geq 0$, потому

$$0 \leq s < 2 \Leftrightarrow h_{-l} < h_{cusp},$$

$$s > 2 \Leftrightarrow h_{-l} > h_{cusp},$$

$$s = 2 \Leftrightarrow h_{-l} = h_{cusp}.$$

$$h_{-l} < h_{cusp} \Leftrightarrow 0 < s < 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt[6]{\frac{u^2}{\tau^2v}} < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{u^2}{\tau^2v} < 2^6 \Leftrightarrow 0 < \frac{u^2}{\tau^2} < 2^6v \Leftrightarrow \frac{u^2}{64\tau^2} < v$$

$$v > u, v = \frac{u^2}{64\tau^2} \Leftrightarrow u > 64\tau^2$$

$$\begin{aligned} \text{T.e. } \hat{G}_{-l,cusp} &= \{v \geq u, u \in (0, 64\tau^2)\} \cup \{v > \frac{u^2}{64\tau^2}, u \in (64\tau^2, \infty)\} \\ \hat{G}_{cusp,-l} &= \{u \geq v < \frac{u^2}{64\tau^2}, u \in (64\tau^2, \infty)\} \\ \hat{B}_{-l,cusp} &= \{v = \frac{u^2}{64\tau^2}, u \in (64\tau^2, \infty)\} \\ \hat{S}_{-l,cusp} &= \{64\tau^2, 64\tau^2\} \end{aligned}$$

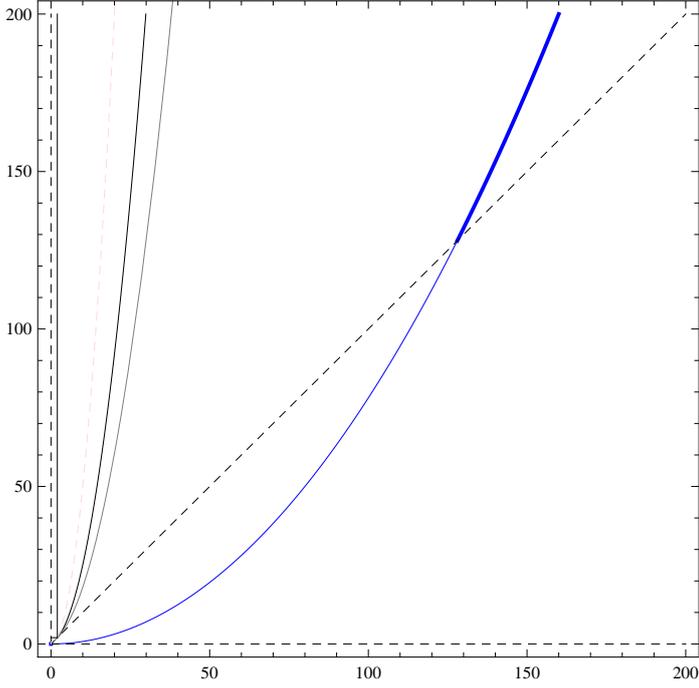


Рис. 14: y_{12} : кривая $v = \frac{u^2}{64\tau^2}$

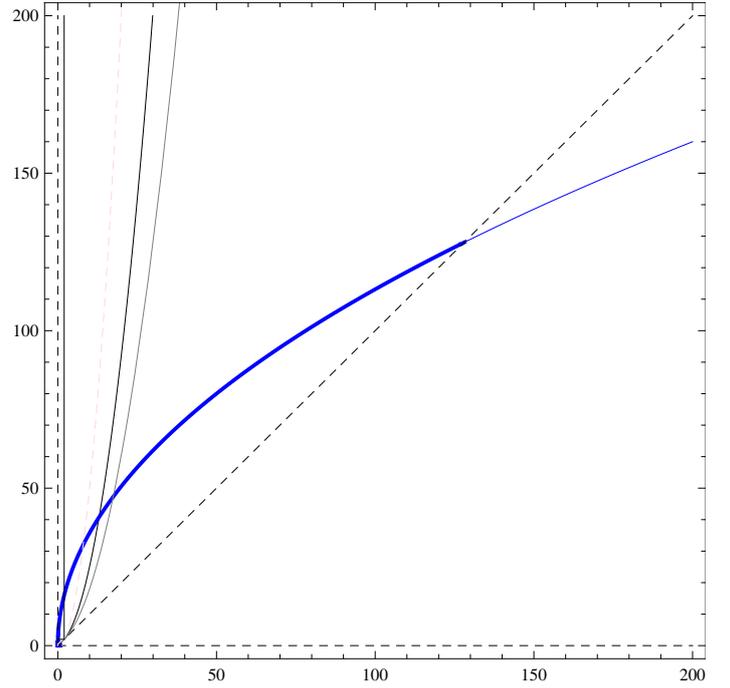


Рис. 15: y_{13} : кривая $v = 8\tau\sqrt{u}$

3.5.17 +l ∨ cusp

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{1/3}$$

Отличие от случая $+l, cusp$ имеется лишь в знаке при $\sqrt{2}c_1\sqrt{v}$ в левой части. Потому, используя ту же замену переменной, получим

$$s := \sqrt[6]{\frac{u^2}{\tau^2 v}}$$

$$s^3 - 3s + 2 \vee 0$$

$$s = -2; \quad \text{дважды } s = 1$$

При $s = 1, s = -2$ имеем $h_{+l} = h_{cusp}$

При $s \geq 0, s \neq 1$ имеем $h_{+l} > h_{cusp}$. По смыслу $s \geq 0$, потому

$$h_{+l} \geq h_{cusp}, \quad \hat{G}_{+l,cusp} = \emptyset$$

$$s = 1 \Leftrightarrow h_{+l} = h_{cusp},$$

$$s \neq 1 \Leftrightarrow h_{+l} > h_{cusp}.$$

$$h_{-l} > h_{cusp} \Leftrightarrow s \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{u^2}{\tau^2 v}} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\tau^2 v} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\tau^2} \neq v \Leftrightarrow \frac{u^2}{\tau^2} \neq v$$

$$v > u, v = \frac{u^2}{\tau^2} \Leftrightarrow u > \tau^2$$

$$\text{T.e. } \hat{G}_{cusp,+l} = \hat{D} \setminus \left\{ v = \frac{u^2}{\tau^2}, u \in (\tau^2, \infty) \right\}$$

$$\hat{G}_{+l,cusp} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{cusp,+l}^0 = \left\{ v = \frac{u^2}{\tau^2}, u \in (\tau^2, \infty) \right\}$$

$$\hat{S}_{+l,cusp} = \{ \tau^2, \tau^2 \}$$

3.5.18 $-r \vee cusp$

$$\frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{1/3}$$

Отличие от случая $-l \vee cusp$ в смене местами u, v . Переменной s' обозначим $s'(u, v) := s(v, u)$. Тогда:

$$s' := \sqrt[6]{\frac{v^2}{\tau^2 u}}$$

$$s'^3 - 3s' - 2 \vee 0$$

$$s' = 2; \quad \text{дважды } s' = -1$$

При $s' = -1, s' = 2$ имеем $h_{-l} = h_{cusp}$

При $0 \leq s' < 2$ имеем $h_{-r} < h_{cusp}$.

$$0 \leq s' < 2 \Leftrightarrow h_{-r} < h_{cusp},$$

$$s' > 2 \Leftrightarrow h_{-r} > h_{cusp},$$

$$s' = 2 \Leftrightarrow h_{-r} = h_{cusp}.$$

$$h_{-r} < h_{cusp} \Leftrightarrow 0 \leq s' < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[6]{\frac{v^2}{\tau^2 u}} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{v^2}{\tau^2 u} < 2^6 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{v^2}{\tau^2} < 2^6 u \Leftrightarrow \frac{v^2}{64\tau^2} < u \Leftrightarrow v < 8\tau\sqrt{u}$$

$$v > u, u = \frac{v^2}{64\tau^2} \Leftrightarrow v > u, v = 8\tau\sqrt{u} \Leftrightarrow u < 64\tau^2$$

$$\text{T.e. } \hat{G}_{cusp,-r} = \{ v > 8\tau\sqrt{u}, u \in (0, 64\tau^2) \} \cup \{ v \geq u, u \in (64\tau^2, \infty) \}$$

$$\hat{G}_{-r,cusp} = \{ u \geq v < 8\tau\sqrt{u}, u \in (0, 64\tau^2) \}$$

$$\hat{B}_{-r,cusp} = \{ v = 8\tau\sqrt{u}, u \in (0, 64\tau^2) \}$$

$$\hat{S}_{-r,cusp} = \{ 64\tau^2, 64\tau^2 \}$$

3.5.19 $+r \vee \text{cusp}$

$$\frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{1/3}$$

Отличие от случая $-r, \text{cusp}$ имеется лишь в знаке при $\sqrt{2}c_1\sqrt{u}$ в левой части. Потому, используя ту же замену переменной, получим

$$s' := \sqrt[6]{\frac{v^2}{\tau^2 u}}$$

$$s'^3 - 3s' + 2 \vee 0$$

$$s' = -2; \quad \text{дважды } s' = 1$$

При $s' = 1, s' = -2$ имеем $h_{+r} = h_{\text{cusp}}$

При $s' \geq 0, s' \neq 1$ имеем $h_{+r} > h_{\text{cusp}}$. По смыслу $s' \geq 0$, потому

$$h_{+r} \geq h_{\text{cusp}}, \quad \hat{G}_{+r, \text{cusp}} = \emptyset$$

$$s' = 1 \Leftrightarrow h_{+r} = h_{\text{cusp}},$$

$$s' \neq 1 \Leftrightarrow h_{+r} > h_{\text{cusp}}.$$

$$h_{+r} > h_{\text{cusp}} \Leftrightarrow s' \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{v^2}{\tau^2 u}} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{v^2}{\tau^2 u} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{v^2}{\tau^2} \neq u \Leftrightarrow v \neq \tau\sqrt{u}$$

$$v > u, v = \tau\sqrt{u} \Leftrightarrow u < \tau^2$$

Т.е. $\hat{G}_{\text{cusp}, +r} = \hat{D} \setminus \{v = \tau\sqrt{u}, u \in (0, \tau^2)\}$

$$\hat{G}_{+r, \text{cusp}} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{\text{cusp}, +r}^0 = \{v = \tau\sqrt{u}, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{S}_{+r, \text{cusp}} = \{\tau^2, \tau^2\}$$

3.5.20 $\text{lt} \vee \text{cusp}$

$$\frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa} \vee \sqrt[3]{3(uv)^{1/3}} \left(\frac{c_1^2}{4\kappa} \right)^{1/3} \Big| \frac{\kappa}{u}$$

$$\frac{v}{u^2} \kappa^2 c_1^2 + 1 \vee \sqrt[3]{3\left(\frac{v}{u^2}\right)^{1/3}} \left(\frac{c_1^2 \kappa^2}{4} \right)^{1/3}$$

$$w := \sqrt[3]{\frac{v}{u^2} \kappa^2 c_1^2}$$

$$w^3 + 1 - \frac{3}{4^{1/3}} w \vee 0$$

$$w^3 - \frac{3}{2^{2/3}} w + 1 \vee 0$$

$$w = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \text{корень: } \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{2/3} \sqrt[3]{2}} + 1 = 0$$

Разделим многочлен на двучлен $w - 2^{-1/3}$, получим

$$w^3 - 32^{-2/3}w + 1 = (w - 2^{-1/3})(w^2 + 2^{-1/3}w - 2^{1/3})$$

Найдем корни этого трехчлена:

$$w_{1,2} = \frac{-2^{-1/3} \pm \sqrt{2^{-2/3} + 2^{2+1/3}}}{2} = -2^{-4/3} \pm \frac{\sqrt{1+8}}{2^{1+1/3}} = (-1 \pm 3)2^{-4/3}$$

$$w = -\sqrt[3]{34} = -2^{2/3}, \quad w = 2^{-1/3}$$

Т.е. корень $w = 2^{-1/3}$ имеет кратность 2.

При $w = 2^{-1/3}, w = -2^{2/3}$ имеем $h_{lt} = h_{cusp}$

При $w \geq 0, w \neq 2^{-1/3}$ имеем $h_{lt} > h_{cusp}$. По смыслу $w \geq 0$, потому

$$h_{lt} \geq h_{cusp}, \quad \hat{G}_{lt,cusp} = \emptyset$$

$$w = 2^{-1/3} \Leftrightarrow h_{lt} = h_{cusp},$$

$$w \neq 2^{-1/3} \Leftrightarrow h_{lt} > h_{cusp}.$$

$$h_{lt} > h_{cusp} \Leftrightarrow w \neq 2^{-1/3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{v}{u^2}\tau^2/2} \neq 2^{-1/3} \Leftrightarrow \frac{v}{u^2} \neq \tau^2 \Leftrightarrow v \neq \frac{u^2}{\tau^2}$$

$$v > u, v = \frac{u^2}{\tau^2} \Leftrightarrow u > \tau^2$$

Т.е. $\hat{G}_{cusp,lt} = \hat{D} \setminus \{v = \frac{u^2}{\tau^2}, u \in (\tau^2, \infty)\}$

$$\hat{G}_{lt,cusp} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{cusp,lt}^0 = \{v = \frac{u^2}{\tau^2}, u \in (\tau^2, \infty)\}$$

$$\hat{S}_{+,cusp} = \{\tau^2, \tau^2\}$$

3.5.21 $rt \vee cusp$

$$\frac{u}{v}\varkappa c_1^2 + \frac{v}{\varkappa} \vee 3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa}\right)^{1/3} \Big| \frac{\varkappa}{u}$$

Отличие от случая $lt, cusp$ состоит в замене местами u, v . Потому:

$$w := \sqrt[3]{\frac{u}{v^2}\varkappa^2 c_1^2}$$

$$w^3 - \frac{3}{2^{2/3}}w + 1 \vee 0$$

$$w = -\sqrt[3]{4} = -2^{2/3}, \quad w = 2^{-1/3} \quad \text{дважды}$$

При $w = 2^{-1/3}, w = -2^{2/3}$ имеем $h_{rt} = h_{cusp}$

$$w = 2^{-1/3} \Leftrightarrow h_{rt} = h_{cusp},$$

$$w \neq 2^{-1/3} \Leftrightarrow h_{rt} > h_{cusp}.$$

$$h_{rt} > h_{cusp} \Leftrightarrow w \neq 2^{-1/3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{u}{v^2} \tau^2 / 2} \neq 2^{-1/3} \Leftrightarrow \frac{u}{v^2} \neq \tau^2 \Leftrightarrow u \tau^2 \neq v^2 \Leftrightarrow \tau \sqrt{u} \neq v$$

$$v > u, v = \tau \sqrt{u} \Leftrightarrow u < \tau^2$$

$$\text{T.e. } \hat{G}_{cusp,rt} = \hat{D} \setminus \{v = \tau \sqrt{u}, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{G}_{rt,cusp} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{cusp,rt}^0 = \{v = \tau \sqrt{u}, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{S}_{+r,cusp} = \{\tau^2, \tau^2\}$$

3.5.22 $-1 \vee \mathbf{h}_1$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

$$u - 2\tau\sqrt{v} \vee \tau^2 + 2u$$

$$-2\tau\sqrt{v} \vee \tau^2 + u$$

$$0 \vee 2\tau\sqrt{v}\tau^2 + u$$

$$\text{T.e. } \hat{G}_{-l,h_1} = \hat{D}$$

Остальные множества пусты.

3.5.23 $+1 \vee \mathbf{h}_1$

$$\frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

$$u + 2\tau\sqrt{v} \vee \tau^2 + 2u$$

$$2\tau\sqrt{v} \vee \tau^2 + u$$

$$\sqrt{v} \vee \frac{\tau^2 + u}{2\tau}$$

Правая часть неотрицательна, потому

$$v \vee \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$$

Имеем равенство $u = v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$ при $u = \tau^2$.

При всяких $u > 0$ на границе $v = u$ имеем

$$4\tau^2 u \vee \tau^4 + 2\tau^2 u + u^2$$

$$0 \vee \tau^4 - 2\tau^2 u + u^2$$

$$0 \leq (\tau^2 - u)^2$$

$$0 < (\tau^2 - u)^2 \text{ при } u \neq \tau^2$$

$$\begin{aligned} \text{T.e. } \hat{G}_{h_l, +l} &= \{v > \frac{1}{4} (\tau + \frac{u}{\tau})^2, u \in (0, \infty)\} \\ \hat{G}_{+l, h_l} &= \{u \leq v < \frac{1}{4} (\tau + \frac{u}{\tau})^2, u \in (0, \infty)\} \\ \hat{B}_{+l, h_l} &= \{v = \frac{1}{4} (\tau + \frac{u}{\tau})^2, u \in (0, \infty)\} \\ \hat{S}_{+l, h_l} &= \{\tau^2, \tau^2\} \end{aligned}$$

Замечание 12. В координатах (b, a) данная кривая записывается уравнениями $a = f_t(b, t'), b = b(t')$.
Замены: $t = u/(2\kappa), t' := \sqrt{t}$.

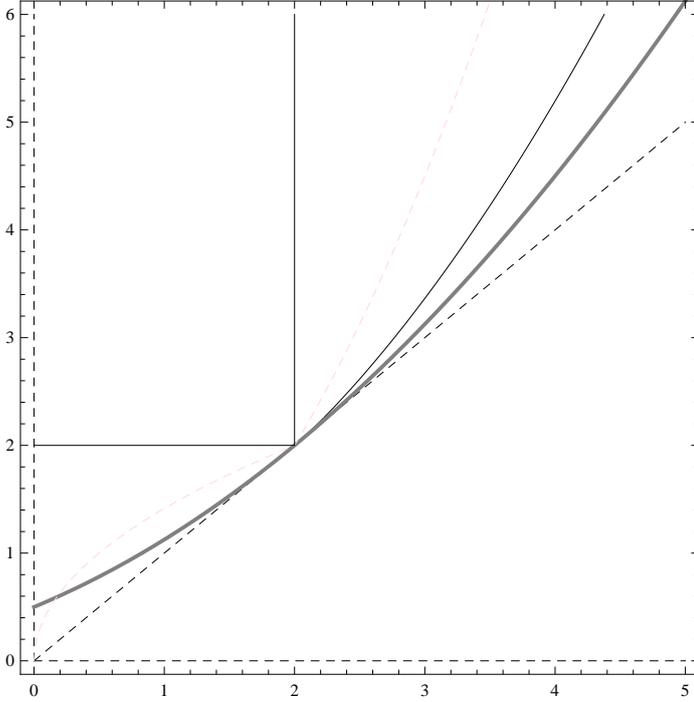


Рис. 16: $a = f_t(b) : y_{14}$: кривая $v = \frac{1}{4} (\tau + \frac{u}{\tau})^2$

3.5.24 $-r \vee h_1$

$$\frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

$$v - 2\tau\sqrt{u} \vee \tau^2 + 2u$$

$$v \vee 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

$$\text{T.e. } \hat{G}_{-r, h_l} = \{u \leq v < 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2, u \in (0, +\infty)\}$$

$$\hat{G}_{h_l, -r} = \{v > 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2, u \in (0, +\infty)\}$$

$$\hat{B}_{-r, h_l} = \{v = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2, u \in (0, +\infty)\}$$

Остальные множества пусты.

3.5.25 $+r \vee h_1$

$$\frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa}$$

$$v + 2\tau\sqrt{u} \vee \tau^2 + 2u$$

$$v \vee 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

График $v = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$ находится выше прямой $v = u$ кроме точки $u = \tau^2$:

$$u = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$$

$$0 = (\sqrt{u} - \tau)^2$$

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{h_l, +r} = \{v > 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{G}_{+r, h_l} = \{u \leq v < 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{B}_{+r, h_l} = \{v = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{S}_{+r, h_l} = \{\tau^2, \tau^2\}$$

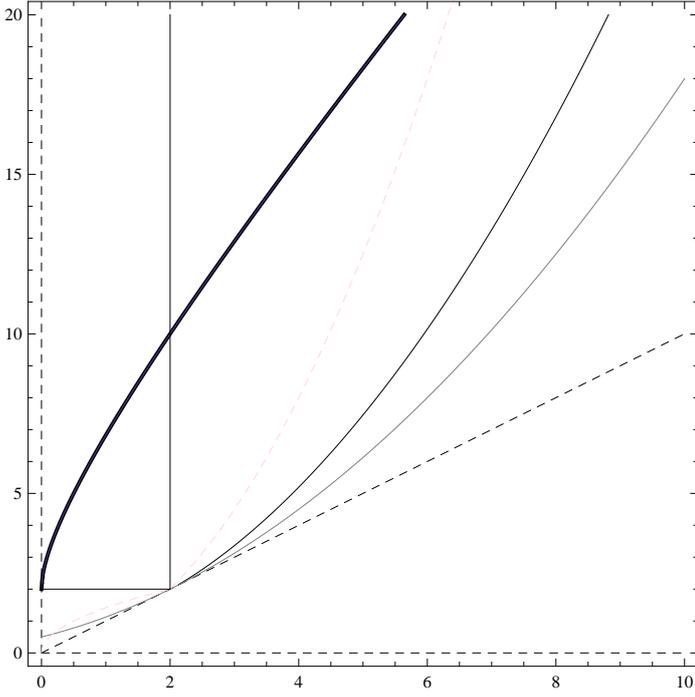


Рис. 17: y_{15} : кривая $v = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$

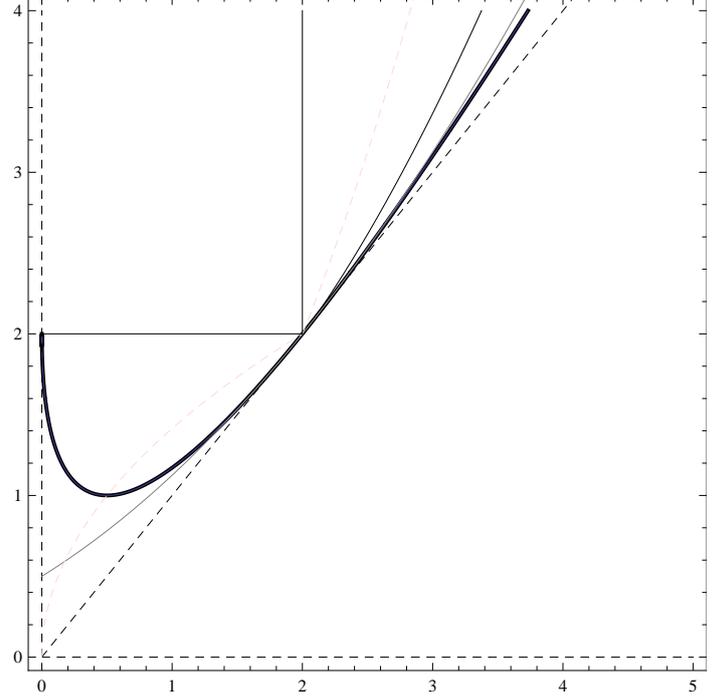


Рис. 18: y_{16} : кривая $v = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$

3.5.26 $lt \vee h_l$

$$\frac{v}{u} \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}$$

$$0 \vee \left(\frac{v}{u} - 1\right) \varkappa c_1^2$$

$$0 \vee \frac{v - u}{u}$$

Поскольку $u > 0$ в \hat{D} , то:

$$h_{lt} < h_l \Leftrightarrow 0 < v - u$$

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{lt, h_l} = \{v > u, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{G}_{h_l, lt} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{lt, h_l}^0 = \{v = u, u \in (0, \infty)\}$$

3.5.27 $rt \vee h_l$

$$\frac{u}{v} \varkappa c_1^2 + \frac{v}{\varkappa} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa} |2v\varkappa$$

$$u\tau^2 + 2v^2 \vee v\tau^2 + 2uv$$

$$v(2v - \tau^2) \vee u(2v - \tau^2)$$

$$0 \vee (u - v)(2v - \tau^2)$$

$$(v - u)(2v - \tau^2) \vee 0$$

На прямой $v = u$ достигается равенство. В \hat{D} вне нее левая часть положительна. Потому

$$(2v - \tau^2) \vee 0$$

$$v \vee \frac{\tau^2}{2}$$

$$h_{rt} < h_l \Leftrightarrow v < \frac{\tau^2}{2}$$

Т.е. $\hat{G}_{rt, h_l} = \{v > u, u \in (0, \frac{\tau^2}{2})\}$

$\hat{G}_{h_l, rt} = \{v > u, u \in (\frac{\tau^2}{2}, \infty)\}$

$\hat{B}_{rt, h_l}^0 = \{v = u, u \in (0, \frac{\tau^2}{2})\}$

$\hat{B}_{h_l, rt}^0 = \{v = u, u \in (\frac{\tau^2}{2}, \infty)\}$

$\hat{S}_{rt, h_l} = \{\frac{\tau^2}{2}, \frac{\tau^2}{2}\}$

3.5.28 $-l \vee h_{int}$

$$\frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\varkappa} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u + v}{2\varkappa}$$

$$\frac{-2\tau\sqrt{v}}{2\varkappa} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{v}{2\varkappa}$$

$$-2\tau\sqrt{v} \vee \tau^2 + v$$

$$0 \vee (\tau + \sqrt{v})^2$$

Правая часть положительна при всех парах (u, v) из D .

Т.е. $\hat{G}_{-l, h_{int}} = \hat{D}$

Остальные множества пусты.

3.5.29 $+l \vee \mathbf{h}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} & \frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u + v}{2\kappa} \\ & \frac{+2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{v}{2\kappa} \\ & + 2\tau\sqrt{v} \vee \tau^2 + v \\ & 0 \vee (\tau - \sqrt{v})^2 \end{aligned}$$

Правая часть неотрицательна при всех парах (u, v) из D . Она равна нулю при $v = \tau^2, v > u$.

Т.е. $\hat{G}_{+l, h_{\text{int}}} = \hat{D} \setminus \{v = \tau^2, u \in (0, \tau^2)\}$

$\hat{G}_{h_{\text{int}}, +l} = \emptyset$

$\hat{B}_{+l, h_{\text{int}}}^0 = \{v = \tau^2, u \in (0, \tau^2)\}$

3.5.30 $-r \vee \mathbf{h}_{\text{int}}$

$$\frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u + v}{2\kappa}$$

Данный случай получается из $-l, h_{\text{int}}$ заменой u на v и наоборот.

$$0 \vee (\tau + \sqrt{u})^2$$

Правая часть положительна при всех парах (u, v) из D .

Т.е. $\hat{G}_{-r, h_{\text{int}}} = \hat{D}$

Остальные множества пусты.

3.5.31 $+r \vee \mathbf{h}_{\text{int}}$

$$\frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u + v}{2\kappa}$$

Данный случай получается из $+l, h_{\text{int}}$ заменой u на v и наоборот.

$$0 \vee (\tau - \sqrt{u})^2$$

Правая часть неотрицательна при всех парах (u, v) из D . Она равна нулю при $u = \tau^2, v > u$.

Т.е. $\hat{G}_{+r, h_{\text{int}}} = \hat{D} \setminus \{u = \tau^2, v \in (\tau^2, \infty)\}$

$\hat{G}_{h_{\text{int}}, +r} = \emptyset$

$\hat{B}_{+r, h_{\text{int}}}^0 = \{u = \tau^2, v \in (\tau^2, \infty)\}$

3.5.32 $lt \vee \mathbf{h}_{\text{int}}$

$$\frac{v}{u} \kappa c_1^2 + \frac{u}{\kappa} \vee \kappa c_1^2 + \frac{u + v}{2\kappa}$$

$$\frac{v}{u} \kappa c_1^2 \vee \kappa c_1^2 + \frac{v - u}{2\kappa}$$

$$v\tau^2 \vee u\tau^2 + uv - u^2$$

$$v(\tau^2 - u) \vee u(\tau^2 - u)$$

$$(v - u)(\tau^2 - u) \vee 0$$

На прямой $v = u$ имеем равенство, вне нее —

$$h_{lt} \vee h_{int} \Leftrightarrow (\tau^2 - u) \vee 0 \Leftrightarrow \tau^2 \vee u$$

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{lt, h_{int}} = \{v > u, u \in (\tau^2, \infty)\}$$

$$\hat{G}_{h_{int}, lt} = \{v > u, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{B}_{lt, h_{int}} = \{u = \tau^2, v \in (\tau^2, \infty)\}$$

$$\hat{B}_{lt, h_{int}}^0 = \{v = u, u \in (\tau^2, \infty)\}$$

$$\hat{B}_{h_{int}, lt}^0 = \{v = u, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{S}_{lt, h_{int}} = \{(\tau^2, \tau^2)\}$$

3.5.33 $rt \vee h_{int}$

$$\frac{u}{v} \varkappa c_1^2 + \frac{v}{\varkappa} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\varkappa}$$

Данный случай получается из lt, h_{int} заменой u на v и наоборот.

$$(u - v)(\tau^2 - v) \vee 0$$

$$0 \vee (v - u)(\tau^2 - v)$$

На прямой $v = u$ имеем равенство, вне нее —

$$h_{rt} \vee h_{int} \Leftrightarrow 0 \vee (\tau^2 - v) \Leftrightarrow v \vee \tau^2$$

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{rt, h_{int}} = \{u < v, v \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{G}_{h_{int}, rt} = \{u < v, v \in (\tau^2, \infty)\}$$

$$\hat{B}_{rt, h_{int}} = \{v = \tau^2, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{B}_{rt, h_{int}}^0 = \{v = u, u \in (0, \tau^2)\}$$

$$\hat{B}_{h_{int}, rt}^0 = \{v = u, u \in (\tau^2, \infty)\}$$

$$\hat{S}_{rt, h_{int}} = \{(\tau^2, \tau^2)\}$$

3.5.34 $\text{cusp} \vee h_1$

$$3(uv)^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa} \right)^{1/3} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}$$

$$3v^{1/3} u^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa} \right)^{1/3} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}$$

$$v^{1/3} \vee \frac{\varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa}}{3u^{1/3} \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa} \right)^{1/3}}$$

$$v^{1/3} \vee \frac{\varkappa^2 c_1^2 + u}{3u^{1/3} \varkappa \left(\frac{c_1^2}{4\varkappa} \right)^{1/3}}$$

$$\begin{aligned}
& v^{1/3} \sqrt[3]{\frac{(\varkappa^2 c_1^2 + u)2^{2/3}}{3u^{1/3} \varkappa^{2/3} c_1^{2/3}}} \\
v^{1/3} \sqrt[3]{\frac{(\varkappa^2 c_1^2 + u)2}{3u^{1/3} 2^{1/3} \varkappa^{2/3} c_1^{2/3}}} &= \frac{(\tau^2 + 2u)}{3u^{1/3} \tau^{2/3}} \\
v \sqrt[3]{\left(\frac{(\tau^2 + 2u)}{3u^{1/3} \tau^{2/3}}\right)^3} \\
v \sqrt[3]{\frac{(\tau^2 + 2u)^3}{27u\tau^2}} \\
v \sqrt[3]{\frac{8u^3 + 12u^2\tau^2 + 6u\tau^4 + \tau^6}{27u\tau^2}} \\
v \sqrt[3]{\frac{8u^3 + 12u^2\tau^2 + 6u\tau^4 + \tau^6}{27u\tau^2}} \\
v \sqrt[3]{\frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{12}{27}u + \frac{6}{27}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}} \\
v \sqrt[3]{\frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}}
\end{aligned}$$

Когда график этой функции лежит выше прямой $v = u$?

$$\begin{aligned}
u \sqrt[3]{\frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}} \\
0 \sqrt[3]{\frac{8}{27\tau^2}u^2 - \frac{5}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}} \\
0 \sqrt[3]{\frac{8}{\tau^2}u^2 - 15u + 6\tau^2 + \frac{\tau^4}{u}}
\end{aligned}$$

Умножение на u не добавит корня и не создаст нового (кроме, возможно, $u = 0$, что проверим отдельно).

$$0 \sqrt[3]{\frac{8}{\tau^2}u^3 - 15u^2 + 6\tau^2u + \tau^4} = f(u)$$

Экстремумы:

$$0 = \frac{24}{\tau^2}u^2 - 30u + 6\tau^2$$

$$0 = 24u^2 - 30\tau^2u + 6\tau^4$$

$$u = \tau^2 \quad u = \tau^2/4$$

τ^2 — минимум, $f(\tau^2) = (8 - 15 + 6 + 1)\tau^4 = 0$. При этом $f(0) = \tau^4 > 0$, т.е. при $u > 0$ график лежит выше прямой $v = u$, имея с ней единственную общую точку (τ^2, τ^2) .

$$\text{Т.е. } \hat{G}_{cusp, h_1} = \{v > \frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{G}_{h_1, cusp} = \{v < \frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}, v \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{B}_{cusp, h_1} = \{v = \frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{S}_{cusp, h_1} = \{(\tau^2, \tau^2)\}$$

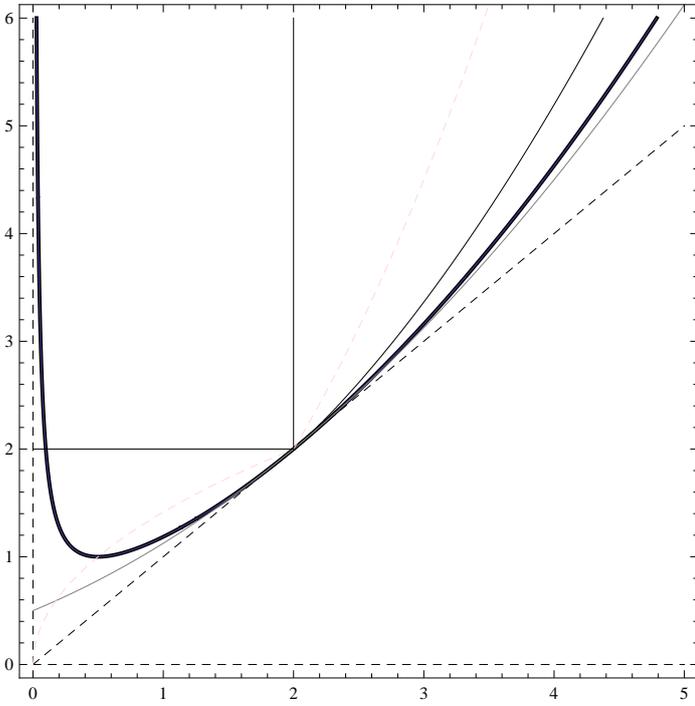


Рис. 19: y_{17} : кривая $v = \frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}$

3.5.35 $\text{cusp} \vee \mathbf{h}_{\text{int}}$

В координатах (u, v) не удалось получить осмысленного выражения, потому приведем здесь формулу в координатах (b, a) :

$$3b^{2/3}c_1^{2/3} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\varkappa}$$

$$3b^{2/3}c_1^{2/3} \varkappa \vee \varkappa^2 c_1^2 + \frac{u+v}{2}$$

$$3b^{2/3}c_1^{2/3} \varkappa \vee \varkappa^2 c_1^2 + a$$

$$h_{\text{cusp}} \vee h_{\text{int}} \Leftrightarrow 3b^{2/3}c_1^{2/3} \varkappa - \varkappa^2 c_1^2 \vee a$$

Отметим, что график $a = f(b)$ расположен нетривиально относительно $a = 2\sqrt{\varkappa b}$

Данный график y_{19} получен как множество решений следующего уравнения программой Wolfram Mathematica 8.0:

$$\frac{u+v}{2} + 1 = 3 \left(\frac{uv}{4} \right)^{1/3}$$

3.5.36 $\mathbf{h}_l \vee \mathbf{h}_{\text{int}}$

$$\varkappa c_1^2 + \frac{u}{\varkappa} \vee \varkappa c_1^2 + \frac{u+v}{2\varkappa}$$

$$u \vee v$$

$$\text{T.e. } \hat{G}_{h_l, h_{\text{int}}} = \hat{D} \setminus \{v = u, u \in (0, \infty)\}$$

$$\hat{G}_{h_{\text{int}}, h_l} = \emptyset$$

$$\hat{B}_{h_l, h_{\text{int}}}^0 = \{v = u, u \in (0, \infty)\}$$

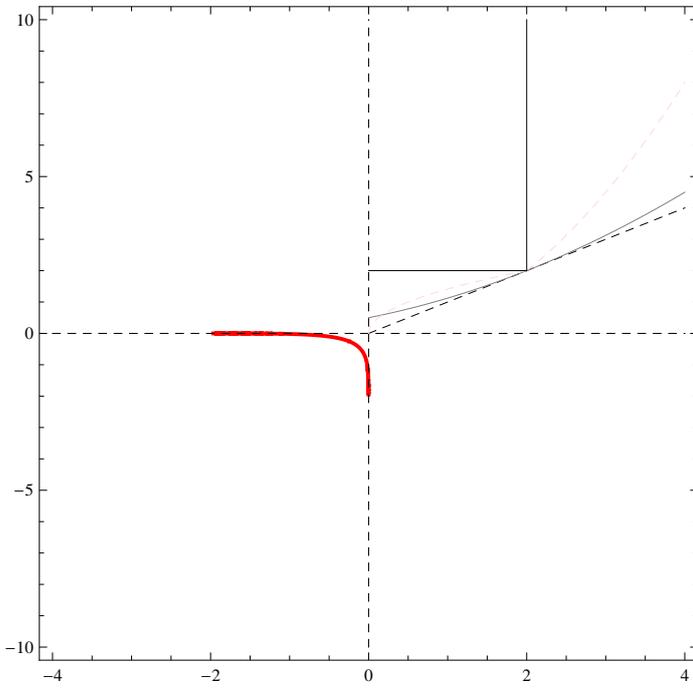


Рис. 20: y_{19} : кривая $a = 3b^{2/3}c_1^{2/3} - \varkappa^2 c_1^2$

3.5.37 Замечание об f_k

Эта кривая после замены координат достается кривой. Как график явной функции задать ее в координатах (u, v) не удалось. Это будет сделано в следующих пунктах в других координатах.

Перепишем f_k в новых переменных:

$$a = f_k(b) = \frac{3b^{4/3}}{4c_1^{2/3}} + \frac{3}{2}\varkappa c_1^{2/3}b^{2/3} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2$$

$$(u + v)/2 = \frac{3(uv)^{2/3}}{4^{5/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\varkappa c_1^{2/3}(uv)^{1/3}}{2(4\varkappa)^{1/3}} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2$$

Отметим, что выше данной кривой $(u + v)/2 > f_k(u, v)$. А ниже — наоборот.

3.6 Полученный список разделяющих кривых

Сведем воедино полученные результаты, и представим их в виде нескольких таблиц. Во-первых, для каждой пары особых точек укажем функции, графиками которых являются граничные кривые множеств $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$, область определения этих функций, а также то, одинаков ли порядок особых точек по разные стороны от такой кривой. Одинаковый порядок обозначим символом "0", а различный — символом "1", в соответствующем столбце. Отметим, что пары точек рассмотрены упорядоченные. Если для (b, a) , лежащих под графиком функции (или лежащих левее него, если график вертикален) абсцисса первой точки меньше абсциссы второй точки, то поставим знак « \ll », иначе — « \gg ». Если данная кривая лежит на $v = u$, то поставим значок " ∂ " — лежит на границе множества D .

В таблицу 9 внесем данные, необходимые для рисования графика разделяющих кривых в системе Wolfram Mathematica. А именно, номер, цвет, функцию, ее область определения, зависимую и независимую переменную. Буква (Π) в скобках обозначает, что линия пунктирная. "Св. синий" — цвет по умолчанию, похожий на синий. На последующих графиках не будем менять выбранный сейчас цвет.

т. 1	т. 2	f(x)	ф-ла	обл. опр	выше: ?	метка
-l	+l	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
-l	-r	$v(u) = u$	u	$(0, \infty)$	да	0 ∂
-l	+r	\emptyset	u	$(0, \infty)$	<	
+l	-r	$v(u) = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	u	$(0, \infty)$	да	
+l	+r	$v(u) = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	u	$(0, \tau^2)$	да	
+l	+r	$v(u) = u$	u	$(0, \tau^2)$	нет	0
+l	+r	$v(u) = u$	u	(τ^2, ∞)	да	0
-r	+r	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
-l	lt	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
-l	rt	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
+l	lt	$v(u) = \frac{u^2}{\tau^2}$	u	(τ^2, ∞)	да	0
+l	rt	$u(v) = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau}$	v	$(0, \tau^2)$	нет	
+l	rt	$v(u) = \tau^2$	u	$(0, \tau^2)$	да	
-r	lt	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$	u	(τ^2, ∞)	нет	
-r	rt	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
+r	lt	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}$	u	(τ^2, ∞)	да	
+r	lt	$u(v) = \tau^2$	v	(τ^2, ∞)	v , нет	
+r	lt	$v(u) = u$	u	$(0, \tau^2)$	да	0
+r	lt	$v(u) = u$	u	(τ^2, ∞)	нет	0
+r	rt	$u(v) = \frac{v^2}{\tau^2}$	v	$(0, \tau^2)$	да	0
lt	rt	$v(u) = \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2} \right)$	u	$(\tau^2/2, \tau^2)$	да	
lt	rt	$v(u) = u$	u	$(0, \tau^2)$	нет	0
lt	rt	$v(u) = u$	u	(τ^2, ∞)	да	0

Таблица 7: Разделяющие кривые для пар особых точек, часть 1

Замечание 13. Отметим, что кривые, не являющиеся одной из f_l, f_t, f_r, f_m — разделяют ровно одну пару точек. Причем по разные стороны от кривой порядок этих точек различен.

Теперь рассмотрим вопрос: какие фрагменты этих кривых находятся в таких областях из I–IX, в которых встречаются обе особые точки пары, разделяемой данной кривой. Для этого составим таблицу 10, в которой каждой области сопоставлены имеющиеся особые точки и указаны уравнения кривых, в которых лежат границы данной области. Вертикальная граница полагается верхней для области, если область лежит справа от нее и нижней в ином случае.

Приведем здесь список всех особых точек, встречающихся в системе при $b \neq 0$:

$$-l, +l, -r, +r, lt, rt, h_{int}, h_l, z_1, cusp, rootl, rootr$$

Сведем данные из этих таблиц в таблицу 11 и укажем для каждой кривой, в каких областях она могла бы быть разделяющим множеством (т.е. в каких областях присутствуют обе точки разделяемой ею пары). Если это фрагмент одной из пяти старых кривых, то вновь отметим это символом " ∂ " — обозначение границы.

Утверждение 6. В разделяющее множество на плоскости (u, v) входят в точности следующие фрагменты кривых $f_1..f_{19}, f_k$ из таблицы 9:

1) $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{18}$ — полностью, с указанными в 9 областями определения.

2) f_k — при $u \in (\tau^2, +\infty)$

3) f_{13} при $u \in (0, u_0)$, где $u_0 = \frac{(5 + 3\sqrt{3})^2}{16}\tau^2$.

4) f_{17} — при $u \in (0, \tau^2/4)$

5) Полностью не входят: $f_6, f_{11}, f_{12}, a = f_{19}(b)$

Доказательство. 1) Следующие кривые (с областями определения из таблицы 9 входят в разделяющее множество полностью:

$f_1, f_4, f_5, f_9, f_{10}, f_{14}$ являются кривыми, разделяющими D на области I-IX.

f_2 : при $u = 0$ имеем $f_2(0) = 4\tau^2 > \tau^2$. Т.е. $f_2(u) \geq \tau^2$ при всех u : сумма возрастающих неотрицательных слагаемых. Порядок роста данной функции на бесконечности — линейный, старший коэффициент такой же, как у f_l , и расположена всегда выше f_l . Порядки роста функций f_t, f_r — квадратичные, график f_k зажат между ними. Значит, f_2 пересечет их все. График расположен в областях I-V, и разделяемые им точки имеются во всех этих областях.

f_3 : $f_3(u) = (\sqrt{u} - 2\tau)^2$. Значит, $f_3(u) > u$ при $-4\sqrt{u}\tau + \tau^2 > 0$, т.е. при $u < \tau^2$. Значит, данная кривая присутствует только в области V, где имеются обе разделяемые ею особые точки. При $0 \leq u \leq \tau u^2$ лежит выше $f_m = f_{10}$.

f_7 : в пункте 3.5.11 описан вид и расположение графика. Данная кривая целиком лежит в \hat{D} строго выше f_l и правее f_m , и все такие области I-IV содержат обе разделяемые графиком точки.

f_8 : в пункте 3.5.11 описан вид графика. Он расположен правее f_m при $u > \tau^2$. Поделив на знаменатель, получим другое выражение той же функции:

$$\begin{aligned} v(u) &= \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau} = 2 \frac{u\sqrt{u} + \tau u - \tau u - \sqrt{u}\tau^2 + \sqrt{u}\tau^2 - \tau^3 + \tau^3}{\sqrt{u} + \tau} = \\ &= 2 \frac{(u(\sqrt{u} + \tau) - \tau\sqrt{u}(\sqrt{u} + \tau) + \tau^2(\sqrt{u} + \tau) - \tau^3)}{\sqrt{u} + \tau} = 2u - 2\tau\sqrt{u} + 2\tau^2 - \frac{2\tau^3}{\sqrt{u} + \tau} \end{aligned}$$

$$\text{Производная } f'_8(u) = \frac{3\sqrt{u}(\sqrt{u} + \tau) - 2u\sqrt{u}/(2\sqrt{u})}{(\sqrt{u} + \tau)^2}, f'_8(2) = \frac{3 * 4 - 2}{8} = 5/4 < 2 = (u^2/\tau^2)' = 2$$

— лежит не ниже f_l (производная больше 1, $f_l(\tau^2) = f_8(\tau^2)$), и бифуркационные диаграммы для всех областей I-IV содержит обе точки, разделяемые графиком f_8 . Отметим, что в данном утверждении не предполагается доказать взаимное расположение всех рассматриваемых кривых, лишь найти их фрагменты, входящие в разделяющее множество.

f_{15} : в пункте 3.5.24 описан вид графика. Он лежит выше кривой $v = \tau^2$ и выше кривой f_l , имея на бесконечности линейный порядок роста. Значит, график содержится в объединении всех пяти областей I-V, и бифуркационные диаграммы для всех областей I-V содержит обе точки, разделяемые графиком f_{15} .

1.6) f_{16} — лежит не ниже f_{10} и f_l ,

$$f'_{16}(2) = 1, f''_{16}(2) = 1/(4\tau^2), f'''_{16}(2) = -3/(16\tau^4) \quad f'_t(2) = 1, f''_t(2) = 1/(4\tau^2), f'''_t(2) = 0$$

$$f'_{16}(u) = 2 - \frac{\tau}{\sqrt{u}}, f''_{16}(u) = \frac{\tau}{2u\sqrt{u}}, f'''_{16}(u) = -\frac{3\tau}{4u^2\sqrt{u}} \quad f'_t(u) = \frac{1}{2} + \frac{u}{2\tau^2}, f''_t(u) = \frac{1}{2\tau^2}, f'''_t(u) = 0$$

Когда $f'_t(u) \vee f'_{16}(u)$?

$$1/2 + \frac{u}{2\tau^2} \vee 2 - \frac{\tau}{\sqrt{u}} \quad | \times 2\tau^2 x; \quad \text{здесь } x := \sqrt{u}$$

$$x\tau^2 + x^3 - 4\tau^2 + 2\tau^3 \vee 0$$

$$(x - \tau)(x^2 + \tau x - 2\tau^2) \vee 0$$

$$(x - \tau)^2(x - 2\tau) \vee 0$$

Получили, что при $u > \tau^2$ и при $0 < u < \tau^2$ имеем $f'_{16}(u) < f_t(u)$, и $f_{16}(\tau^2) = f_t(\tau^2)$. Значит, f_{16} лежит в областях VII, VI, I, не попадая в области VIII и II.

При $u = 0$ график f_{16} лежит выше f_t . Значит, кривая f_{16} не попадает в области IX, VIII, в бифуркационных диаграммах которых не имеется особой точки h_l . Значит, кривая f_{16} входит в разделяющее множество полностью.

f_{18} : график кривой $f_{18}(u) = \tau^2/2$ разделяет точки rt и h_l . Обе точки одновременно присутствуют лишь в области VII. Кривая $v = \tau^2/2$ пересекает кривую $f_r = f_5 : v = \tau\sqrt{u}$ в точке $(\tau^2/4, \tau u^2/2)$. Эта точка лежит выше $f_t = f_{14} : f_{14}(\tau^2/4) = 25\tau^2/64$. Значит, f_{18} входит полностью.

2) График функции f_k при $u < \tau^2$ лежит вне D .

3) Кривая f_{13} разделяет точки $-r, cusp$. Точки $cusp$ нет в областях I, II, VI, VIII. $f_{13} = 8\tau\sqrt{u}$. При $0 < u < \tau^2$ имеем $f_{13}(u) = 8\tau\sqrt{u} > \tau\sqrt{u} = f_5(u) = f_r(u)$. Далее порядок роста у функции f_{13} — как квадратный корень. Значит, она пересечет $f_r = f_4$ и f_k . Найдем точку пересечения с f_k :

$$v = 8\tau\sqrt{u}, \quad (u + v)/2 = \frac{3(uv)^{2/3}}{4^{5/3}\kappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\kappa c_1^{2/3}(uv)^{1/3}}{2(4\kappa)^{1/3}} - \frac{1}{4}\kappa^2 c_1^2$$

$$f_k : (u + v)/2 = \frac{3}{2^3} \left(\frac{uv}{\sqrt{2}\kappa c_1} \right)^{2/3} + \frac{3(\sqrt{2}\kappa c_1)^1}{4} \left(\frac{uv}{\sqrt{2}\kappa c_1} \right)^{1/3} - \frac{\tau^2}{8}$$

$$(u + 8\tau\sqrt{u})/2 = \frac{3}{2^3} \left(\frac{8\tau u\sqrt{u}}{\tau} \right)^{2/3} + \frac{3(\tau)}{4} \left(\frac{8\tau u\sqrt{u}}{\tau} \right)^{1/3} - \frac{\tau^2}{8}$$

$$(u + 8\tau\sqrt{u})/2 = \frac{3}{2^3} (8u^{3/2})^{2/3} + \frac{3\tau}{4} (8u^{3/2})^{1/3} - \frac{\tau^2}{8}$$

$$u/2 + 4\tau\sqrt{u} = \frac{12u}{2^3} + \frac{6\tau\sqrt{u}}{4} - \frac{\tau^2}{8}$$

$$u(1/2 - 3/2) + \sqrt{u}(4\tau - \frac{3\tau}{2}) + \frac{\tau^2}{8} = 0$$

$$u - \frac{5\tau}{2}\sqrt{u} - \frac{\tau^2}{8} = 0$$

$$\sqrt{u} = \frac{5\tau/2 \pm \sqrt{25\tau^2/4 + 2\tau^2/8}}{2} = \frac{5\tau \pm \tau 3\sqrt{3}}{4}$$

Т.к. $5 < 3\sqrt{3}$, $\sqrt{u} > 0$, то знак "минус" не подходит, и $\sqrt{u} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{4}\tau$.

Фрагмент f_{13} , входящий в разделяющее множество, определен при $u \in \left[0, \frac{(5 + 3\sqrt{3})^2}{16}\tau^2 \right]$.

4) f_{17} разделяет $cusp$ и h_l . Потому его возможная область актуальности при $u \in (0, \tau^2)$ содержит только область VII, а при $u \in (\tau^2, \infty)$ — III, IV. Видно, что при $u \in (u_1, \tau^2)$ график оказывается ниже $f_r(u)$.

У уравнения $f_{17}(x^2) = f_t(x^2), u = x^2$ система Wolfram Mathematica нашла 2 корня: τ^2 и $\tau^2/2$. Умножив на x^2 и приравняв $\tau^2 := 2$, поделим многочлены. Частное — многочлен $2 + 3\sqrt{2}x + 13x^2 + 3\sqrt{2}x^3 + 2x^4$

Данное уравнение возвратное, после замены $y = x + \frac{1}{x}$ приводится к виду $2y^2 + 3\sqrt{2}y + 9 = 0$.

Его корни не вещественны, $y_{1,2} = -\frac{3\sqrt{2}(1 \pm i\sqrt{3})}{8}$. Они по модулю не равны 1. Значит, и корни исходного уравнения $x_{1,2,3,4}$ не вещественны.

Доказали, что f_{17} и f_r пересекаются в точке $(\tau^2/2, \tau^2/\sqrt{2})$, а затем в точке (τ^2, τ^2) . Иных пересечений нет.

Значит, областью определения для f_{17} в разделяющем множестве является отрезок $[0, \tau^2/2]$.

Пересечение f_{17} и f_k . Система Wolfram Mathematica указала тройной корень в точке (τ^2, τ^2) . Посчитаем производные для f_{17} : $f'_{17}(\tau^2) = 2, f''_{17}(\tau^2) = 1/(3\tau^2)$.

Построим многочлен второй степени от u с теми же производными в точке τ^2 . Он пересекает f_k в точке $u = \tau^2$ и в точке $u \approx 5\tau^2 \text{ dir}$, и находится выше f_{17} при $u > \tau^2$. Значит, при u больших чем $5\tau^2/2$ пересечения f_k и f_{17} нет, **и вычислительными методами искались корни на отрезке, а не открытом множестве. Вопрос с малой окрестностью точки (τ^2, τ^2) рассмотрим отдельно.**

5) Следующие три кривые не добавляют новых точек в разделяющее множество:

f_6 : Данная кривая имеет вид $u = f_6(v)$ и разделяет точки $-l, rt$. Точка rt отсутствует в областях VI, VIII. Значит, достаточно доказать, что кривая f_6 лежит между $f_l, f_5 = f_r$. Кривая f_5 как функция от v имеет вид $u(v) = v^2/\tau^2$.

$$\frac{v^2}{\tau^2} \vee \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau^2}, \quad \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau^2} \text{lor } v$$

$$v^5/2 + v^2 \vee 2v^{3/2}\tau^2, \quad 2v^{3/2} \vee v^{3/2} + v\tau$$

$$v^{3/2}(v + \sqrt{v} - 2\tau^2) \vee 0, \quad 2v^{3/2} \vee v^{3/2} + v\tau$$

Корни равны τ^2 и $-2\tau^2$. Т.к. $v > 0$, то имеем: при $v \in (0, \tau^2)$ кривая f_6 лежит между f_l и f_r . При больших чем τ^2 значениях v она лежит ниже f_l . Значит, никакой ее промежуток не содержится в разделяющем множестве.

f_{11} : при $0 < u < \tau^2/2$ график лежит ниже прямой $v = 0$ и не имеет общих точек с \hat{D} . При $\tau^2/2 < u < \tau^2$ график лежит выше прямой $v = \tau^2$. Он попадает в область V, где в бифуркационной диаграмме не содержится точки lt . При $u > \tau^2$ график лежит ниже прямой $v = \tau^2$, следовательно, и ниже прямой $v = u$. Значит, он не попадает в D . В итоге, из данной кривой в разделяющее множество входят две точки — начало отсчета и (τ^2, τ^2) , которые и так были учтены ранее.

f_{12} : при $0 < u < 64\tau^2$ график лежит ниже прямой $v = u$ и не имеет общих точек с \hat{D} . Данная кривая разделяет точки $-l, \text{cusp}$. Значит, ее часть, лежащая в I, II, не войдет в разделяющее множество. Данная кривая лежит ниже f_t , как парабола, чей старший коэффициент меньше, чем у f_t , и при $u = 0$ она лежит ниже f_t . Значит, она не попадет в область II, тем более и III, IV. При $u < 64\tau^2$ график $v = f_{12}(u)$ лежит вне D . Потому возможную область актуальности можно сузить до областей III-IV.

f_{19} : удобнее сравнивать в координатах (b, a) . Точка h_{int} входит в бифуркационную диаграмму только в области V (и X). Докажем, что $f_{19}(b) < f_m(b)$:

$$f_m(b) = \frac{b^2}{\varkappa c_1^2} + \varkappa^2 c_1^2, \quad f_{19}(b) = 3b^{2/3} \varkappa c_1^{2/3} - \varkappa^2 c_1^2$$

$f_m(0) > f_{19}(0)$. Найдем значения b , при которых имеется равенство: $x := b^{2/3}$

$$x^3 - 3\varkappa^2 c_1^{8/3} x + 2\varkappa^2 c_1^4$$

$$(x - \varkappa c_1^{4/3})(x^2 + \varkappa^2 c_1^{4/3} x - 2\varkappa^2 c_1^{8/3}) = 0, \quad (x - \varkappa c_1^{4/3})^2 (x + 2\varkappa c_1^{4/3}) = 0$$

Отметим, что полученные корни с $b < 0$ не имеет смысла. Важно, что $f_m(b) - f_{19}(b) > 0$ имеет положительный старший коэффициент, в точке $b = 0$ больше нуля и имеет кратный корень $b = x^{3/2} = \varkappa c_1^{4/3^{3/2}} = \varkappa^{3/2} c_1^2 > 0$. Значит, f_{19} никогда не имеет общих точек с областью V. $a = f_m(\varkappa^{3/2} c_1^2) = 2\varkappa^2 c_1^2$ — точка (τ^2, τ^2) в координатах (u, v) . □

Замечание 14. Точка $(u_0, f_{13}(u_0))$ одновременно принадлежит кривым f_k, f_{13} и двум кривым, на которых абсцисса точки $-r$ совпадает с абсциссами точек $rootl$ или $rootr$, т.к. при переходе из III в II через кривую f_k из бифуркационной диаграммы исчезает точка $cusp$, но появляется два пересечения параметрической кривой и прямой $k = 0$.

Приведем здесь шесть чертежей, выполненных программой Wolfram Mathematica. Изображено плоское разделяющее множество кроме кривых, связанных с корнями $rootl, rootr$. Видно, что не все из имевшихся первоначальном списке кривых продолжают на всю указанную там область определения.

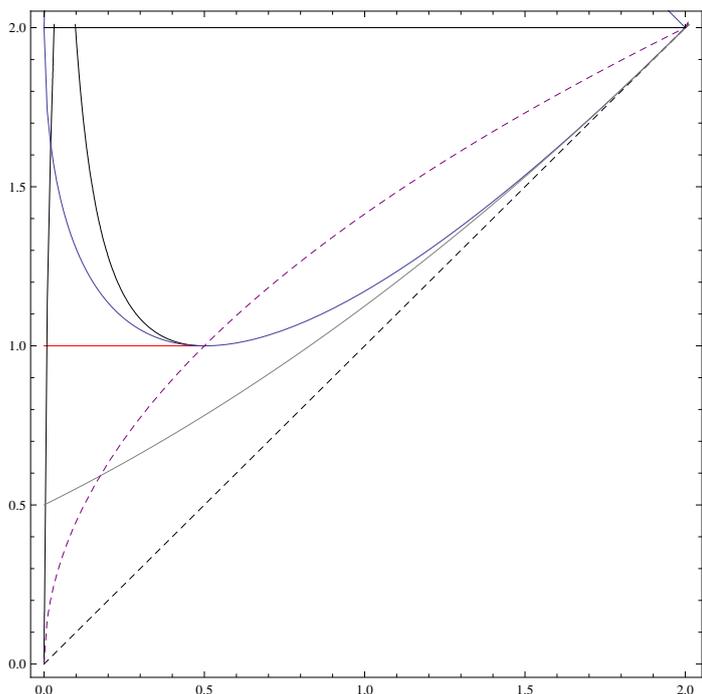


Рис. 21: Часть плоского разделяющего множества: $u \in (0, 2), v \in (0, 2)$

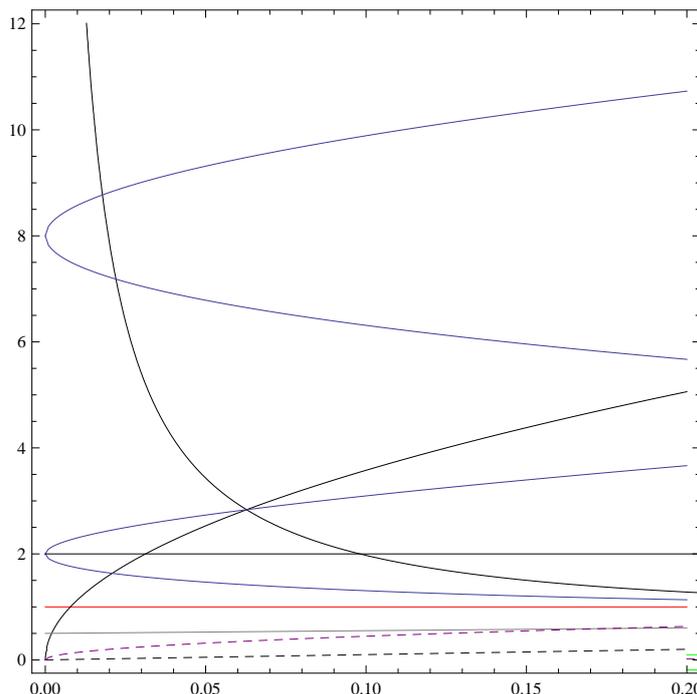


Рис. 22: Часть плоского разделяющего множества: $u \in (0, 0.2), v \in (0, 12)$

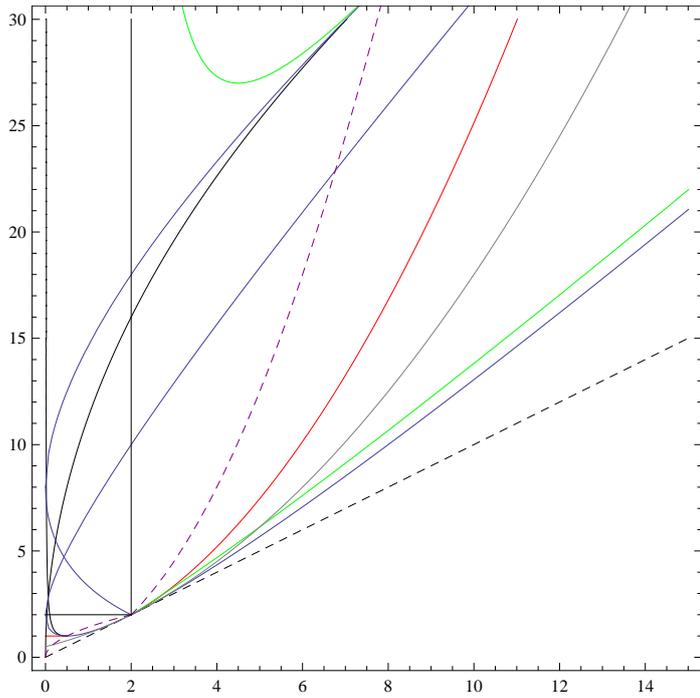


Рис. 23: Часть плоского разделяющего множества: $u \in (0, 15), v \in (0, 30)$

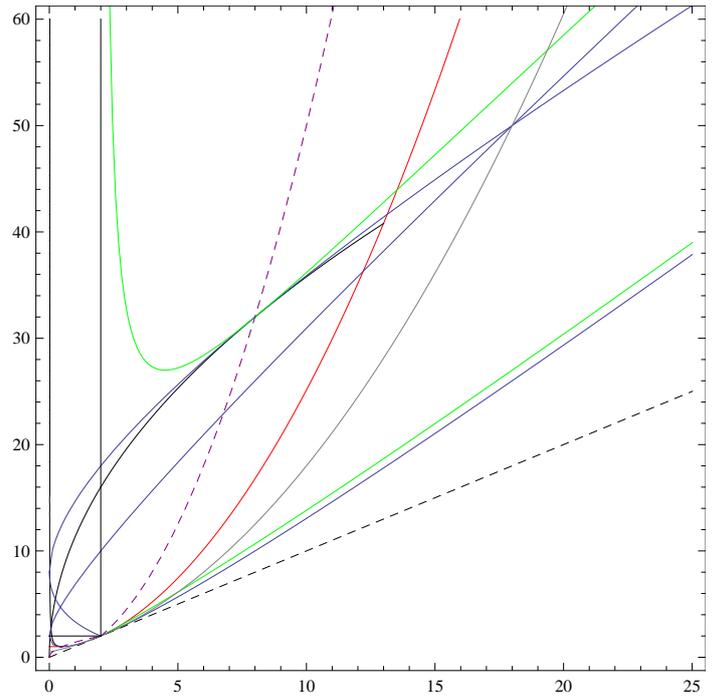


Рис. 24: Часть плоского разделяющего множества: $u \in (0, 25), v \in (0, 60)$

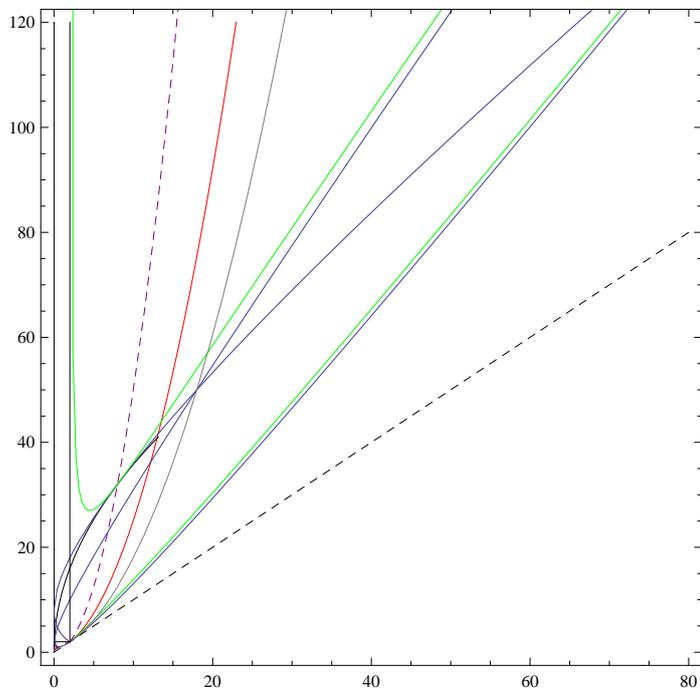


Рис. 25: Часть плоского разделяющего множества: $u \in (0, 80), v \in (0, 120)$

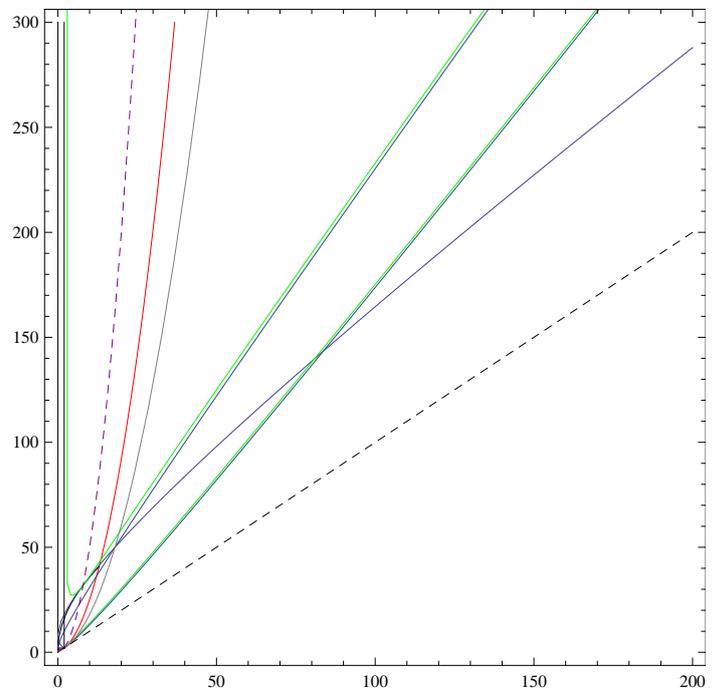


Рис. 26: Часть плоского разделяющего множества: $u \in (0, 200), v \in (0, 300)$

т. 1	т. 2	f(x)	ф-ла	обл. опр	выше: ?	метка
-l	cusp	$v(u) = \frac{u^2}{64\tau^2}$	u	$(64\tau^2, \infty)$	да	
+l	cusp	$v(u) = \frac{u^2}{\tau^2}$	u	(τ^2, ∞)	да	0
-r	cusp	$v(u) = 8\tau\sqrt{u}$	u	$(0, 64\tau^2)$	нет	
+r	cusp	$v(u) = \tau\sqrt{u}$	u	$(0, \tau^2)$	нет	0
lt	cusp	$v(u) = \frac{u^2}{\tau^2}$	u	(τ^2, ∞)	нет	0
rt	cusp	$v(u) = \tau\sqrt{u}$	u	$(0, \tau^2)$	нет	0
-l	h _l	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
+l	h _l	$v(u) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	u	$(0, \infty)$	нет	
-r	h _l	$v(u) = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	u	$(0, \infty)$	нет	
+r	h _l	$v(u) = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	u	$(0, \infty)$	нет	
lt	h _l	$v(u) = u$	u	$(0, \infty)$	да	0
rt	h _l	$v(u) = \tau^2/2$	u	$(0, \frac{\tau^2}{2})$	нет	
rt	h _l	$v(u) = u$	u	$(0, \frac{\tau^2}{2})$	да	0
rt	h _l	$v(u) = u$	u	$(\frac{\tau^2}{2}, \infty)$	нет	0
-l	h _{int}	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
+l	h _{int}	$v(u) = \tau^2$	u	$(0, \tau^2)$	да	0
-r	h _{int}	\emptyset		$(0, \infty)$	<	
+r	h _{int}	$u(v) = \tau^2$	v	(τ^2, ∞)	v, да	0
lt	h _{int}	$u(v) = \tau^2$	v	(τ^2, ∞)	v, да	
lt	h _{int}	$v(u) = u$	u	(τ^2, ∞)	да	0
lt	h _{int}	$v(u) = u$	u	$(0, \tau^2)$	нет	0
rt	h _{int}	$v(u) = \tau^2$	u	$(0, \tau^2)$	да	
rt	h _{int}	$v(u) = u$	u	$(0, \tau^2)$	да	0
rt	h _{int}	$v(u) = u$	u	(τ^2, ∞)	нет	0
cusp	h _l	$v(u) = \frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}$	u	$(0, \infty)$	да	
cusp	h _{int}	$\mathbf{a}(\mathbf{b}) = 3b^{2/3}c_1^{2/3}\varkappa - \varkappa^2c_1^2$	b	$(0, \infty)?$	$f(b) \vee a \Leftrightarrow h_{cusp} \vee h_{int} ?$	
h _l	h _{int}	$v(u) = u$	u	$(0, \infty)$	да	0

Таблица 8: Разделяющие кривые для пар особых точек, часть 2

номер	тип	цвет (п)	уравнение	перем	обл. опред.
1	0	черный (п)	$v(u) = u$	u	$(0, \infty) f_i$
2	1	св. синий	$v(u) = u + 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	u	$(0, \infty)$
3	1	св. синий	$v(u) = u - 4\tau\sqrt{u} + 4\tau^2$	u	$(0, \tau^2)$
4	0	св. красн. (п)	$v(u) = \frac{u^2}{\tau^2}$	u	$(\tau^2, \infty) ??? f_r$
5	0	св. красн. (п)	$v(u) = \tau\sqrt{u}$	u	$(0, \tau^2) ??? f_r$
6	1	зеленый	$u(v) = \frac{2v^{3/2}}{\sqrt{v} + \tau}$	v	$(0, \tau^2)$
7	1	зеленый	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau}$	u	(τ^2, ∞)
8	1	зеленый	$v(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau}$	u	(τ^2, ∞)
9	1	черный	$u(v) = \tau^2$	v	$(\tau^2, \infty) f_m$
10	1	черный	$v(u) = \tau^2$	u	$(0, \tau^2) f_m$
11	1	красный	$v(u) = \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\tau^2/2}{u - \tau^2/2} \right)$	u	$(\tau^2/2, \tau^2)$
12	1	синий	$v(u) = \frac{u^2}{64\tau^2}$	u	$(64\tau^2, \infty)$
13	1	синий	$v(u) = 8\tau\sqrt{u}$	u	$(0, 64\tau^2)$
14	1	серый	$v(u) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	u	$(0, \infty) f_t$
15	1	св. синий	$v(u) = 2u + 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	u	$(0, \infty)$
16	1	св. синий	$v(u) = 2u - 2\tau\sqrt{u} + \tau^2$	u	$(0, \infty)$
17	1	черный	$v(u) = \frac{8}{27\tau^2}u^2 + \frac{4}{9}u + \frac{2}{9}\tau^2 + \frac{\tau^4}{27u}$	u	$(0, \infty)$
18	1	красный	$v(u) = \tau^2/2$	u	$(0, \tau^2/2)$
19	1		$\mathbf{a(b)} = 3b^{2/3}c_1^{2/3}\varkappa - \varkappa^2c_1^2$	b	$(0, \infty)?$

Таблица 9: Разделяющие кривые: данные для рисования графиков

область	особые точки биф. диаграммы	нижняя граница	верхняя граница
I	$-l, -r, +l, +r, h_l, rootr, lt, rt, z_1$	$v = u$	$v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$
II	$-l, -r, +r, h_l, rootl, +l, rootr, lt, rt, z_1$	$v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	$a = f_k(b)$
III	$-l, -r, +r, h_l, cusp, +l, lt, rt, z_1$	$a = f_k(b)$	$v = \frac{u^2}{\tau^2}$
IV	$-l, -r, +r, h_l, cusp, +l, lt, rt, z_1$	$v = \frac{u^2}{\tau^2}$	$u = \tau^2$
V	$-l, -r, +r, h_l, cusp, +l, h_{int}, rt, z_1$	$v = \tau^2, u = \tau^2$	$u = 0$
VI	$-l, -r, +r, h_l, +l, z_1$	$v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	$v = \tau\sqrt{u}$
VII	$-l, -r, +r, h_l, cusp, rt, +l, , z_1$	$v = \tau\sqrt{u}, v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$	$u = 0, v = \tau^2$
VIII	$-l, -r, +r, +l$	$v = u$	$v = \tau\sqrt{u}, v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$
IX	$-l, -r, +r, cusp, +l, rt$	$v = \tau\sqrt{u}$	$u = 0, v = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2$

Таблица 10: Области I-IX, особые точки

		цвет (п)	что разделяет (в т.ч. типа (1))		где есть, что разделять
1	0	черный (п)	$-l, -r; +l, +r, lt, rt, h_l, h_{int}$; всё 0	u	∂ I
2	1	св. синий	$+l, -r(1)$;	u	I-IX
3	1	св. синий	$+l, +r(1)$;	u	I-IX
4	0	св. красн. (п)	$lt, cusp(0); +l, lt(0); +l, cusp(0)$;	u	∂ III, IV
5	0	св. красн. (п)	$rt, cusp(0); +r, rt(0); +r, cusp(0)$;	u	∂ VI, VII, VIII, IX
6	1	зеленый	$+l, rt(1)$;	v	I-V, VII, IX
7	1	зеленый	$-r, lt(1)$;	u	I-IV
8	1	зеленый	$+r, lt(1)$;	u	I-IV
9	1	черный	$+r, h_{int}(0); lt, h_{int}(1)$;	v	∂ IV, V
10	1	черный	$+l, h_{int}(0); +l, rt(1); rt, h_{int}(1)$	u	∂ V, VII
11	1	красный	$lt, rt(1)$;	u	I-IV
12	1	синий	$-l, cusp(1)$;	u	III-V, VII, IX
13	1	синий	$-r, cusp(1)$	u	III-V, VII, IX
14	1	серый	$+l, h_l(1)$;	u	∂ I, II
15	1	св. синий	$-r, h_l(1)$;	u	I-V
16	1	св. синий	$+r, h_l(1)$;	u	I-VII
17	1	черный	$cusp, h_l(1)$;	u	III-V, VII, IX
18	1	красный	$rt, h_l(1)$;	u	VI, VII, VIII
19	1	\emptyset	$cusp, h_{int}$	b	$(0, \infty)$

Таблица 11: Области, содержащие пару разделяемых точек для кривой

3.7 Разделяющие кривые для пар $(-r, rootl)$, $(-r, rootr)$, $(+r, rootr)$ и $(+l, rootr)$

Особые точки первой группы, будем называть их z_{rootl}, z_{rootr} , входят в образ отображения момента не при всех значениях параметров. Напомним, что они являются левой и правой точками пересечения параметрической кривой с осью абсцисс, находящимися левее точки z_1 . В области I есть только точка z_{rootr} . В области II — обе точки z_{rootl} и z_{rootr} . Горизонтальная прямая отсекает от параметрической кривой фрагмент с точкой возврата z_{cusp} , лежащий ниже оси абсцисс. При переходе из области II в область III данная точка возврата становится выше оси абсцисс и включается в бифуркационную диаграмму.

Мы определим, с какими особыми точками второй группы надо сравнивать нули параметрической кривой. Затем предложим некоторую замену и опишем ее свойства. Эта замена позволит явно записывать уравнения разделяющих кривых и кривой f_k . Затем сделаем вывод о взаимном расположении всех кривых вне малой окрестности точки $(2, 2)$. На большом удалении от начала координат отсутствие сколь угодно удаленных пересечений кривых требует доказательства.

3.7.1 Пары особых точек, требующие сравнения

Для областей I, II необходимо сравнить абсциссы ряда точек с абсциссами двух пересечений $rootl$ и $rootr$. Какие именно точки надо сравнить?

Лемма 3.1. *В случае, если пара (b, a) лежит в области I, то достаточно сравнить абсциссу точки z_{rootr} с абсциссами точек z_{-r} и z_{+r} .*

В случае, если пара (b, a) лежит в области II, то абсциссу z_{rootr} достаточно сравнить с абсциссами z_{-r} , z_{+r} и z_{+l} , а абсциссу z_{rootl} достаточно сравнить с абсциссой z_{-r} .

Доказательство. ! вопрос о монотонности параметрической кривой:

1) В предположении, что точка $rootr$ или обе точки $rootl, rootr$ лежат в бифуркационной диаграмме, верны следующие факты о них:

Точки $rootl$ и $rootr$ обязаны лежать правее точки y_{13} или y_2 — вершины параболы (точки касания параболы и оси абсцисс).

точка $rootl$ лежит левее точки $+l$ и, следовательно, $+r$ (в том числе, исходя из проведенного прежде явного сравнения абсцисс точек $+l$ и $+r$).

Точки $rootl$ и $rootr$ обязаны лежать левее точки rt и, следовательно, точки z_1 — самого правого из пересечений параметрической кривой с осью абсцисс.

Точка $rootl$ лежит левее точки $rootr$, из монотонности параметрической кривой $rootr$ лежит левее точки z_{lt} .

Отсюда делается вывод, что относительно точки $rootl$, входящей в бифуркационную диаграмму для области II, неизвестно только положение точки $-r$. Относительно точки $rootr$, входящей в бифуркационную диаграмму для обеих областей (I и II,) неизвестно положение точек $-r, +r, +l$.

2) Сравнить хотя бы некоторые пары действительно надо: кривая f_{13} , разделяющая точки z_{cusp} и z_{-r} трансверсально пересекает верхнюю границу области II, кривую f_k . В точке пересечения $cusp$ лежит на горизонтальной оси, и его абсцисса равна абсциссе точки $-r$. Из соображений непрерывности и трансверсальности заключаем, что в данной точке кривую f_k пересекут также две кривые, на которых $h(-r) = h(rootl)$ и $h(-r) = h(rootr)$.

□

Вывод: вопрос актуален, и следует искать разделяющие кривые (определенные аналогично, как кривые совпадения абсцисс двух особых точек) лишь для четырех пар $(-r, rootl)$, $(-r, rootr)$, $(+r, rootr)$ и $(+l, rootr)$. Априори не известно, будет ли часть любой такой кривой D связна или нет. Анонсируем результат следующего пункта: все четыре пары дают нетривиальные связные кривые в \hat{D} . Порядок абсцисс двух данных особых точек по разные стороны от таких кривых разный. Это будет доказано нахождением координат, в которых такие кривые являются графиками явных функций. Кроме того, это обоснует эмпирическое правило: если алгоритм Wolfram Mathematica находит фрагмент одной и этих кривых как множество перемены знака соответствующего выражения, то

в малой окрестности данного графика на чертеже действительно содержится фрагмент настоящей кривой, и других фрагментов нет. Это позволит утверждать, что после построения данных кривых в новых координатах (на одном чертеже с f_t, f_k, f_l) и построении приближенных графиков на плоскости (u, v) , структура разделяющего множества останется неизвестной лишь на бесконечности и в малой окрестности точки $(2, 2)$ плоскости u, v . Это требуют отдельного анализа.

3.7.2 Напоминания найденных прежде формул

Для упрощения восприятия дальнейших выкладок приведем здесь найденные ранее выражения для кривых и координат особых точек в новых (u, v) и старых (b, a) координатах.

1) Напомним координаты особых точек в новых переменных (u, v) :

$$\begin{aligned} z_{-l} &= -\sqrt{\frac{v}{2}}c_1, & z_{+l} &= \sqrt{\frac{v}{2}}c_1, & z_{lt} &= \frac{u}{2\kappa} \\ z_{-r} &= -\sqrt{\frac{u}{2}}c_1, & z_{+r} &= \sqrt{\frac{u}{2}}c_1, & z_{rt} &= \frac{v}{2\kappa} \\ h_{-l} &= \frac{u - 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} & h_{+l} &= \frac{u + 2\tau\sqrt{v}}{2\kappa} & h_{-r} &= \frac{v - 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} & h_{+r} &= \frac{v + 2\tau\sqrt{u}}{2\kappa} \\ z_{cusp} &= b^{2/3}c_1^{2/3}, & z_{cusp} &= \left(\frac{uv}{4\kappa}c_1^2\right)^{1/3} & h(z_{cusp}) &= 3\left(uv\frac{c_1^2}{4\kappa}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

2) Перепишем в переменных (u, v) уравнения параметрической кривой:

$$h(z) = \frac{uvc_1^2}{4\kappa z^2} + 2z$$

$$k(z) = \left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\kappa z} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\kappa)^2z^4}\right) - 2\kappa c_1^2 h(z) + \kappa^2 c_1^4$$

Действительно, $b^2 = \frac{uv}{4\kappa}$, $a = (u+v)/2$, потому $\frac{b^2c_1^2}{z^2} + 2z = \frac{uvc_1^2}{4\kappa z^2} + 2z$. Аналогично,

$$\left(4ac_1^2 - 4\frac{b^2c_1^2}{z} + \frac{b^4c_1^4}{z^4}\right) - 2\kappa c_1^2 h(z) + \kappa^2 c_1^4 = \left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\kappa z} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\kappa)^2z^4}\right) - 2\kappa c_1^2 h(z) + \kappa^2 c_1^4$$

3) Приведем вид кривой f_k в старых (b, a) и в новых (u, v) переменных:

$$\begin{aligned} a &= f_k(b) = \frac{3b^{4/3}}{4c_1^{2/3}} + \frac{3}{2}\kappa c_1^{2/3}b^{2/3} - \frac{1}{4}\kappa^2 c_1^2 \\ (u+v)/2 &= \frac{3(uv)^{2/3}}{4^{5/3}\kappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\kappa c_1^{2/3}(uv)^{1/3}}{2(4\kappa)^{1/3}} - \frac{1}{4}\kappa^2 c_1^2 \end{aligned}$$

Отметим, что выше данной кривой $(u+v)/2 > f_k(u, v)$. А ниже — наоборот.

3.7.3 Замена $(u, v) \rightarrow (q, s)$ и ее свойства

Сделаем замену $(u, v) \rightarrow (q, s)$:

$$\begin{cases} q = \frac{\sqrt{u}}{v} \\ s = 1/v \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} u = \frac{q^2}{s^2} \\ v = 1/s \end{cases}$$

Утверждение 7. 1. Данная замена осуществляет биективное отображение области $v > u, u \geq \tau^2$ и области $q/\tau > s > q^2, 0 < q < 1/\tau$.

2. Замена регулярна внутри данной области.

Доказательство. Вычислим компоненты матрицы Якоби:

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial s}{\partial v} = -\frac{1}{v^2} \quad \frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{1}{2v\sqrt{u}} \quad \frac{\partial q}{\partial v} = -\frac{\sqrt{u}}{v^2}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial u} \\ \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2v\sqrt{u}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{u}}{v^2} & -\frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$\det J = \frac{1}{2v^3\sqrt{u}}$$

$J = -\frac{1}{2\sqrt{uv^3}}$ — замена вырождена лишь при $u = 0$ или $v = 0$. Значит, в области $\{u > 2, v > u\}$

замена регулярна (заведомо именно в ней находятся все точки искомой кривой, имеющие отношение к задаче — в остальных областях нули параметрической кривой не входят в бифуркационную диаграмму).

Образ кривой $v = u$: поделим на v^2 , получим:

$$s = 1/v = u/v^2 = q^2.$$

Т.е. граничная кривая перейдет в параболу $s = q^2$. При этом точка $(2, 2) = (\tau^2, \tau^2)$ перейдет в точку $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau^2}\right)$

Образ кривой $u = \tau^2, v > \tau^2$ ищем так: $u = \frac{q^2}{s^2}$

$$\tau^2 = \frac{q^2}{s^2} \quad s = \frac{q}{\tau}$$

Отметим, что большие v переходят в маленькие s , потому области I-IV перейдут в область $\{0 < q < \frac{1}{\tau}, q^2 < s < \frac{q}{\tau}\}$

Данное отображение однозначно: разным v соответствуют разные s , а при условии их равенства — разным u соответствуют разные q .

□

номер	название	вид в (u, v)	вид в (q, s)	цвет (п)
f_1	f_l	$v = u$	$s = q^2$	желтый (п)
f_4	f_r	$v = \frac{u^2}{\tau^2}$	$s = \frac{q^{4/3}}{\tau^{2/3}}$	синий (п)
f_9	f_m	$u = \tau^2$	$s = \frac{q^2}{\tau^2}$	красный (п)
f_{14}	f_t	$v = \frac{1}{4}\left(\tau + \frac{u}{\tau}\right)^2$	$q(s) = \tau s \sqrt{-1 + \frac{2}{\tau \sqrt{s}}}$	серый (п)

Таблица 12: Вид кривых в координатах (q, s)

Утверждение 8. 1. Под действием данной замены кривые $f_9 = f_m, f_4 = f_r, f_{14} = f_t, f_1 = f_l$ отображаются следующим образом:

Доказательство.

$$f_l = f_1 : \quad u = v$$

$$q/\tau > s > q^2, 0 < q < 1/\tau.$$

$$1) f_l : \quad v = u \Leftrightarrow 1 = v \frac{u}{v^2} \Leftrightarrow 1 = v q^2 \Leftrightarrow 1/v = q^2 \Leftrightarrow s = q^2$$

Область изменения: ...

$$2) f_r : \quad v = \frac{u^2}{\tau^2} \Leftrightarrow \frac{v}{v^4} = \frac{u^2}{v^4 \tau^2} \Leftrightarrow v^{-3} = \frac{q^4}{\tau^2} \Leftrightarrow s^3 = \frac{q^4}{\tau^2} \Leftrightarrow s = \frac{q^{4/3}}{\tau^{2/3}}$$

$$3) f_m : \quad u = \tau^2 \Leftrightarrow (\sqrt{u}/v)^2 v^2 = \tau^2 \Leftrightarrow q^2 v^2 = \tau^2 \Leftrightarrow q^2 = \tau^2/v^2 \Leftrightarrow q^2 = \tau^2 s^2 \Leftrightarrow s = q/\tau$$

$$4) \text{ Напомним: } q = \sqrt{u}/v, \text{ т.е. } u = q^2 v^2 = q^2/s^2.$$

$$f_t : \quad v = 1/4 \left(\tau + \frac{u}{\tau} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{s} = \tau^2 + 2u + \frac{u^2}{\tau^2} \Leftrightarrow \frac{4}{s} = \tau^2 + \frac{2q^2}{s^2} + \frac{q^4}{\tau^2 s^4}$$

Решим уравнение относительно q . Это биквадратное уравнение, т.е.

$$0 = -\frac{4}{s} + \tau^2 + \frac{2}{s^2} q^2 + \frac{1}{\tau^2 s^4} q^4,$$

$$q^2 = \frac{-\frac{2}{s^2} \pm \sqrt{\frac{4}{s^4} - 4 \frac{1}{\tau^2 s^4} \left(-\frac{4}{s} + \tau^2 \right)}}{\frac{2}{\tau^2 s^4}} = \frac{-\frac{2}{s^2} \pm \frac{2}{\tau s^2} \sqrt{\tau^2 - \left(-\frac{4}{s} + \tau^2 \right)}}{\frac{2}{\tau^2 s^4}}$$

$$q^2 = \tau^2 s^4 \frac{1}{s^2} \left(-1 \pm \frac{1}{\tau} \sqrt{\tau^2 + \frac{4}{s} - \tau^2} \right) = \tau^2 s^2 (-1 \pm 2/\sqrt{s})$$

$$q(s) = \tau s \sqrt{-1 + \frac{2}{\tau \sqrt{s}}}$$

□

3.7.4 Явный вид кривой f_k в координатах (q, s)

Утверждение 9. Для кривой $a = f_k(b)$ в координатах (q, s) существует явная формула через радикал второй степени:

$$s = f_k(q) = \frac{-(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) \pm \sqrt{(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3})^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - \frac{3}{2\tau^{2/3}}q^{4/3}\right)}}{\tau^2}$$

В данном выражении можно выбрать только знак "+".

Доказательство.

$$a = f_k(b) = \frac{3b^{4/3}}{4c_1^{2/3}} + \frac{3}{2}\varkappa c_1^{2/3} b^{2/3} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2$$

$$(u + v)/2 = \frac{3(uv)^{2/3}}{4^{5/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\varkappa c_1^{2/3}(uv)^{1/3}}{2(4\varkappa)^{1/3}} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2$$

$$uv = \frac{q^2}{s^3}$$

$$\frac{q^2}{2s^2} + \frac{1}{2s} = \frac{3q^{4/3}}{4 \cdot 2^{4/3}s^2 \varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3\varkappa c_1^{2/3}q^{2/3}}{2 \cdot 2^{2/3}\varkappa^{1/3}s} - \frac{1}{4}\varkappa^2 c_1^2$$

$$2q^2 + 2s = \frac{3q^{4/3}}{2^{4/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} + \frac{3 \cdot 2^{1/3}\varkappa c_1^{2/3}q^{2/3}s}{\varkappa^{1/3}} - \varkappa^2 c_1^2 s^2$$

$$\varkappa^2 c_1^2 s^2 + 2s - 3 \cdot 2^{1/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}q^{2/3}s + 2q^2 - \frac{3q^{4/3}}{2^{4/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} = 0$$

$$\varkappa^2 c_1^2 s^2 + s \left(2 - 3 \cdot 2^{1/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}q^{2/3}\right) + 2q^2 - \frac{3q^{4/3}}{2^{4/3}\varkappa^{2/3}c_1^{2/3}} = 0$$

$$\frac{\tau^2}{2}s^2 + s \left(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}\right) + 2q^2 - \frac{3q^{4/3}}{2\tau^{2/3}} = 0$$

$$s = f_k(q) = \frac{-(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) \pm \sqrt{(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3})^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - \frac{3}{2\tau^{2/3}}q^{4/3}\right)}}{\tau^2}$$

2) Посмотрим на выбор знака:

$$\begin{aligned} s = f_k(q) &= \frac{-(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) \pm \sqrt{4 - 12\tau^{2/3}q^{2/3} + 9\tau^{4/3}q^{4/3} - 4\tau^2q^2 + 3\tau^{4/3}q^{4/3}}}{\tau^2} = \\ &= \frac{-(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) \pm 2\sqrt{1 - 3\tau^{2/3}q^{2/3} + 3\tau^{4/3}q^{4/3} - \tau^2q^2}}{\tau^2} \\ &= \frac{-(2 - 3\tau^{2/3}q^{2/3}) \pm 2(1 - \tau^{2/3}q^{2/3})^{3/2}}{\tau^2} \end{aligned}$$

Здесь надо выбрать знак "плюс", т.к. при увеличении b на кривой f_k имеем $\sqrt{u}/v \rightarrow 0$ (т.е. $q \rightarrow 0$). При этом, на кривой f_k , $s = 1/v \rightarrow 0$. Но если выбрать знак "минус", то при $q \rightarrow 0+$ выражение для f_k не будет стремиться к нулю.

□

3.7.5 Вывод явных формул четырех разделяющих кривых

В данном пункте будет найден явный вид кривых на плоскости параметров, точкам которой соответствует равенство абсцисс точек $(+r, rootr)$, $(-r, rootl)$, $(-r, rootr)$ и $(+l, rootr)$. Пронумеруем их как $f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ соответственно.

Утверждение 10. 1) В координатах $(q \frac{\sqrt{u}}{v}, s = \frac{1}{v})$ кривые $f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ задаются как графики следующих функций:

$$f_{20}: \quad s = \frac{-(1-2q) \pm \sqrt{(1-2q)^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - 8 \frac{q^2}{w_{x,+r}(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w_{x,+r}^4(q)} \right)}}{\tau^2}$$

$$f_{21}, f_{22}: \quad s = \frac{-(1+2\tau q) \pm \sqrt{(1+2\tau q)^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - 8 \frac{q^2}{w_{x,-r}(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w_{x,-r}^4(q)} \right)}}{\tau^2}$$

f_{23} : если использовать координаты $(\tilde{q} \frac{\sqrt{v}}{u}, \tilde{s} = \frac{1}{u})$, то формула f_{24} для пары $+l, rootr$ в них имеет тот же вид, что и формула f_{23} в координатах (q, s)

$$2) \text{ Здесь } w_{x,+r} = \left(1 \pm \sqrt{1 + 8\tau \frac{\sqrt{u}}{v}} \right), \quad w_{x,-r} = \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\tau \frac{\sqrt{u}}{v}} \right).$$

В выражении f_{21}, f_{22} $s = \frac{-(1+2\tau q) \pm \sqrt{\dots}}{\tau^2}$ выбирается знак "плюс".

В выражении f_{20} или f_{23} $s = \frac{-(1-2\tau q) \pm \sqrt{\dots}}{\tau^2}$ выбирается знак "плюс".

Доказательство. Реализуем доказательство для кривой f_{20} , разделяющей точки $+r$ и $rootr$. Отличия формул для остальных пар укажем в замечаниях к теореме.

1) Пусть $h(z) = h(z_{+r})$ Тогда корень z_{+r} следующего уравнения окажется сопряжен одному из нулей параметрической кривой z_{rootr}, z_{rootl} , являющемуся корнем данного уравнения:

$$h(z) = \frac{uvc_1^2}{4\kappa z^2} + 2z = h(z_{+r}) = h_{+r},$$

где $h_{+r} = \frac{v}{2\kappa} + \sqrt{2}c_1\sqrt{u}$. Вычислив $h(z_{+r})$, получим многочлен

$$\frac{uvc_1^2}{4\kappa z^2} + 2z - h_{+r} = 0,$$

$$8\kappa z^3 - 4\kappa z^2 \left(\frac{v}{2\kappa} + \sqrt{2}c_1\sqrt{u} \right) + uvc_1^2 = 0$$

$$8\kappa z^3 - z^2(2v + 4\sqrt{2}\kappa c_1\sqrt{u}) + uvc_1^2 = 0$$

Убедимся, что многочлен нацело делится на двучлен $\left(z - \sqrt{\frac{u}{2}}c_1 \right)$:

$$8\kappa z^3 - z^2(2v + 4\sqrt{2}\kappa c_1\sqrt{u}) + uvc_1^2 = \left(z - \sqrt{\frac{u}{2}}c_1 \right) (8\kappa z^2 - 2vz - \sqrt{2}c_1\sqrt{uv})$$

2) Два других корня вычисляются явно:

$$8\kappa z^2 - 2vz - \sqrt{2}c_1\sqrt{uv} = 0$$

$$z_{root} = \frac{2v \pm \sqrt{4v^2 + 32\sqrt{2}\kappa c_1\sqrt{uv}}}{16\kappa} = \frac{v \pm v\sqrt{1 + 8\sqrt{2}\kappa c_1\frac{\sqrt{u}}{v}}}{8\kappa} =: \frac{v}{8\kappa}w_{x,+r}$$

Здесь буквой $w = w_{x,+r}$ обозначено следующее выражение:

$$w_{x,+r} := \left(1 \pm \sqrt{1 + 8\sqrt{2}\kappa c_1\frac{\sqrt{u}}{v}} \right).$$

Индексы $x \in \{l, r\}$ и $y \in \{+l, -r, +r\}$ при w определяют, у какого из двух пересечений горизонтальной оси и параметрической кривой (левого или правого) абсцисса совпадает с абсциссой точки z_y . Не уточняем пока соответствие знака в выражении w с этим индексом x . Для дальнейших выкладок важно другое: $w(u, v)$ фактически является функцией одной переменной $\frac{\sqrt{u}}{v}$ для $y = \pm r$ или переменной $\frac{\sqrt{v}}{u}$ для $y = +l$.

3) Подставим данные z_{root} в уравнение $k(z) = 0$ (с условием $h(z) = h(z_{+r})$):

$$\begin{aligned} k(z) &= \left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\kappa z} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\kappa)^2z^4} \right) - 2\kappa c_1^2h(z) + \kappa^2c_1^4 = 0 \\ &= \left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\kappa\frac{v}{8\kappa}w} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\kappa)^2\frac{v^4}{8^4\kappa^4}w^4} \right) - 2\kappa c_1^2\frac{v}{2\kappa} - 2\sqrt{2}\kappa c_1^3\sqrt{u} + \kappa^2c_1^4 = 0 \\ &= \left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\kappa\frac{v}{8\kappa}w} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\kappa)^2\frac{v^4}{8^4\kappa^4}w^4} \right) - 2\kappa c_1^2\frac{v}{2\kappa} - 2\sqrt{2}\kappa c_1^3\sqrt{u} + \kappa^2c_1^4 = 0 \end{aligned}$$

Разделим данное уравнение на v^2 :

$$2c_1^2\frac{u}{v^2} + 2c_1^2\frac{1}{v} - \frac{8uc_1^2}{v^2w} + \frac{u^2c_1^48^4\kappa^4}{(4\kappa)^2v^4w^4} - 2\kappa c_1^2\frac{1}{2\kappa v} - 2\sqrt{2}\kappa c_1^3\frac{\sqrt{u}}{v^2} + \frac{\kappa^2c_1^4}{v^2} = 0$$

4) Сделаем замену:

$$s = \frac{1}{v} \quad q = \frac{\sqrt{u}}{v}$$

Перепишем уравнение выше в новых координатах:

$$\begin{aligned} 2c_1^2q^2 + 2c_1^2s - \frac{8c_1^2}{w(q)}q^2 + \frac{c_1^48^4\kappa^4q^4}{(4\kappa)^2w^4(q)} - 2\kappa c_1^2\frac{1}{2\kappa}s - 2\sqrt{2}\kappa c_1^3sq + \kappa^2c_1^4s^2 &= 0 \\ \kappa^2c_1^4s^2 + 2c_1^2s - c_1^2s - 2\sqrt{2}\kappa c_1^3sq + 2c_1^2q^2 - 8c_1^2\frac{q^2}{w(q)} + \frac{c_1^48^4\kappa^4}{(4\kappa)^2}\frac{q^4}{w^4(q)} &= 0 \\ \kappa^2c_1^4s^2 + 2c_1^2s - c_1^2s - 2\sqrt{2}\kappa c_1^3sq + 2c_1^2q^2 - 8c_1^2\frac{q^2}{w(q)} + 256\kappa^2c_1^4\frac{q^4}{w^4(q)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\varkappa^2 c_1^2 s^2 + (1 - 2\sqrt{2}\varkappa c_1 q)s + 2q^2 - 8\frac{q^2}{w(q)} + 256\varkappa^2 c_1^2 \frac{q^4}{w^4(q)} = 0$$

Рассмотрим это как квадратное уравнение с неизвестной s и получим явную формулу в координатах (q, s) кривой $s(q)$, точкам которой и только им соответствуют параметры, при которых абсцисса корня совпадает с абсциссой z_{+r} :

$$s = \frac{-(1 - 2\sqrt{2}\varkappa c_1 q) \pm \sqrt{(1 - 2\sqrt{2}\varkappa c_1 q)^2 - 4\varkappa^2 c_1^2 \left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_{x,+r}(q)} + 256\varkappa^2 c_1^2 \frac{q^4}{w_{x,+r}^4(q)}\right)}}{2\varkappa^2 c_1^2}$$

$$\text{Здесь } w = w_{x,+r} = \left(1 \pm \sqrt{1 + 8\sqrt{2}\varkappa c_1 \frac{\sqrt{u}}{v}}\right).$$

После замены $\tau = \sqrt{2}\varkappa c_1$, имеем

$$s = \frac{-(1 - 2\tau q) \pm \sqrt{(1 - 2\tau q)^2 - 2\tau^2 \left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_{x,+r}(q)} + 128\tau^2 \frac{q^4}{w_{x,+r}^4(q)}\right)}}{\tau^2}$$

$$\text{Здесь } w = w_{x,+r} = \left(1 \pm \sqrt{1 + 8\tau \frac{\sqrt{u}}{v}}\right).$$

Замечание 15. 1) Для точек $z_{\pm l}$ получим такие выражения как для $z_{\pm r}$ соответственно, заменой u и v в формулах друг на друга.

2) Для точки z_{-r} отличается знак z и знак при \sqrt{u} в выражении для h_{+r} :

$$h_{-r} = \frac{v}{2\varkappa} - \sqrt{2}c_1\sqrt{u}$$

$$8\varkappa z^3 - z^2(2v - 4\sqrt{2}\varkappa c_1\sqrt{u}) + uvc_1^2 = 0$$

Нетрудно проверить следующее тождество:

$$8\varkappa z^3 - z^2(2v - 4\sqrt{2}\varkappa c_1\sqrt{u}) + uvc_1^2 = \left(z + \sqrt{\frac{u}{2}}c_1\right) (8\varkappa z^2 - 2vz + \sqrt{2}c_1\sqrt{uv})$$

Для точки z_{-r} получим другое $w = w_{x,-r}$:

$$w = w_{x,-r} = 1 \pm \sqrt{1 - 8\sqrt{2}\varkappa c_1 \frac{\sqrt{u}}{v}}$$

$$\left(2(u+v)c_1^2 - 4\frac{uvc_1^2}{4\varkappa \frac{v}{8\varkappa}w} + \frac{u^2v^2c_1^4}{(4\varkappa)^2 \frac{v^4}{8^4\varkappa^4}w^4}\right) - 2\varkappa c_1^2 \frac{v}{2\varkappa} + 2\sqrt{2}\varkappa c_1^3\sqrt{u} + \varkappa^2 c_1^4 = 0$$

После аналогичных замен имеем

$$2c_1^2q^2 + 2c_1^2s - \frac{8c_1^2}{w(q)}q^2 + \frac{c_1^48^4\varkappa^4q^4}{(4\varkappa)^2w^4(q)} - 2\varkappa c_1^2 \frac{1}{2\varkappa}s + 2\sqrt{2}\varkappa c_1^3sq + \varkappa^2 c_1^4s^2 = 0$$

$$\varkappa^2 c_1^2 s^2 + (1 + 2\sqrt{2}\varkappa c_1 q)s + 2q^2 - 8\frac{q^2}{w(q)} + 256\varkappa^2 c_1^2 \frac{q^4}{w^4(q)} = 0$$

$$s = \frac{-(1 + 2\sqrt{2}\varkappa c_1 q) \pm \sqrt{(1 + 2\sqrt{2}\varkappa c_1 q)^2 - 4\varkappa^2 c_1^2 \left(2q^2 - 8\frac{q^2}{w_{x,-r}(q)} + 256\varkappa^2 c_1^2 \frac{q^4}{w_{x,-r}^4(q)}\right)}}{2\varkappa^2 c_1^2}$$

$$\text{Здесь } w_{x,-r} = \left(1 \pm \sqrt{1 - 8\sqrt{2}\varkappa c_1 \frac{\sqrt{u}}{v}}\right).$$

5) Опишем правила выбора знаков:

- для $w_{x,y} : x = l$ означает знак "минус", $x = r$ означает знак "плюс"
- для $f_{23}(\tilde{q}, \tilde{s})$ знак выбирается аналогично $f_{20}(q, s)$.
- для f_{21}, f_{22} : знак "плюс", т.к. первое слагаемое числителя отрицательно в областях I, II. Очевидно, что $q > 0, s > 0$.
- для f_{20} : выбираем знак "плюс", т.к. иначе кривая лежит вне области между f_l, f_m . Это доказано чуть ниже или видно из рисунка 27 (фиолетовая пунктирная линия)

Предположим, что в выражении f_{20} выбрали знак "минус". $s = (2\tau q - 1 - \sqrt{})/\tau^2$. Сравним его с $s = q^2$ — кривой f_l .

$$\text{dir}\tau q - 1 - \sqrt{}q^2\text{tau}^2, \text{ т.к. } -\sqrt{}(q\tau - 1)^2$$

Поскольку $z_{cusp} > 0$, а z_{rootl}, z_{rootr} соответствуют точкам из той же связной компоненты параметрической кривой (их две, для $z > 0$ и для $z < 0$), то знаки в выражении $w_{x,\dots}$ выбираются однозначно и единообразно: $w_{r,\dots}$ соответствует знак "+" а $w_{l,\dots}$ соответствует знак "-". (на кривой точке идут в следующем порядке: $z_{rootl}, z_{cusp}, z_{rootr}, z_1$).

□

Замечание 16. При $1 - 8\tau q < 0$, т.е. $\frac{1}{8\tau} < q$ выражение $w_{x,-r}$ перестает иметь смысл. Данное значение соответствует общей точке кривых f_{21}, f_{22}, f_{13} и f_k . Именно эту точку можно будет видеть на приведенном ниже графике. При этом значении $q = 1/(8\tau)$ получим $w = 1$, т.е. $s = (-5/4 \pm \sqrt{25/16 + 4 * 6/128 - 256/(8^4)})/2 = (-5/4 \pm \sqrt{25/16 + 3/16 - 1/256})/2 = (-5/4 \pm \sqrt{7/4 - 1/256})/2 = (-5/4 \pm \sqrt{447/256})/2 = (-20/16 \pm \sqrt{447/16})/2$ чуть по-другому

Замечание Из корней квадратного уравнения выбираем корень со знаком "+". Его график попадает в интересующую нас область. Знак надо объяснить.

На приведенных рисунках 27-28 изображены фрагменты кривых $f_m, f_r, f_k, f_t, f_l, f_{20}, f_{21}, f_{22}$. Жирным пунктирным линиям соответствуют пять первых кривых, разделяющих области с принципиально различными бифуркационными диаграммами. Они все начинаются в одной точке, образе точки (τ^2, τ^2) и заканчиваются в точке $(0, 0)$.

Трем жирным сплошным линиям соответствуют входящие в разделяющее множество части кривых f_{20}, f_{21}, f_{22} . Фиолетовая линия — график f_{20} (точки $+r, rootr$), черная — f_{21} (точки $-r, rootl$), оранжевая — f_{22} (точки $-r, rootr$).

Двумя тонкими пунктирными линиями, фиолетового и черного цветов, обозначены не входящие в разделяющее множество фрагменты графики этих функций. Фиолетовая линия лежит вне образа $\{(u, v) | v \geq u \geq \tau^2\}$, а при $v \geq u, u \geq \tau^2$. Она возникает при неверном выборе знака перед радикалом в функции f_{20} . Черная линия есть продолжение разделяющей кривой, которая прерывается по причине отсутствия точки $rootl$ в бифуркационной диаграмме для области I. Две эти пунктирные линии приведены лишь для наглядности.

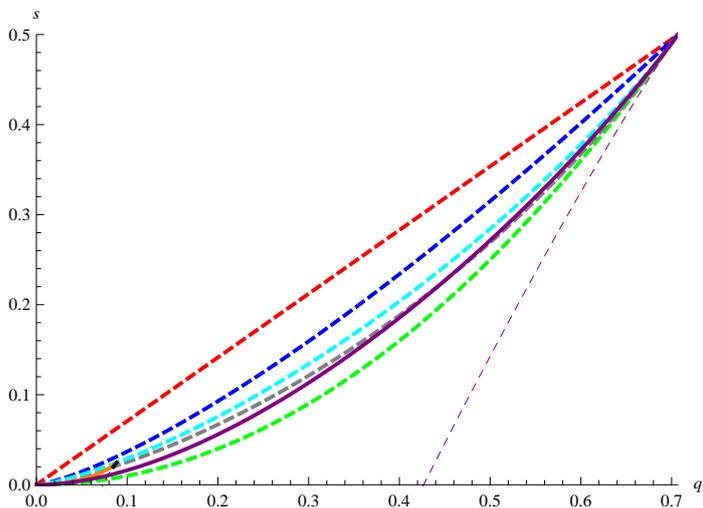


Рис. 27: Разделяющие кривые в координатах (q,s) : $q \in (0, \frac{1}{\tau})$, $s \in (0, \frac{1}{\tau^2})$

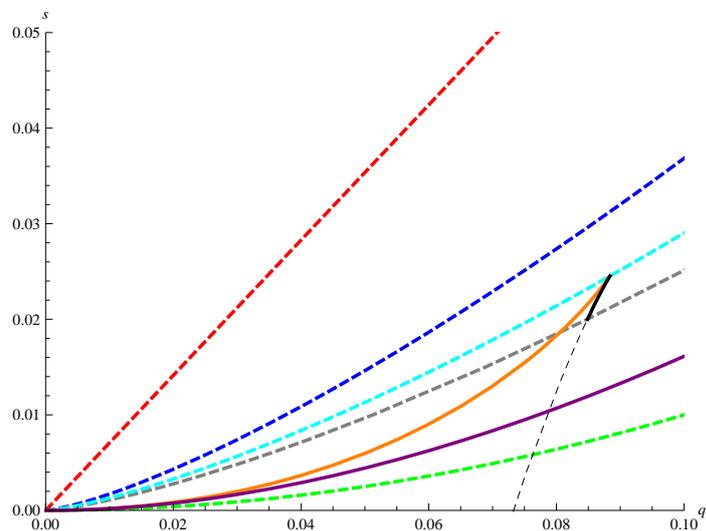


Рис. 28: Разделяющие кривые в координатах (q,s) : $q \in (0, 0.1 \frac{1}{\chi c_1})$, $s \in (0, 0.05 \frac{1}{\chi^2 c_1^2})$

Замечание 17. Поскольку вид кривых для всех пар точек установлен (пусть и в разных координатах), то разбиение плоскости на подобласти, полученное прежде всего использовать для анализа: кривые регулярны за исключением точек $(0,0)$, (τ^2, τ^2) и точки пересечения $f_k, f_{21}, f_{22}, f_{13}$.

1) При переходе через всякую кривую кроме f_m, f_r, f_k, f_t, f_l меняется знак некоторого выражения. Множества перемены знака система Wolfram Mathematica умеет находить с необходимой точностью и надежностью. В частности, если какие-то две такие кривые пересекаются, то их приближения, построенные в ней, тоже пересекутся.

2) Установлено, что в множестве D отсутствуют связные компоненты этих кривых, не попавшие на рисунок. Это следует из явного вида функций.

3) Хотя кривая f_{23} не была построена явно в координатах (q, s) , ее расположение устанавливается из соображений пунктов 1-2.

4) Остается доказать, что кривые не пересекаются в бесконечности, что точки пересечения нескольких кривых действительно являются каковыми, и исследовать окрестность точки (τ^2, τ^2) .

Файл: `new_lines_order.nb`

а также `test_presice.nb`

`order_checking_again.nb`

Замечание 18. В дальнейшем кривые $f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}$ будут изображаться следующими цветами: оранжевым (Orange), голубым (Cyan), голубым (Cyan) и коричневым (Cyan). В скобках приведены задававшиеся цвета в терминах Wolfram Mathematica.

3.7.6 Окрестность особой точки (τ^2, τ^2)

Взаимное расположение некоторых кривых разделяющего множества в окрестности данной точки было строго доказано ранее.

Сделано:

- f_k и f_{17} : (если f_{17} в некоторой окрестности действительно расположена ниже, чем f_k , то она не входит в разделяющее множество при $u \geq \tau^2$) — по модулю прошлого вопроса.
- f_{23} и f_t — имеют пересечение лишь в точке (τ^2, τ^2) , т.к. на f_t имеем $rootl = +l$, и лишь на f_k имеем $h(rootr) = h(rootl)$.
- f_{20}, f_{23} относительно f_k — через точку пересечения с ними проходила бы и кривые $h(+l) = h(cusp) = f_4 \subset f_r$ и $h(+r) = h(cusp) = f_5 \subset f_r$ соответственно. Т.е. это только точка (τ^2, τ^2) .

- f_{20} и f_{23} — не пересекаются в других точках кроме (τ^2, τ^2) , т.к. лишь на прямой f_l имеем $h(+l) = h(+r)$.
- f_{20} и f_l : пересечение только в точке (τ^2, τ^2) , т.к. на f_l совпадают точки: $+r = +l$. Т.е. через пересечение этих двух кривых обязана пройти кривая f_{23} . Остается доказать расположение f_{23} и f_{20} .

Заведомо **требуют более строгого обоснования** расположение:

- f_k и f_{17} — надо доказать строго, что f_{17} лежит ниже f_k при всех $u \geq \tau^2$.
- f_{20} и f_t — никак не обосновано в окрестности точки (τ^2, τ^2) (кривая f_t не дает явного условия ни на $+l$ или $rootr$, ни на $+r$)
- расположение f_{20} и f_{23} : что они пересекаются в единственной точке (τ^2, τ^2) .
- f_k и f_8 ($rootr = rootl = cusp$ и $h(+r) = h(lt)$): не доказано.

В системе Wolfram Mathematica построена серия чертежей 34–39, изображающих разделяющее множество вблизи особой точки (τ^2, τ^2) с разным масштабам. На данных чертежах видно расположение графиков, их пересечения недалеко от этой точки. На этих чертежах кривые второго типа изображены как графики явных функций, а кривые первого типа — как решения некоторого алгебраического уравнения $g(u, v) = 0$ двух переменных. По разные стороны от нее знак функции g на плоскости (u, v) меняется. Поскольку доказано, что это уравнение имеет ровно одну ветвь вблизи точки (τ^2, τ^2) , и некоторая ветвь алгоритмом найдена, то можно построить приближение на конечном отрезке $[u_1, u_2]$ т.ч. $\tau^2 < u_1, u_2 < \infty$ с любой требуемой точностью.

3.7.7 Отсутствие пересечений кривых при больших (u, v)

Утверждение 11. 1) Все точки пересечения кривых разделяющего множества друг с другом попадают на рисунок 29.

В частности, кривые разделяющего множества в следующем порядке пересекают окружность большого радиуса с центром в нуле (против часовой стрелки):

$$f_1 = f_l, f_2, f_{16}, f_{20}, f_8, f_{15}, f_{22}, f_7, f_{14} = f_t, f_{23}, f_k, f_4 = f_r, f_7, f_9 = f_m, f_{17}, b = 0$$

Доказательство. Кривые f_l, f_t, f_k, f_r, f_m не пересекаются друг с другом. Кривая f_7 при $u = \tau^2 + \varepsilon$ имеет порядок роста как $1/(\sqrt{u} - \tau)$, неограниченно возрастает, приближаясь к f_m справа. f_{17} при $u = 0 + \varepsilon$ имеет порядок роста $1/u$.

$$f_7(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tau} = 2u + 2\tau\sqrt{u} + 2\tau^2 + \frac{2\tau^3}{\sqrt{u} - \tau}$$

$$f_8(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} + \tau} = 2u - 2\tau\sqrt{u} + 2\tau^2 - \frac{2\tau^3}{\sqrt{u} - \tau}$$

Кривые f_7, f_{15} имеют порядок роста как $2u + 2\tau\sqrt{u} + const_i$, где $(const_7 > const_{15})$. Т.е. f_7 лежит выше чем f_{15}

Кривые f_8, f_{16} имеют порядок роста как $2u - 2\tau\sqrt{u} + const_i$, где $(const_8 > const_{16})$. Т.е. f_8 лежит выше чем f_{16} .

Кривая f_2 имеет порядок роста как $u + const\sqrt{u} + \dots$. Потому при большом $u^2 + v^2$ f_2 лежит ниже всех остальных кривых кроме f_l .

Докажем, что кривая f_{22} лежит между f_7 и f_{15} при больших u : данная кривая будет неограниченно возрастать (из вида в координатах (q, s)), и не может пересечь f_7 или f_{15} : на кривой f_7 равны h_l и $h(z_{-r})$, на кривой f_{15} равны $h(z_{lt})$ и $h(z_{-r})$. На кривой f_{22} имеем $h(z_{rootr}) = h(z_{-r})$. При этом точка $rootr$ лежит левее точки z_{lt} и правее точки h_l . Значит, данные кривые не могут пересекаться.

Докажем, что кривая f_{20} лежит между f_8 и f_{16} при больших u : данная кривая будет неограниченно возрастать (из вида в координатах (q, s)), и не может пересечь f_8 или f_{16} : на кривой f_8 равны

h_l и $h(z_{+r})$, на кривой f_{16} равны $h(z_{lt})$ и $h(z_{+r})$. На кривой f_{20} имеем $h(z_{rootr}) = h(z_{+r})$. При этом точка $rootr$ лежит левее точки z_{lt} и правее точки h_l . Значит, данные кривые не могут пересекаться.

Остается кривая f_{23} : $h(z_{rootr}) = h(z_{+l})$. При всех отмеченных на чертеже u она лежит между f_k и f_t . На кривой f_k имеем: $rootr = rootl = cusp$. При этом кривая $h(z_{+l}) = h(z_{cusp})$ есть кривая f_r при $u > \tau^2$. Аналогично, на кривой $f_t + l = h_l = rootl$. Поскольку $rootr = rootl$ есть кривая f_k , то с кривой f_t наша f_{20} не пересечется.

Кривые f_t, f_r имеют порядок роста как $const u^2$, f_k находится между ними, потому не пересекутся повторно с кривыми линейного порядка роста. □

3.8 Точки пересечения кривых разделяющего множества

Взаимное расположение проекций разделяющих кривых было наглядно представлено при помощи системы Wolfram Mathematica.

Опишем все точки на плоскости параметров, через которые проходит более двух кривых. Такие точки назовем особыми точками проекции (на плоскость параметров). Напомним, что система имеет симметрию $(a, b) \rightarrow (a, -b)$.

Определение 25. *Особыми точками проекции* на плоскость параметров назовем точки пересечения или касания кривых из разделяющего множества.

Определение 26. Тройными точками назовем особые точки проекции на плоскость параметров, которые принадлежат более чем двум ребрам разделяющего множества или есть точки пересечения прямой $b = 0$ с другими его кривыми.

Замечание 19. Если разделяющая кривая касается вертикальной оси, то ее касается и кривая, симметричная ей относительно этой оси. Аналогичная картина с не ортогональным пересечением — будет точка излома. Потому такие точки также имеет смысл называть тройными.

Утверждение 12. *В данной системе на плоскости (u, v) имеется шесть тройных точек проекции при положительных значениях u и три при $u = 0$. Для каждой точки с положительным u существует симметричная ей относительно оси ординат особая точка. Нумерация всех точек пересечения приведена на рисунке 41*

номер	кривые	u	v	равенства
0	$f_{13}, f_l, f_5, b = 0$	0	0	$M_{0,0}^4$ — точка
2	$f_1, f_3, f_4, f_5, f_9, f_{10}, f_{14}, f_{16}, f_{20}, f_{23}$	τ^2	τ^2	$-l = -r, +l = +r = lt = rt = cusp = h_l. z_1?$
4	$f_{14} = f_t, b = 0$	0	$\tau^2/4$	$+r = -r, h_l = h(+l), cusp \in \gamma_1$
5	$f_{18}, b = 0$	0	$\tau^2/2$	$h(rt) = h_l, +r = -r, cusp \in \gamma_1$
7	$f_5 = f_r, f_{16}, f_{17}, f_{18}$	1/2	1	$+r = rt = cusp, h(+r) = h_l$
9	$f_{15}, f_{16}, f_{10} = f_m, b = 0$	0	2	$+r = -r, cusp \in \gamma_1, h_l = h(-r) + l = rt = h_{int}$
12	f_{13}, f_{15}, f_{17}			$h(-r) = h_l = h(cusp)$
16	$f_2, f_3, b = 0$	0	$4\tau^2$	$+r = -r, cusp \in \gamma_1, h(+l) = h(-r)$
24	$f_2, f_4 = f_r, f_7, f_{13}$	8	32	$lt = +l = cusp, h(+l) = h(-r)$
26	$f_k, f_{13}, f_{21}, f_{22}$			$rootr = rootl = cusp, h(-r) = h(cusp)$
28	f_2, f_{23}, f_{22}			$h(rootr) = h(+l) = h(-r)$
33	$f_2, f_{14} = f_t, f_{15}, f_{21}$			$rootl = h_l = +l, h(-r) = h(+l) = h(rootl)$

Таблица 13: Таблица тройных точек системы при $u \geq 0$

Доказательство. Какие именно кривые пересеклись — видно из графиков. Они легко различаются по цветам, указанным в таблице 11 и в замечании 18.

Наборы совпадающих точек (когда приравнены сами точки) и наборы точек с совпадающими абсциссами: когда приравнены два значения функции $h()$ — находим из таблицы 11.

Данное свойство точки $(0, 0)$ следует из перечисленных в начале работы (3) свойств симплектических листов для такой алгебры Ли.

Когда $u = v$, то $\sqrt{a^2 - 4\kappa b^2} = 0$. Параболы на бифуркационных диаграммах для орбит $M_{b,a}^4$, у которых (b, a) лежат на этой прямой, совпадут, и $z_{+l} = z_{+r}, z_{-l} = z_{-r}, z_{lt} = z_{rt}$. Значит, среди этих шести точек не более трех различных. Параметр z_{cusp} . Отметим, что образ отображения момента лежит между параболой и компактен при всех неособых $M_{a,b}^4$. Значит здесь образ отображения момента будет являться ограниченной дугой параболы.

Если u и v равны между собой и равны τ^2 (точка 2), то ... Тут же надо доказать, что f_8 расположено выше f_k в малой окрестности этой точки. Идея: если доказать, что производная f_k возрастает, а производная f_8 убывает. Одно их пересечение при $u > \tau^2$ известно, оно есть. Так докажем, что до этого пересечений нет.

В точке пересечения любых двух кривых, указанных для точек 12 или 28 в таблице, имеет место равенство абсцисс всех трех особых точек. Значит, через точку пересечения пройдет и третья кривая.

В бифуркационной диаграмме, соответствующей точкам кривой f_k , точка возврата лежит на горизонтальной оси. В качестве точки 28, как было описано выше, берем точку пересечения f_{13} и f_k . Она лежит на остальных кривых т.к. в данной точке $cusp = rootr = rootl, h(cusp) = h(-r)$. Эта точка имеет номер 26.

Аналогичная ситуация для точек 7, 24, 33.

Точкам, лежащим на оси $b = 0$ соответствует равенство $+r = -r$ и новая особая точка, соответствующая попаданию точки возврата $cusp$ на кривую γ_1 между $-l, -r$ и пересечению прообразов данной кривой и точки возврата. Это относится к точкам 4,5,9,16. □

3.9 Описание разделяющего множества как плоского графа

Данная теорема верна для координат (b, a) в силу регулярности замены внутри множества D и взаимной однозначности на границах.

Утверждение 13. *Разделяющее множество на плоскости параметров (b, a) при неотрицательных b является планарным графом с конечным числом элементов.*

В координатах (u, v) оно имеет вид, приведенный на рисунках 29, 30, 31, 32, 33:

1) оно делит множество \hat{D} на 61 подобласть, 5 из которых граничат с осью $b = 0$, а 2 подобласти — с прямой $v = u$. Оно делит луч $b = 0, a \geq 0$ на 5 промежутков, а прямую $v = u$ — на 2 промежутка.

2) данный граф содержит 40 вершин (5 вершин лежат на оси $b = 0$) и 102 ребра, некоторые из которых уходят бесконечно далеко от начала координат. 5 ребер являются промежутками на оси $b = 0$ и 2 ребра — на прямой $v = u$.

3) в данном графе 12 точек, которые или лежат на оси $b = 0$, или являются точками пересечения или касания более чем двух кривых, или являются точкой пересечения двух из пяти кривых $f_i f_r$. Номера этих точек — 0, 1, 2, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 24, 26, 28, 33.

Номера точек указаны на рисунке 41.

Доказательство. 1) Число подобластей считается по рисунку, приведем ответ в таблице 14:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	11	15	6	5	12	2	7	1	2	2	2	1

Таблица 14: Количество подмножеств в множествах I-XII

Всего получаем $11 + 15 + 6 + 5 + 12 + 2 + 7 + 1 + 2 = 61$ подобласть и 5 промежутков на оси $b = 0$.

С промежутками X.1, X.2, XI.1, XI.2, XII оси $b = 0$ граничат подобласти V.11, V.8, VII.3, VII.1, IX.2 соответственно.

С отрезком $[0, \tau^2]$ прямой $v = u$ граничит область VIII, с лучом $[\tau^2, \infty]$ прямой $v = u$ граничит подобласть I.1.

2) считается явно по графу. Приведем ниже таблицу, какие кривые пересекаются или касаются в каждой из точек 1..40

□

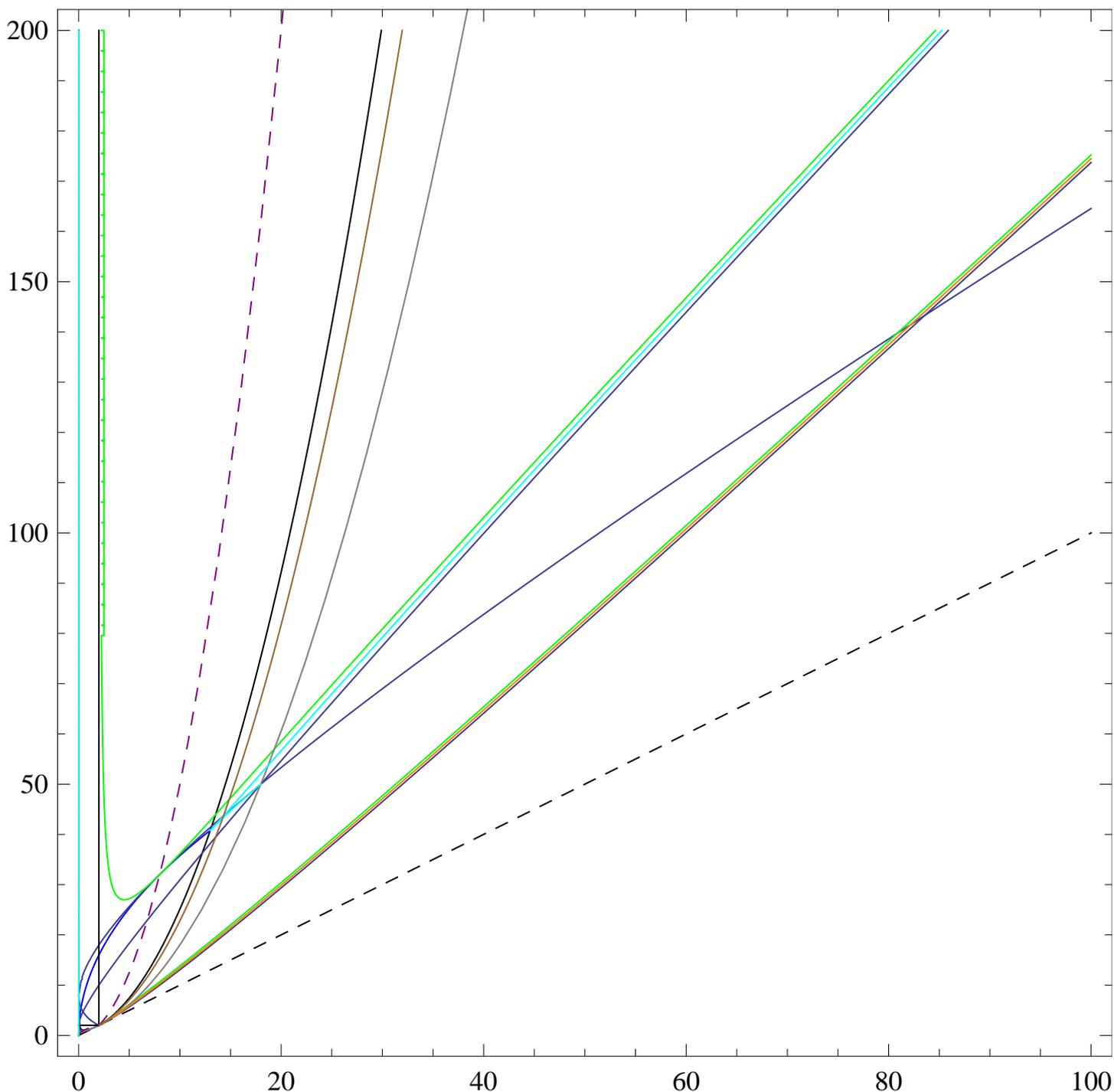


Рис. 29: Разделяющее множество: при больших u и v

3.10 Итоговая теорема о классификации регулярных $M_{a,b}^4$

Напомним, что символами D и \hat{D} мы называли множество $\{u \geq 0, v \geq u\}$ и $\{u > 0, v \geq u\}$ соответственно.

Набором пары (u, v) назовем набор пары ее прообраза при замене параметров.

Теорема 10. 1) Множество \hat{D} состоит в точности из 61 связного открытого подмножества (подобласти), чьи границы в \mathbb{R}^2 содержатся в разделяющем множестве и луче $u = 0, v > 0$. Данный

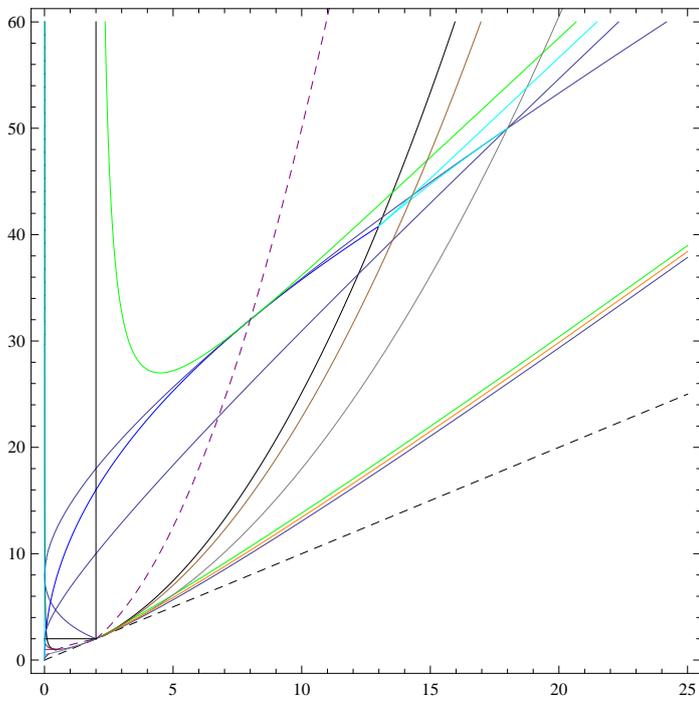


Рис. 30: Разделяющее множество на плоскости (u, v) : общий вид

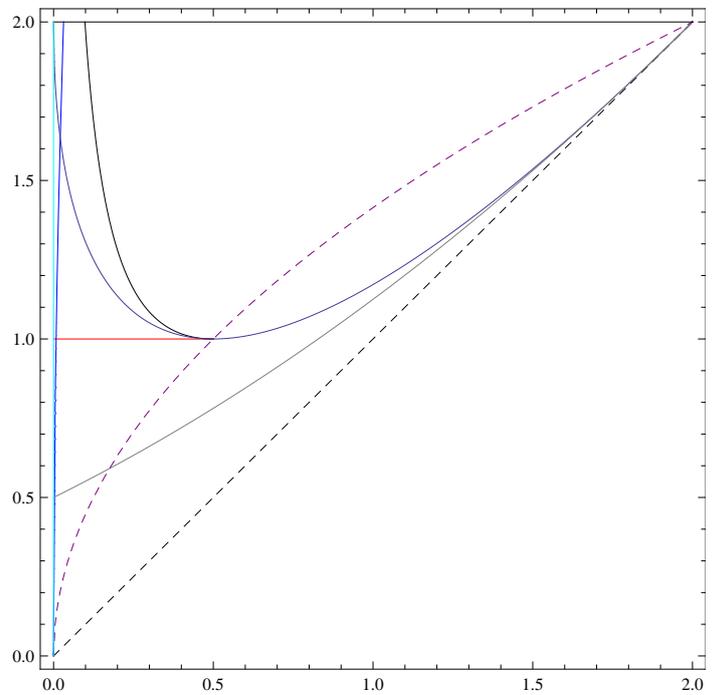


Рис. 31: Разделяющее множество: малые области VI-IX

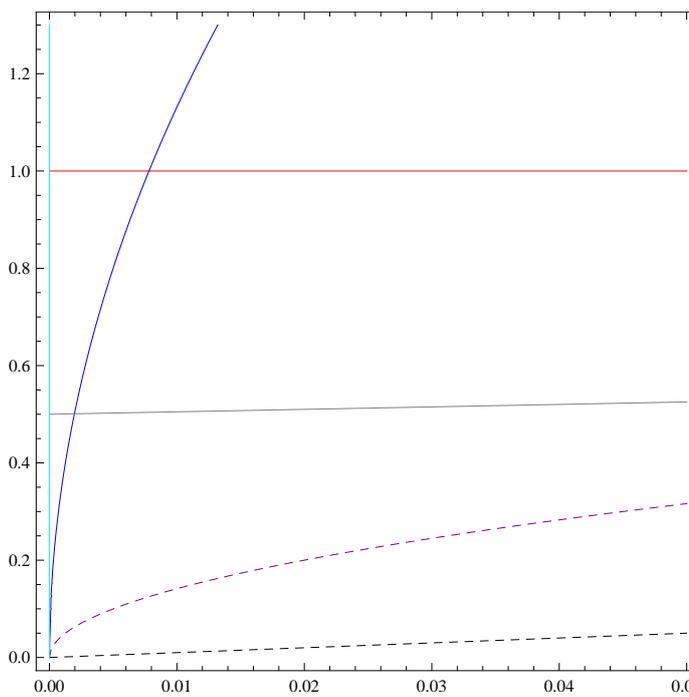


Рис. 32: Разделяющее множество вблизи прямой $v = 0$

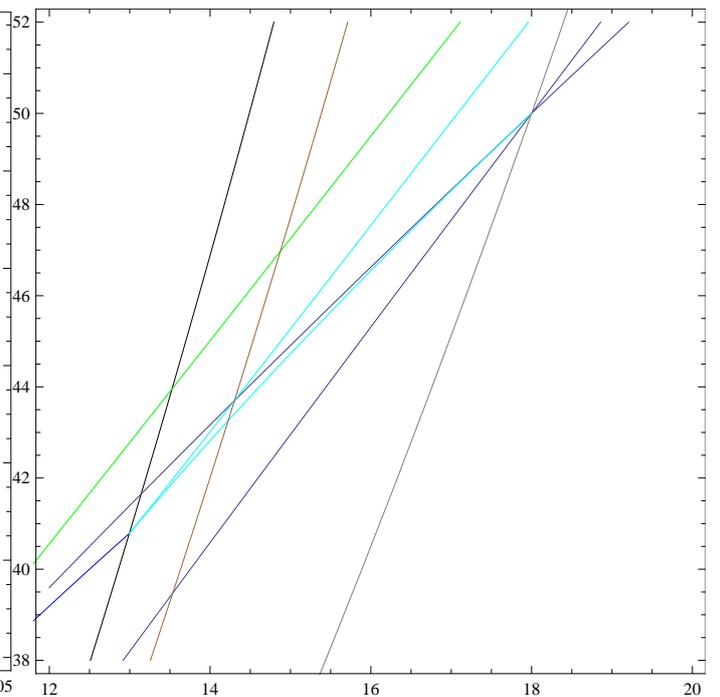


Рис. 33: Разделяющие кривые для $mr, rootl, rootr$

луч делится точками разделяющего множества на 5 связных открытых промежутков. Каждая из 61 подобласти имеет симметричную ей относительно оси v . Каждая из пяти, содержащих в своей границе промежуток из луча $b = 0$ — симметричная относительно данной прямой.

2) Наборы любых двух точек одного подмножества совпадают. Назовем данный набор набором (особых точек) соответствующего подмножества. Все они приведены в таблице ниже.

3) Наборы точек любых двух разных подмножеств, лежащих в одном множестве I-XII — различны.

Таблица наборов особых точек, соответствующих данным 66 подмножествам:

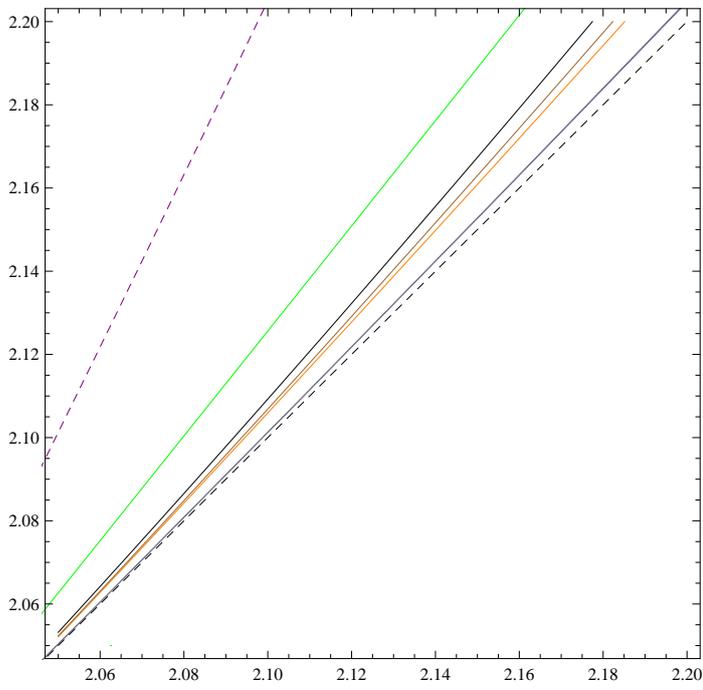


Рис. 34: Разделяющее множество вблизи точки (τ^2, τ^2) : $u \in (0; 2, 2)$

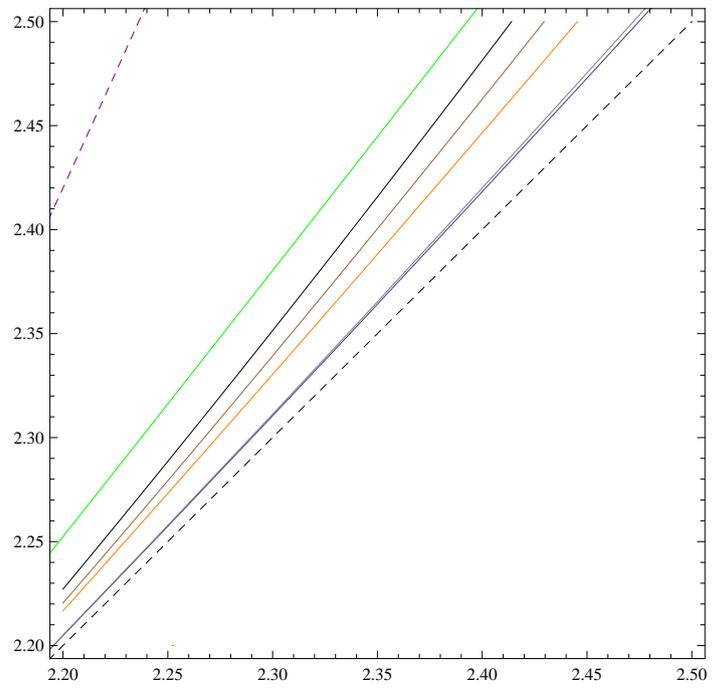


Рис. 35: Разделяющее множество вблизи точки (τ^2, τ^2) : $u \in (2, 2; 2, 5)$

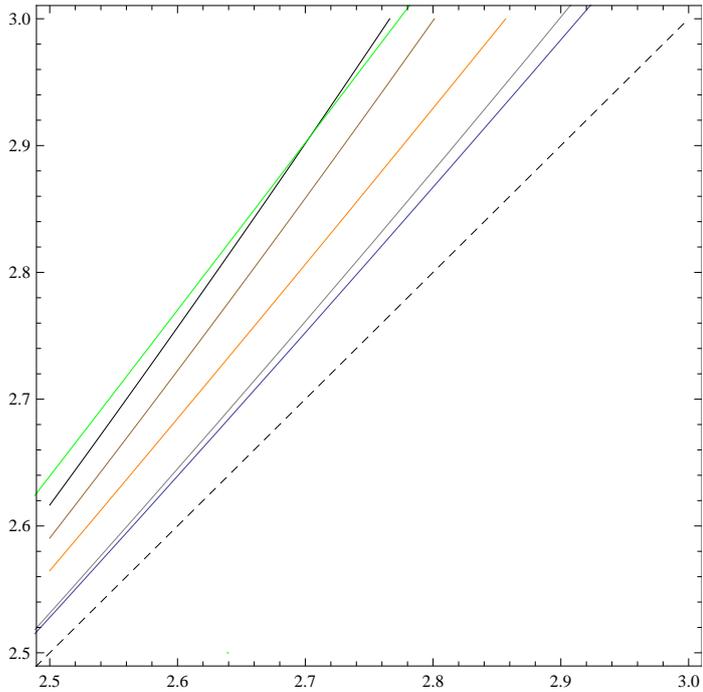


Рис. 36: Разделяющее множество вблизи точки (τ^2, τ^2) : $u \in (2, 5; 3)$

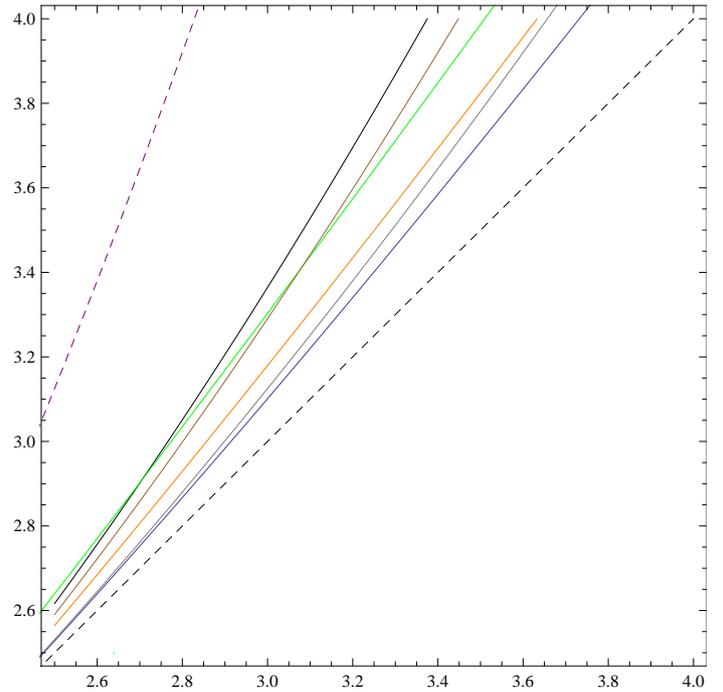


Рис. 37: Разделяющее множество вблизи точки (τ^2, τ^2) : $u \in (2, 5; 4)$

Область I:

I.1	-l	-r	+l	+r	h_l	rootr	lt	rt	z_1
I.2	-l	-r	+l	h_l	+r	rootr	lt	rt	z_1
I.3	-l	-r	+l	h_l	rootr	+r	lt	rt	z_1
I.4	-l	-r	+l	h_l	rootr	lt	+r	rt	z_1
I.5	-l	+l	-r	h_l	rootr	lt	+r	rt	z_1
I.6	-l	+l	h_l	-r	rootr	lt	+r	rt	z_1
I.7	-l	+l	h_l	rootr	-r	lt	+r	rt	z_1
I.8	-l	+l	h_l	rootr	lt	-r	+r	rt	z_1
I.9	-l	+l	-r	+r	h_l	rootr	lt	rt	z_1
I.10	-l	+l	-r	h_l	+r	rootr	lt	rt	z_1
I.11	-l	+l	-r	h_l	rootr	+r	lt	rt	z_1

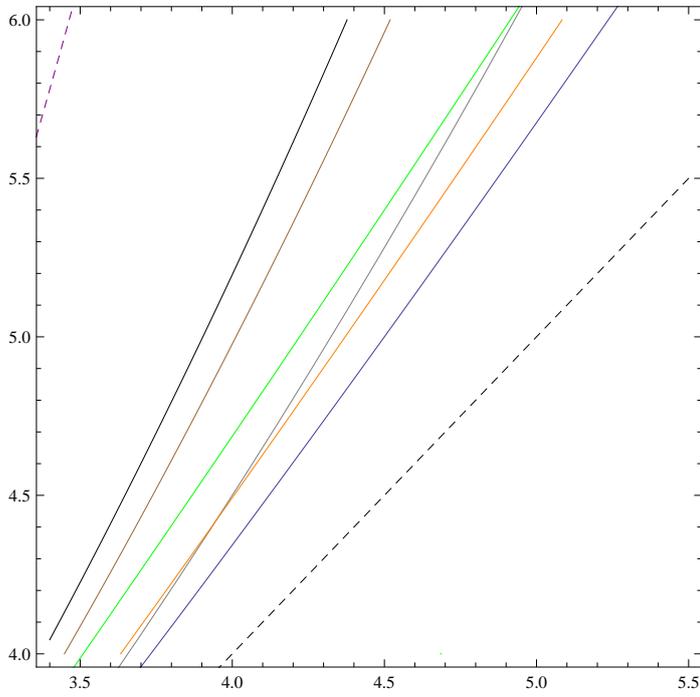


Рис. 38: Разделяющее множество вблизи точки (τ^2, τ^2) : $u \in (3.4; 5, 5)$

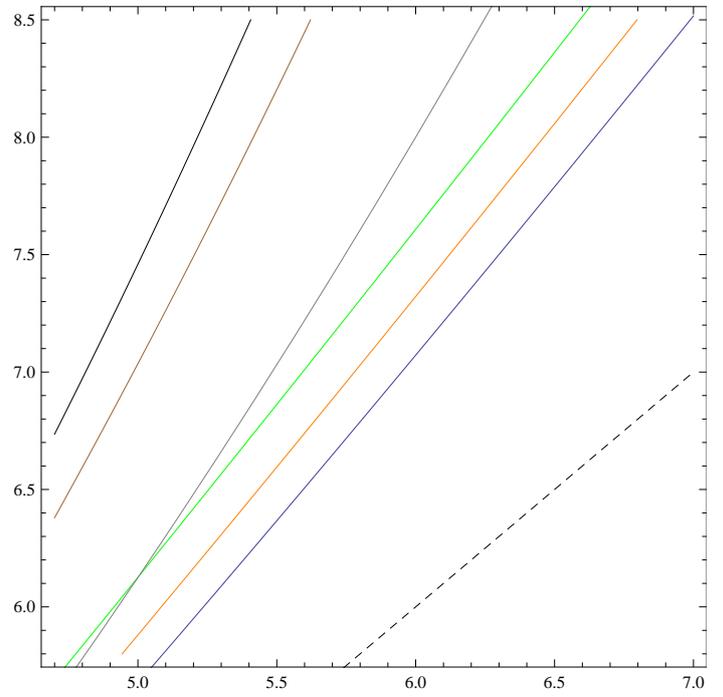


Рис. 39: Разделяющее множество вблизи точки (τ^2, τ^2) : $u \in (5.0; 7, 5)$

Область II:

II.1	-l	-r	h_l	rootl	+l	+r	rootr	lt	rt	z_1
II.2	-l	-r	h_l	rootl	rootr	+l	+r	lt	rt	z_1
II.3	-l	-r	h_l	rootl	+l	rootr	+r	lt	rt	z_1
II.4	-l	-r	h_l	rootl	rootr	+l	lt	+r	rt	z_1
II.5	-l	h_l	-r	rootl	rootr	+l	lt	+r	rt	z_1
II.6	-l	h_l	rootl	-r	rootr	+l	lt	+r	rt	z_1
II.7	-l	h_l	rootl	rootr	-r	+l	lt	+r	rt	z_1
II.8	-l	h_l	rootl	rootr	+l	-r	lt	+r	rt	z_1
II.9	-l	h_l	rootl	rootr	+l	lt	-r	+r	rt	z_1
II.10	-l	-r	h_l	rootl	+l	rootr	lt	+r	rt	z_1
II.11	-l	h_l	-r	rootl	+l	rootr	lt	+r	rt	z_1
II.12	-l	h_l	rootl	-r	+l	rootr	lt	+r	rt	z_1
II.13	-l	h_l	rootl	+l	-r	rootr	lt	+r	rt	z_1
II.14	-l	h_l	rootl	+l	rootr	-r	lt	+r	rt	z_1
II.15	-l	h_l	rootl	+l	rootr	lt	-r	+r	rt	z_1

Область III:

III.1	-l	-r	h_l	cusp	+l	+r	lt	rt	z_1
III.2	-l	-r	h_l	cusp	+l	lt	+r	rt	z_1
III.3	-l	h_l	-r	cusp	+l	lt	+r	rt	z_1
III.4	-l	h_l	cusp	-r	+l	lt	+r	rt	z_1
III.5	-l	h_l	cusp	+l	-r	lt	+r	rt	z_1
III.6	-l	h_l	cusp	+l	lt	-r	+r	rt	z_1

Область IV:

IV.1	-l	-r	h_l	cusp	+l	lt	+r	rt	z_1
IV.2	-l	h_l	-r	cusp	+l	lt	+r	rt	z_1
IV.3	-l	h_l	cusp	-r	+l	lt	+r	rt	z_1
IV.4	-l	h_l	cusp	+l	-r	lt	+r	rt	z_1
IV.5	-l	h_l	cusp	+l	+lt	-r	+r	rt	z_1

Область V:

V.1	-l	cusp	-r	h_l	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
V.2	-l	-r	cusp	h_l	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
V.3	-l	-r	h_l	cusp	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
V.4	-l	-r	h_l	cusp	+l	+r	h_{int}	rt	z_1
V.5	-l	h_l	-r	cusp	+l	+r	h_{int}	rt	z_1
V.6	-l	h_l	-r	cusp	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
V.7	-l	h_l	cusp	-r	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
V.8	-l	cusp	h_l	-r	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
V.9	-l	h_l	cusp	-r	+l	+r	h_{int}	rt	z_1
V.10	-l	cusp	h_l	-r	+l	+r	h_{int}	rt	z_1
V.11	-l	cusp	h_l	+l	-r	+r	h_{int}	rt	z_1
V.12	-l	h_l	cusp	+l	-r	+r	h_{int}	rt	z_1

Область VI:

VI.1	-l	-r	+r	h_l	+l	z_1
VI.2	-l	-r	h_l	+r	+l	z_1

Область VII:

VII.1	-l	cusp	-r	+r	rt	h_l	+l	z_1
VII.2	-l	-r	cusp	+r	rt	h_l	+l	z_1
VII.3	-l	cusp	-r	+r	h_l	rt	+l	z_1
VII.4	-l	-r	cusp	+r	h_l	rt	+l	z_1
VII.5	-l	cusp	-r	h_l	+r	rt	+l	z_1
VII.6	-l	-r	cusp	h_l	+r	rt	+l	z_1
VII.7	-l	-r	h_l	cusp	+r	rt	+l	z_1

Область VIII:

VIII	-l	-r	+r	+l
------	----	----	----	----

Область IX:

IX.1	-l	cusp	-r	+r	rt	+l
IX.2	-l	-r	cusp	+r	rt	+l

Промежуток X:

X.1	-l	y_4	h_l	+r	+l	h_{int}	rt	z_1
X.2	-l	y_4	h_l	+l	+r	h_{int}	rt	z_1

Промежуток XI:

XI.1	-l	y_4	+r	h_l	rt	+l	z_1
XI.2	-l	y_4	+r	rt	h_l	+l	z_1

Промежуток XII:

XII	-l	-r	+r	rt	+l
-----	----	----	----	----	----

Классический случай:

6 разных бифуркационных диаграмм, но 5 комбинаторно разных.

0.b=0	-l	h_l	$= h(y_4)$	+l		
0.IV	-l	h_l	cusp	+l	lt	
0.III	-l	h_l	cusp	+l	lt	
0.II.2	-l	h_l	rootl	rootr	+l	lt
0.II.1	-l	h_l	rootl	+l	rootr	lt
0.I	-l	+l	h_l	rootr	lt	

Замечание 20. 1) Фактически, случаи X-XII являются вырождениями случаев V, VII, IX, когда особая точка z_{cusp} попадает на дугу бифуркационной диаграммы и превращается в вырожденную особенность y_4 с круговой молекулой эллиптической вилки. При этом так же совпадают координаты точек z_{-r} и z_{+r} (это точка z_7).

2) В классическом случае Ковалевской (при $C = 1, L = l$) набор особых точек может быть одинаковым для точек из областей III, IV. Бифуркационные диаграммы при этом отличаются.

4 Классификация слоений Лиувилля на регулярных $Q_{a,b,h}^3$

4.1 Грубые молекулы с названиями дуг бифуркаций

В главе 3 были найдены наборы особых точек, соответствующие каждой регулярной $M_{a,b}^4$. Плоскость a, b разделена на некоторые множества, точки которых имеют одинаковые наборы особых точек. Посмотрим, сколько разных наборов соответствуют парам из каждого множества I-XII:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	11	15	6	5	12	2	7	1	2	2	2	1

Таблица 15: Число разных наборов графов для регулярных точек множеств I-XII

Вместе с информацией о том, в каком из множеств I-XII лежит данная точка, этой информации достаточно чтобы написать для нее (и содержащему ее подмножеству) набор графов. Вычислим все матрицы склейки для всех пар дуг бифуркационной диаграммы, чьи атомы соединены ребром хоть в одном из полученных графов. Напомним, что в этих графах атомы помечены названиями дуг бифуркаций.

На следующих рисунках увидим все эти множества. Первый символ — номер области I-XII, второй — номер набора, встречающегося в этой области.

Приведем в данном разделе список всех грубых молекул с названиями дуг бифуркаций и их число. Количество неэквивалентных слоений Лиувилля на регулярных $Q_{a,b,h}^3$ заведомо будет не больше его. В таблице 16 направление вправо будет соответствовать росту значения функции K . При анализе классического случая все дуги бифуркационной диаграммы были обозначены как $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1 \dots \gamma_7, \delta_1, \delta_2$. В случае $\varkappa > 0$ имеется 5 новых дуг, обозначенных $\xi_1 \dots \xi_5$.

Утверждение 14. *Встречающимся в системе неособым поверхностям $Q_{a,b,h}^3$ соответствуют 32 попарно различных грубых молекулы, чьи вершины помечены названиями дуг бифуркаций.*

Каждой паре (b, a) соответствует набор графов. Приведем их ниже для каждой подобласти и промежутков X-XII. Жирным отметили первое (в порядке исследования) появление графа с таким номером в наборе какой-то подобласти.

Множество X: два промежутка.

Новые графы: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

множество	подмножество	графы
X	1	1 2 3 4 5 6 7
X	2	1 2 3 8 5 6 7

Множество XI: два промежутка.

Новые графы: 9, 10, 11.

множество	подмножество	графы
XI	1	1 2 9 8 10 7
XI	2	1 2 9 11 10 7

Промежуток XII, нет меньших промежутков

множество	графы
XII	1 2 9 11

Область IX: две подобласти.

Новые графы: 12, 13.

область	подобласть	графы
IX	1	1 2 12 9 11
IX	2	1 13 12 9 11

Область VIII: нет меньших подобластей.
Новых графов нет.

область	подобласть	графы			
VIII		1	13	11	

Область VII: 7 подобластей.
Новые графы: 14,15.

область	подобласть	графы							
VII	1	1	2	12	9	11	10	7	
VII	2	1	13	12	9	11	10	7	
VII	3	1	2	12	9	8	10	7	
VII	4	1	13	12	9	8	10	7	
VII	5	1	2	12	14	11	10	7	
VII	6	1	13	12	14	8	10	7	
VII	7	1	13	15	14	8	10	7	

Область VI: 2 подобласти.
Новых графов нет.

область	подобласть	графы				
VI	1	1	13	11	10	7
VI	2	1	13	15	10	7

Область V, 12 подобластей
Новые графы: 17, 16.

5	область	подобласть	графы							
	V	1	1	2	12	14	8	5	6	7
	V	2	1	13	12	14	8	5	6	7
	V	3	1	13	15	14	8	5	6	7
	V	4	1	13	15	14	17	5	6	7
	V	5	1	16	15	14	17	5	6	7
	V	6	1	16	15	14	8	5	6	7
	V	7	1	16	3	14	8	5	6	7
	V	8	1	2	3	14	8	5	6	7
	V	9	1	16	3	14	17	5	6	7
	V	10	1	2	16	15	17	5	6	7
	V	11	1	2	3	4	17	5	6	7
	V	12	1	16	3	4	17	5	6	7

Область IV: 5 подобластей.
Новые графы: 18,19.

область	подобласть	графы							
IV	1	1	13	15	14	17	18	6	7
IV	2	1	15	16	14	17	18	6	7
IV	3	1	16	14	3	17	18	6	7
IV	4	1	16	3	17	4	18	6	7
IV	5	1	16	3	4	19	18	6	7

Область III: 6 подобластей (одна серия (из 5) и 1 отдельная).
Новые графы: 20, 21, 22, 23, 24.

область	подобласть	графы									
III	1	1	13	15	20	21	22	6	7		
III	2	1	13	15	20	21	18	6	7		
III	3	1	16	15	20	21	18	6	7		
III	4	1	16	23	20	21	18	6	7		
III	5	1	16	23	24	21	18	6	7		
III	6	1	16	23	24	19	18	6	7		

Область II: 15 подобластей (две серии (6,6) и три отдельных).

Новые графы: 25, 26, 27, 28, 29.

область	подобласть	графы									
II	1	1	13	15	25	26	27	22	6	7	
II	2	1	13	15	25	20	21	22	6	7	
II	3	1	13	15	25	26	21	22	6	7	
II	4	1	13	15	25	20	21	18	6	7	
II	5	1	16	15	25	20	21	18	6	7	
II	6	1	16	28	25	20	21	18	6	7	
II	7	1	16	28	23	20	21	18	6	7	
II	8	1	16	28	23	24	21	18	6	7	
II	9	1	16	28	23	24	19	18	6	7	
II	10	1	13	15	25	26	21	18	6	7	
II	11	1	16	15	25	26	21	18	6	7	
II	12	1	16	28	15	26	21	18	6	7	
II	13	1	16	28	29	26	21	18	6	7	
II	14	1	16	28	29	24	21	18	6	7	
II	12	1	16	28	29	24	19	18	6	7	

Область I: 11 подобластей (две серии (7,4)).

Новые графы: 30, 31, 32

область	подобласть	графы									
I	1	1	13	30	31	27	22	6	7		
I	2	1	13	30	26	27	22	6	7		
I	3	1	13	30	26	21	22	6	7		
I	4	1	13	30	26	21	18	6	7		
I	5	1	32	30	26	21	18	6	7		
I	6	1	32	29	26	21	18	6	7		
I	7	1	32	29	24	21	18	6	7		
I	8	1	32	29	24	19	18	6	7		
I	9	1	32	30	31	27	22	6	7		
I	10	1	32	30	26	27	39	6	7		
I	11	1	32	30	26	21	39	6	7		

В классическом случае имеется пять случаев с комбинаторно различными бифуркационными диаграммами и шесть случаев с различными. Пять из них соответствуют некоторым подслучаям случаев I-IV. Последний не имеет прямой аналогии со случаями X-XII ($b = 0$) в силу свойств предельного перехода к нулю по \varkappa .

область	подобласть	графы					
$\varkappa = 0$	I	A	F	G	H	E	
$\varkappa = 0$	II.1	A	B	I	G	H	E
$\varkappa = 0$	II.2	A	B	I	J	H	E
$\varkappa = 0$	III	A	B	J	H	E	
$\varkappa = 0$	IV	A	B	C	D	E	
$\varkappa = 0$	b=0	A	C	D			

4.2 Вычисление молекул с матрицами склейки

4.2.1 Список допустимых базисов вблизи дуг

Лемма 4.1. *Допустимые базисы вблизи дуг бифуркационной диаграммы, выраженные в терминах элементов решетки в группе $H_1(T^2)$, имеют вид, указанный ниже. Так же указаны номера преобладающих перестройку семейств торов и тип атома. Находящаяся выше черты относится к верхней границе атома, ниже черты — к нижней.*

- 1) $\alpha_1 \quad \frac{1}{-} \quad \frac{(\uparrow \lambda_{\beta_1})}{\circ} \quad A$
- 2) $\alpha_2 \quad \frac{3}{-} \quad \frac{(\uparrow \rightarrow)}{\circ} \quad 2A$
- 3) $\beta_1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{(\lambda_{\beta_1} \downarrow)}{(\lambda_{\beta_1} \uparrow)} \quad B$
- 4) $\beta_2 \quad \frac{1,4}{3} \quad \frac{(\uparrow \nearrow)}{(\uparrow \leftarrow)} \quad C_2$
- 5) $\beta_3 \quad \frac{3}{2,5} \quad \frac{(\rightarrow \downarrow)}{(\rightarrow \uparrow)} \quad 2B$
- 6) $\gamma_1 \quad \frac{\circ}{1,4} \quad \frac{\circ}{(\rightarrow \nearrow)} \quad 2A$
- 7) $\gamma_2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{(\rightarrow \downarrow)}{(\rightarrow \nearrow)} \quad 2A^*$
- 8) $\gamma_3 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{(\nearrow \downarrow)}{(\nearrow \lambda_{\beta_1})} \quad B$
- 9) $\gamma_5 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{(\uparrow \lambda_{\beta_1})}{(\uparrow \leftarrow)} \quad 2A^*$
- 10) $\gamma_6 \quad \frac{2}{2,5} \quad \frac{(\uparrow \lambda_{\beta_1})}{(\uparrow \leftarrow)} \quad B$
- 11) $\gamma_6 \quad \frac{5}{-} \quad \frac{(\lambda_{\gamma_7} \uparrow)}{\circ} \quad 2A$
- 12) $\delta_1 \quad \frac{2}{-} \quad \frac{(\uparrow \lambda_{\beta_1})}{\circ} \quad A$
- 13) $\delta_2 \quad \frac{5}{-} \quad \frac{(\uparrow \rightarrow)}{\circ} \quad 2A$

$$\begin{aligned}
14) \quad \xi_1 &= \frac{1}{(\downarrow \rightarrow)} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \rightarrow \end{array} A \\
15) \quad \xi_2 &= \frac{3}{(\downarrow \rightarrow)} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \rightarrow \end{array} 2A \\
16) \quad \xi_3 &= \frac{2}{(-\lambda_{\beta_1} \downarrow)} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \end{array} 2A \\
17) \quad \xi_4 &= \frac{4}{(\downarrow \rightarrow)} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \rightarrow \end{array} A \\
18) \quad \xi_5 &= \frac{1}{(-\lambda_{\beta_1} \nearrow)} \begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \nearrow \end{array} A
\end{aligned}$$

Образец

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\gamma_3} \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nearrow \\ \lambda_{\beta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_1} \\ \nearrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_4} \\ \mu_{\xi_4} \end{pmatrix} C_8^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$$

4.3 Меченые молекулы изоэнергетических поверхностей

Приведем полученные молекулы с вычисленными метками. Метки r, ε находятся по матрице соответствующего ребра. Метка n требует задания направления на ребрах. Положим, что каждое ребро направлено одинаково с направлением роста значений дополнительного интеграла (он постоянен на торах, так что корректна определяет функцию на ребре как факторе). Метка n вычисляется не для ребер, а для каждой семьи. так называют фрагмент молекулы, оставшегося связным после разрезания молекулы по всем ребрам с конечными метками r , в котором нет атомов A . Формула для метки n имеет вид суммы целых частей Θ_i отношений некоторых элементов матриц склейки на ребрах e_i , направленных из какого-то атома семьи вовне (выходящие ребра), направленных к какому-то атому семьи извне (входящие ребра) и соединяющих 2 каких-то атома семьи (внутренние ребра). Оговорим, что $[-1/2] = -1$.

$$n = \sum_i \Theta_i, \quad \Theta_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}, & \text{где } e_i \text{ — выходящее ребро} \\ \begin{bmatrix} d_i \\ -b_i \end{bmatrix}, & \text{где } e_i \text{ — входящее ребро} \\ \begin{bmatrix} -c_i \\ a_i \end{bmatrix}, & \text{где } e_i \text{ — внутреннее ребро} \end{cases}$$

4.3.1 Классы эквивалентности связных компонент данных молекул с точность до ориентации

В качестве направления выберем направление роста дополнительного интеграла K .

Метка r ставится на ребре молекулы. Она соответствует выражению λ -цикла допустимой системы координат на верхнем атоме семейства через допустимый базис на нижнем. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ метка r равна:

$$r = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta \neq 0 \\ \infty & \text{если } \beta = 0 \end{cases}$$

Ребро с бесконечной r -меткой называют бесконечным. В таком случае λ -циклы оказываются гомологичны.

Метка ε также ставится на ребре молекулы. Она связана с ориентацией выражению λ -цикла допустимой системы координат на верхнем атоме семейства через допустимый базис на нижнем. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ метка r равна:

$$r = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta \neq 0 \\ \infty & \text{если } \beta = 0 \end{cases}$$

Прежде были вычислены все типы меченых молекул 1–32 слоений Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q_{a,b,h}^3$ при регулярных (a, b, h) , лежащих в одной из трехмерных подобластей.

Теорема 11. *В системе Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ встречается в точности:*

29 попарно не лиувиллево эквивалентных слоений Лиувилля на регулярных изоэнергетических поверхностях $Q_{a,b,h}^3$. Меченые молекулы 1 и 11, 2 и 9 могут быть преобразованы друг в друга сменой ориентации, 12 и 15 — заменой направления дополнительного интеграла.

27 попарно не лиувиллево эквивалентных слоений Лиувилля на связных компонентах регулярных изоэнергетических поверхностях $Q_{a,b,h}^3$: связные компоненты следующих меченых молекул могут быть преобразованы друг в друга: (1, 7, 11), (13, 31).

Отметим, что если на всех $M_{a,b}^4$ единообразно задана ориентация, то все 32 молекулы являются различными.

4.4 Лиувиллева эквивалентность с другими интегрируемыми системами

В данном пункте укажем, какие системы имеют слоения на своих изоэнергетических многообразиях, лиувиллево эквивалентные каким-то слоениям нашей системы. Напомним, что под лиувиллевой эквивалентностью мы понимаем послойный гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию критических окружностей. Теорема Фоменко-Цишанга утверждает, что совпадение дискретных инвариантов равносильно такой эквивалентности. При соответствующем гомеоморфизме у двух эквивалентных систем совпадут замыкания решений.

В сформулированной ниже теореме сравним интегрируемый случай Ковалевской с другими интегрируемыми системами, исследованными ранее: в работе А.В. Болсинова, П. Рихтера и А.Т. Фоменко [2] — классический случай Ковалевской, в работах П.В. Морозова — случай Клебша [6] и случай Соколова [7], случай Ковалевской-Яхьи — в работах П.В. Морозова [8] и Н.С. Славиной [9], с системами интегрируемых билиардов, изучаемых В.В. Фокичевой [11]. Укажем, на каких уровнях энергии данные системы лиувиллево эквивалентны. В замечании 21 качественно опишем, как именно расположены в пространстве параметров множества точек с эквивалентными слоениями. Скажем, какие именно по сложности слоения допускают эквивалентность. Обозначение "(0)" в теореме указывает, что рассматривается лишь связная компонента соответствующей изоэнергетической поверхности, а не вся поверхность.

Теорема 12. *Слоения Лиувилля на регулярных $Q_{a,b,h}^3$ случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ лиувиллево эквивалентны слоениям Лиувилля других интегрируемых систем:*

1) Слоения A, ..., J классического случая Ковалевской лиувиллево эквивалентны слоениям нашей системы 1, 16, 3, 4, 19, 32, 29, 24, 28, 22 соответственно.

2) Случай Ковалевской–Яхьи при $\lambda = 0$ превращается в классический случай Ковалевской. Слоения 10, 23, 18, новые в сравнении с ним, лиувиллево эквивалентны слоениям Лиувилля $27(0)$, $27(0)$ и 2 в случае Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$.

3) Слоения 1, 2, 6, 7 в случае Клебша лиувиллево эквивалентны слоениям Лиувилля 1, 2, 12, 13 системы Ковалевской на $so(4)$.

4) Слоения $A, B(0), F$ в случае Соколова лиувиллево эквивалентны слоениям Лиувилля 1, 2, 4 системы Ковалевской на $so(4)$.

5) Интегрируемые бильярды в областях A'_0, A_2, A_1, A_0 моделируют слоения Лиувилля 1, 2, 6, 10 системы Ковалевской на $so(4)$.

Замыкания решений системы Ковалевской на $so(4)$ на описанных выше уровнях энергии могут быть переведены послойным гомеоморфизмом в замыкания решений указанных выше систем на некоторых уровнях энергии.

Замечание 21. 1) Вопросу вложения классического случая Ковалевской как множества точек пространства параметров $\mathbb{R}^3(c, l, h^0)$ в подмножество пространства параметров $\mathbb{R}^3(u, v, h)$ посвящен отдельный раздел.

2) В случае Клебша встречается 10 попарно неэквивалентных слоений Лиувилля, из которых были промоделированы 4. Они являются только молекулами малой энергии. Сложные, уникальные для данной системы слоения не имеют эквивалентных в случае Ковалевской на $so(4)$.

3) В случае Соколова имеется 9 попарно неэквивалентных слоений, из которых три лиувиллево эквивалентны найденным нами слоениям. Слоения случая Ковалевской эквивалентны зонам энергий и одной из сложных молекул той системы: F . Найдены эквивалентности для трети встречающихся в случае Соколова слоений Лиувилля.

4) В найденных нами меченых молекулах типа 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29 имеется симметрия между двумя подмножествами графа, остающимися связными после удаления из молекулы седлового атома B с наибольшим значением уровня k и выходящего из него в направлении роста k ребра с атомом A . В случае Ковалевской–Яхьи есть много молекул с нарушением такой симметрии

5) Для моделирования систем бильярдами можно выбирать не только столы из списка выше. Многие обобщенные бильiardные столы задают эквивалентные слоения Лиувилля.

4.4.1 Вложение случая классического случая Ковалевской

В бифуркационных диаграммах классического случая Ковалевской (когда $\varkappa = 0$) нет аналога для правой параболы и дуги $z_2 - z_1$ из бифуркационным диаграмм для случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ (когда $\varkappa > 0$). Из классификации слоений Лиувилля каждой из двух систем установлено, что все меченые молекулы классического случая реализуются и в случае $\varkappa > 0$. Значит, каждой регулярной тройке параметров классического случая (c, l, h^0) , где $c > 0, l > 0$, можно поставить в соответствие регулярную в случае алгебры Ли $so(4)$ тройку значений (u, v, h) так, что их меченые молекулы совпадут, а все дуги бифуркационной диаграммы для $M_{u,v}^4$, пересекаемые образом $Q_{u,v,h}^3$ при отображении момента, будут являться аналогами дуг, пересекаемых образом $Q^3(c, l, h^0)$. Возникает вопрос: можно ли построить гладкое отображение, переводящее все регулярные тройки (c, l, h^0) в регулярные тройки (u, v, h) с лиувиллево эквивалентными слоениями, особые тройки — в особые, с сохранением структуры особого множества? Ответ положительный.

Рассмотрим два множества в пространствах параметров. Первое — множество $\mathbb{B}_{e(3)}$ содержательных троек классического случая Ковалевской с положительной постоянной площадью: $\mathbb{B}_{e(3)} = (c, L, h^0) | c > 0, l > 0, (c, l, h^0)$ содержательная. Второе — множество $\mathbb{B}_{so(4)}$ содержательных троек случая Ковалевской на $so(4)$ с более сложным условием: $\mathbb{B}_{so(4)} = \{(u, v, h) | v > f_7(u) = \frac{2u^{3/2}}{\sqrt{u} - \tan u}, u > \tau^2, h(-l)(u, v) \leq h < h(-r)(u, v)\}$. Каждой тройке (a, b, h) скэфз Ковалевской ставится в соответствие симметричная ей тройка с таким же слоением. Значит, можно считать, что множество $\mathbb{B}_{so(4)}$, как и $\mathbb{B}_{e(3)}$, тоже имеет симметричный ему набор $(a, -b, h)$ относительно оси.

Набор подобластей для плоскости (u, v) , лежащий выше кривой $v = f_7(u), u > \tau^2$, содержит 6 подобластей I.8, II.15, II.9, III.6, IV.5. Если для каждой точки u, v оттуда выбрать полуинтервал

значений $h \in [h(-l)(u, v), h(-r)(u, v)]$, то мы получим в точности тот же набор графов и набор меченых молекул, что и для подобластей 0.I, 0.II.1, 0.II.2, 0.III, 0.IV соответственно. Вообще, на кривой $v = f_7(u)$ достигается равенство $h(lt) = h(-r)$. Потому все выбранные тройки в $\mathbb{B}_{so(4)}$ будут содержательными, и ни одна другая содержательная тройка (u, v, h) при таких u, v не будет соответствовать какой-либо тройке из классического случая. Опишем гладкое отображение с затребованными выше свойствами.

Теорема 13. *Классический случай Ковалевской при положительной постоянной площадей $l > 0$ можно диффеоморфно на образ вложить в описанном ниже смысле в случай Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$. Образ вложения в некотором смысле единственен.*

1 Существует диффеоморфизм Φ со свойствами а-г:

$$\Phi : \mathbb{B}_{e(3)}(c, l, h^0) \rightarrow \mathbb{B}_{so(4)}(u, v, h), \quad \Phi = (\varphi(c, l), \psi(c, l, h^0))$$

1. он переводит содержательные тройки в содержательные:

Φ определен на всех (c, l, h^0) с положительным l , которые являются содержательными при $\varkappa = 0$, и его образ — подмножество содержательных троек (u, v, h) при $\varkappa > 0$.

2. он переводит регулярные тройки в регулярные и сохраняет тип слоения:

если Q_{c,l,h^0}^3 регулярно для $\varkappa = 0$, то $Q_{\Phi(c,l,h^0)}^3$ тоже регулярно для $\varkappa > 0$, и слоения на них ливиллево эквивалентны.

3. он переводит $M_{c,l}^4$ в $M_{u,v}^4$ с тем же направлением роста величины h :

образ множества точек вида $(c, l, *^0)$ лежит в множестве $(\varphi(c, l), *)$, т.е. $(u, v) = \varphi(c, l)$. Если $h_1^0 < h_2^0$, то $\psi(c, l, h_1^0) < \psi(c, l, h_2^0)$.

4. он переводит особые при $\varkappa = 0$ тройки в особые при $\varkappa > 0$ тройки и сохраняет структуру полиэдра в особом множестве:

Это значит, что сохраняется тип окрестности особой точки в особом множестве (внутренняя точка грани, внутренняя точка ребра или вершина комплекса особых троек) и типы регулярных Q^3 , близких к разным клеткам этого комплекса в этой точке.

2 Подмножество всех (u, v, h) , в которое возможно такое вложение — единственно:

1. отсутствует другой набор подобластей, не содержащийся в описанном выше с тем же свойством.

2. вложение в собственное подмножество $\mathbb{B}_{so(4)}(u, v, h)$ может быть гладко продеформировано до гладкого вложения во все $\mathbb{B}_{so(4)}(u, v, h)$ с теми же свойствами.

Доказательство. Доказательство неполное

пункт 2а: на кривой $v = f_7(u)$ достигается равенство $h(lt) = h(-r)$. Выше кривой $h(lt) < h(-r)$. Абсциссы остальных старых точек $-l, cusp, +l, rootr, rootl, h_l$ будут не больше, чем абсцисса точки lt .

Поскольку ниже кривой точка lt оказывается правее точки $-r$, то изоэнергетические поверхности, проходящие близко к точке lt , пересекают правую параболу, и потому не имеют аналога в классическом случае. пункт 2б: Прообраз Φ открыт. Ребра и грани особого множества в замыкании $\mathbb{B}_{so(4)}$ могут иметь граничные вершины или вершины и ребра на вложенной в трехмерное пространство границе $\partial\mathbb{B}_{so(4)} \subset \mathbb{R}^3(u, v, h)$. Значит, все вершины, ребра и грани, не выходящие на границу, обязаны содержаться в образе Φ (он сохраняет структуру), и во всех ребрах, гранях и трехмерных камерах регулярных $Q_{u,v,h}^3$ обязаны содержаться точки образа. Образ связного при непрерывном отображении связан, значит, образ изоморфен $\mathbb{B}_{so(4)}$ как клеточный комплекс. Следовательно, существует деформация на весь $\mathbb{B}_{so(4)}$.

пункт 1:

2-комплекс особых троек (c, l, h^0) и (u, v, h) в множествах $\mathbb{B}_{e(3)}$ и $\mathbb{B}_{so(4)}$ не содержит вершин. Он состоит из 5 ребер (соответствующих разделению на подобласти) и одинакового для двух данных случаев числа граней в \mathbb{R}^3 над каждой из плоских подобластей — изоморфной при отображении φ комбинаторной структурой.

1) $\Phi(c, l, h^0) = (u, v, \dots)$, т.е. образ параллельной Oh^0 прямой лежит на параллельной Oh прямой. Отображение φ переводит гиперболу $c = k_1/l$ в кривую $v = f_7(u) + k_1$, полученную из граничной кривой сдвигом на k_1 в направлении оси Ov .

2) Для конкретной пары c, l после явного вычисления абсцисс особых точек h_i^0 особых изоэнергетических поверхностей становится возможным вычислить, в точку с каким значением h переходит каждая из точек h^0 .

Для сглаживания по направлению h можно использовать функции вида $e^{-\frac{1}{(h^0)^2}}$, kh^0 , $e^{-\frac{1}{(1-h^0)^2}}$.

Поскольку $v = f_7(u)$ имеет линейный порядок роста при больших u и порядок $1/u$ вблизи $u = \tau^2$, то разделяющие кривые, пересекающие f_7 , пересекут каждую из кривых $v = f_7(u) + k_2$ трансверсально и один раз. При описанном выше отображении особые тройки (c, l, h) перейдут в особые тройки (u, v, h) с такими же особенностями в Q^3 .

□

x

1. $\alpha_1 - \gamma_1$
2. $\alpha_1 - \gamma_3 = \frac{\gamma_1}{\gamma_4}$
3. $2(\delta_1 -) = \beta_1 - \gamma_3 = \frac{\gamma_1}{\gamma_4}$
4. $2(\delta_1 - \gamma_2 -) = \beta_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_4}$
5. $2(\delta_1 - \gamma_2 -) = \beta_2 = \frac{\beta_1}{\beta_4}$
- (x2) 6. $2(\delta_1 - \gamma_2 - \beta_2)$
- (x2) 7. $2(\delta_1 - \beta_3)$
8. $2(\delta_1 -) = \beta_1 - \gamma_3 = \frac{\beta_1}{\beta_4}$

x1

9. $\alpha_1 - \gamma_3 = \frac{\beta_1}{\beta_4}$
10. $2(\delta_1 -) = \beta_1 - \beta_5$
11. $\alpha_1 - \beta_5$

x

12. $\alpha_1 - \gamma_3 = \frac{\gamma_4}{\beta_1}$
13. $\alpha_1 - \beta_1$

vii

14. $2(\delta_1 -) = \beta_1 - \gamma_3 = \frac{\gamma_4}{\beta_1}$

v

15. $2(\delta_1 -) = \beta_1 - \beta_1$
16. $2(\delta_1 -) = \beta_1 - \gamma_1$
17. $2(\delta_1 - \gamma_2 -) = \beta_2 = \frac{\gamma_4}{\beta_1}$

iv

18. $2(\delta_1 - \gamma_2 -) = \gamma_5 - \beta_1$
19. $2(\delta_1 - \gamma_2 -) = \gamma_5 - \gamma_1$

20. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \gamma_6 -) = \beta_1 - \beta_1$
21. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \beta_3 -) = \gamma_5 - \beta_1$
- (x2) 22. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \beta_3 - \beta_2)$
23. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \gamma_6 -) = \beta_1 - \gamma_1$
24. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \beta_3 -) = \gamma_5 - \gamma_1$
- vii 25. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \gamma_6 -) = \beta_1 - \beta_1$
26. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \beta_3 -) = \gamma_5 - \beta_1$
- (x2) 27. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \beta_3 - \beta_2)$
28. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \gamma_6 -) = \beta_1 - \gamma_1$
- v 29. $2(\frac{\delta_1}{\gamma_2} - \beta_3 -) = \gamma_5 - \gamma_1$
30. $2(\alpha_2 -) = \gamma_5 - \beta_1$
- (x2) 31. $2(\alpha_2 - \beta_2)$
32. $2(\alpha_2 -) = \gamma_5 - \gamma_1$

Таблица 16: Графы изоэнергетических поверхностей и дуги бифуркационной диаграммы

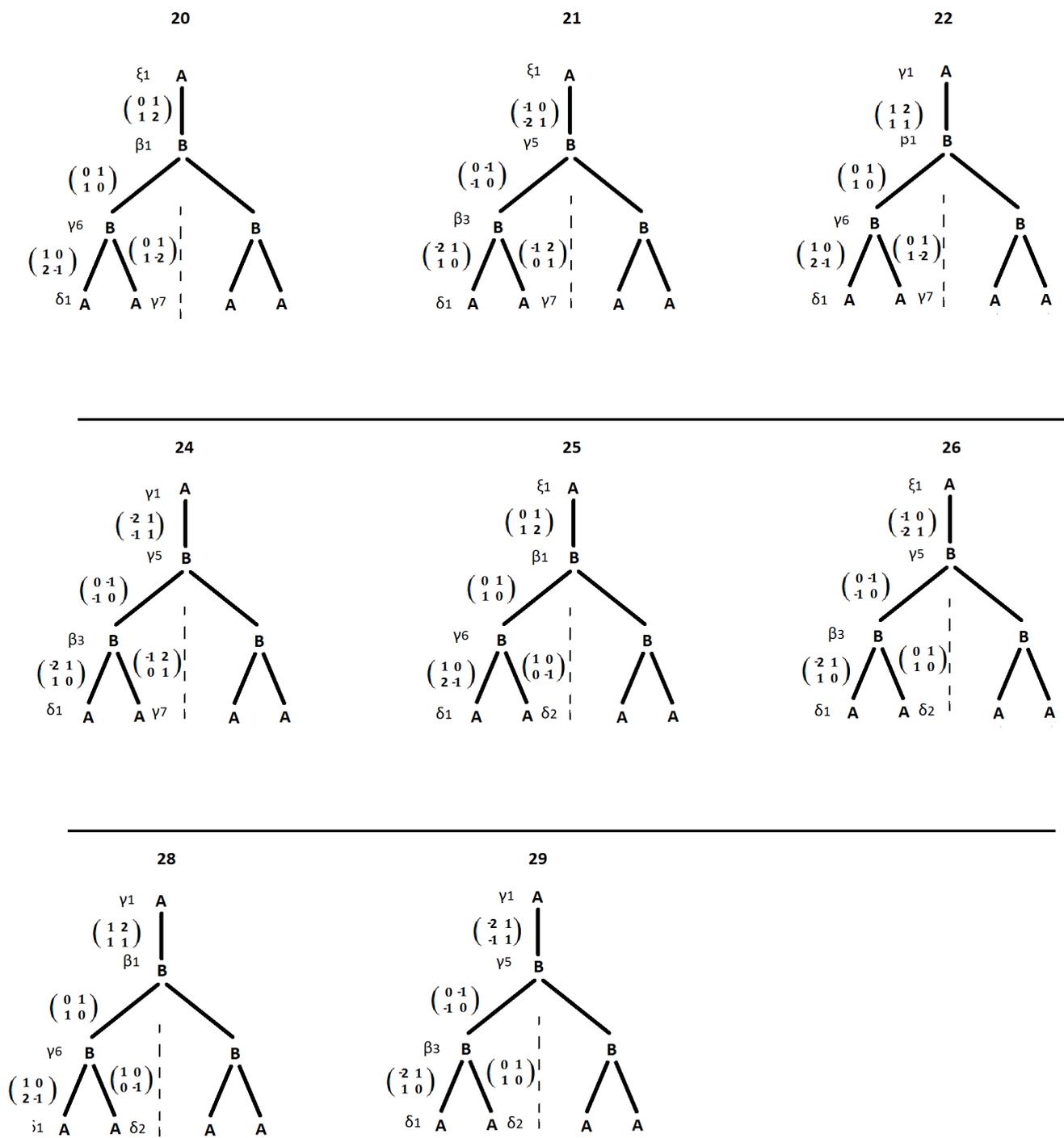


Таблица 17: Список молекул с матрицами склейки. Часть 1

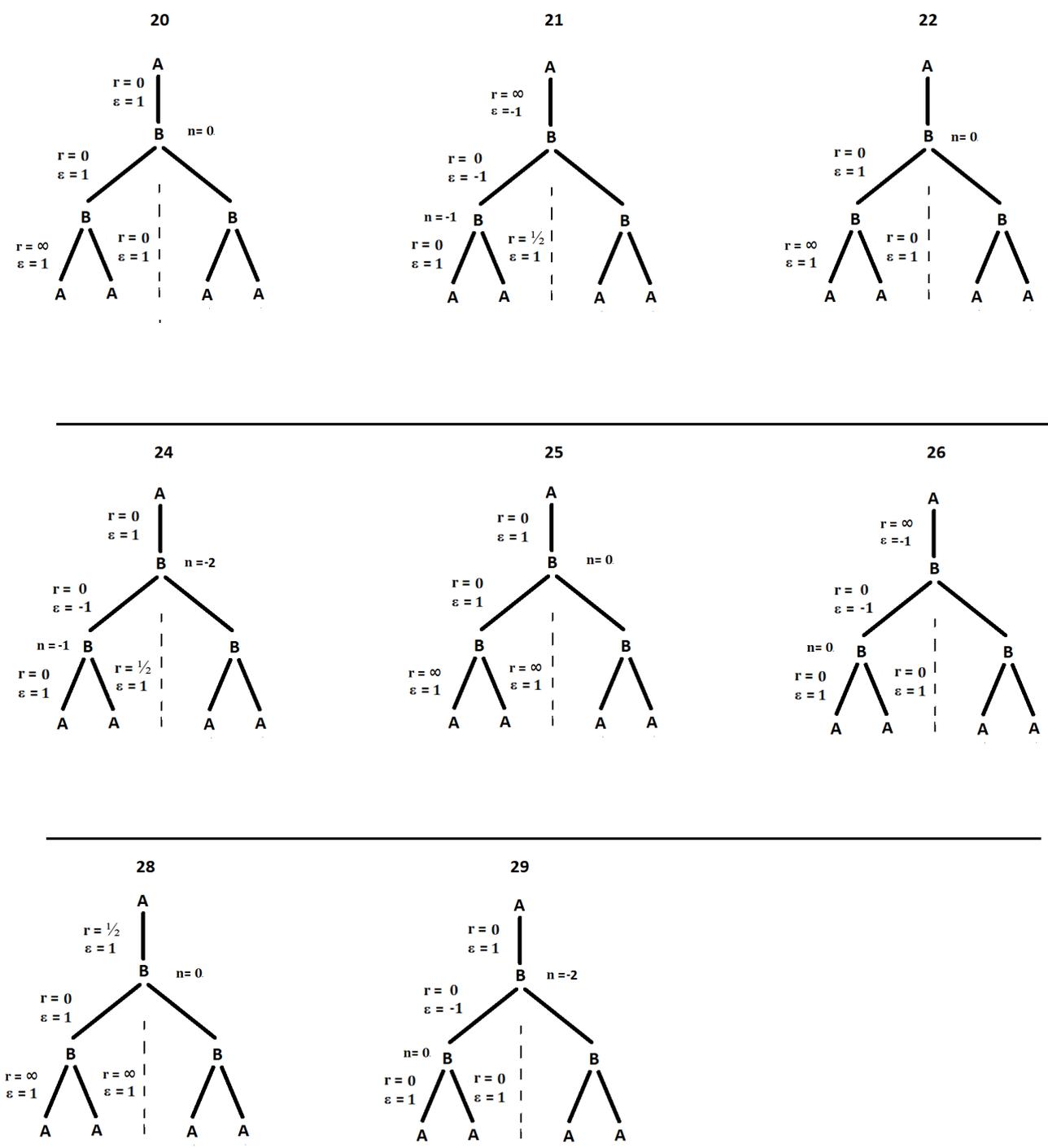


Таблица 19: Список меченых молекул. Часть 1

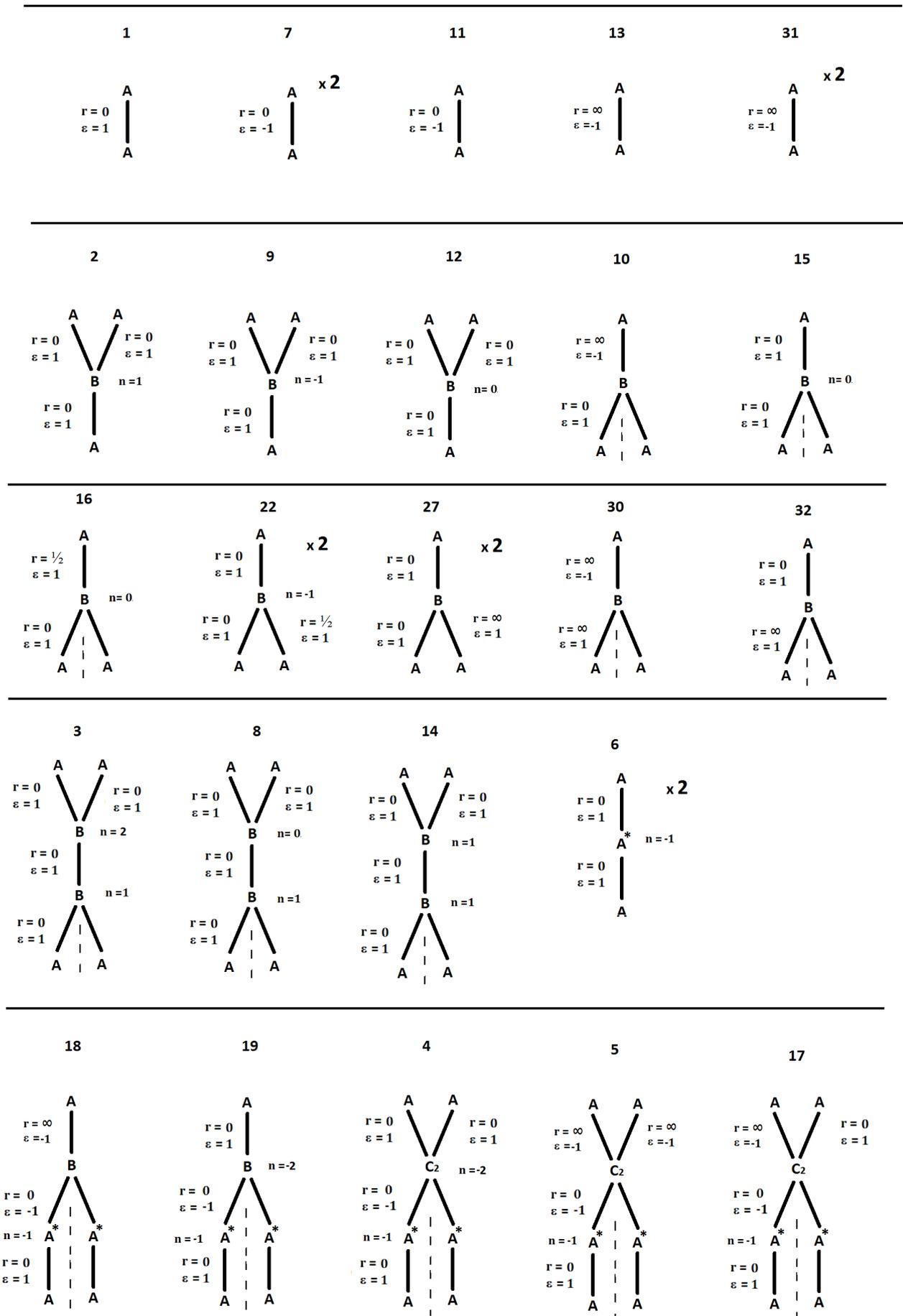


Таблица 20: Список меченых молекул. Часть 2

5 Множество особых троек (a, b, h) как полиэдр (будет дописано)

Было доказано, что регулярные $Q_{a,b,h}^3$ описываются 32 разными мечеными молекулами (часть из которых может быть переведена друг в друга заменой ориентации на многообразии или направления роста K). Множество троек со слоениями каждого из этих типов является конечным объединением связных открытых множеств. Будем называть камерами их связные компоненты. 11 камер имеют общие точки с множеством $b = 0$. Оставшееся 21 множество являются парами симметричных относительно $b = 0$ камер. Обозначим их $12, \dots, 32, 12', \dots, 32'$. На приведенном ниже графе они будут пронумерованы как $33, \dots, 53$. Номер 54 соответствует "пустому" слоению. Он указывает, что замыкание данной камеры содержит двумерную границу множества содержательных троек (a, b, h) .

Введем в множестве содержательных троек (a, b, h) структуру клеточного комплекса. Трехмерными клетками назовем камеры с регулярными тройками, 2-остов этого комплекса будет являться объединением всех троек $Q_{a,b,h}^3$ с особыми поверхностями или троек, каждая окрестность содержит особые тройки или регулярные тройки с различными слоениями. Будет показано, что два последних случая не реализуются.

Точки, все малые окрестности которых в 2-остове являются дисками, образуют 2-границы (максимальные по включению связные подмножества 2-остова с таким свойством), все остальные — 1-остов. Он является графом. Открытые ребра графа будут называться одномерными ребрами комплекса, вершины графа — его вершинами.

Общая схема:

- 1) построим матрицу инцидентности между двумерными гранями и трехмерными камерами.
- 2) найдем все одномерные ребра — они проецируются на разделяющее множество в плоскости (a, b)
- 3) определим, в каких точках они пересекаются (ответ — в одной из точек трехмерного пространства, висящих над тройной точкой плоскости)
- 4) ребро зададим парой его концов.
- 5) каждому ребру поставим в соответствие некую диаграмму его малого трансверсального сечения. Там указаны грани, пересекающиеся по этому ребру и трехмерные камеры. в чьей границе лежит это ребро.

Эта информация полностью описывает структуру пространства $\mathbb{R}_{a,b,h}^3$.

5.1 Двумерные грани и трехмерные камеры

Приведем для каждой из областей I-IX список двумерных граней, разделяющих камеры и проецирующиеся на данную область. Двумерных граней, содержащих при фиксированном a, b целый интервал значений h во внутренних точках множества \hat{D} нет. Пока что рассмотрим множество $b > 0$. Каждая грань там однозначно характеризуется тремя символами — номер камеры, расположенной ниже по переменной h , номер камеры, расположенной выше по переменной h и название особой точки y_1, \dots, z_{11} .

Двумерной гранью назовем максимальную по включению гладкую связную двумерную поверхность в множестве особых $Q_{a,b,h}^3$. Если где-то есть пересечение двух

- 1) На промежутки X-XII проектируются некоторые сечения некоторых камер (1, ..., 11) и некоторые ребра особых $a, 0, h$. Опишем их:

Множество X:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{2,3}, y_3^{3,4}, y_4^{8,5}, y_4^{1,2}, z_1^{7,\circ}, z_2^{6,7}, z_5^{5,6}, z_7^{3,8}, z_7^{4,5}$$

Множество XI:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{9,8}, y_2^{11,10}, y_4^{1,2}, z_1^{7,\circ}, z_7^{2,9}, z_8^{8,10}, z_8^{9,11}, z_{10}^{10,7}$$

Множество XII:

$$y_1^{\circ,1}, y_4^{1,2}, z_7^{2,9}, z_8^{9,11}, z_9^{11,\circ}$$

Следующие объекты из этих списков являются одномерными ребрами, а не двумерными камерами:

$$y_4^{1,2}, z_7^{2,9}, z_7^{3,8}, z_7^{4,5}$$

2) Ниже опишем двумерные грани, которые проецируются на множества IX-I. Здесь все указанные разделяющие элементы будут именно двумерными гранями.

Область IX:

$$y_1^{\circ,1}, y_6^{1,2}, y_6^{13,12}, z_4^{1,13}, z_4^{2,12}, z_6^{12,9}, z_8^{9,11}, z_9^{11,\circ}$$

Область VIII:

$$y_1^{\circ,1}, z_4^{1,13}, z_9^{11,\circ}, z_{11}^{13,11}$$

Область VII:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{9,8}, y_2^{11,10}, y_2^{12,14}, y_2^{13,15}, y_6^{1,2}, y_6^{13,12}, y_6^{15,14}, z_1^{7,\circ}, z_4^{1,13}, z_4^{2,12}, z_6^{12,9}, z_6^{14,8}, z_8^{8,10}, z_8^{9,11}, z_{10}^{10,7}$$

Область VI:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{11,10}, y_2^{13,15}, z_1^{7,\circ}, z_4^{1,13}, z_{10}^{10,7}, z_{11}^{13,11}, z_{11}^{15,10}$$

Область V:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{1,16}, y_2^{2,3}, y_2^{12,14}, y_2^{13,15}, y_3^{3,4}, y_3^{8,5}, y_3^{14,17}, y_6^{1,2}, y_6^{13,12}, y_6^{15,14}, y_6^{16,3}, z_1^{7,\circ}, z_2^{6,7}, z_4^{1,13}, z_4^{2,12}, z_4^{3,14}, z_4^{4,17}, z_4^{16,15}, z_5^{5,6}, z_6^{14,8}, z_6^{17,5}$$

Область IV:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{1,16}, y_2^{13,15}, y_3^{3,4}, y_3^{14,17}, y_5^{4,19}, y_5^{17,18}, y_6^{15,14}, y_6^{16,3}, z_1^{7,\circ}, z_2^{6,7}, z_3^{18,6}, z_4^{1,13}, z_4^{3,14}, z_4^{4,17}, z_4^{16,15}, z_4^{19,18}$$

Область III:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{1,16}, y_2^{13,15}, y_7^{20,21}, y_7^{23,24}, y_8^{21,18}, y_8^{22,6}, y_8^{24,19}, y_9^{15,20}, y_9^{16,23}, z_1^{7,\circ}, z_2^{6,7}, z_3^{18,6}, z_3^{21,22}, z_4^{1,13}, z_4^{16,15}, z_4^{19,18}, z_4^{23,20}, z_4^{24,21}$$

Область II:

$$y_1^{\circ,1}, y_2^{1,16}, y_2^{13,15}, y_7^{20,21}, y_7^{23,24}, y_7^{25,26}, y_7^{28,29}, y_8^{21,18}, y_8^{22,6}, y_8^{24,19}, y_{10}^{25,20}, y_{10}^{26,21}, y_{10}^{27,22}, y_{10}^{28,23}, y_{10}^{29,24}, y_{10}^{15,25}, y_{10}^{16,28}, z_1^{7,\circ}, z_2^{6,7}, z_3^{18,6}, z_3^{21,22}, z_3^{26,27}, z_4^{1,13}, z_4^{16,15}, z_4^{19,18}, z_4^{23,20}, z_4^{24,21}, z_4^{28,25}, z_4^{29,26}$$

Область I:

$$y_1^{\circ,1}, y_8^{21,18}, y_8^{22,6}, y_8^{24,19}, y_{10}^{26,21}, y_{10}^{27,22}, y_{10}^{29,24}, y_{12}^{1,32}, y_{12}^{13,30}, y_{13}^{30,26}, y_{13}^{31,27}, y_{13}^{32,29}, z_1^{7,\circ}, z_2^{6,7}, z_3^{18,6}, z_3^{21,22}, z_3^{26,27}, z_3^{30,31}, z_4^{1,13}, z_4^{19,18}, z_4^{24,21}, z_4^{29,26}, z_4^{32,30}$$

5.1.1 Грани и ребра над множеством $v = u$

Вертикальные грани при $v = u$: при таких значениях функций Казимира две параболы, на которых лежат дуги бифуркационной диаграммы, совпадут, будут склеиваться прообразы особых точек $(-r$ и $-l)$, $(+r$ и $+l)$, группы (rt, lt, h_l, z_1) . При $0 < u < \tau^2$ над всем отрезком прямой имеем одну двумерную вертикальную грань, с которой граничит камера 13 области VIII и два одномерных горизонтальных (т.е. лежащих "вдоль" этой границы \hat{D}) отрезка, соответствующие совпадению $(-r$ и $-l)$ и $(+r$ и $+l)$. Над точкой $u = 0, v = 0$ их конец совпадают. Над точкой $(u, v) = (\tau^2, \tau^2)$ из конце отрезка $(+r$ и $+l)$ выходит два луча: $(+r$ и $+l)$ и (rt, lt, h_l, z_1) . Двумерная грань, лежащая в границе камеры 13, продолжается дальше, появляется еще одна грань, лежащая в границе камеры 31.

Двумерные грани обозначим единообразно, $g_1^{13,\circ}, g_2^{31,\circ}$. Одномерные ребра — 0.1 для $(-r$ и $-l)$, 0.2 для $(+r$ и $+l)$ при $u \in (0, \tau^2)$, 0.3 для $(+r$ и $+l)$ при $u \in (\tau^2, \infty)$ и 0.4 для (rt, lt, h_l, z_1) при $u \in (\tau^2, \infty)$.

Матрица инцидентности для элементов множества $u = v$:

грань	камера	ребра	вершины
$g_1^{13,\circ}$	13	0.1, 0.2, 0.3	0, 2
$g_2^{31,\circ}$	31	0.3, 0.4	2

ребро	грани	камеры	вершины
0.1	$g_1^{13,\circ}, y_1^{\circ,1}, z_4^{1,13}$	1, 13	0, ∞
0.2	$g_1^{13,\circ}, z_{11}^{13,11}, z_9^{11,\circ}$	13, 11	0, 2
0.3	$g_1^{13,\circ}, g_2^{13,\circ}, y_{12}^{13,30}, z_3^{30,31}$	13, 30, 31	2, ∞
0.4	$g_2^{13,\circ}, y_{13}^{31,27}, y_{10}^{27,22}, y_8^{22,6}, z_2^{6,7}, z_1^{7,\circ}$	31, 27, 22, 6, 7	2, ∞

Следствие 2. Двумерные открытые грани границы множества содержательных точек инцидентны только областям с грубой молекулой $A - A$.

Утверждение 15. В данной системе при $b \geq 0$ имеется существует ровно $13 + (64 - 13 + 2) * 2 = 119$ двумерных граней.

Грани $y_1^{\ominus,1}, y_2^{2,3}, y_2^{9,8}, y_2^{11,10}, y_3^{3,4}, y_3^{8,5}, z_1^{7,\ominus}, z_2^{6,7}, z_5^{5,6}, z_8^{8,10}, z_8^{9,11}, z_9^{11,\ominus}, z_{10}^{10,7}$ трансверсально пересекают плоскость $b = 0$ и лежат по обе стороны от нее.

Остальные грани образуют 53 пары симметричных относительно плоскости $b = 0$ граней, все точки которых имеют или положительную координату u , или отрицательную. Они или не имеют общих точек с плоскостью $b = 0$, или имеют одну общее одномерное ребро, лежащее в плоскости, или одну общую точку $(0, 0, 0)$.

Зная грани, пишем матрицу инцидентности 2-граней и 3-камер. И рисуем комплекс (в программе Wolfram mathematica)

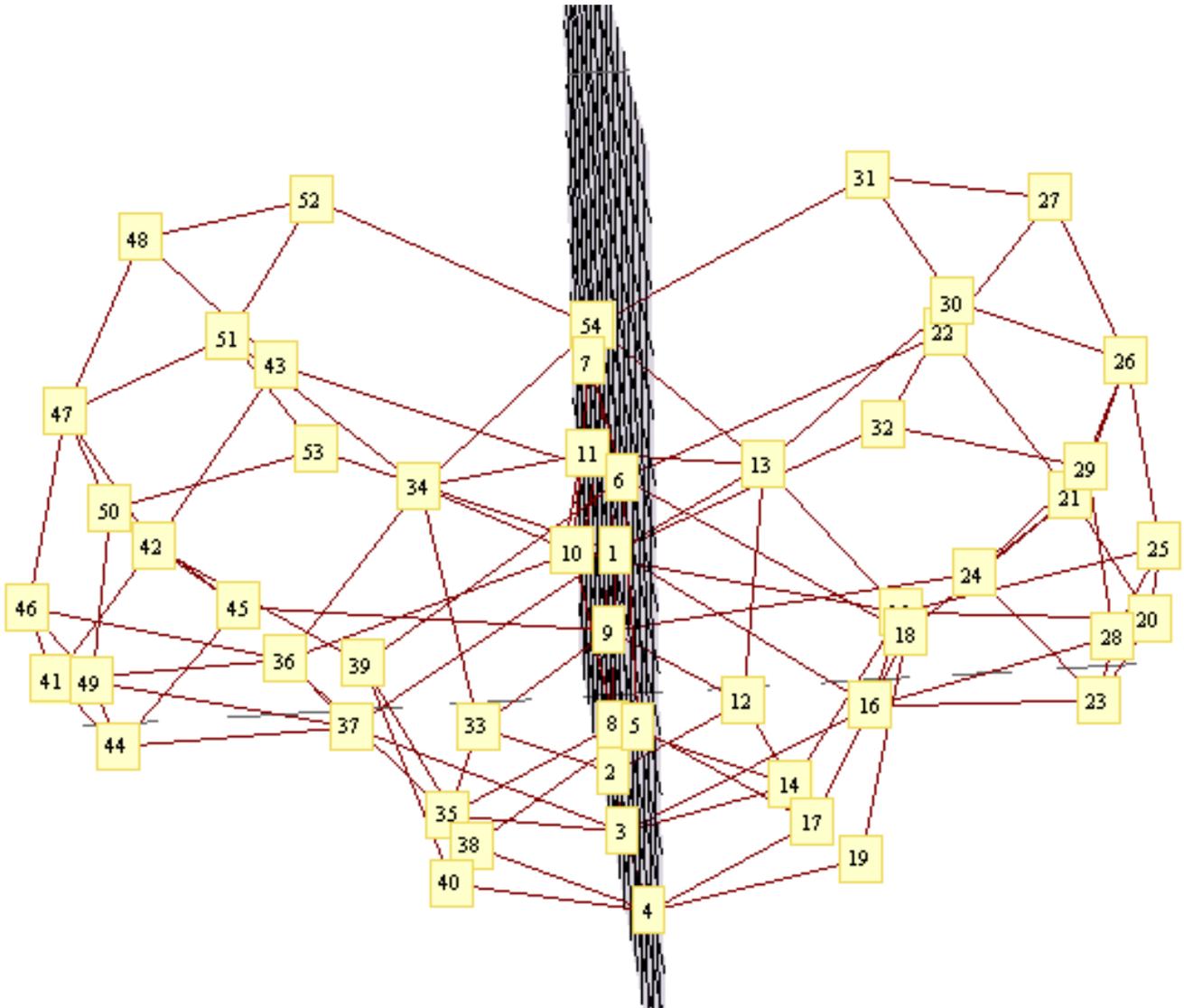


Рис. 40: Граф соседства 3-камер

5.2 Одномерный остов комплекса

Рассмотрим разделяющее множество на плоскости b, a как плоский граф. Сначала рассмотрим случаем $v > u \geq 0$. Пронумеруем вершины и ребра графа. Ребра были пронумерованы по ходу движения по кривым, входящим в разделяющее множество. Каждое открытое ребро соответствует какой-то

бифуркации или совпадению абсцисс двух особых точек бифуркационной диаграммы. Из приведенного выше списка перестроек видим, то при $u > 0$ и $v > 0$ в каждую простую точку разделяющего множества проецируется строго одна точка ребра 1-остова, а в точку пересечения кривых разделяющего множества плоскости (a, b) проецируется или строго одна вершина комплекса, или строго две простые точки 1-остова. В случае $u = 0$ таких точек может быть две: *cusp*, прообраз которого склеивается с прообразом внутренней точки дуги бифуркационной диаграммы, и точка z_7 , в которую попадает две особые точки $-r$ и $+r$. Структура множества (u, v, h) была описана прежде.

Построим для каждого такого одномерного ребра чертеж трансверсального сечения его малой окрестности в пространстве u, v, h . Подпишем там номера камер и названия особых точек, которым соответствуют пересекающиеся или касающиеся замыкания граней.

Тем самым видим, что вершинами комплекса могут являться являются только по одной точке из прообраза точек 0,4,5,9,12,16,24,26,28,33. Из них точки 0, 4,5,9,16 лежат на оси Ov .

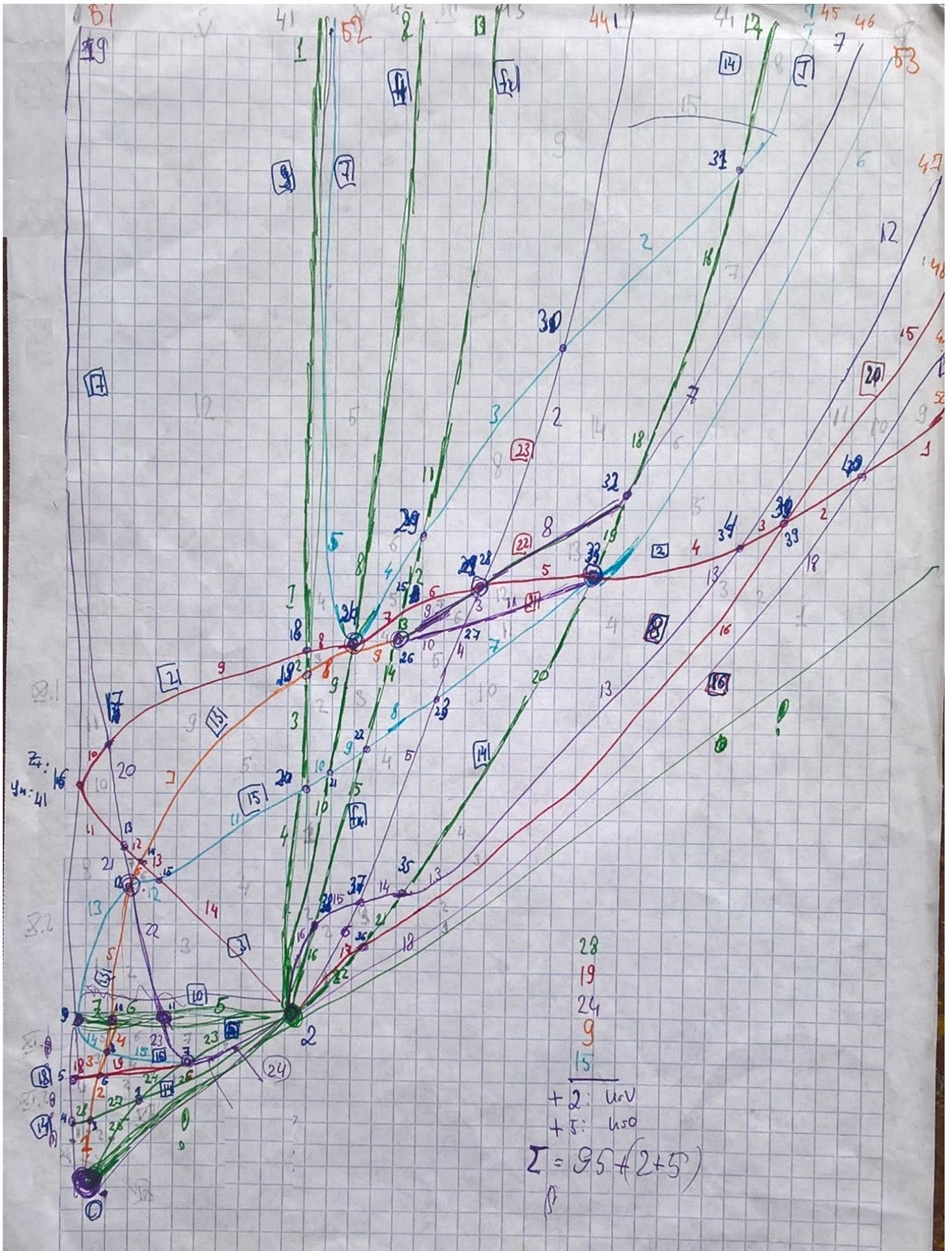


Рис. 41: Проекция ребер и вершин комплекса на плоскость

Зеленые



Рис. 42: Диаграммы окрестностей зеленых ребер



Рис. 44: Диаграммы окрестностей бордовых ребер



Рис. 45: Диаграммы окрестностей голубых ребер

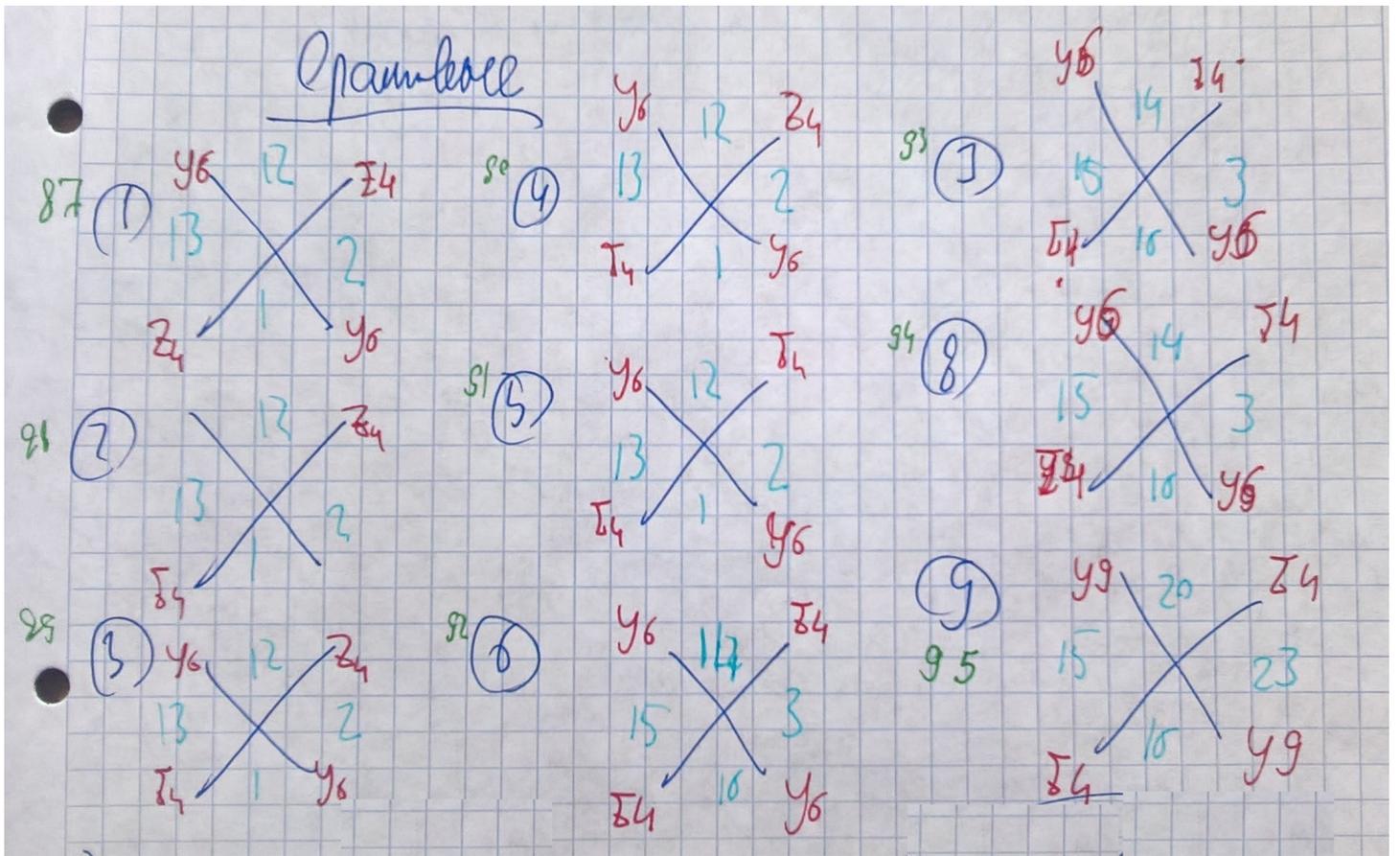


Рис. 46: Диаграммы окрестностей оранжевых ребер

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	Null	
1	0	y6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	0	y2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y12	0	
2	0	0	y2	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	y3	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	y5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	z5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	z2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z1	
8	0	0	0	0	y3	0	0	0	0	z8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	y2	0	z8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	z10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	y2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z9	0
12	0	0	0	0	0	0	0	z6	0	0	0	0	y2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	g	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z11	y6	0	0	y2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y12	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	z6	0	0	0	0	0	0	y3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	z11	0	0	0	y6	0	0	y9	0	0	0	0	0	0	0	0	y11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	y6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y9	0	0	0	y11	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	z6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	z3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Null
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y8	0	0	z3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	y8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z4	0	0	0	y7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y8	0	z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y10	0	0	0	0	0	0	y7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y10	0	0	0	0	0	z3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y10	0	z4	0	0	0	0	y7	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y10	0	z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y13	0	0	0	0	z3	0	g ²	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y13	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y13	z4	0	0	0	0
Null	y1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 47: Трехмерные камеры и особые точки, соответствующие граням

6 Литература

1. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Ижевск, Издат. дом “Удмурт. ун-т” 1999
2. А.В. Болсинов, П.Х. Рихтер, А.Т. Фоменко, Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской, Матем. сб., 2000, том 191, номер 2, 3–42
3. И.К. Козлов, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ ”, Матем. сб., 205:4 (2014), 79–120
4. И.В. Комаров, “Базис Ковалевской для атома водорода”, Теоретическая и математическая физика, 47:1 (1981), 67–72.
5. П.В. Морозов, “Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела”, диссертация, (2006) .
6. П.В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, Матем. сб., 193:10 (2002), 113–138
7. П.В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа”, Матем. сб., 195:3 (2004), 69–114
8. П.В. Морозов, “Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи”, Матем. сб., 198:8 (2007), 59–82
9. Н.С. Славина, “Топологическая классификация систем типа Ковалевской-Яхьи”, Матем. сб., 205:1 (2014), 105–160
10. А.Т. Фоменко “Топологические инварианты гамильтоновых систем интегрируемых по Лиувиллю”, Функциональный анализ и его приложения 4(22) (1988), 38-51
11. В.В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., 206:10 (2015), 127–176
12. А.Т. Fomenko, *The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems*, Advances in Soviet Mathematics. American Math. Soc, **6**, 1–27 (1991).
13. А.Т. Fomenko and А.Yu. Konyaev, *New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems*, Topology and its Applications **159**, 1964–1975 (2012).
14. М.П. Харламов, Бифуркации совместных поверхностей уровня первых интегралов в задаче Ковалевской, Прикл. матем. и мех., 47:6 (1983), 737–743
15. М.П. Харламов, Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела, Л., Изд-во ЛГУ, 1988
16. Г.Г. Аппельрот, Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, М–Л, Изд-во АН СССР, 1940, 61-157
17. Н.Р. Dullin, М. Juhnke, Р. Н. Richter, Action integrals and energy surfaces of the Kovalevskaya top // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg, 4:6 (1994), 1535–1562
18. А.А. Oshemkov. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Topological classification of integrable systems. Adv. Soviet. Math. / ed А.Т.Fomenko. V. 6 Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991, P. 67-146
19. Н.М. Yehia, New integrable cases in dynamics of rigid body // Mech. Res. Com., 3 (13), (1986), 169–172