МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

«Об интегрируемости плоских биллиардов»

Курсовая работа
студента 5 курса
М.А. Ивашковского

Научный руководитель
Доцент, доктор физ.-мат. наук Е.А. Кудрявцева

Москва, 2017 г.

Содержание

Аннотация

Алгебраическая версия знаменитой гипотезы Биркгофа (частично исследованная С.В.Болотиным, А.Е.Мироновым, М.Бялым и в полной мере — А.А.Глуцюком) утверждает, что если биллиард в выпуклой области на плоскости имеет нетривиальный первый интеграл, полиномиально зависящий от вектора скорости (и не выражающийся через модуль скорости), то граница биллиардной области является эллипсом. В работе представлены результаты трех работ: 1) работы С.В.Болотина об алгебраичности границы биллиардного стола; 2) работы М.Бялого и А.Е.Миронова об угловых биллиардах; 3) свежей работы А.А.Глуцюка, со значительным вкладом Е.И.Шустина. Их доказательства используют идеи и методы комплексной теории особенностей и алгебраической геометрии.

1 Угловой биллиард

1.1 Определение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая область, ограниченная простой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ, $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть O — фиксированная точка внутри Γ. Выберем ориентацию на Γ против часовой стрелки. Пусть A — произвольная точка снаружи кривой Γ, т.е. $A \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Из точки A можно провести две касательные к Γ. Выберем правую касательную (если смотреть на Γ из точки A). Пусть T — точка касания. Возможно, что Γ имеет излом в точке T.

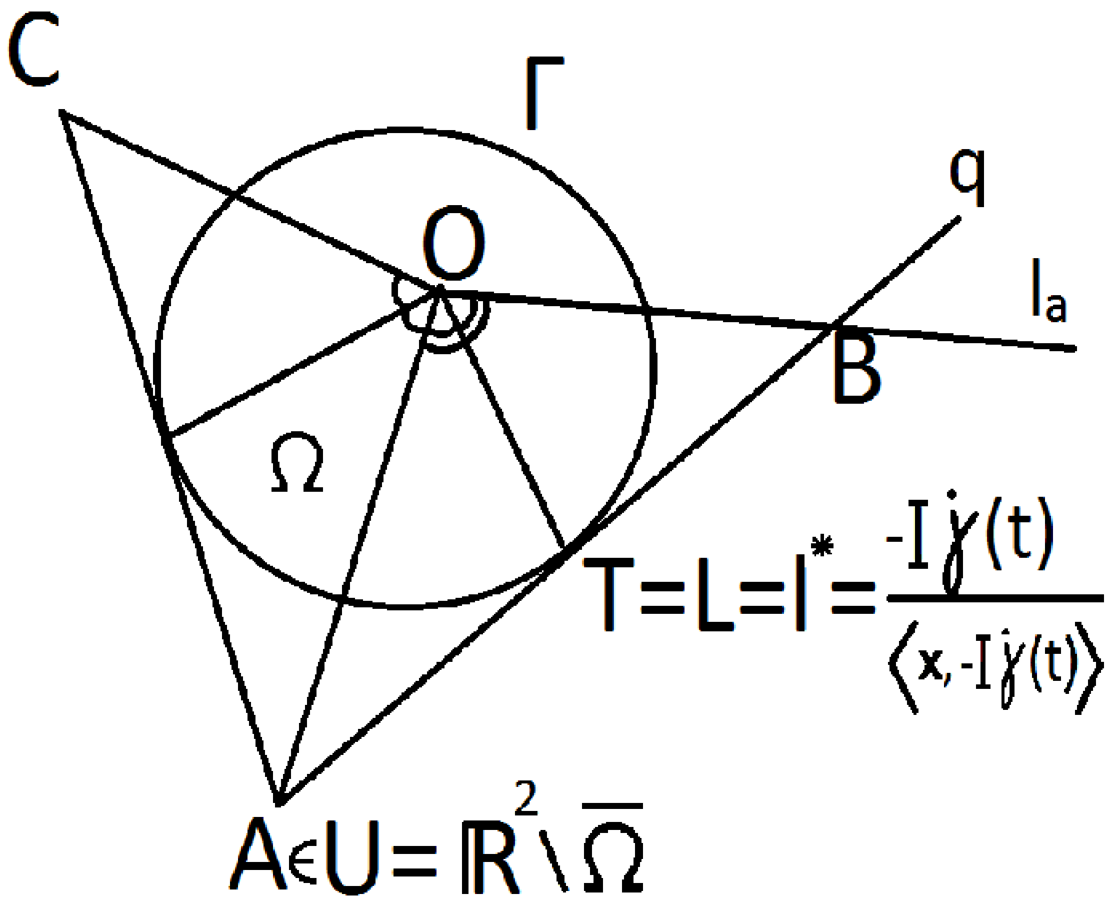

Рис. 1: Угловой биллиард

Существует единственная прямая $l_a \ni O$, такая, что $\angle(OA, OT) = \angle(OT, l_a)$. Если l_a не параллельна AT, то существует точка B пересечения прямой AT и прямой l_a (рис. 1). Пусть $\Sigma \subset U$ — кривая, определяемая таким образом: $\Sigma := \{A \in U : l_a \| AT\}$.

Определение 1 ([1, §1])**.** Отображение $\alpha : U \setminus \Sigma \to U$ такое, что $\alpha(A) = B$, назовем *угловым биллиардом.*

1.2 Двойственность обыкновенному биллиарду

Пусть γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая в евклидовой плоскости, и γ ограничивает выпуклую область $\omega \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma = \partial\omega$. Пусть есть фиксированная точка O внутри γ и евклидовы координаты (x, y) с центром в точке O. Дан касательный вектор $v \in T_Q\omega\setminus\{0\}$ в точке $Q \in \omega$. *Биллиардный поток* g^t параллельно переносит вектор v вдоль прямой линии в направлении v, пока не случится отражение на границе.

Отражение на границе происходит по закону геометрической оптики

$$v_+ = v_- - 2n\langle v_-, n\rangle,$$

где n — единичный вектор внешней нормали к γ в точке отражения.

Определение 2. Отображение $\beta : T_\gamma\omega \to T_\gamma\omega$, такое, что $\beta(S, v_-) = \Big(S + \lambda(S, v_+) \cdot v_+, v_+\Big)$, где $S \in \gamma$ — точка отражения и $\lambda(S, v) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid S + \lambda v \in \omega\}$, будем называть *обыкновенным биллиардом* (или *биллиардным отображением*).

Можно считать, что обыкновенный биллиард действует на пространстве ориентированных прямых $l = l_{Q,v} = \{Q + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $Q \in \omega$, $v \in T_Q\omega \setminus \{0\}$, пересекающих границу γ области ω, и

$$\beta(l_-) = l_+.$$

Определение 3. Ориентированную прямую $l = l_{Q,v}$, не проходящую через точку O, назовём *положительной (отрицательной)*, если момент импульса $\sigma(Q, v) := \langle Q, -Iv\rangle = xv_y - yv_x > 0$ (соответственно < 0) для любого ориентирующего касательного вектора $v = (v_x, v_y) \in T_Ql \setminus \{0\}$ к прямой l, где $Q = (x, y) \in l$ и $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Если прямая l достаточно близка к касательной к границе, то после отражения ее знак не меняется.

Напомним, что такое *полярная двойственность* по отношению к единичной окружности. Любая неориентированная прямая l, не проходящая

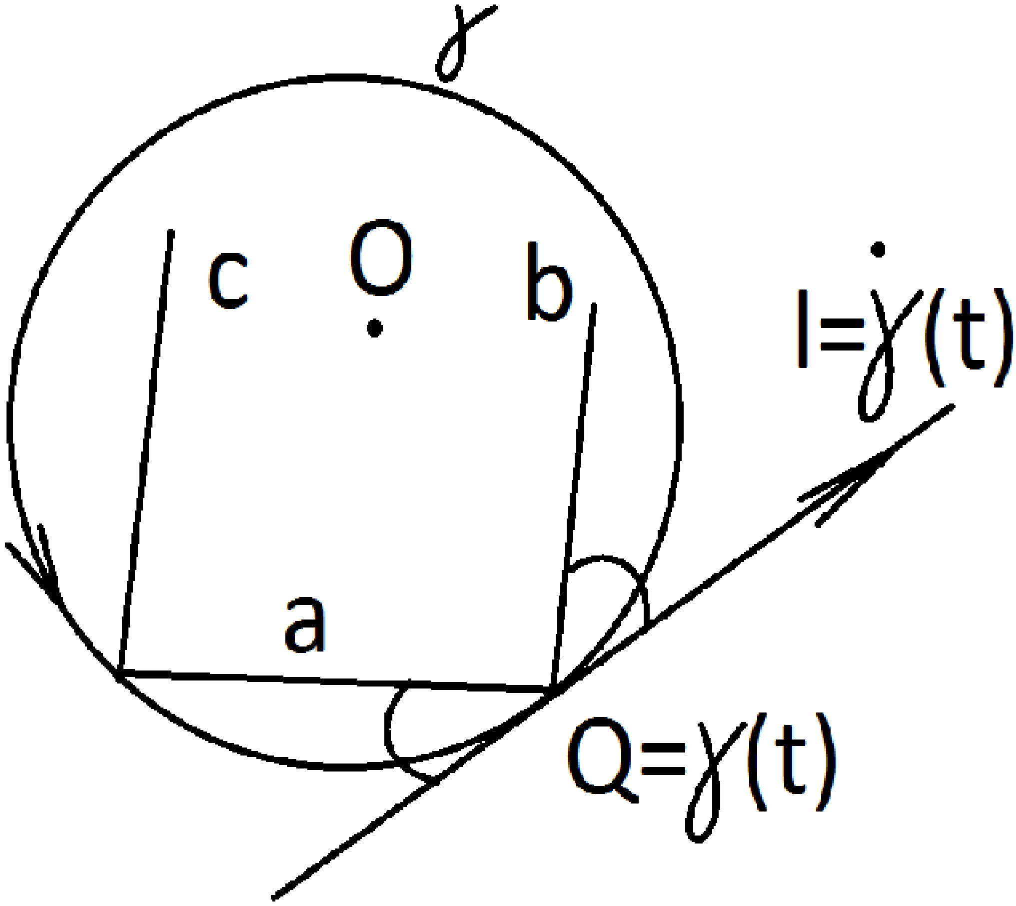

Рис. 2: Обыкновенный биллиард

через точку O, может быть задана уравнением $\langle n, x\rangle = p$, где $p > 0$ и n — единичная внешняя нормаль к l. Тогда при полярной двойственности прямые вида $l = \{\langle n, x\rangle = p\} \in \mathbb{R}P^{2*}$, $p > 0$, переходят в соответствующие точки вида $L = \frac{n}{p} \in \mathbb{R}P^2$ (обозначаем $L = l^*$),

$$l = \{\langle n, x\rangle = p\} \ \leftrightarrow \ L = \frac{n}{p}, \qquad p > 0.$$

Полярная двойственность естественным образом продолжается до *проективного изоморфизма* $\mathbb{R}P^{2*} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}P^2$, где $\mathbb{R}P^{2*}$ — пространство проективных прямых.

Непосредственно проверяется, что если прямые $l, q \in \mathbb{R}P^{2*}$ переходят при полярной двойственности в точки $L, Q \in \mathbb{R}P^2$, где $Q \in l$, то $L \in q$.

Определение 4 ([1, §1.3]). Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$ — регулярная кривая. Кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}P^{2*}$ называется *двойственной кривой* к γ, если Γ состоит из точек, двойственных касательным прямым к γ. Обозначаем $\Gamma = \gamma^*$. Отождествляя $\mathbb{R}P^{2*} \cong \mathbb{R}P^2$ с помощью проективного изоморфизма и вводя на $\mathbb{R}P^2$ однородные координаты $(z : x : y)$, получаем связь параметризаций кривых $\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t))$ и $\Gamma = \Gamma(t)$:

$$\Gamma(t) = \gamma^*(t) = \begin{cases} \frac{-I\dot\gamma(t)}{\langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle} = \frac{-I\dot\gamma(t)}{\sigma(\gamma(t),\dot\gamma(t))} \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2, & \sigma(\gamma(t),\dot\gamma(t)) \neq 0; \\ (0 : -\dot y(t) : \dot x(t)) \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}^2, & \sigma(\gamma(t),\dot\gamma(t)) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Будем обозначать точки заглавными буквами, а прямые маленькими буквами. Заметим, что если l — касательная к γ в точке $Q \in \gamma$ и γ имеет ненулевую кривизну в точке Q, то q — касательная к Γ в точке $L \in \Gamma$, где q, l, Γ двойственны Q, L, γ соответственно. Это следует из пп.(а) и (б) следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть кривая $\gamma \subset \mathbb{R}P^2$ имеет ненулевые моменты импульса, и кривая $\Gamma = \gamma^* \in \mathbb{R}P^{2*}$ двойственна кривой γ. Будем отождествлять $\mathbb{R}P^{2*}$ и $\mathbb{R}P^2$ при помощи проективного изоморфизма. Пусть* $\mathrm{Sing}(\Gamma) \subset \Gamma$ *— множество особых точек кривой Γ, и* $\mathrm{Infl}(\gamma) \subset \gamma$ *— множество* точек перегиба *(т.е. точек нулевой кривизны) кривой γ. Тогда*

(а) *отображение двойственности $\gamma \to \Gamma$* (определение 4) *индуцирует биекцию* $\mathrm{Infl}(\gamma) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Sing}(\Gamma)$, *т.е. точкам перегиба кривой γ отвечают в точности особые точки кривой Γ;*

(б) *кривая* $\gamma_1 := \gamma \setminus \mathrm{Infl}(\gamma)$ *двойственна кривой* $\Gamma \setminus \mathrm{Sing}(\Gamma) = \gamma_1^*$, *т.е.* $\gamma_1 = \gamma_1^{**}$*;*

(в) *γ является алгебраической $\iff$ Γ является алгебраической;*

(г) *γ является неособой коникой $\iff$ Γ является неособой коникой.*

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — локальная регулярная параметризация кривой γ, и $\Gamma(t)$ — соответствующая локальная параметризация кривой Γ. Моменты импульса кривых γ и Γ суть

$$\sigma(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle, \qquad \sigma(\Gamma(t), \dot\Gamma(t)) = \langle\Gamma(t), -I\dot\Gamma(t)\rangle.$$

Из (1), с учетом $\sigma(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \neq 0$, имеем $\langle\gamma(t), \Gamma(t)\rangle \equiv 1$. Если $\sigma(\Gamma(t), \dot\Gamma(t)) \neq 0$, то

$$\Gamma^*(t) = \frac{-I\dot\Gamma(t)}{\langle\Gamma(t), -I\dot\Gamma(t)\rangle} = \frac{-I\dot\Gamma(t)}{\sigma(\Gamma(t), \dot\Gamma(t))}. \tag{2}$$

Докажем (а). Из (1) имеем $\langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle\Gamma(t) = -I\dot\gamma(t)$. Продифференцировав обе части этого равенства, получим

$$\langle\gamma(t), -I\ddot\gamma(t)\rangle\Gamma(t) + \langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle\dot\Gamma(t) = -I\ddot\gamma(t). \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) скалярно на $I\Gamma(t)$, получим

$$\langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle\langle I\Gamma(t), \dot\Gamma(t)\rangle = -\langle\Gamma(t), \ddot\gamma(t)\rangle \overset{(1)}{=} \frac{\langle I\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\rangle}{\langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle}.$$

Значит,

$$\sigma(\Gamma(t), \dot\Gamma(t)) = \langle I\Gamma(t), \dot\Gamma(t)\rangle = \frac{\langle I\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\rangle}{\langle\gamma(t), -I\dot\gamma(t)\rangle^2} = \frac{\varkappa(t)}{(\sigma(\gamma(t), \dot\gamma(t)))^2},$$

где $\varkappa(t)$ — кривизна кривой γ. Поэтому если $\varkappa(t_0) \neq 0$, то $\sigma(\Gamma(t_0), \dot\Gamma(t_0)) \neq 0$, и $\dot\Gamma(t_0) \neq 0$. Если же $\varkappa(t_0) = 0$, то $\sigma(\Gamma(t_0), \dot\Gamma(t_0)) = 0$ и даже $\dot\Gamma(t_0) = 0$. Действительно: если t — натуральный параметр на γ, то $\ddot\gamma(t_0) = 0$, и ввиду (3) имеем $\dot\Gamma(t_0) = 0$. Отсюда получаем (а).

Мы также показали, что если $\sigma(\Gamma(t_0), \dot\Gamma(t_0)) = 0$, то $\dot\Gamma(t_0) = 0$.

Докажем (б). Предположим, что $\dot\Gamma(t) \neq 0$. Нужно показать, что $\Gamma^*(t) = \gamma(t)$. С одной стороны, ввиду (1) имеем $\Gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$. Отсюда, ввиду тождества $\langle\gamma(t), \Gamma(t)\rangle \equiv 1$, имеем $\dot\Gamma(t) \perp \gamma(t)$, а с учетом (2) имеем $\Gamma^*(t) \| \gamma(t)$. С другой стороны, из неравенства $\dot\Gamma(t) \neq 0$ следует, как отмечено выше, неравенство $\sigma(\Gamma(t), \dot\Gamma(t)) \neq 0$. Поэтому из (2) имеем $\langle\Gamma(t), \Gamma^*(t)\rangle = 1 = \langle\Gamma(t), \gamma(t)\rangle$. Значит, $\Gamma^*(t) = \gamma(t)$.

Докажем (в). Пусть кривая γ задается в $\mathbb{C}P^2$ уравнением $F(x, y, z) = 0$. Касательная к γ в точке $(x_0 : y_0 : z_0) \in \gamma$ задается уравнением

$$xF_x + yF_y + zF_z = 0,$$

где производные F_x, F_y, F_z берутся в точке (x_0, y_0, z_0). Двойственная кривая Γ состоит из точек с координатами $(F_x : F_y : F_z)$. Требуется доказать, что переменные $x_1 = F_x(x_0, y_0, z_0)$, $y_1 = F_y(x_0, y_0, z_0)$, $z_1 = F_z(x_0, y_0, z_0)$ связаны некоторым однородным алгебраическим соотношением $G(x_1, y_1, z_1) = 0$. Добавим к соотношениям $x_1 = F_x$, $y_1 = F_y$, $z_1 = F_z$ соотношение

$F(x_0, y_0, z_0) = 0$ (или эквивалентное ему соотношение $x_1 x + y_1 y + z_1 z = 0$). Тогда из этих четырех соотношений можно будет последовательно исключить $x_0, y_0,\ z_0$. В результате получится одно алгебраическое соотношение на x_1, y_1, z_1.

Исключения производятся следующим образом. Пусть у нас есть четыре соотношения $f_1 = 0, \ldots, f_4 = 0$ на переменные $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$. Заменим каждую пару многочленов (f_1, f_4), (f_2, f_4), (f_3, f_4), рассматриваемые как многочлены от x_0, результантом этой пары. Получим тройку многочленов g_1, g_2, g_3, уже не зависящих от переменной x_0. Затем таким же образом исключим переменную z_0 из полученной пары многочленов (h_1, h_2). Приравнивание к нулю полученного в результате однородного многочлена от переменных x_1, y_1, z_1 и дает уравнения двойственной кривой Γ.

Докажем (г). Полную классификацию кривых второго порядка на проективной плоскости можно посмотреть в [2, XXII, §8]. Докажем в случае, когда γ является эллипсом и задается уравнением $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

Если точка $q = (x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу $\gamma = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, то нормаль $n(q) = (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})$, откуда $T_q\gamma = \{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1\}$, и $(\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : 1)$ — точка на двойственной кривой Γ. Ясно, что эта точка принадлежит эллипсу $\{a^2x^2 + b^2y^2 = 1\}$, поэтому Γ совпадает с этим эллипсом.

$\square$

Лемма 2. *Если кривые γ_1 и γ_2 проективно эквивалентны (над полем $\mathbb{C}$), то двойственные кривые γ_1^* и γ_2^* к γ_1 и γ_2 соответственно тоже проективно эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим $\gamma = \gamma_1$ и $A\gamma = \gamma_2$, где A — некоторое проективное преобразование, связывающее γ_1 и γ_2. Пусть кривая $\gamma \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}^3$ и $\mathbb{C}\gamma \subset \mathbb{C}^3$ - соответствующая ей кривая в $\mathbb{C}^3$. Тогда $\mathbb{C}\gamma = \{P(x, y, z) = 0\}$, где P — однородный многочлен. Если $q_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{C}\gamma$, то $\lambda q_0 \in \mathbb{C}\gamma$ для $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть $n(q_0) = (P_x, P_y, P_z)|_{q_o}$ - внешняя нормаль к $\mathbb{C}\gamma$ в точке q_0. Тогда $T_{q_0}\gamma \subset T_{q_0}(\mathbb{C}\gamma) = \{P_x|_{q_0}x + P_y|_{q_0}y + P_z|_{q_0}z = c\}$. Можно показать, что $c = 0$, так как $0 \in 0_{q_0} \subset T_{q_0}(\mathbb{C}\gamma)$. Отсюда двойственная кривая γ^* к γ будет задаваться таким образом $\gamma^* = (P_x : P_y : P_z)|_{q_0}, q_0 \in \gamma$.

Пусть $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$. При таком отображении $\gamma = \{P = 0\} \to A\gamma = \{P(q(\tilde{q})) = 0\}$ и требуется доказать, что $\gamma^* \to (A\gamma)^*$ с помощью некоторого $\hat{A}$.

Итак, пусть $B = A^{-1}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$. Найдем $P_{\tilde{x}}, P_{\tilde{y}}, P_{\tilde{z}}$, используя формулу производной сложной функции.

$$\begin{pmatrix} P_{\tilde{x}} \\ P_{\tilde{y}} \\ P_{\tilde{z}} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Тогда $(A\gamma)^* = \begin{pmatrix} P_{\tilde{x}} \\ P_{\tilde{y}} \\ P_{\tilde{z}} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$.

Таким образом $\hat{A} = (A^{-1})^T$. □

Утверждение 1 ([1, §1.2])**.** *Если a, b — две ориентированные прямые положительного знака (это значит, что момент импульса $\sigma = xv_y - yv_x > 0$) такие, что $\beta(a) = b$, $Q \in \gamma$ — точка отражения, l — касательная к γ в точке Q, A и B двойственны к a и b соответственно, q двойственна к Q, Γ двойственна к γ, причем γ имеет ненулевую кривизну в точке Q, то $A, B \in q$, q — касательная к Γ в точке L. Более того, $\angle AOL = \angle BOL$.*

Доказательство. Действительно, $\angle(a, l) = \angle AOL$, так как $OA \perp a$, и $OL \perp l$ (из определения полярной двойственности). Аналогично $\angle(b, l) = \angle BOL$. Так как γ имеет ненулевую кривизну в точке Q, т.е. $Q \in \gamma \setminus \mathrm{Infl}(\gamma)$, то по п.(б) леммы 1 прямая q касательна к Γ в точке L. □

Таким образом, можно записать связь между обыкновенным биллиардом и угловым в следующей теореме.

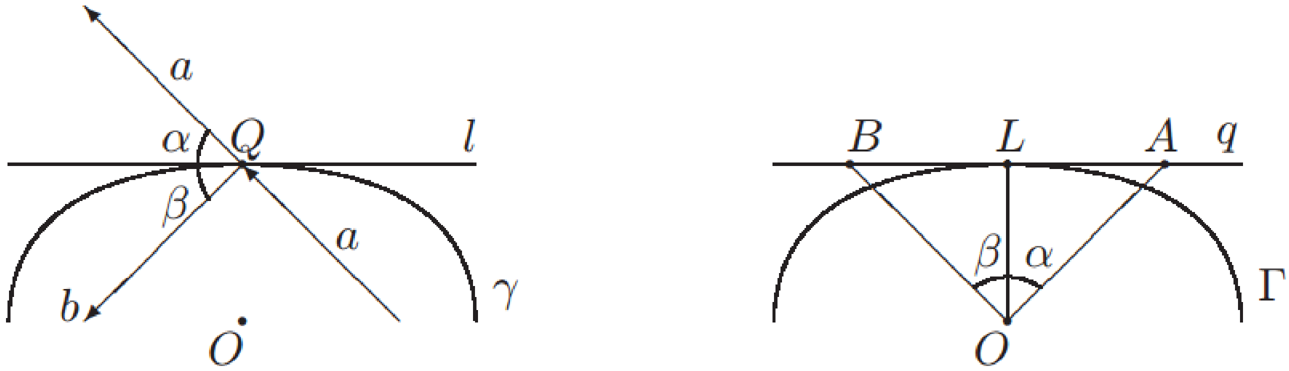

Рис. 3: Связь обыкновенного и углового биллиардов

Теорема 1 ([1, теорема 2]). *Пусть обыкновенный биллиард β действует на ориентированные прямые таким образом: $\beta(l_0) = l_1$, $\beta^{-1}(l_0) = l_{-1}$. Тогда угловой биллиард действует на двойственные точки так: $\alpha(L_0) = L_1$, если l_0 — положительная, $\alpha(L_0) = L_{-1}$, если l_0 — отрицательная (определение 3).* □

1.3 О связи первых интегралов обыкновенного и углового биллиардов

Определение 5 ([1, §1.4]). Угловой биллиард α *интегрируем*, если $\exists G : U \setminus \Sigma \to \mathbb{R}$ такая, что $G(A) = G(\alpha(A))\ \forall A \in U \setminus \Sigma$. Если G — рациональная функция, то биллиард назовем *рационально интегрируемым.*

Пусть у обыкновенного биллиарда есть аналитический по скорости первый интеграл $F_0 + F_1 + \dots + F_n + \dots$, не постоянный на энергетическом уровне $|v| = 1$. Тогда каждая его однородная по скорости форма $F_n = F_n(q, v)$ степени n — первый интеграл [3]. Обозначим за $F = F_n(q, v)$ первый интеграл наименьшей возможной степени n (однородный полиномиальный по скорости и непостоянный на уровне энергии). Известно, что внутри области ω верно, что $F(q + vt, v) = F(q, v)$, $q + vt \in \omega$. Отсюда

$$\langle F_q(q, v), v\rangle \equiv 0. \tag{4}$$

Поэтому $F(q, v) = \Phi(\sigma(q, v), v)$ для некоторой функции $\Phi = \Phi(\sigma, v)$, где $\sigma(q, v) = q_1v_2 - q_2v_1$.

Лемма 3. *Если $F = F(q, v)$ — однородный полином степени n по v, то $\Phi = \Phi(\sigma, v)$ — однородный полином степени n по σ, v.*

Доказательство. Так как $F(q, v)$ является функцией от (σ, v), где $\sigma = xv_y - yv_x$, то $F(q, v) = F(\frac{\sigma v_y}{v_x^2+v_y^2}, \frac{-\sigma v_x}{v_x^2+v_y^2}, v)$, поскольку $\sigma(q, v) = \sigma(\frac{\sigma v_y}{v_x^2+v_y^2}, \frac{-\sigma v_x}{v_x^2+v_y^2}, v)$. Теперь докажем, что Φ является однородным полиномом от (σ, v) степени n. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции F по (x, y). Однородное слагаемое F_i степени i в формуле Тейлора для $F(q, v)$ — однородный многочлен по (x, y) степени i, а его коэффициенты — однородные многочлены по v степени n. Получаем, что $F_i(q, v) = F_i(\frac{\sigma v_y}{v_x^2+v_y^2}, \frac{-\sigma v_x}{v_x^2+v_y^2}, v)$, откуда следует, что F_i делится (как многочлен от (q, v)) на σ^i, поскольку данное равенство — равенство рациональных функций, и $(v_x^2 + v_y^2)$ взаимно прост с σ (следствие факториальности кольца многочленов, т.е. однозначности разложения на множители). Но тогда частное от деления F на σ^i не зависит от (x, y), и степень по v должна быть равна $(n - i)$. Отсюда следует, что $F_i = 0$ при всех $i > n$. Таким образом, Φ — однородный многочлен по σ, v степени n, как конечная сумма таких многочленов. □

Можно показать, что Φ постоянна на касательных к каждому гладкому куску граничной кривой γ. Доказательство этого факта дано в [4] и [5], или в (7) ниже.

Теорема 2 ([1, теорема 3])**.** *Пусть γ — кусочно гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$ и $\Phi(\sigma, v_x, v_y)$ — однородный полином степени $2s$, который постоянен на касательных к каждой гладкой дуге γ_i кривой γ. Тогда угловой биллиард для кривой $\Gamma_i = \gamma_i^*$, двойственной кривой γ_i, тоже интегрируем и первый интеграл имеет вид*

$$G(x, y) = \frac{\hat{F}(x, y)}{(x^2 + y^2)^s},$$

где $\hat{F}(x, y) = \Phi(1, -y, x)$ — однородный полином степени $2s$, причем G постоянна на каждой дуге Γ_i. В частности, дуги Γ_i алгебраичны.

Доказательство. Определим G в окрестности кривой Γ. Пусть точка $A \in U \setminus S$, прямая a двойственна к A. Пусть v_a — касательный вектор к a, такой, что $|v_a| = 1$ и $\sigma(a, v_a) = p > 0$. Тогда $G(A) := \Phi(\sigma(a, v_a), v_a)$. Так как Φ — первый интеграл, то определение G корректно (не зависит от точки, где взят v_a на прямой a).

Пусть $B = \alpha(A)$, тогда из теоремы 1 следует, что есть две возможности:

$$(\sigma(b, v_b), v_b) = \pm\beta(\sigma(a, v_a), v_a),$$

где прямая b двойственна к B, v_b — касательный вектор к b, такой, что $|v_b| = 1$. Но так как Φ — полином четной степени и $\Phi \circ \beta = \Phi$, то

$$\Phi(\sigma, v) = \Phi(-\sigma, -v),$$

$$G(B) = \Phi(\sigma(b, v_b), v_b) = \Phi(\pm\beta(\sigma(a, v_a), v_a)) = \Phi(\sigma(a, v_a), v_a) = G(A).$$

То есть G — первый интеграл углового биллиарда. И так как Φ постоянна на касательных к γ_i, то G постоянна на Γ_i.

Теперь выведем формулу для G. Пусть v — единичный касательный вектор к прямой a, такой, что $\sigma(a, v) = p > 0$. Тогда $\Phi(\sigma(a, v), v) = \sum\limits_{k+l+m=2s} f_{klm}(v_x)^k(v_y)^l p^m$. Тогда A — двойственная точка к прямой a, и её координаты равны:

$$x = \frac{n_1}{p} = \frac{\cos\phi}{p} = \frac{v_y}{p}, \quad y = \frac{n_2}{p} = \frac{\sin\phi}{p} = \frac{v_x}{p},$$

откуда $p = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где $n = (n_1, n_2) = (\cos\phi, \sin\phi)$ — единичная внешняя нормаль к a, ϕ — полярный угол вектора n.

Тогда

$$\begin{aligned} G(x, y) = &\sum_{k+l+m=2s} f_{klm}(-py)^k(px)^l p^m = \\ &= p^{2s} \sum_{k+l+m=2s} f_{klm}(-y)^k(x)^l = \\ &= p^{2s}\hat{F}(x, y) = \frac{\hat{F}(x, y)}{(x^2+y^2)^s}. \end{aligned}$$

□

1.4 Комплексификация

Пусть дана комплексная плоскость $\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{R}^2$ и $dx^2 + dy^2$ — $\mathbb{C}$-биллинейная форма, задающая комплексное скалярное произведение на ней. Пусть $O = (1 : 0 : 0)$ - начало координат в $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$, $(z : x : y)$ — одородные комплексные координаты на $\mathbb{C}P^2$.

Замечание 2. *Изотропные прямые* — это проективные прямые в $\mathbb{C}P^2 \supset \mathbb{C}^2$, проходящие хотя бы через одну из точек $(0 : 1 : \pm i)$. Другими словами, любая изотропная прямая задается уравнением вида $kz \pm ix + y = 0$ или уравнением $z = 0$, где $k \in \mathbb{C}$. Можно показать, что любая связная комплексная кривая в $\mathbb{C}^2$, на которой индуцированная метрика равна 0, содержится в изотропной прямой.

Определение 6. *Симметрией относительно* неизотропной проективной прямой $l \subset \mathbb{C}P^2$ будем называть комплексно-аналитическое отображение $\sigma_l : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ со следующими свойствами:

$$\sigma_l(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2, \quad \sigma_l|_{\mathbb{C}^2} \text{ — комплексная изометрия}, \quad \sigma_l|_l = Id, \quad \sigma_l \neq Id, \quad \sigma_l^2 = Id.$$

Определение 7. Пусть $P, A, B \in \mathbb{C}P^2$, $P \neq O$ и OP — неизотропная прямая. Тогда назовем две точки A и B *угло-симметричными* относительно точки P с центром O, если выполнены следующие условия:

$$A, B, P \text{ — на одной прямой}, \quad \sigma_{OP}(OA) = OB.$$

Определение 8. Алгебраическое подмножество $X = \{P_j(z, x, y) = 0 \mid j = 1, \ldots, N\}$ в $\mathbb{C}P^2$ назовем *приводимым*, если $\exists X_1, X_2$ — алгебраические множества такие, что $X = X_1 \cup X_2$ и при этом X_1 не содержится в X_2 и X_2 не содержится в X_1.

Результат предыдущего раздела 1.3 (теорема 2) сводит задачу об интегрируемости обычного биллиарда для кривой $\gamma = \cup\gamma_i \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$ к задаче об интегрируемости углового биллиарда для кривой $\Gamma = \gamma^*$, состоящей из дуг $\Gamma = \cup\gamma_i^*$ алгебраических кривых. Ясно, что рационально-интегрируемый угловой биллиард для алгебраической кривой $\Gamma_i = \gamma_i^* \subset \mathbb{R}P^{2*} \simeq \mathbb{R}P^2$ допускает рационально-интрегрируемую комплексификацию в $\mathbb{C}P^2$.

Определение 9 ([6, часть 1])**.** Будем говорить, что неприводимая алгебраическая кривая $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma} \subset \mathbb{C}P^2$, не являющаяся прямой, *порождает рационально-интегрируемый угловой биллиард*, если существует функция $G(x,y) = \frac{\hat{F}(x,y)}{(x^2+y^2)^s}$ со следующими свойствами:
(i) $\hat{F}(x,y)$ — однородный полином степени $\deg \hat{F} = 2s$, и
(ii) для любой точки $P \in \overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}$ такой, что прямые OP и $T_P \overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}$ неизотропны, функция $G|_{T_P \overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}}$ инвариантна относительно угловой симметрии относительно P с центром O.

Возникает задача об описании всех неприводимых алгебраических кривых $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma} \subset \mathbb{C}P^2$, порождающих рационально-интегрируемые угловые бильярды. Решение этой задачи будет сформулировано в разделе 3.2.

2 О границе интегрируемых биллиардов

2.1 Теорема Болотина об алгебраичности границы интегрируемого биллиарда

Напомним, что γ — простая, замкнутая, кусочно-гладкая кривая в евклидовой плоскости, и γ ограничивает область ω. Теорема Болотина из [4] доказывает, что в случае интегрируемого биллиарда каждый кусок границы будет алгебраической кривой. Рассмотрим более подробно результат Болотина и его доказательство.

Теорема 3 (Болотин, 1990 [4]). *Предположим, что у обыкновенного биллиарда внутри кривой γ есть полиномиальный по скорости интеграл F, который на уровне энергии $\{|v| = 1\}$ не равен константе. Тогда каждый гладкий кусок γ_i границы γ есть дуга алгебраической кривой. Кроме того, если $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma}_i$ — неприводимая компонента алгебраического замыкания кривой γ_i в $\mathbb{C}P^2$, то выполнено одно из следующих двух условий: либо каждая компонента $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma}_i$ имеет степень 1 или 2, либо каждая компонента $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma}_i$ содержит особые точки. В частности, если γ состоит из одного куска, то либо γ — эллипс, либо неприводимая компонента $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma}$ алгебраического замыкания кривой γ в $\mathbb{C}P^2$ — особая кривая.*

Доказательство теоремы разделим на две части. В первой части докажем утверждение про алгебраичность, во второй части — про степени неприводимых компонент.

2.2 Доказательство первой части: алгебраичность

Пусть биллиард интегрируем и обладает аналитическим по скорости первым интегралом, непостоянным на уровне энергии. Согласно началу раздела 1.3, существует однородный полиномиальный по скорости первый интеграл $F = F(q, v)$ наименьшей возможной степени, непостоянный на уровне энергии. В силу леммы 3 он имеет вид $F(q, v) = \Phi(\sigma(q, v), v)$, где $\sigma(q, v) = q_1 v_2 - q_2 v_1$ и $\Phi = \Phi(\sigma, v)$ — однородный полином по σ, v, непостоянный на уровне энергии.

Выберем в каждой гладкой точке q кривой γ единичный касательный вектор $\tau = \tau(q)$, такой, что, если n — внутренняя нормаль к γ, то (τ, n) — положительно ориентированный базис. В силу закона отражения имеем, что

$$F(q, v) = F(q, v - 2n\langle n, v\rangle). \tag{5}$$

Следовательно,

$$\langle F_v(q,\tau), n\rangle = 0. \tag{6}$$

Покажем, что

$$F(q,\tau(q)) = \mathrm{const} \tag{7}$$

на каждом гладком куске γ. Пусть s — натуральный параметр на кривой γ, такой что $\tau = q'(s)$. Тогда

$$\frac{d}{ds}F(q(s),\tau(s)) = \langle F_q, \tau\rangle + \varkappa\langle F_v, n\rangle = 0$$

в силу (4) и (6), где $\varkappa$ — кривизна кривой γ. Это доказывает формулу (7).

Пусть $\mathbb{R}P^2 \supset \mathbb{R}^2$ — проективная плоскость, а $\mathbb{R}P^{2*}$ — двойственная проективная плоскость, т.е. множество прямых в $\mathbb{R}P^2$. Каждая прямая $\{q + vt, t \in \mathbb{R}\}$ задается парой $(\sigma, v) \in \mathbb{R}^3$, где v — вектор скорости, а σ — момент импульса. Паре $(\lambda\sigma, \lambda v)$, $\lambda \neq 0$, отвечает та же прямая. Поэтому σ, v — однородные координаты на проективной плоскости $\mathbb{R}P^{2*} \simeq \mathbb{R}P^2$. Бесконечно удаленная прямая $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}^2$ задается уравнением $\sigma = 0$. Первый интеграл F определяет функцию $F^*(\sigma, v) = \frac{\Phi(\sigma,v)}{|v|^n}$ на $\mathbb{R}P^{2*}$, где $n = \deg\Phi$. Если n четно, то F^* рациональна, если n нечетно, то рациональна $(F^*)^2$. Покажем, что каждый гладкий непрямолиненый кусок границы γ содержится в (алгебраической по лемме 1 (в)) кривой в $\mathbb{R}P^2$, двойственной алгебраической кривой $\{F^* = c\}$ в $\mathbb{R}P^{2*}$. (Кривая в $\mathbb{R}P^{2*}$, двойственная кривой в $\mathbb{R}P^2$, состоит из прямых, касательных к этой кривой. Кривая, двойственная двойственной, совпадает с исходной по лемме 1).

Пусть $\gamma^* \subset \mathbb{R}P^{2*}$ — замыкание множества прямых, касательных к γ в гладких точках. Кривая γ^* состоит из конечного куска связных кусков, отвечающих гладким кускам γ. В силу (7) функция F^* постоянна на каждой связной компоненте γ^*, что и требовалось доказать. В частности, γ содержится в алгебраической кривой в $\mathbb{R}^2$.

Уравнение алгебраической кривой γ удобно представить в комплексных координатах. Отождествим $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ и определим на $\mathbb{R}^2$ комплексно-сопряженные координаты $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$. Алгебраическая кривая наименьшей степени в $\mathbb{R}^2$, содержащая γ, задается полиномиальным уравнением, $\sum g_{kl} z^k \bar{z}^l = 0, \quad g_{kl} = g_{lk}$. Удобно считать, что плоскость $\mathbb{R}^2$ вложена в $\mathbb{C}^2$ как множество пар $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, таких, что $z' = \bar{z}$. Тогда алгебраическое замыкание $\overset{\mathbb{C}}{\gamma}$ кривой γ в $\mathbb{C}^2$ задается уравнением $\sum g_{kl} z^k z'^l = 0$, и γ содержится в $\overset{\mathbb{C}}{\gamma} \cap \mathbb{R}^2$. Первый интеграл F на уровне энергии $|v| = 1$ можно представить в виде (см. [7])

$$F = \sum_{k \le n} (\bar{f}_k(\bar{z}, z) v^k + f_k(z, \bar{z}) \bar{v}^k),$$

где $n-k$ четно, $z, \bar{z}$ и $v, \bar{v}$ комплексно сопряжены и $v\bar{v} = 1$. По предположению F — первый интеграл наименьшей возможной степени, так что $f_n \not\equiv 0$. Так как F — полином степени n от $\sigma = i(z\bar{v} - \bar{z}v), v, \bar{v}$, то f_n — голоморфный полином степени n от z.

Пусть $v, \bar{v}$ — комплексно сопряженные координаты касательного вектора τ к кривой γ в точке гладкости с координатами $(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^2$. Можно показать (см. [7]), что в силу (5) $f_k(z, \bar{z})\bar{v}^k = \bar{f}_k(\bar{z}, z)v^k$. Поскольку $\overset{\mathbb{C}}{\gamma}$ — наименьшая алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, содержащая γ, то

$$f_k(z, z')v'^k = \bar{f}_k(z', z)v^k \tag{8}$$

для всех векторов $(v, v') \in \mathbb{C}^2$, касательных к $\overset{\mathbb{C}}{\gamma}$ в произвольной точке (z, z'). В частности, $\overset{\mathbb{C}}{\gamma}$ — интегральная кривая поля ядер 1-формы

$$\frac{dz}{(f_n(z))^{1/n}} = \frac{dz'}{(f_n(z'))^{1/n}}, \tag{9}$$

а γ задается уравнениями

$$\phi(z) - \overline{\phi(z)} = \text{const}, \quad \phi(z) = \int \frac{dz}{(f_n(z))^{1/n}}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что все вещественные особые точки γ — точки самопересечения. В силу (8) кривая γ — множество совместных решений системы уравнений

$$f_k^l \bar{f}_l^k = \bar{f}_k^l f_l^k; \quad k, l \leq n.$$

Это дает другое доказательство алгебраичности кривой γ.

2.3 Доказательство второй части: степени неприводимых компонент

Пусть $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma} \subset \mathbb{C}P^2$ — алгебраическое замыкание кривой γ в комплексной проективной плоскости, т.е. множество комплексных решений задающего γ в $\mathbb{R}P^2$ однородного полиномиального уравнения наименьшей степени. Покажем, что каждая гладкая неприводимая алгебраическая компонента $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma}$ — алгебраическая кривая первой или второй степени. Отметим, что $\overset{\mathbb{C}}{\gamma} = \overset{\mathbb{C}P}{\gamma} \cap \mathbb{C}^2$.

Определим рациональную n-форму ψ на $\mathbb{C}^2$ по формуле $2\psi = \frac{(dz)^n}{f_n(z)} + \frac{(dz')^n}{f_n(z')}$. Так как $f_n(z) \neq 0$ при $(z, z') \in^{\mathbb{C}} \gamma$, то определено ограничение $\psi|_{\overset{\mathbb{C}}{\gamma}}$ —

рациональная n-форма на комплексной алгебраической кривой $\overset{\mathbb{C}}{\gamma}$. В силу (8) верно, что

$$\psi|_{\tilde{\gamma}} = \frac{(dz)^n}{f_n(z)} = \frac{(dz')^n}{f_n(z')}. \tag{11}$$

Каждая гладкая неприводимая компонента алгебраической кривой $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma} \subset \mathbb{C}P^2$ — образ компактной римановой поверхности S при голоморфном отображении $l : S \to \mathbb{C}P^2$ [8]. По предположению l не имеет критических точек. Форма ψ определяет мероморфную n-форму $\Psi = l^*\psi$ на S. Поскольку в окрестности каждой конечной точки S можно в качестве локальной координаты взять z или z', то в силу (11) форма Ψ не имеет нулей в конечных точках S.

Покажем, что Ψ имеет полюс степени не меньше n в каждой бесконечно удаленной точке S (точке пересечения $l(S)$ с бесконечно удаленной прямой $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{C}^2$). В окрестности бесконечно удаленной точки S кратности k можно в качестве локальной координаты на S взять $z^{-\frac{1}{k}}$ или $z'^{-\frac{1}{k}}$. Если, например, $\zeta = z^{-\frac{1}{k}}$, то в силу (11)

$$\Psi = \frac{(-kd\zeta)^n}{\zeta^{kn+n} f_n(\zeta^{-k})}.$$

Так как f_n — полином степени не больше n, то знаменатель имеет при $\zeta = 0$ нуль степени не меньше, чем n, что и требовалось доказать.

По формуле Римана-Гурвица [8] разность суммы порядков полюсов и суммы порядков нулей мероморфной n-формы Ψ на компактной римановой поверхности S есть $n \cdot \chi(S)$, где $\chi(S)$ — эйлерова характеристика S. Форма Ψ не имеет нулей и имеет, по крайней мере, один полюс, поэтому $\chi(S) > 0$, а род S равен $1 - \frac{\chi(S)}{2} = 0$. Так как род гладкой алгебраической кривой степени d равен $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ (см. [8]), то каждая гладкая неприводимая компонента кривой $\overset{\mathbb{C}P}{\gamma}$ — алгебраическая кривая первой или второй степени. Теорема 3 доказана. $\square$

3 О границе интегрируемых угловых биллиардов

3.1 Теорема Миронова и Бялого: аналог теоремы Болотина для угловых биллиардов

Аналог теоремы 3 Болотина был получен Мироновым и Бялым для углового биллиарда.

Теорема 4. *Предположим, что у обыкновенного биллиарда внутри кривой γ есть полиномиальный по скорости первый интеграл F, который на уровне энергии $\{|v| = 1\}$ не равен константе. Для каждого гладкого нелинейного куска γ_i границы γ пусть $\Gamma_i = \gamma_i^*$ — это соответственные двойственные кривые к γ_i. Обозначим за $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}_i$ неприводимую компоненту алгебраического замыкания кривой Γ_i в $\mathbb{C}P^2$. Тогда, либо каждая $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}_i$ имеет степень 2, либо каждая $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}_i$ содержит особые точки. Кроме того, все особые точки и точки перегиба любой $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}_i$ в $\mathbb{C}P^2$ лежат в объединении двух изотропных прямых L_1 и L_2, проходящих через точку O,*

$$L_1 = \{x + iy = 0\},$$

$$L_2 = \{x - iy = 0\}.$$

3.2 Теорема Глуцюка о кониках: аналог гипотезы Биркгофа для угловых биллиардов

С помощью теоремы 4 Миронова-Бялого А.А.Глуцюк в своей еще не опубликованной работе доказывает следующее утверждение про границу интегрируемого углового биллиарда.

Теорема 5 ([6, часть 1]). *Пусть $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma} \subset \mathbb{C}P^2$ — неприводимая алгебраическая кривая, не являющаяся прямой, порождающая рационально-интегрируемый угловой биллиард (см. определение 9). Тогда $\overset{\mathbb{C}P}{\Gamma}$ — коника.*

4 Выводы: алгебраическая версия гипотезы Биркгофа о границе интегрируемых бильярдов

Из теорем 2, 3, 5 и леммы 1 получаем, что верна алгебраическая версия гипотезы Биркгофа: если бильярд в строго выпуклой области с гладкой границей на плоскости имеет нетривиальный первый интеграл, полиномиально зависящий от вектора скорости (и не выражающийся через модуль скорости), то граница бильярдной области является коникой (т.е. эллипсом, параболой или компонентой гиперболы). Более того, получаем следующую теорему.

Теорема 6 ([6, часть 2])**.** *Пусть γ — кусочно C^1-гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что у обыкновенного бильярда внутри кривой γ есть полиномиальный по скорости первый интеграл F, который на уровне энергии $\{|v| = 1\}$ не равен константе. Тогда*

(а) *граничная кривая γ является объединением дуг софокусных коник и прямолинейных отрезков;*

(б) *если граничная кривая γ содержит хотя бы одну криволинейную дугу, то прямые, содержащие отрезки границы, имеют следующий вид:*

прямые, проходящие через центр окружностей, если указанные коники являются концентрическими окружностями;

прямая, содержащая фокальный отрезок, и серединный перпендикуляр к фокальному отрезку, если фокусы различны, т.е. указанные коники являются софокусными эллипсами и гиперболами;

ось парабол и прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная оси парабол, если указанные коники являются софокусными параболами.

Список литературы

[1] Bialy M., Mironov A. E. Angular Billiard and Algebraic Birkhoff conjecture. 2016. arXiv:1601.03196.

[2] П.С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. 1968. С. –912с.

[3] Степин А.М. Интегрируемые гамильтоновы системы. 1981. 143–170 с.

[4] Bolotin S.V. Integrable Birkhoff billiards // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1990. № 2. С. 33–36.

[5] Bolotin S.V. Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems // Mathematical Monographs. 1991. № 89.

[6] Глуцюк А. О полиномиально интегрируемых биллиардах. 2017.

[7] С.В.Болотин. О первых интегралах систем с упругими отражениями // Вестник Московского Университета, Математика и Механика. 1988. № 6. С. 42–45.

[8] Ф. Гриффитс Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. 1982. Т. 1.