Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

# Линейная связность сферы в пространстве Громова–Хаусдорфа

# Path connectedness of sphere in Gromov–Hausdorff space

Выполнил студент 4 курса
Р.А.Цветников
Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. А.А. Тужилин

г.Москва

2017

# 1 Введение

Важным геометрическим объектом является расстояние Громова–Хаусдорфа, введенное Эдвардсом в 1975 году, а затем переоткрытое и обобщеное Громовым в 1981. Оно измеряет различие между двумя произвольными метрическими пространствами и, фактически, является мерой наилучшего “совмещения” пространств. На основе этого расстояния вводится пространство Громова–Хаусдорфа, точками которого являются классы изометричности компактных метрических пространств. В нём, как известно, расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой. Имеются различные приложения расстояния Громова–Хаусдорфа, например в теории распознавания образов.

В данной статье мы изучаем линейную связность сферы в пространстве Громова–Хаусдорфа, а именно, мы докажем следующие два утверждения: (1) каждая сфера с центром в одноточечном пространстве линейно связна; (2) для каждого метрического компакта $X$ существует такое число $R_X$, что все сферы с центром в $X$ радиуса $r \ge R_X$ являются линейно связными.

# 2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть $X'$ и $Y'$ — два непустых подмножества метрического пространства $M$. Тогда *расстоянием по Хаусдорфу, $d_H(X',Y')$, между $X'$ и $Y'$* называется точная нижняя грань чисел $d$, таких, что $d$-окрестность $X'$ содержит $Y'$ и также $d$-окрестность $Y'$ содержит $X'$. Эквивалентное определение: если $|xy|$ — расстояние между $x$ и $y$ в $M$, то

$$d_H(X',Y') = \max\left\{\sup_{x\in X'}\big(\inf_{y\in Y'}|xy|\,\big), \sup_{y\in Y'}\big(\inf_{x\in X'}|xy|\,\big)\right\}.$$

Пусть $X$ и $Y$ — произвольные компактные метрические пространства. Тройку $(X',Y',Z)$, состоящую из метрического пространства $Z$ и двух его подмножеств $X'$ и $Y'$, изометричных соответственно $X$ и $Y$, назовем *реализацией пары* $(X,Y)$. *Расстоянием $d_{GH}$ по Громову–Хаусдорфу между $X$ и $Y$* назовем точную нижнюю грань чисел $\rho$, для которых существует реализация $(X',Y',Z)$ пары $(X,Y)$ такая, что $d_H(X',Y') \le \rho$.

Хорошо известно [1], что определенная выше функция $d_{GH}$ является метрикой на множестве $\mathcal{M}$ компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Цель настоящей работы — выяснить, являются ли сферы в пространстве $\mathcal{M}$ линейно связными.

*Отношением* между множествами $X$ и $Y$ называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех непустых отношений между $X$ и $Y$ обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Через $\pi_X$ и $\pi_Y$ обозначим канонические проекции пространства $X\times Y$ на его сомножители, т. е. $\pi_X(x,y)=x$ и $\pi_Y(x,y)=y$. Отношение $R$ между $X$ и $Y$ называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций $\pi_X$ и $\pi_Y$ на $R$ — сюръекции. Множество всех соответствий между $X$ и $Y$ обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ определим его *искажение*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big| \colon (x,y)\in\sigma, (x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Хорошо известно [1], что

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\ \inf\bigl(\mathrm{dis}\ R\mid R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr).$$

*Оптимальным соответствием* $R$, $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, называется соответствие, на котором достигается расстояние по Громову–Хаусдорфу:

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\ \mathrm{dis}\ R.$$

Множество всех оптимальных соответствий между $X$ и $Y$ обозначаим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}$.

Обозначим через $\Delta_1$ одноточечное метрическое пространство.

Для $A\in\mathcal{M}$ и вещественного $\lambda>0$ через $\lambda A$ будем обозначать метрическое пространство, которое получается из $A$ умножением всех расстояний в нём на $\lambda$.

*Диаметром* $\mathrm{diam}[A]$ метрического пространства $A$ называется точная верхняя грань расстояний между его точками.

**Предложение 2.1** ([1])**.** *Для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ имеет место*

$$d_{GH}(X,Y)\le\frac{1}{2}\ \max\bigl\{\mathrm{diam}[X],\mathrm{diam}[Y]\bigr\}.$$

**Предложение 2.2** ([1])**.** *Для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ выполняется*

$$\bigl|\mathrm{diam}[X]-\mathrm{diam}[Y]\bigr|\le 2\ d_{GH}(X,Y).$$

**Предложение 2.3** ([1])**.** *Для любого $X\in\mathcal{M}$ имеем*

$$d_{GH}(X,\Delta_1)=\mathrm{diam}[X]/2.$$

**Предложение 2.4** ([2])**.** *Для любых $A,B\in\mathcal{M}$ существует кратчайшая $\gamma$, их соединяющая.*

**Предложение 2.5** ([3])**.** *Для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ непусто.*

**Предложение 2.6** ([3])**.** *Для любых $X$, $Y\in\mathcal{M}$ и каждого $R\in\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ семейство $R_t,t\in[0,1]$, компактных метрических пространств таких, что $R_0=X,R_1=Y$, и для $t\in(0,1)$ пространство $R_t$ есть $(R,\rho_t)$, где*

$$\rho_t\bigl((x,y),(x',y')\bigr)=(1-t)|xx'|+t|yy'|,$$

*является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей $X$ и $Y$.*

**Предложение 2.7** ([1])**.** *Для любых $X$, $Y\in\mathcal{M}$, $\lambda>0$ имеем*

$$d_{GH}(\lambda X,\lambda Y)=\lambda d_{GH}(X,Y).$$

**Предложение 2.8** ([1])**.** *Для любого $X\in\mathcal{M}$, $\lambda_1,\lambda_2>0$ выполняется*

$$d_{GH}(\lambda_1X,\lambda_2Y)\le|\lambda_1-\lambda_2|d_{GH}(X,Y).$$

# 3 Основные результаты

Приведём ряд вспомогательных результатов.

**Лемма 3.1.** *Если $\gamma(t), t \in [a,b]$, — непрерывная кривая в $\mathcal{M}$, то* $\mathrm{diam}[\gamma(t)]$ *— непрерывная функция.*

*Доказательство.* В силу непрерывности $\gamma(t)$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$, для любого $t$ существует такое $\delta > 0$, что если $|t - t_0| < \delta$, то $d_{GH}\big(\gamma(t), \gamma(t_0)\big) < \varepsilon$. Согласно 2.2, $\big|\mathrm{diam}[\gamma(t)] - \mathrm{diam}[\gamma(t_0)]\big| \le 2\ d_{GH}\big(\gamma(t), \gamma(t_0)\big) < 2\ \varepsilon$, откуда немедленно вытекает непрерывность функции $\mathrm{diam}[\gamma(t)]$. □

**Лемма 3.2.** *Если $\lambda(t)$, $t \in [a,b]$, — непрерывная положительная функция, а $\gamma(t)$ — непрерывная кривая в $\mathcal{M}$, то $\lambda(t)\gamma(t)$ — непрерывная кривая в $\mathcal{M}$.*

*Доказательство.* По лемме 3.1, $\mathrm{diam}[\gamma(t)]$, $t \in [a,b]$, — непрерывная функция на отрезке (компакте), поэтому она ограниченная. Также ограниченной является непрерывная функция $\lambda(t)$. Пусть $\lambda(t) < M$, $\mathrm{diam}[\gamma(t)] < M$ для любого $t$. В силу непрерывности $\gamma(t)$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $t$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что если $|t - t_0| < \delta_1$, то $d_{GH}(\gamma(t), \gamma(t_0)) < \varepsilon$. А в силу непрерывности $\lambda(t)$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$, для любого $t$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что если $|t - t_0| < \delta_2$, то $|\lambda(t) - \lambda(t_0)| < \varepsilon$. Тогда, если положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, и если $|t - t_0| < \delta$, то, применяя неравенство треугольника в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ [1] и пользуясь 2.3, 2.7 и 2.8, имеем

$$d_{GH}\Big(\lambda(t)\gamma(t),\ \lambda(t_0)\gamma(t_0)\Big) \le d_{GH}\Big(\lambda(t)\gamma(t),\ \lambda(t)\gamma(t_0)\Big) + d_{GH}\Big(\lambda(t)\gamma(t_0),\ \lambda(t_0)\gamma(t_0)\Big) \le$$

$$\le \lambda(t)\ d_{GH}\Big(\gamma(t),\ \gamma(t_0)\Big) + 1/2\ |\lambda(t) - \lambda(t_0)|\ \mathrm{diam}[\gamma(t_0)]\ \le \varepsilon\ \Big(\lambda(t) + 1/2\ \mathrm{diam}[\gamma(t)]\Big)\ < 2\varepsilon M.$$

□

**Лемма 3.3.** *Кратчайшая кривая $\gamma$, соединяющая пару произвольных точек $A$ и $B$ из $\mathcal{M}$ с ненулевым диаметром (т.е. отличных от $\Delta_1$), не проходит через $\Delta_1$.*

*Доказательство.* Допустим, что $\gamma$ проходит через $\Delta_1$. В таком случае она не будет кратчайшей, так как, с одной стороны, согласно 2.1, $d_{GH}(A, B) \le 1/2\ \max\{\mathrm{diam}[A], \mathrm{diam}[B]\}$, а, с другой, согласно 2.3 и [2], длина кривой $\gamma$ будет равна $d_{GH}(A, \Delta_1) + d_{GH}(B, \Delta_1)$, что строго больше, чем $1/2\ \max\{\mathrm{diam}[A], \mathrm{diam}[B]\}$. Противоречие. □

**Лемма 3.4** ([1])**.** *Искажение каждого соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ для компактных $X$ и $Y$ достигается на некоторой паре $\big((x,y),(x',y')\big)$, $(x,y),(x',y') \in R$.*

**Теорема 1.** *Любая сфера с центром в одноточечном компакте $\Delta_1$ линейно связна.*

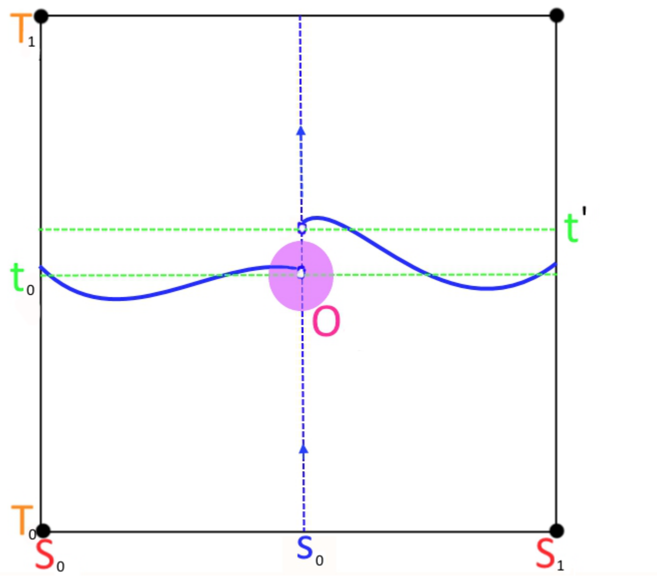
*Доказательство.* Пусть $S$ — сфера радиуса $r > 0$ с центром в одноточечном компакте $\Delta_1$. Рассмотрим $A$ и $B \in S$. В силу 2.4, их соединяет некоторая кратчайшая кривая $\gamma$. По лемме 3.3, диаметр всех точек $\gamma$ ненулевой. Зададим отображение $\delta\colon [a,b] \to \mathcal{M}$ следующим образом: $\delta\colon t \mapsto \big(2r/\mathrm{diam}[\gamma(t)]\big)\gamma(t)$. В силу лемм 3.1 и 3.3, $2r/\mathrm{diam}[\gamma(t)]$ — непрерывная ограниченная функция, тогда в силу леммы 3.2, получаем, что $\delta(t)$ — непрерывная кривая. При этом вся кривая $\delta$ лежит в $S$. В силу произвольности $A$ и $B$ получаем, что любая сфера с центром в $\Delta_1$ линейно связна. □

В дальнейшем нам потребуется следующие технические леммы.

**Лемма 3.5.** *Пусть* $F\colon [T_0, T_1] \times [S_0, S_1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *при каждом* $s \in [S_0, S_1]$ *функция* $f_s(t) = F(t, s)$ *строго монотонна, и*

(2) *существует такое* $r$*, что при всех* $s \in [S_0, S_1]$ *выполнятеся* $F[T_0, s] < r < F[T_1, s]$*. Тогда множество* $\{F = r\}$ *— образ вложенной непрерывной кривой.*




Допуск разрыва

*Доказательство.* В силу строгой монотонности функции $f_s(t)$ и условия $f_s(T_0) < r < f_s(T_1)$, при каждом $s$ существует и единственно $t_s$ такое, что $f_s(t_s) = r$. Положим $\gamma(s) = (t_s, s)$ и покажем, что отображение $\gamma$ непрерывно. Пусть $\gamma(s)$ разрывна в некоторой точке $s_0$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдётся точка $s_\delta$, для которой $||\gamma(s_0) - \gamma(s_\delta)||_{\mathbb{R}^2} > \varepsilon$, при этом $|s_\delta - s_0| < \delta$. Обозначим открытую $\varepsilon$-окрестность точки $\gamma(s_0)$ через $O_\varepsilon$. Заметим, что из компактности $\Omega$ следует компактность $\Omega \setminus O_\varepsilon$. Фиксируем $\varepsilon$ и положим $\delta_n = 1/n$. Получим последовательность $\gamma(s_{\delta_n})$. Все точки $\gamma(s_{\delta_n})$ будут лежать в $\Omega \setminus O_\varepsilon$. В силу компактности множества $\Omega \setminus O_\varepsilon$, эта последовательность сходится к некоторой точке $(t', s_0)$, для которой $|t' - t_{s_0}| \geq \varepsilon$, и $F(t', s_0) = r$. Таким образом, $f_{s_0}(t_{s_0}) = r$ и $f_{s_0}(t') = r$, что противоречит строгой монотонности функции $f_{s_0}$. □

**Лемма 3.6.** *Пусть даны произвольные* $C, G \in \mathcal{M}$ *такие, что* $d_{GH}(G, C) > \operatorname{diam}[G]/2$*. Тогда функция* $F(\lambda) := d_{GH}(G, \lambda C)$ *строго монотонно возрастает при* $\lambda \geq 1$*.*

*Доказательство.* По лемме 3.4 существуют $(c_1, g_1), (c_2, g_2) \in R$, на которых достигается искажение соответствия $R$, откуда

$$\operatorname{dis} R = \big||c_1c_2| - |g_1g_2|\big| \geq 2d_{GH}(G, C) > \operatorname{diam} G.$$

Так как $|g_1g_2| - |c_1c_2| \le \operatorname{diam} G$, то $\operatorname{dis} R = |c_1c_2| - |g_1g_2| > 0$ и, значит, для любого $\lambda \ge 1$ выполняется $\lambda|c_1c_2| - |g_1g_2| > 0$.

Для каждого соответствия $R \in \mathcal{R}(G, C)$ и $\lambda > 0$ через $R_\lambda$ будем обозначать то же самое $R$, но рассматриваемое, как элемент из $\mathcal{R}(G, \lambda C)$. Тогда для любого $\lambda \ge 1$ имеем

$$\operatorname{dis} R_\lambda = \sup\Big\{ \big|\lambda|c_1'c_2'| - |g_1'g_2'|\big| : (c_1', g_1'), (c_2', g_2') \in R \Big\} \ge \big|\lambda|c_1c_2| - |g_1g_2|\big| = \\ = \lambda|c_1c_2| - |g_1g_2| \ge |c_1c_2| - |g_1g_2| > \operatorname{diam} G.$$

Отсюда, аналогично проделанному выше, получаем, что если искажение соответствия $R_\lambda$ достигается на $(c_1^\lambda, g_1^\lambda), (c_2^\lambda, g_2^\lambda) \in R$, то $\operatorname{dis} R_\lambda = \lambda|c_1^\lambda c_2^\lambda| - |g_1^\lambda g_2^\lambda| > 0$ и, значит, для любого $\lambda' \ge \lambda$ выполняется $\lambda'|c_1^\lambda c_2^\lambda| - |g_1^\lambda g_2^\lambda| > 0$.

Пусть теперь $1 \le \lambda_1 < \lambda_2$, тогда

$$\operatorname{dis} R_{\lambda_2} \ge \big|\lambda_2|c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_1}| - |g_1^{\lambda_1}g_2^{\lambda_1}|\big| = \lambda_2|c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_1}| - |g_1^{\lambda_1}g_2^{\lambda_1}| > \lambda_1|c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_1}| - |g_1^{\lambda_1}g_2^{\lambda_1}| = \operatorname{dis} R_{\lambda_1},$$

так что для каждого $R \in \mathcal{R}(G, C)$ функция $\operatorname{dis} R_\lambda$ параметра $\lambda$ строго монотонно растет при $\lambda \ge 1$.

Пусть снова $1 \le \lambda_1 < \lambda_2$, а $R$ — такое соответствие, на котором достигается $d_{GH}(G, \lambda_2 C)$. Тогда

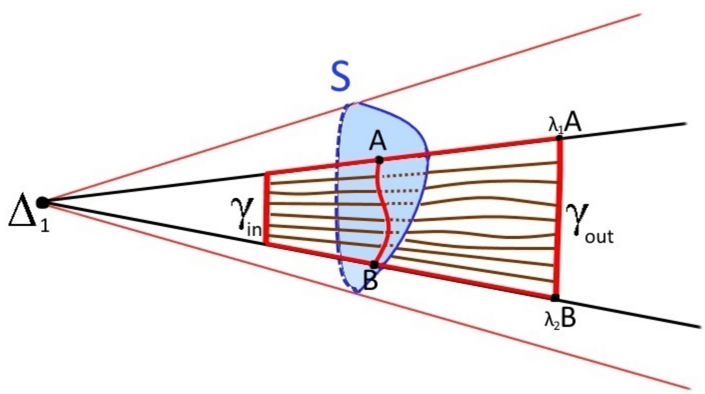
$$2d_{GH}(G, \lambda_2 C) = \operatorname{dis} R_{\lambda_2} > \operatorname{dis} R_{\lambda_1} \ge 2d_{GH}(G, \lambda_1 C),$$

что и требовалось доказать.

□

Теперь мы докажем линейную связность сферы достаточно большого радиуса, с центром в произвольной точке $G \in \mathcal{M}$.

**Теорема 2.** *Любая сфера $S \in \mathcal{M}$ с центром в $G \in \mathcal{M}$ и с радиусом $r > \operatorname{diam}[G]$ линейно связна.*



Наглядное представление доказательсва

*Доказательство.* Рассмотрим пару произвольных точек $A$ и $B$, лежащих на сфере $S \in \mathcal{M}$ радиуса $r$. Так как $r > \mathrm{diam}[G]$, то $A$ и $B$ отличны от $\Delta_1$, поэтому существуют $\lambda_1, \lambda_2$, для которых $\mathrm{diam}[\lambda_1 A] = \mathrm{diam}[\lambda_2 B] = 3r$. Через $\gamma_{out}(s)$, $s \in [S_0, S_1]$, обозначим непрерывную кривую, состоящую из метрических пространств с одним и тем же диаметром, определённую нами в доказательстве теоремы 1, такую, что $\gamma_{out}(S_0) = \lambda_1 A$ и $\gamma_{out}(S_1) = \lambda_2 B$. Согласно предположению 2.2, для любого $s \in [S_0, S_1]$ верно, что

$$\big|\mathrm{diam}[\gamma_{out}(s)] - \mathrm{diam}[G]\big| = 3r - \mathrm{diam}[G] \le 2d_{GH}\big(\gamma_{out}(s), G\big).$$

Так как $r > \mathrm{diam}[G]$, то $2d_{GH}\big(\gamma_{out}(s), G\big) > 2r$, поэтому кривая $\gamma_{out}$ не пересекает сферу $S$, и, более того, лежит вне шара, ограниченного этой сферой.

Из предложения 2.1 вытекает, что для каждого $V \in S$ выполняется

$$r = d_{GH}(G, V) \le \frac{1}{2}\max\Big\{\mathrm{diam}[G], \mathrm{diam}[V]\Big\} = \frac{1}{2}\mathrm{diam}[V]$$

(максимум не может достигаться на $\mathrm{diam}[G]$, так как $r > \mathrm{diam}[G]$). В итоге, для любого $V \in S$ выполняется $\mathrm{diam}[V] \ge 2r$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такой, что $r > \mathrm{diam}[G] + \varepsilon$ $\big($он существует в силу условия $r > \mathrm{diam}[G]\big)$. Для любого $V \in S$ получаем, что

$$2\mathrm{diam}[V] \ge 2r > 2\big(\mathrm{diam}[G] + \varepsilon\big).$$

Теперь построим непрерывную кривую внутри шара, ограниченного сферой $S$. Положим $\gamma_{in} = \frac{(2\mathrm{diam}[G]+\varepsilon)}{3r}\gamma_{out}$. Это будет непрерывная кривая, состоящая из метрических пространств одного и того же диаметра, равного $2\mathrm{diam}[G] + \varepsilon$. Исходя из предложений 2.2 и 2.1 получаем, что для любого $s \in [S_0, S_1]$ имеет место

$$\big|\mathrm{diam}[G] - \mathrm{diam}[\gamma_{in}(s)]\big| \le 2d_{GH}\big(\gamma_{in}(s), G\big) \le \max\Big\{\mathrm{diam}[\gamma_{in}(s)], \mathrm{diam}[G]\Big\}.$$

Так как $\mathrm{diam}[\gamma_{in}(s)] = 2\mathrm{diam}[G] + \varepsilon$ для любого $s \in [S_0, S_1]$, то

$$\big|\mathrm{diam}[G] - \mathrm{diam}[\gamma_{in}(s)]\big| = \mathrm{diam}[\gamma_{in}] - \mathrm{diam}[G] = \big(2\mathrm{diam}[G] + \varepsilon\big) - \mathrm{diam}[G] > \mathrm{diam}[G].$$

Вспомнив, что $r > \mathrm{diam}[G] + \varepsilon$, получаем для любого $s \in [S_0, S_1]$

$$\max\Big\{\mathrm{diam}[\gamma_{in}(s)], \mathrm{diam}[G]\Big\} = \max\Big\{2\mathrm{diam}[G] + \varepsilon, \mathrm{diam}[G]\Big\} = 2\mathrm{diam}[G] + \varepsilon < 2r.$$

Из вышеперечисленных неравенств делаем вывод, что для любого $s \in [S_0, S_1]$

$$\mathrm{diam}[G] < 2d_{GH}\big(\gamma_{in}(s), G\big) < 2r.$$

Таким образом, кривая $\gamma_{in}(s)$ лежит внутри шара, ограниченного сферой $S$, и $d_{GH}\big(\gamma_{in}(s), G\big) > \frac{1}{2}\mathrm{diam}[G]$ для любого $s \in [S_0, S_1]$.

Положим $\gamma = \gamma_{out}/3r$ и введём функцию $F[t, s] = d_{GH}\big(G, t\gamma(s)\big)$. Заметим, что кривая $\gamma$ состоит из пространств $\gamma(s)$ единичного диаметра, а функция $F[t, s]$ непрерывна на компакте $\Omega = [T_0, T_1] \times [S_0, S_1] \in \mathbb{R}^2$, где $T_0 = \mathrm{diam}[\gamma_{in}], T_1 = \mathrm{diam}[\gamma_{out}]$, причём для любого $s \in [S_0, S_1]$ выполняется $F[T_0, s] < r$ и $F[T_1, s] > r$.

Так как $F[T_0, s] > \frac{1}{2}\mathrm{diam}[G]$ для любого $s \in [S_0, S_1]$, то согласно лемме 3.6, функция $F[t, s]$ строго монотонна по $t$, поэтому в силу леммы 3.5 существует непрерывная кривая $w[s]$, такая, что $d_{GH}\big(w[s], G\big) = r$ для любого $s \in [S_0, S_1]$.

Итак, мы построили непрерывную кривую $w$, лежащую на сфере $S$. Покажем, что $w[S_0] = A$. Действительно, с одной стороны, $w[S_0]$ принадлежит лучу $\lambda A$, а, с другой стороны, выполняется $d_{GH}\big(w[S_0], G\big) = r$, но такая точка единственна в силу леммы 3.6. Аналогично $w[S_1] = B$. В силу произвольности $A$ и $B$ получаем, что сфера $S$ — линейно связна.

$\square$

## Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии, 2004.* ISBN: 5-93972-300-4.

[2] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv:1504.03830, 2015.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv:1603.08850, 2016.