Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Оптимальное положение компактов в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа

Optimal position of compacts in the spaces with Euclidean Gromov-Hausdorff metric

Выполнила студентка 4 курса
О.С.Малышева
Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. А.А. Тужилин

г.Москва

2017

Оптимальное положение компактов в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа.

Введение

Метрика Хаусдорфа — это функция расстояния Хаусдорфа на множестве всех ограниченных и замкнутых подмножеств метрического пространства. Впервые упоминания о ней появляются в книге «Теория множеств» Хаусдорфа. Определил её Дэвид Эдвардс, опубликовав статью в 1975 году [1]. Он также обнаружил некоторые свойства метрики. А в 1981 году советский по происхождению, а позже французский математик, М.Л.Громов заново ввел специальное расстояние между произвольными метрическими пространствами, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа [2], дав определение, эквивалентное определению Эдвардса. Это обобщение метрики Хаусдорфа. Говоря неформально, метрика Громова–Хаусдорфа позволяет выяснить, насколько «хорошо» можно совместить два метрических пространства. Она имеет практическое применение и играет важную роль в теории распознавания образов.

Facundo Memoli, изучавший свойства этой метрики, посвятил ей несколько статей, в том числе в [7] рассматривается метрика Громова–Хаусдорфа в евклидовых пространствах, она сравнивается с метрикой Громова–Хаусдорфа в произвольных метрических пространствах, даются некоторые утверждения о связи двух метрик, оценки. Вообще, метрика Громова–Хаусдорфа определяется как инфимум расстояния по Хаусдорфу по результатам изометрического вложения в метрические пространства, а в случае евклидово инвариантной метрики Громова–Хаусдорфа ограничиваемся только изометрическими вложениями в конкретное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, или такими вложениями, которые отличаются на сохраняющее ориентацию движение $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что компакт находится в s-положении между двумя другими компактами, если он находится в положении «между» ними и удален на расстояние s от первого из них, см.ниже. В дипломной работе А.Кисловской рассматриваются псевдоконфигурации: такие пары компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, что в s-положении количество компактов конечно. Также приведены примеры псевдоконфигураций в пространствах, наделенных этой метрикой, и утверждения о связи количества компактов в s-положении относительно двух метрик [8].

В настоящей статье основное внимание уделяется евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа. Это — метрика на множестве непустых компактов в евклидовом пространстве, рассматриваемых с точностью до (сохраняющего ориентацию) движения. Будем работать с группой движений, сохраняющих ориентацию, $G = Iso_+(\mathbb{R}^n)$, действующей на пространстве $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, наделенном метрикой Хаусдорфа. Пространство $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ расслаивается на орбиты этого действия — непустые компакты, рассматриваемые с точностью до движения. На полученном пространстве орбит вводится стандартным образом функция расстояния как точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа между точками орбит. Получаем факторпространство $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)/G$, свойства которого изучаются. Для нахождения минимального расстояния, о котором говорилось выше, необходимо понять, при каких условиях оно достигается. Поэтому также рассматриваются примеры оптимальных положений — в которых достигается минимум расстояния по Хаусдорфу — различных пар компактов.

В случаях, когда один из компактов — одноточечный, изучение оптимальных положений приводит к понятию чебышевского центра, так как помещение одноточечного компакта в чебышевский центр произвольного компакта и есть оптимальное положение этой пары. Вопрос существования и единственности чебышесвких центров поднимался в работах различных специалистов в области геометрии и функционального анализа. Так, в [5] обобщается понятие чебышевского центра и изучаются конечные сети для ограниченных подмножеств плоскости и сферы. Е.Н. Сосовым получены достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустых ограниченных множеств геодезических пространств [6]. Некоторые результаты помогли установить связь оптимальных положений гомотетичных компактов с чебышевскими центрами.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1 Основные определения и предварительные результаты

Всюду ниже M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d, $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M, а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M. Обозначим через G группу движений в $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента будем считать эквивалентными, если один из другого получается движением $O \in G$. Обозначим через $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ пространство таких классов эквивалентности.

Определение 1.1. *Замкнутой r-окрестностью $B_r(x)$ точки $x \in M$* называется множество $\{y \in M : d(x,y) \le r\}$.

Определение 1.2. Определим *расстояние от точки y до произвольного множества $A \in \mathcal{P}(M)$*: $d(y, A) = \inf_{a\in A}\{d(y,a)\}$.

Определение 1.3. *Замкнутой окрестностью $B_r(A)$ радиуса r множества $A \in \mathcal{P}(M)$* называется множество $\{y \in M : d(y, A) \le r\}$.

Определение 1.4. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\Big\{r : \big(A \subseteq B_r(B)\big) \wedge \big(B \subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Замечание 1.5. Хорошо известно, что d_H является метрикой на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства [3].

Определение 1.6. Пусть A и B — элементы $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. *Расстоянием в евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A,B) = \inf_{O\in G}\Big\{\mathrm{d}_H(A, OB)\Big\}.$$

Определение 1.7. Движение $O \in G$, на котором достигается $d_{EGH}(A, B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A, OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Замечание 1.8. *Оптимальное движение всегда существует [7], а d_{EGH} порождает метрику на $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, которую мы будем обозначать тем же образом.*

Определение 1.9. *Чебышевский центр* множества $A \in \mathcal{H}(M)$ — это центр шара в M с наименьшим возможным радиусом, которому принадлежит A; радиус этого шара называется *чебышевским радиусом.*

Можно понимать чебышевский центр множества как центр минимального по включению шара, содержащего множество.

Для любого компактного подмножества $\mathbb{R}^n$ чебышевский центр существует и определен однозначно [4].

Замечание 1.10. Для центрально-симметричных компактов в $\mathbb{R}^n$ чебышевский центр совпадает с центром симметрии. (Если бы это было не так, то его центрально-симметричная копия также являлась бы чебышевским центром, что противоречит единственности.)

Замечание 1.11. Чебышевский центр в общем случае не единственный. Например, рассмотрим в качестве M плоскость с манхеттенским расстоянием, заданным нормой $|(x,y)|=|x|+|y|$, возьмем в качестве A двухточечное множество $A=\{(0,0),(1,1)\}$, тогда множество чебышевских центров — это отрезок $[(1,0),(0,1)]$.

Определение 1.12. Пусть A, B, C — точки некоторого метрического пространства с метрикой d. Говорят, что точка C находится *между* точками A и B, если

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B).$$

Определение 1.13. Точка C находится в *s-положении между точками A и B*, если она лежит между ними и $d(A, C) = s$, где $0 \leq s \leq d(A, B)$.

2 Примеры оптимальных положений

Рассмотрим несколько примеров оптимальных положений пар компактов в $\mathbb{R}^n$.

Для начала приведем тривиальную лемму.

Лемма 2.1. *Пусть A и B — компакты некоторого метрического пространства. Тогда $d_H(A, B) = r$, если и только если $A \subseteq B_r(B)$, $B \subseteq B_r(A)$, и для любого $0 < s < r$ по крайней мере одно из условий $A \subseteq B_s(B)$ и $B \subseteq B_s(A)$ не выполняется.*

Предложение 2.2. *Пусть $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $B = \{b\} \in \mathbb{R}^n$. Тогда компакты находятся в оптимальном положении, если и только если b совпадает с чебышевским центром компакта A.*

Доказательство. Поместим b в чебышевский центр компакта A. Положим $r = d_H(A, B)$, тогда r — радиус минимального замкнутого шара, содержащего компакт A, таким образом, r — чебышевский радиус. Покажем, что для любой $b' \neq b$ имеем $d_H(A, \{b'\}) > r$. Пусть это не так, то есть существует $b' \neq b$, для которой $d_H(A, \{b'\}) \leq r$. Из предыдущей леммы вытекает, что $A \subseteq B_r(b')$, поэтому b' — чебышевский центр, что противоречит его единственности в $\mathbb{R}^n$ [2]. $\square$

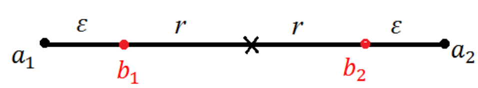
Из предложения 2.2 вытекают следующие результаты.

Следствие 2.3. *Любое компактное подмножество отрезка, содержащее его граничные точки, в паре с одноточечным находится в оптимальном положении тогда и только тогда, когда одноточечный помещен в центр отрезка.*

Следствие 2.4. *В оптимальном положении трехточечного и одноточечного компактов одноточечный компакт есть центр описанной окружности треугольника, образованного трехточечным компактом, если треугольник остроугольный или прямоугольный, либо середина наибольшей стороны.*

Предложение 2.5. *Пусть $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$. Компакты A и B находятся в оптимальном положении, если и только если их центры совмещены и точки обоих компактов находятся на одной прямой.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $2R = d(a_1, a_2) \geq d(b_1, b_2) = 2r$. Совместим центры компактов так, чтобы точки a_1, b_1, b_2, a_2 оказались в таком порядке на одной прямой. Положим $\varepsilon = R - r$. В этом положении $d_H(A, B) = \varepsilon$.

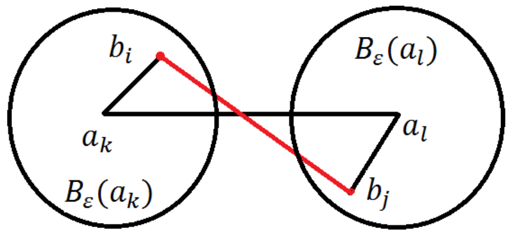


Пусть существует другое положение $\{b'_1, b'_2\}$ компакта B относительно компакта A такое, что $d_H(A, B) \leq \varepsilon$. Покажем, что в этом случае выполнено:

$d(a_1, b'_1) \leq \varepsilon$ и $d(a_2, b'_2) \leq \varepsilon$, и тогда $b'_1 \in B_\varepsilon(a_1)$, $b'_2 \in B_\varepsilon(a_2)$ (или $b'_2 \in B_\varepsilon(a_1)$, $b'_1 \in B_\varepsilon(a_2)$ — с точностью до переименования точек компакта B).

Действительно, в противном случае, когда $d(a_1, b'_1) \leq \varepsilon$ и $d(a_1, b'_2) \leq \varepsilon$ или $d(a_2, b'_1) \leq \varepsilon$ и $d(a_2, b'_2) \leq \varepsilon$, компакт B полностью содержится в ε-окрестности одной из точек a_i компакта A, и тогда, так как $d_H(A, B) \leq \varepsilon$, то одна из точек b'_1 и b'_2 также принадлежит ε-окрестности второй точки a_j компакта A, но эти окрестности не пересекаются, так как $\varepsilon = R - r < d(a_1, a_2)/2$.

Итак, в ε-окрестности каждой точки компакта A лежит ровно одна точка компакта B. Тогда для любых $b'_1 \in B_\varepsilon(a_1)$ и $b'_2 \in B_\varepsilon(a_2)$ выполняется $d(b'_1, b'_2) \geq 2r$, причем равенство достигается, только когда точки b'_1 и b'_2 лежат на прямой, соединяющей a_1 и a_2.



Значит, точки компакта B — ближайшие точки границ ε-окрестностей точек a_1 и a_2, и расстояние по Хаусдорфу между компактами равно полуразности длин отрезков. Таким образом, оптимальное положение двух двухточеных компактов — это совмещение их центров, указанное выше. □

Следствие 2.6. *Отрезки $A = [A_1, A_2]$ и $B = [B_1, B_2]$ находятся в оптимальном положении тогда и только тогда, когда совмещены их середины и отрезки лежат на одной прямой. В частности, $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}|d(A_1, A_2) - d(B_1, B_2)|$.*

Для доказательства следствия будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 2.7. *Пусть $I = [P, Q] \subset \mathbb{R}^d$ — произвольный отрезок и $B_r(I)$ — его замкнутая r-окрестность. Тогда множество $B_r(I)$ выпукло, и для любых $C, D \in B_r(I)$ выполняется $d(C, D) \le d(P, Q) + 2r$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $[C, D]$ — отрезок длины $d(P, Q) + 2r$, лежащий на прямой PQ, а его середина совпадает с серединой I.*

Доказательство. Окрестность отрезка наименьшей длины — это цилиндр, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в концах отрезка. Так как все точки этой окрестности удалены от точек отрезка не более, чем на r, то для точки C существует точка $P' \in [PQ]$, такая что $d(C, P') \le r$, и для D существует $Q' \in [PQ]$ такая, что $d(D, Q') \le r$. Тогда $d(C, P') + d(P', Q') + d(Q', D) \le 2r + d(P', Q') \le 2r + d(P, Q)$. В последнем неравенстве равенство достигается, когда $\{P', Q'\} = \{P, Q\}$; не ограничивая общности, $P = P'$ и $Q = Q'$. Тогда, в этом предположении, получаем $d(C, D) \le 2r + d(P, Q)$, где равенство достигается, когда $d(C, P) = d(D, Q) = r$. Осталось заметить, что величина $d(C, D)$ может принимать это максимальное значение, и это происходит в точности тогда, когда точки и D лежат на пересечении прямой, содержащей I, и граничных сфер окрестностей $B_r(P)$ и $B_r(Q)$. Это и означает, что отрезки $[P, Q]$ и $[C, D]$ лежат на одной прямой, и их середины совмещены. □

Теперь обратимся к следствию 2.6.

Доказательство. Пусть $2R = d(A_1, A_2) \ge d(B_1, B_2) = 2r$. Покажем, что описанное в предложении положение оптимально. По лемме 2.7, отрезок наибольшей длины можно движениями поместить в окрестность второго отрезка, только когда ее радиус не меньше полуразности отрезков. В таком положении $d_H(A, B) \geq R - r$. Обратно, расстояние между любыми двумя точками A_1' и A_2' из $(R-r)$-окрестности компакта B не превосходит $2R$, опять же по лемме 2.7, и это расстояние достигается, только когда точки A_1' и A_2' лежат на прямой, содержащей $[B_1, B_2]$, и середины отрезков $[B_1, B_2]$ и $[A_1', A_2']$ совпадают. Значит, отрезок $[A_1', A_2']$ — это результат движения отрезка той же длины $[A_1, A_2]$, и других оптимальных взаимных расположений отрезков $[B_1, B_2]$ и $[A_1, A_2]$ не существует.

□

Предложение 2.8. *Оптимальное положение шаров A и B одинаковой максимальной размерности — это совмещение их центров.*

Доказательство. Будем считать, что радиус шара A равен R, радиус шара B равен r и $R > r$. Совместим центры шаров, тогда $d_H(A, B) = R - r$. Пусть существует иное положение шаров, при котором расстояние между ними не увеличивается. Пусть при этом $d(O_1, O_2) = \varepsilon > 0$, где O_1 и O_2 — центры A и B соответственно. Пусть N — та из двух точек пересечения границы шара A и прямой O_1O_2, которая находится дальше от O_2. Тогда ближайшая к N точка компакта B — это точка M из пересечения прямой O_1O_2 с границей шара B (та, которая лежит на отрезке $[N, O_2]$). Тогда $d_H(A, B) \leq d(M, N) = R + \varepsilon - r > R - r$. Противоречие. Значит, больше оптимальных положений нет, и единственное возможное — это совмещение центров. □

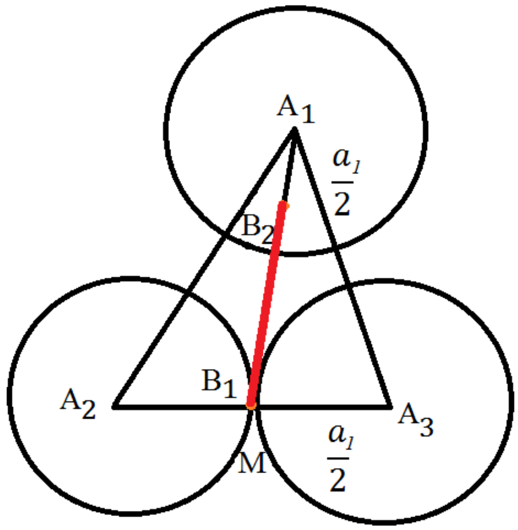
Во всех вышеописанных примерах мы видим, что оптимальное положение компактов — это совмещение чебышевских центров. Возникает вопрос: всегда ли это так? Рассмотрим еще один пример оптимального положения, дающий отрицательный ответ на этот вопрос.

Предложение 2.9. *Рассмотрим трехточечный компакт $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ и двухточечный компакт $B = \{B_1, B_2\}$, где $d(B_1, B_2) = d$. Пусть $a_3 = d(A_1, A_2)$, $a_1 = d(A_2, A_3)$, $a_2 = d(A_3, A_1)$ и $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, точка M — середина $[A_2, A_3]$. Пусть $d(M, A_1) \in [d - \frac{a_1}{2}, d + \frac{a_1}{2}]$. Тогда оптимальное взаимное расположение компактов A и B описывается, с точностью до нумерации точек компакта B, следующим образом:*

1) *если $a_1 < a_2 \leq a_3$, то B_1 необходимо поместить в середину $[A_2, A_3]$, а B_2 — в круг $B_{\frac{a_1}{2}}(A_1)$;*

2) *если $a_1 = a_2 < a_3$, то B_1 нужно поместить или в середину $[A_2, A_3]$, или в середину $[A_1, A_3]$, а B_2 нужно соответственно поместить в круг $B_{\frac{a_1}{2}}(A_1)$ или $B_{\frac{a_1}{2}}(A_2)$;*

3) *если $a_1 = a_2 = a_3$, то B_1 нужно поместить в середину любой стороны $[A_i, A_j]$, а B_2 — в "оставшийся круг" $B_{\frac{a_1}{2}}(A_k)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.*



Доказательство. Покажем, что расстояние по Хаусдорфу между компактами A и OB, где O — некоторое движение плоскости, сохраняющее ориентацию, не может быть меньше $a_1/2$.

Предположим противное, т.е. что $d_H(A, OB) < \frac{a_1}{2}$, и выберем произвольное ε такое, что $d_H(A, OB) < \varepsilon < \frac{a_1}{2}$. Тогда $B_\varepsilon(A) = \cup_{i=1}^{3} B_\varepsilon(A_i) \supset OB$. Так как круги $B_\varepsilon(A_i)$ не пересекаются, один из них, скажем, $B_\varepsilon(A_k)$, не содержит точек из OB. Но тогда $A_k \notin B_\varepsilon(OB)$, противоречие. Таким образом, $d_{EGH}(A, B) \geq \frac{a_1}{2}$. С другой стороны, для каждого описанного в формулировке предложения взаимного расположения компактов A и B имеем $d_H(A, B) = \frac{a_1}{2}$, так что для всех таких компактов B выполняется $d_{EGH}(A, B) = \frac{a_1}{2}$, поэтому все эти взаимные расположения компактов A и B оптимальны.

Покажем теперь, что других оптимальных расположений нет. Заметим, что при оптимальном взаимном расположении компактов A и B, две точки B_1 и B_2 должны содержаться во всех трех шарах $B_{a_1/2}(A_i)$. Это означает, что одна из точек, скажем B_1, должна быть общей у двух шаров. Тогда она — точка касания этих шаров, а касание происходит только в середине стороны треугольника, длина которой равна a_1. Если такая сторона одна, то необходимо поместить B_1 в ее середину. Если таких сторон длины a_1 две или три, поместим B_1 в середину любой из них. Заметим, что при каждом выборе расположения точки B_1 вторая точка B_2 может быть помещена в оставшийся шар в силу условия на длину отрезка $[B_1, B_2]$. Вне оставшегося шара точку B_2 поместить нельзя, иначе расстояние по Хаусдорфу будет больше, чем $a_1/2$. Таким образом, всегда реализуется один из описанных случаев предложения.

□

Замечание 2.10. В указанной конструкции чебышевский центр компакта A совсем не обязан лежать на отрезке $[M, A_1]$, где лежит чебышевский центр компакта B, поэтому, вообще говоря, чебышевские центры компактов A и B не совпадают.

Замечание 2.11. Приведенный только что пример оптимального положения также является примером, когда оптимальное положение не единственно, их даже континуум.

Приведем еще один пример, показывающий, что оптимальное положение компактов — не обязательно совмещение чебышевских центров.

Предложение 2.12. *Положение n-мерного шара B радиуса r и отрезка $A = [A_1, A_2]$, длина которого не превышает диаметр шара $2r$, оптимально, если и только если оно представляет собой совмещение центра шара с некоторой точкой отрезка.*

Доказательство. Окрестность отрезка в $\mathbb{R}^n$ — это цилиндр, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в концах отрезка. Следовательно, если поместить центр шара B на отрезок A, то шар B окажется в r-окрестности отрезка A. Кроме того, в силу предположения на соотношение между длиной отрезка A и диаметром шара B, при таком расположении отрезок A окажется в r-окрестности шара B, так что расстояние Хаусдорфа между такими A и B равно r. С другой стороны, если центр шара B не лежит на A, то шар B не попадает в r-окрестность отрезка A (см. доказательство предложения 2.8), поэтому между такими A и B расстояние Хаусдорфа больше r.

$\square$

При этом, совмещение чебышевских центров компактов в последнем примере также дает оптимальное положение.

Предложение 2.13. *Пусть даны компакты $A = [A_1, A_2]$ и B — n-мерный шар радиуса r. Тогда d_{EGH} зависит от длины отрезка: при $d(A_1, A_2) \le 4r$ имеем $d_{EGH}(A, B) = r$, при $d(A_1, A_2) \ge 4r$ выполняется $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$. При этом, в первом случае положение компактов A и B оптимально, если и только если центр шара B находится на отрезке A так, что длина каждой связной компоненты множества $A \setminus B$ не превышает r. Во втором случае положение компактов A и B оптимально, если и только если центр шара B лежит в середине отрезка A.*

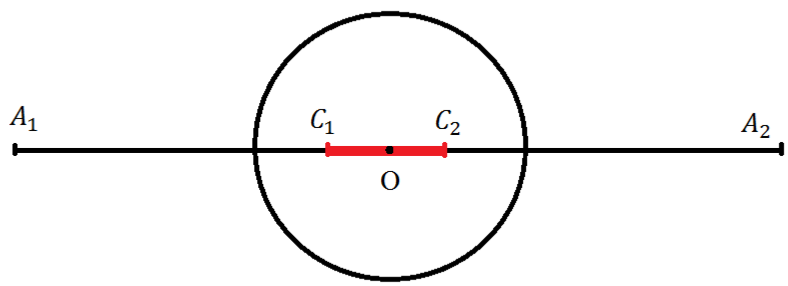
Доказательство. Если $d(A_1, A_2) \ge 4r$, покажем, что $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$. Предположим, существует движение плоскости O, сохраняющее ориентацию, такое, что $d_H(A, OB) = d < \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$. Значит, $A \subset B_d(B)$. Так как d-окрестность шара — это шар с тем же центром радиуса $r + d$, то максимальная длина отрезка, который может содержаться в этом шаре, равна $2(r + d) < d(A_1, A_2)$ — противоречие. Значит, $d_H(A, OB) \ge \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$, где равенство достигается, если поместить центр шара в середину отрезка, поэтому $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$, и указанное расположение компактов оптимально. Оно единственно, так как если A и B находятся в оптимальном положении, и $d = d_H(A, B)$, то, как мы только что показали, длина отрезка $[A_1, A_2]$ равна диаметру шара $B_d(B)$, а такой отрезок содержится в этом шаре, если и только если его середина — центр шара.

Пусть $d(A_1, A_2) \le 4r$. Предположим, существует движение плоскости O, сохраняющее ориентацию, такое, что $d_H(A, OB) = d < r$. Значит, $B \subset B_d(A)$. Так как d-окрестность отрезка — это цилиндр, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в A_1 и A_2 и радиуса d, то максимальный радиус шара, который можно поместить в эту окрестность, равен d, противоречие. Значит, $d_H(A, OB) \ge r$, где равенство достигается, если поместить центр шара в некоторую точку отрезка так, чтобы длины отрезков $[A_i, C_i]$, где C_i — соответственные точки пересечения A и граничной сферы шара B, не превышали r. Поэтому $d_{EGH}(A, B) = r$, и указанное расположение компактов оптимально. Других оптимальных положений нет, так как если центр шара B не лежит на прямой, содержащей отрезок $[A_1, A_2]$, то шар не попадает в r-окрестность отрезка. Иначе $d_{EGH}(A, B) = r$, если и только если A содержится в r-окрестности B, т.е. длины отрезков $[A_i, C_i]$ не превосходят r.

$\square$

В работе С. Илиадиса, А.О.Иванова и А.А.Тужилина [9] показано, как можно изометрично вложить конечное метрическое пространство в пространство Громова-Хаусдорфа. Тот же вопрос о счетных метрических пространствах остается открытым, как и вопрос реализации метрических пространств в евклидовых пространствах с метрикой Громова-Хаусдорфа. Мы покажем, как это сделать для трехточечного пространства.

Предложение 2.14. *Рассмотрим пространство* $\{M_1, M_2, M_3\}$ *с заданными расстояниями* $d(M_2, M_3) = a$, $d(M_1, M_3) = b$, $d(M_1, M_2) = c$, $a \geq b \geq c$. *Тогда в качестве реализации данного пространства в пространстве* $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n), n \geq 2$, *наделенном метрикой* d_{EGH}, *можно взять отрезок* $A = [A_1, A_2]$ *длины* $2(a+b)$, *шар* B *радиуса* b *и отрезок* $C = [C_1, C_2]$ *длины* $2(a+b-c)$. *Множества* A, B *и* C *можно разместить в* $\mathbb{R}^n$ *так, чтобы для каждой пары из них это положение было оптимальным. Все такие положения описываются так: отрезки* A *и* C *лежат на одной прямой и их центры совпадают; наибольший из этих отрезков расположен так, как описано в предложении* 2.13.



Доказательство. Так как из неравенства треугольника $a - c \leq b$ следует $2(a + b - c) \leq 4b$, а из условия $a \geq b$ следует $2(a + b) \geq 4b$, то по предложению 2.13 имеем $d_{EGH}(A, B) = a$, $d_{EGH}(B, C) = c$, а из следствия 2.6 вытекает, что $d_{EGH}(A, C) = b$. Если три компакта расположены так, что каждая пара из них находится в оптимальном положении, то отрезки должны быть совмещены так, чтобы они были на одной прямой и совпали их середины (следствие 2.6), шар и отрезок наибольшей длины — так, как описано в формулировке предложения 2.13. Таким образом, положения, которые описаны в формулировке текущего предложения, и только они — оптимальны.

□

2.1 Об оптимальном положении компактов, находящихся в положении "между"

Теорема 1. *Пусть непустые компакты A и B находятся в оптимальном положении. Тогда все компакты между A и B в смысле метрики Хаусдорфа, в паре с каждым из компактов A и B, — тоже в оптимальном положении в смысле евклидово инвариантной метрики Громова–Хаусдорфа.*

Доказательство. Так как A и B находятся в оптимальном положении, то, по определению, $d_H(A,B) = d_{EGH}(A,B)$. Так как расстояние d_{EGH} является метрикой, то из неравенства треугольника следует, что

$$d_{EGH}(A,B) \le d_{EGH}(A,C) + d_{EGH}(C,B);$$

опять же, из оптимальности положения, заключаем

$$d_{EGH}(A,C) \le d_H(A,C),\ d_{EGH}(C,B) \le d_H(C,B).$$

Если компакт C оказался не в оптимальном положении относительно A или B, то одно из двух предыдущих неравенств будет строгим, поэтому, в этом случае,

$$d_H(A,B) = d_{EGH}(A,B) \le d_{EGH}(A,C) + d_{EGH}(C,B) < d_H(A,C) + d_H(C,B),$$

следовательно, C не находится между A и B, противоречие. Значит, компакты A и C, B и C находятся в оптимальном положении. □

Замечание 2.15. Обратное не верно, как показывает предложение 2.14.

Замечание 2.16. Транзитивность не верна: если компакты A и B, B и C находятся в оптимальном положении, компакты A и C не обязаны находиться в оптимальном положении. Например, пусть $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{B_1\}$, $C = \{C_1, C_2\}$. Совместим середины компактов A и C, при условии, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 не лежат на одной прямой, а компакт B поместим в их общую середину. Таким образом, одноточечный компакт в оптимальном положении с каждым из двухточечных, но между собой двухточечные не находятся в общем положении. Более того, не любые 3 компакта удается разместить так, чтобы любые два оказались в оптимальном положении. Возьмем пример, описанный в предложении 2.9.

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^2$ состоит из трех точек, попарные расстояния между которыми равны 10, 13, 13; множество $B \subset \mathbb{R}^2$ — из двух точек на расстоянии 10; множество $C \subset \mathbb{R}^2$ — из одной точки. Предположим, что эти три множества расположены так, что из взаимные попарные расположения — оптимальны. По предложению 2.2, множество C совпадает с чебышевским центром множеств A и B, однако, для A чебышевский центр — это центр описанной окружности, так что если M обозначает середину основания равнобедренного треугольника с вершинами в A, то $d(C,M) = 119/24$. По предложению 2.9, одна из точек множества B совпадает с M, поэтому, снова в силу предложения 2.2, точка C попадает в середину отрезка с концами в B, следовательно, $d(C,M) = 5$, противоречие.

2.2 Об оптимальном положении ориентированно подобных компактов

Обращаясь к вопросу о совмещении чебышевских центров, хочется понять, в каких случаях это решает проблему поиска оптимального положения. В качестве примера разберем случай, когда компакты отличаются на подобие, сохраняющее ориентацию.

Приведем несколько вспомогательных результатов. Для каждого $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ через O_X и R_X будем обозначать его чебышевские центр и радиус.

Лемма 2.17. *Для произвольного $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $B_\varepsilon(X) \subset B_{R_X+\varepsilon}(O_X)$.*

Доказательство. Так как все точки компакта X удалены от O_X не более, чем на R_X, то точки компакта $B_\varepsilon(X)$ удалены от O_X не более, чем на $R_X + \varepsilon$ в силу неравенства треугольника. Но это и означает, что $B_\varepsilon(X) \subset B_{R_X+\varepsilon}(O_X)$. □

Лемма 2.18. *Пусть $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda > 0$. Тогда у компакта $Y = O_X + \lambda(X - O_X)$, гомотетичного X, чебышевские центр и радиус — это O_X и λR_X.*

Доказательство. Для каждой точки $y \in Y$ выполнено $y = O_X + \lambda(x - O_X)$ для некоторого $x \in X$. Так как $\lambda|x - O_X| \le \lambda R_X$, то и для любого $y \in Y$ верно, что $d(y, O_X) \le \lambda R_X$. Поэтому $R_Y \le \lambda R_X$. Применяя те же рассуждения для точек из X, заключаем, что $R_X \le \frac{1}{\lambda} R_Y$. Значит, $R_Y = \lambda R_X$. Отсюда, в силу единственности чебышевского центра у компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, следует, что O_X является чебышевским центром компакта Y.

□

Лемма 2.19. *Если для $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ выполнено $R_Y = R_X + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то для любого $0 < \delta < \varepsilon$ и для любого движения M имеем $M(Y) \not\subset B_\delta(X)$.*

Доказательство. По лемме 2.17, имеем $B_\delta(X) \subset B_{R_X+\delta}(O_X)$. Но так как $R_Y = R_X + \varepsilon$, то компакт Y ни в какой шар меньшего радиуса поместить нельзя, то есть $M(Y) \not\subset B_{R_X+\delta}(O_Y)$ ни для какого $0 < \delta < \varepsilon$ и движения M. Но тогда $M(Y) \not\subset B_\delta(X)$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.20. *Для $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $R_{B_\varepsilon(X)} = R_X + \varepsilon$ и $O_{B_\varepsilon(X)} = O_X$.*

Доказательство. Из леммы 2.17 следует, что $R_{B_\varepsilon(X)} \le R_X + \varepsilon$. Покажем, что $R_{B_\varepsilon(X)} \ge R_X + \varepsilon$. Пусть существует шар с центром в некоторой точке O радиуса $R_X + \delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$, такой, что $B_\varepsilon(X) \subset B_{R_X+\delta}(O)$. Тогда для произвольной точки $x \in X$ выполнено $d(O, x) + \varepsilon \le R_X + \delta$, то есть $d(O, x) \le R_X + \delta - \varepsilon < R_X$. Это означает, что нашлась такая точка O, что все точки из X удалены от O на расстояние, меньшее R_X, то есть R_X — не чебышевский радиус. Противоречие. Итак, $R_{B_\varepsilon(X)} = R_X + \varepsilon$. Отсюда же следует, что $O_X = O_{B_\varepsilon(X)}$ (в силу единственности чебышевского центра у компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$). □

Лемма 2.21. *Если для $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $R_Y = R_X + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, чебышевские центры не совпадают, то $Y \not\subset B_\varepsilon(X)$.*

Доказательство. Так как $O_X \ne O_Y$, то чебышевские шары $B_{R_X+\varepsilon}(O_X)$ и $B_{R_Y}(O_Y)$ для $B_\varepsilon(X)$ и для Y соответственно имеют одинаковые радиусы (лемма 2.20) и разные центры, то есть шары не совпадают. С другой стороны, если $Y \subset B_\varepsilon(X)$, то $Y \subset B_{R_X+\varepsilon}(O_X) \cap B_{R_Y}(O_Y)$, но правая часть последнего включения, являясь пересечением несовпадающих шаров одинакового радиуса R_Y, содержится в шаре меньшего чем R_Y радиуса. Последнее противоречит тому, что R_Y — чебышевский радиус для Y. Значит, $Y \not\subset B_\varepsilon(X)$. □

Лемма 2.22. *Пусть $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — ориентированно подобные компакты. Тогда*

$$d_{EGH}(X,Y) = |R_Y - R_X|.$$

Доказательство. Пусть $S = \Lambda \circ M$ — сохраняющее ориентацию подобие, для которого $Y = S(X)$, где Λ — растяжение в $\lambda > 0$ раз с центром в O, а $M \in G$. Отметим, что $R_Y = \lambda R_X$.

Если $\lambda = 1$, то $R_X = R_Y$ и $d_{EGH}(X,Y) = 0$, так что в этом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\lambda \neq 1$. Без ограничения общности, будем считать, что $\lambda > 1$, тогда $|R_Y - R_X| = R_Y - R_X = (\lambda - 1)R_X$. Кроме того, так как центр O соответствующего растяжения можно выбирать произвольным образом, поместим его в чебышевский центр O_X компакта X. Тогда для λ-гомотетичных компактов X и $M(Y)$ расстояние между точкой $x \in X$ и соответствующей точкой $y = O + \lambda(x - O) \in M(Y)$ равно $d(x,y) = (\lambda - 1)d(x,O)$, поэтому

$$d_H\bigl(X, M(Y)\bigr) \le (\lambda - 1)\sup\nolimits_{x \in X} d(x,O) \le (\lambda - 1)R_X = R_Y - R_X,$$

и, значит, $d_{EGH}(X,Y) \le R_Y - R_X$. Покажем, что на самом деле здесь имеется равенство. Предположим противное, т.е. что $d_{EGH}(X,Y) < R_Y - R_X$. Тогда существуют δ такое, что $0 < \delta < R_Y - R_X$, и движение M' такие, что $M'(Y) \subset B_\delta(X)$. Но, по лемме 2.19, $R_Y \le R_X + \delta$. Противоречие. □

Теорема 2. *Пусть X и Y — непустые ориентированно подобные компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда $d_{EGH}(X,Y) = |R_Y - R_X|$, и если эти компакты находятся в оптимальном положении, то их чебышевские центры совпадают. Более того, положение, в котором $O_X = O_Y$, а X и Y — гомотетичны с центром в O_X, является оптимальным.*

Доказательство. То, что $d_{EGH}(X,Y) = |R_Y - R_X|$, является утверждением леммы 2.22. Далее, предположим, что X и Y находятся в оптимальном положении. По лемме 2.21, если их чебышевские центры не совпадают, то $d_H(X,Y) > |R_Y - R_X|$, что противоречит оптимальности. Наконец, пусть $O_X = O_Y$ и рассматриваемые компакты гомотетичны с центром в O_X. Аналогично тому, что было сделано при доказательстве леммы 2.22, $d_H(X,Y) \le |R_Y - R_X|$, поэтому такие X и Y находятся в оптимальном положении.

□

Замечание 2.23. Совпадающие чебышевские центры ориентированно подобных компактов, находящихся в оптимальном положении, не обязаны совпадать с центром гомотетии: если X — это две окружности с одним центром O (граница кольца), соединенные отрезком, а Y — гомотетичное множество с центром в O, то указанное положение — оптимально. Но если вращать Y относительно O, то расстояние по Хаусдорфу не изменится.

Список литературы

[1] Edwards D. *The Structure of Superspace.* In «Studies in Topology». Academic Press, 1975.

[2] Gromov M. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps.* Publications mathematiques, 53, 1981.

[3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[4] Гаркави А.Л. *О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества.* Успехи матем. наук, 1964, т. 19, вып. 6, с. 139-145.

[5] Казаков А.Л., Лебедев П.Д. *Построение наилучших круговых аппроксимаций множеств на плоскости и на сфере.* XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва 16-19 июня 2014 г.

[6] Сосов Е.Н. *Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства.* Казанский Государственный Университет, 2010.

[7] Facundo Memoli. *Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces.* Computer Vision and Pattern Recognition Workshops, 2008. CVPR Workshops 2008. IEEE Computer Society Conference on, pages 1–8, June 2008.

[8] Кисловская А.Д. *Дипломная работа "Геометрия конфигураций в пространствах с евклидово инвариантной метрикой типа Громова–Хаусдорфа".* Москва, Московский Государственный Университет, 2013.

[9] Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. *Local Structure of Gromov–Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space.* Topology and its Applications, Elsevier BV, Netherlands, 2017, v. 221, pp. 393-398, DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.050 (см. также ArXiv e-prints, arXiv:1604.07615).