МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Курсовая работа

Выпуклость шара в пространстве Громова-Хаусдорфа.

Курсовая работа
студентки 4-го курса
Клибус Д.
Научный руководитель:
профессор, д.ф-м.н. Тужилин А.А.

Москва 2017

Содержание

1 Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами является полезным инструментом для моделирования некоторых процедур сопоставления объектов. С момента своего появления оно использовалось математиками в изучении топологических свойств. Будем исследовать геометрию пространства $\mathcal{M}$ всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) с метрикой Громова–Хаусдорфа. Пространство Громова–Хаусдорфа — польское (полное сепарабельное) и линейно связное. Также А.О.Иванов, Н.К.Николаева и А.А.Тужилин показали, что метрика Громова–Хаусдорфа является строго внутренней. До сих пор имеется еще много разных вопросов, связанных с этим пространством. Настоящая статья посвящена следующему вопросу: являются ли шары в пространстве Громова–Хаусдорфа выпуклыми. Существует два понятия выпуклости: в сильном смысле (каждая кратчайшая кривая, соединяющая любую пару точек множества, принадлежит этому множеству) и слабом смысле (для любой пары точек множества найдется кратчайшая кривая, которая соединяет эти точки и принадлежит этому множеству). Мы покажем, что шар ненулевого радиуса с центром в одноточечном пространстве выпуклый в слабом смысле, но не выпуклый в сильном. Также мы покажем, что шар достаточно малого радиуса с центром в пространстве общего положения выпуклый в слабом смысле.

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — метрическое пространство, а $x \in X$ — произвольная его точка. Расстояния между точками x и y будем обозначать через $|xy|$, а одноточечное пространство — через Δ_1. Для каждого ε >0 определим *ε-окрестность* $U_\varepsilon(x)$ точки x, положив $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| < \varepsilon\}$. Множество $U_\varepsilon(x)$ называют *открытым шаром радиуса ε с центром в точке x*. Кроме того, если A — непустое подмножество пространства X, то *ε-окрестность множества A* определяется как $U_\varepsilon(A) = \cup_{a\in A} U_\varepsilon(a)$. *Замкнутым шаром радиуса ε с центром в точке x* называют множество $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| \le \varepsilon\}$. Для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = \inf\{|xa| : a \in A\}$. Для непустого $A \subset X$ и неотрицательного r (возможно, равного ∞) *замкнутой r-окрестностью множества A* или *замкнутым шаром радиуса r с центром в A* назовем множество $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \le r\}$.

Определение 2.1. Пусть X и Y — два непустых подмножества метрического пространства. Определим *расстояние по Хаусдорфу*: $d_H(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid (\mathrm{U}_\varepsilon(X) \supset Y) \ \&\ (\mathrm{U}_\varepsilon(Y) \supset X)\}$.

Для произвольного метрического пространства X, обозначим через $\mathcal{H}(X)$ семейство всех его непустых замкнутых ограниченных подмножеств.

Предложение 2.2 ([1])**.** *Пусть X — метрическое пространство, тогда d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Предложение 2.3 ([7])**.** *Для любого метрического пространства X, каждого $A \in \mathcal{H}(X)$ и любого неотрицательного r имеем $B_r(A) \in \mathcal{H}(X)$.*

Определение 2.4 ([7])**.** Пусть W — произвольное метрическое пространство, $a, b \in W$, $|ab| = r$, $s \in [0, r]$. Будем говорить, что $c \in W$ находится в s-положении между a и b, если $|ac| = s$ и $|cb| = r - s$.

Предложение 2.5 ([7])**.** *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B), s \in [0,r]$. Тогда если множество $C \in \mathcal{H}(X)$ находится в s-положении между A и B, то $C \subset B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$.*

Обозначение 2.6 ([7])**.** Множество $B_s(A) \cap B_{r-s}(B)$ из предложения 5.5 будем обозначать через $C_s(A,B)$ или, если понятно, о каких A и B идет речь, то просто через C_s.

Определение 2.7. Пусть X и Y — произвольные непустые компактные метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). *Расстоянием $d_{GH}(X,Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел ρ, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X', Y') \le \rho$.

Пусть $\mathcal{M}$ — пространство всех непустых метрических компактнов, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа. Хорошо известно [1], что на $\mathcal{M}$ расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой. Метрика на множестве X называется *строго внутренней*, если любые две точки x, $y \in X$ соединяются кривой, длина которой равна расстоянию между x и y (такая кривая является *кратчайшей*). Пусть M — непустое подмножество метрического пространства X с метрикой d, а $d_M = d\Big|_M$ — сужение метрики d на множество M. Метрическое пространство $(M,\ d_M)$ называется *подпространством* пространства $(X,\ d)$.

Теорема 1 ([7]). *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой. Тогда для любых $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $r = d_H(A,B), s \in [0,r]$, множество $C_s = C_s(A,B)$ принадлежит $\mathcal{H}(X)$ и находится в s-положении между A и B.*

Следствие 2.8 ([1]). *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой (являющееся, как хорошо известно* [1]*, ограниченно компактным со строго внутренней метрикой). Тогда $\mathcal{H}(X)$ — также ограниченно компактное, а метрика Хаусдорфа — строго внутренняя.*

Следствие 2.9 ([7]). *Пусть X — полное локально компактное пространство с внутренней метрикой, $A, B \in \mathcal{H}(X)$, и $r = d_H(A,B)$. Тогда $\gamma(s) = C_s(A,B)$, $s \in [a,b]$, является кратчайшей кривой, соединяющей A и B, причем длина кривой γ равна $d_H(A,B)$, а параметр s — натуральный.*

Определение 2.10. Подмножество $M \subset X$ в метрическом пространстве (X,d) со строго внутренней метрикой называется *выпуклым в слабом смысле*, если сужение метрики d на M — также строго внутренняя метрика.

Эквивалентное определение: непустое подмножество M метрического пространства X со строго внутренней метрикой *выпукло в слабом смысле*, если для любой пары точек из M некоторая соединяющая их кратчайшая в X целиком лежит в M.

Определение 2.11. Подмножество M метрического пространства X со строго внутренней метрикой называется *выпуклым в сильном смысле*, если все кратчайшие в X, соединяющие точки из M, лежат в M.

Отношением между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Если $\pi_X \colon (X,Y) \to X$ и $\pi_Y \colon (X,Y) \to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X\ (x,y) = x$ и $\pi_Y\ (x,y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ определен его образ $\sigma(x) = \{y \in Y | (x,y) \in \sigma\}$; для каждого $A \subset X$ определено $\sigma(A)$ как объединение образов всех элементов из A; для каждого $y \in Y$ определен его прообраз $\sigma^{-1}(y) = \{x \in X | (x,y) \in \sigma\}$; для каждого $B \subset Y$ определен его прообраз как объединение прообразов всех его элементов.

Определение 2.12. Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций π_X и π_Y сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Определение 2.13. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ назовем следующее число:

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),\ (x',y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 2.14 ([1]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\left\{\operatorname{dis}R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\right\}.$$

Определение 2.15. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$.

Предложение 2.16 ([8]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y) \neq \emptyset$.*

Предложение 2.17 ([8]). *Для любых X, $Y \in \mathcal{M}$ и каждого $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$ семейство R_t, $t \in [0,1]$, компактных метрических пространств такое, что $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0,1)$ пространство R_t — это (R, ρ_t), где $\rho_t\big((x,y),(x',y')\big) = (1-t)\big|xx'\big| + t\big|yy'\big|$, является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y.*

Определим *диаметр метрического пространства* X следующим образом:

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,x'\in X} |xx'|.$$

Утверждение 2.18 ([1]). *Пусть Δ_1 — одноточечное пространство, тогда для любого метрического пространства X имеем $d_{GH}(X,\Delta_1) = \operatorname{diam}(X)/2$.*

Определение 2.19. Будем говорить, что конечное метрическое пространство M *находится в общем положении* или *является пространством общего положения*, если все ненулевые расстояния в M различны и все неравенства треугольника для троек, состоящих из различных точек, — строгие.

Для произвольного метрического пространства X определим величины:

$$s(X) = \inf\{|xy| : x \neq y\},\ e(X) = \inf\Big\{|xy| - |zw| : x \neq y, z \neq w, \{x,y\} \neq \{z,w\}\Big\}.$$

Предложение 2.20 ([6]). *Пусть $M = \{1,\dots,n\}$ — некоторое метрическое пространство. Тогда для любого $0 < \varepsilon \le s(M)/2$ и каждого $X \in \mathcal{M}$ такого, что $2d_{GH}(M,X) < \varepsilon$, существует единственное, с точностью до нумерации точками пространства M, разбиение $X = \sqcup_{i=1}^n X_i$, обладающее следующими свойствами*:

(1) $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon$;

(2) *для любых $i, j \in M$ и любых $x \in X_i$ и $x' \in X_j$ (здесь индексы i и j могут быть равны друг другу) выполняется $\Big||xx'| - |ij|\Big| < \varepsilon$.*

Предложение 2.21 ([6]). *Пусть $M = \{1,\dots,n\}$ — некоторое метрическое пространство. Тогда для любого $0 < \varepsilon \le s(M)/2$, каждого $X \in \mathcal{M}$, $2d_{GH}(M,X) < \varepsilon$, и каждого $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(M,X)$ семейство $\{R(i)\}_{i=1}^n$ является разбиением множества X, причем имеют место следующие свойства*:

(1) $\operatorname{diam} X_i < \varepsilon$;

(2) *для любых $i, j \in M$, $x \in R(i), x' \in R(j)$ выполняется $\Big||xx'| - |ij|\Big| < \varepsilon$.*

Более того, если R' — еще одно оптимальное соответствие между M и X, то разбиения $\{R(i)\}_{i=1}^n$ и $\{R'(i)\}_{i=1}^n$ могут отличаться друг от друга лишь нумерациями, заданными соответствиями $i \mapsto R(i)$ и $i \mapsto R'(i)$.

Определение 2.22 ([6])**.** Семейство $\{X_i\}$ из предложения 2.20 назовем *каноническим разбиением* пространства X относительно M.

Предложение 2.23 ([6])**.** *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — метрическое пространство, $n \ge 3$, $e(M) > 0$. Выберем произвольное $0 < \varepsilon \le \frac{1}{4}\min\{s(M), e(M)\}$, любые $X, Y \in \mathcal{M}$, $2d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, $2d_{GH}(M, Y) < \varepsilon$, и пусть $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ обозначают канонические разбиения соответственно X и Y относительно M. Тогда для каждого $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$ существуют $R_i \in R(X_i, Y_i)$ такие, что $R = \sqcup_{i=1}^n R_i$.*

3 Основные результаты

Теорема 2. *Шар с центром в одноточечном метрическом пространстве — выпуклый в слабом смысле.*

Доказательство. Пусть $B = B_r(\Delta_1)$ — замкнутый шар с центром в Δ_1, где $r > 0$, и $X,\ Y \in B$. Используя утверждение 2.18, заметим, что

$$d_{GH}(\Delta_1, X) = \mathrm{diam}(X)/2 \le r,\ d_{GH}(\Delta_1, Y) = \mathrm{diam}(Y)/2 \le r.$$

Выберем некоторое соответствие $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$, которое существует в силу предложения 2.16. Построим пространство $R_t = (R, \rho_t)$ с метрикой $\rho_t\big((x, y), (x', y')\big) = (1-t)\big|xx'\big| + t\big|yy'\big|$ при $t \in (0, 1)$, и пусть $R_0 = X$, $R_1 = Y$. Тогда, по предложению 2.17, кривая R_t, $t \in [0, 1]$, соединяющая X и Y, — кратчайшая.
Покажем, что кривая R_t лежит в шаре B. Для этого оценим расстояние по Громову–Хаусдорфу между центром Δ_1 и пространством R_t. Имеем

$$d_{GH}(\Delta_1, R_t) = \mathrm{diam}(R_t)/2.$$

Для любых $x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$ выполняется

$$|xx'| \le \mathrm{diam}\, X \le \max(\mathrm{diam}\, X, \mathrm{diam}\, Y);\ |yy'| \le \mathrm{diam}\, Y \le \max(\mathrm{diam}\, X, \mathrm{diam}\, Y).$$

Следовательно,

$$\mathrm{diam}(R_t) = \max|(x, y)(x', y')|_{\rho_t} = \max\big((1-t)|xx'| + t|yy'|\big) \le$$

$$\le (1-t)\max(\mathrm{diam}\, X, \mathrm{diam}\, Y) + t\max(\mathrm{diam}\, X, \mathrm{diam}\, Y) = \max(\mathrm{diam}\, X, \mathrm{diam}\, Y),$$

откуда $d_{GH}(\Delta_1, R_t) \le \frac{1}{2}\max(\mathrm{diam}\, X, \mathrm{diam}\, Y) = \max\big(d_{GH}(\Delta_1, X), d_{GH}(\Delta_1, Y)\big) \le r$, что и требовалось. □

Теорема 3. *Шар с центром в одноточечном пространстве не выпуклый в сильном смысле.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать эту теорему, построим кратчайшую, соединяющую некоторые пространства A и B, принадлежащие шару $B_r(\Delta_1) \subset \mathcal{M}$ радиуса r с центром Δ_1, которая выйдет за шар. Пусть $A = [0, 2r] \subset \mathbb{R}$ и $B = \{0, 2r\} \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(B, A)$ (оно существует по предложению 2.16) и оценим его:

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{|aa'| : a, a' \in R(0);\ |aa'| : a, a' \in R(2r);\ \big|2r - |aa'|\big| : a \in R(0), a' \in R(2r)\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\operatorname{diam} R(0), \operatorname{diam} R(2r), \big|2r - |aa'|\big| : a \in R(0), a' \in R(2r)\Big\} \le 2r.$$

1) Если $R(0) \cap R(2r) \neq \emptyset$, то выбрав $a = a' \in R(0) \cap R(2r)$, получим, что $\operatorname{dis} R = 2r$.
2) Если $R(0) \cap R(2r) = \emptyset$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $a \in R(0),\ a' \in R(2r)$ такие, что $|aa'| < \varepsilon$, значит, $\operatorname{dis} R = 2r$.
Тогда, по предложению 2.14, имеем $d_{GH}(A, B) = r$. Отметим, что $d_H(A, B) = r$, следовательно $d_{GH}(A, B) = d_H(A, B)$. Для $t \in [0, r]$ положим $\gamma(t) = C_t(A, B) = B_t(A) \cap B_{r-t}(B)$. Применяя следствие 2.9, видим, что $\gamma(t)$ — кратчайшая кривая в $\mathcal{H}(\mathbb{R})$.
Также для любого разбиения $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = r$ отрезка $[0, r]$ имеем

$$d_{GH}(A, B) \le \sum_{i=1}^{n} d_{GH}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \le \sum_{i=1}^{n} d_H(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = d_H(A, B) = d_{GH}(A, B),$$

откуда

$$d_{GH}(A, B) = \sum_{i=1}^{n} d_{GH}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

Так как длина кривой γ равна супремуму сумм $\sum_{i=1}^{n} d_{GH}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$ по всевозможным разбиениям отрезка $[0, r]$, а все эти сумму одинаковы и равны $d_{GH}(A, B)$, то длина кривой γ равна $d_{GH}(A, B)$, поэтому γ — кратчайшая кривая.
Покажем, что эта кривая не лежит целиком в шаре $B_r(\Delta_1)$. Для этого найдем $d_{GH}(C_t(A, B), \Delta_1)$. По утверждению 2.18, $d_{GH}(C_t(A, B), \Delta_1) = \frac{\operatorname{diam}(C_t(A,B))}{2}$. Заметим, что при $t = \frac{r}{2}$ имеем $\operatorname{diam}(C_{\frac{r}{2}}(A, B)) = 3r$, поэтому $d_{GH}(C_{r/2}(A, B), \Delta_1) = 3r/2 > r$, откуда $\gamma(r/2) \notin B_r(\Delta_1)$, что и требовалось.

□

Теорема 4. *Шар радиуса* $0 < \varepsilon/2 \le \frac{1}{4}\min\{s(M), e(M)\}$ *с центром в пространстве общего положения* M *выпуклый в слабом смысле.*

Доказательство. Пусть $M = \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $B_{\varepsilon/2}(M) \subset \mathcal{M}$ замкнутый шар радиуса $\varepsilon/2$ и выберем произвольные $X,\ Y \in B_{\varepsilon/2}(M)$. По предложению 2.20, существуют единственные, с точностью до нумерации точками пространства M, разбиения $X = \sqcup_{i=1}^{n} X_i$ и $Y = \sqcup_{i=1}^{n} Y_i$, обладающие следующими свойствами: для всяких $x_i \in X_i, x_j \in X_j, y_i \in Y_i, y_j \in Y_j$ выполняется $\Big||x_ix_j| - |ij|\Big| < \varepsilon$ и $\Big||y_iy_j| - |ij|\Big| < \varepsilon$. Тогда $|ij| - \varepsilon < |x_ix_j| < |ij| + \varepsilon$ и $|ij| - \varepsilon < |y_iy_j| < |ij| + \varepsilon$. По предложению 2.23, для каждого $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$ существуют $R_i \in R(X_i, Y_i)$ такие, что $R = \sqcup_{i=1}^{n} R_i$. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$ (по предложению 2.16, оно существует).
Построим кратчайшую кривую R_t, определенную, как в предложении 2.17. Чтобы доказать выпуклость в слабом смысле, покажем, что $d_{GH}(M, R_t) \le \varepsilon/2$. Для этого определим соответствие $R' \in \mathcal{R}(M, R_t)$, положив $R' = \sqcup_{i=1}^{n} \{i\} \times R_i$. Имеем:

$$d_{GH}(M, R_t) \le \frac{1}{2} \operatorname{dis} R' = \frac{1}{2} \sup\Big\{\big||ij| - |p_ip_j|_t\big| : i, j \in M,\ (i, p_i), (j, p_j) \in R'\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup\Big\{\big||ij| - (1-t)|x_ix_j| - t|y_iy_j|\big| :\ i, j \in M,\ (x_i, y_i) = p_i \in R_i, (x_j, y_j) = p_j \in R_j\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup\Big\{ \big|(1-t)|ij| + t|ij| - (1-t)|x_i x_j| - t|y_i y_j|\big| \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup\Big\{ \big|(1-t)(|ij| - |x_i x_j|) + t(|ij| - |y_i y_j|)\big| \Big\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}(1-t) \sup\Big\{ \big||ij| - |x_i x_j|\big| \Big\} + \frac{1}{2} t \sup\Big\{ \big||ij| - |y_i y_j|\big| \Big\} \le \frac{1}{2}(1-t)\varepsilon + \frac{1}{2} t\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2},$$

что и требовалось. $\square$

4 Список литературы

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic. ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[3] Сосов Е.Н. Введение в метрическую геометрию и ее приложения. Казанский Государственный Университет, 2015.

[4] Iliadis S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Local Structure of Gromov-Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space. ArXiv e-prints, arXiv:1604.07615, 2016.

[5] Steven Schlicker. The Geometry of the Hausdorff Metric. Grand Valley State University, Allendale, MI, GVSU REU 2010.

[6] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Local Structure of Gromov-Hausdorff Space near Finite Metric Spaces in General Position. ArXiv e-prints, arXiv:1611.04484, 2016.

[7] `http://dfgm.math.msu.su/files/ivanov-tuzhilin/2016-2017/METRGEOM2016-05.pdf`

[8] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A.Realizations of Gromov-Hausdorff Distance. ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.