Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

ВЫСОТНЫЕ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫЕ АТОМЫ
PARTIALLY SYMMETRIC HEIGHT ATOMS

Курсовая работа

студентки 3–го курса
Трифоновой Виктории Александровны.
Научные руководители –
академик РАН, зав. кафедрой Фоменко А.Т.,
к.физ.-мат.н., доцент Никонов И.М.

Москва 2017

1. Введение

Понятие атома, появившееся в задачах качественного анализа и классификации динамических систем, находит применение в самых разных разделах современной комбинаторики и маломерной топологии, теории узлов [1, 3]. Понятие атома для целей гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено Фоменко [7] и было применено для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем [8].

Симметрии атомов отражают дискретные симметрии соответствующих динамических систем, так что для целей анализа важной является задача описания классов атомов, обладающих заданной группой симметрии. Так, в работе [2] приведена полная классификация высотных атомов с транзитивной на вершинах группой симметрий. В работах [5] и [4] получен ряд классификационных результатов максимально симметричных атомов, имеющих максимально возможный набор симметрий. Задача классификации максимально симметричных атомов является довольно сложной и может быть решена только для отдельных семейств атомов (атомы малой сложности, атомы малого рода), либо атомов, обладающих некоторым специальным свойством. Так, в работе [2] были полностью описаны максимально симметричные высотные атомы.

В данной работе рассматривается важный частный случай высотных атомов – высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета. Для таких атомов удалось сделать частичное описание: предъявлено 9 бесконечных серий и 21 особый случай. Основные определения взяты из [1], [3], [4].

Автор благодарит академика А. Т. Фоменко за постановку интересной задачи и общей схемы, что и как делать, а также И. М. Никонова за ценные замечания и указания.

2. Необходимые понятия и определения.

Пусть M^2 - гладкое компактное двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ -функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 : f = k, k \in \mathbb{R}\}$ - её особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне ($\{f = k\}$).

Определение 1. *Атомом* называется пара $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$ с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$. Атом называется *ориентируемым*, если эта поверхность ориентируема. Граф $f^{-1}(k)$ называется остовом атома. Два атома называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию.

Будем говорить, что атом $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$ порожден функцией f. Сложностью атома называется количество особых точек функции f на особом слое.

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f *высотным*, если существует такое вложение $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in M^2$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т. е. z — функция высоты на $g(M^2)$.

Все высотные атомы являются ориентируемыми (см. [3]). Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только высотные атомы, то всюду ниже все атомы предполагаются ориентируемыми.

Пусть дан атом $X = (f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$. Ясно, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ является некоторым многообразием P^2 с краем, причем его край ¯ это набор окружностей. *Родом* атома X называется род многообразия без края, полученного из P^2 с помощью заклеивания всех связных компонент границы дисками. Атомы рода 0 назовем *плоскими атомами.* Также стоит дать второе эквивалентное определение атома.

Определение 3. *Атомом* назовем "оснащенную" пару (P^2, K), где P^2 - компактная ориентированная поверхность с краем, K - непустой конечный связный граф, вложенный в P^2, вершины которого имеют степень 0 или 4, причем множество $P^2 \backslash K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0, 1]$, где $(S^1, 1) \subset \partial P^2$. Множество колец и их граничных окружностей разбито на два подмножества (белые и черные) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец и соответствующих окружностей на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K). Два атома считаются изоморфными, если существует гомеоморфизм оснащенных пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Атом, который получается заменой цвета белых колец на черный, а черных колец — на белый цвет, называется *двойственным атомом* к исходному атому.

Атом может быть определен также как f-граф, см. [1], что, в свою очередь, дает нам возможность работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение 4. Конечный связный граф G, некоторые ребра которого ориентированы, называется *ориентированным f-графом*, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра–петли.

Соответствующий f-граф строится по атому (P^2, K) следующим образом: в качестве неориентируемого ребра берется отрезок, соединяющий границы противоположных белых колец(см. рис. 1), а в качестве вершин — соответствующие концы отрезка. В качестве ориентированных ребер берутся примыкающие к вершинам дуги белых колец, с соответствующей ориентацией.

Определение 5. Назовем f-граф *ориентированно вложимым* в плоскость, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные одним ребром, лежат одна в другой, если и только если они имеют противоположную ориентацию.

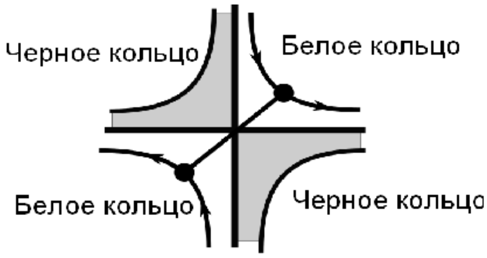

Рис. 1. Построение f-графа

Соответствующее вложение также будем называть *ориентированным.*

Определение 6. *Симметрией атома* $X = (P^2, K)$ называется сохраняющий ориентацию и оснащение гомеоморфизм оснащенной пары (P^2, K) на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии, т.е. класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов оснащенной пары (P^2, K) на себя. Отметим, что при таком определении группа $Sym(X)$ симметрий атома $X = (P^2, K)$ дискретна, см. [1].

Определение 7. Назовем *симметрией f-графа G* изоморфизм графа G на себя, переводящий ориентированные ребра в ориентированные с сохранением их ориентации. Обозначим группу всех таких симметрий f-графа G через $Sym(G)$.

Определение 8. Атом $X = (P^2, K)$ с заданным оснащением является *атомом с группой симметрий транзитивной на кольцах белого(чёрного) цвета*, если для любых двух колец белого(чёрного) цвета u, v указанного оснащения найдется симметрия атома $\phi \in Sym(X)$, такая, что $\phi(u) = v$.

Определение 9. Будем говорить, что атом $X = (P^2, K)$ является *атомом с транзитивной на вершинах группой симметрии*, если для любых двух вершин u, v графа K найдется симметрия атома $\phi \in Sym(X)$, такая, что $\phi(u) = v$.

Определение 10. Атом $X = (P^2, K)$ является *максимально симметричным* тогда и только тогда, когда группа его симметрий $Sym(X)$ транзитивно действует на множестве ребер атома X.

Нам понадобится следующий результат из книги Болсинова А.В., Фоменко А.Т.[1].

Теорема 1. Пусть $X = (P^2, K)$ - некоторый атом, рассматриваемый как оснащенная пара, а G - соответствующий ему f-граф. Тогда группа $Sym(G)$ изоморфна группе $Sym(X)$.

Отсюда следует, что атом $X = (P^2, K)$ является максимально симметричным тогда и только тогда, когда группа симметрий его f-графа $Sym(G)$ транзитивно действует на вершинах f-графа.

3. Высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета

Переформулируем теперь в терминах f-графа условие, что группа симметрий атома действует транзитивно на кольцах белого цвета. Напомним, что в построенном f-графе исходного атома ориентированные циклы соответствуют белым кольцам, тогда ориентированные циклы f-графа двойственного к исходному атома будут соответствовать чёрным кольцам исходного атома. Заметим, что если нам дано плоское вложение f-графа исходного атома, то ориентированные циклы будут соответствовать белым кольцам, а грани - чёрным.

Утверждение 1. Пусть $X = (P^2, K)$- атом с группой симметрий $Sym(X)$, а G- соответствующий ему f-граф. Тогда $Sym(X)$ транзитивно действует на кольцах белого цвета тогда и только тогда, когда $Sym(G)$ транзитивно действует на ориентированных циклах.

Доказательство. Утверждение вытекает из конструкции построения f-графа по атому : ориентированные циклы ставятся в соответствие каждому белому кольцу атома. Заметим, если, кроме этого, G_1-f-граф двойственного к исходному атома и $Sym(G_1)$ транзитивно действует на ориентированных циклах G_1, то группа симметрий как исходного атома, так и двойственного, транзитивно действут на кольцах обоих цветов.□

В дальнейшей работе нам понадобятся утверждения, взятые из статьи И.М.Никонова[6].

Утверждение 2. Пусть $X = (P^2, K)$ – атом с группой симметрий $Sym(X)$, а G – соответствующий ему f-граф. Тогда $Sym(X)$ транзитивно действует на вершинах атома в том и только в том случае, когда группа $Sym(G)$ транзитивно действует на неориентированных рёбрах f-графа.

Утверждение 3. Атом является высотным тогда и только тогда, когда f-граф ориентированно вложим в плоскость.

Определение 11. Будем называть неориентированное ребро произвольного f-графа *внутренним*, если оба конца этого ребра лежат в одном ориентированном цикле, и *внешним*, если его концы лежат в разных ориентированных циклах.

Утверждение 4. Если группа симметрий $Sym(X)$ атома $X = (P^2, K)$ транзитивно действует на кольцах белого цвета, то у соответствующего f-графа G все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин.

Доказательство. По утверждению 1 группа симметрий $Sym(G)$ f-графа G транзитивно действует на ориентированных циклах. Значит, все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин внутренних рёбер и вершин внешних рёбер, таким образом все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин.□

Утверждение 5. Группа симметрий максимально симметричных атомов транзитивно действует на кольцах обоих цветов.

Доказательство. Пусть атом $X = (P^2, K)$ (с группой симметрий $Sym(X)$) является максимально симметричным. Так как к каждому ребру графа примыкает ровно одно белое и одно чёрное кольцо, и группа симметрий $Sym(X)$ транзитивно действует на рёбрах графа , поэтому $Sym(X)$ транзитивно действует на кольцах обоих цветов. □

В частности, если атом $X = (P^2, K)$ (с группой симметрий $Sym(X)$) является максимально симметричным и высотным, то $Sym(X)$ транзитивно действует на кольцах обоих цветов. Классификация максимально симметричных высотных атомов была получена в работе Волчанецкого Н.В. и Никонова И.М.[2]. Она включает в себя атом A_2(см. рис. 2), две бесконечные серии атомов $D_n, (n \geq 1), C_n, (n \geq 1)$, (рис. 3) и пять атомов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 соответствующих правильным многогранникам (Рис. 4). Заметим, что $C_2 = D_2$. □

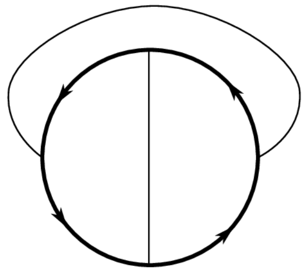

Рис. 2. f-граф атома A_2

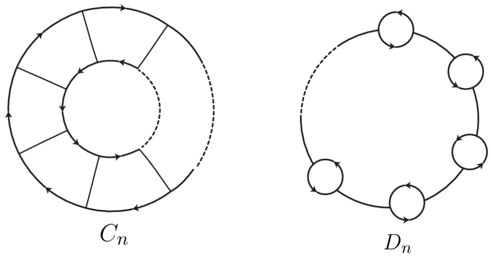

Рис. 3. f-графы атомов C_n, D_n

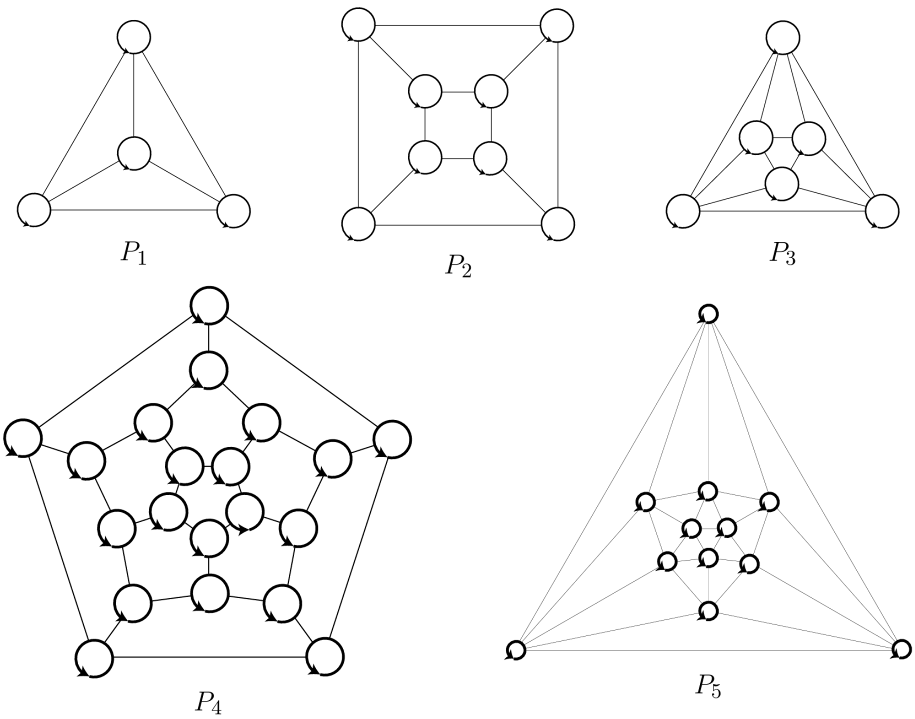

Рис. 4. f-графы атомов, соответствующих правильным многогранникам

Теперь рассмотрим архимедовы тела, бесконечную серию призм и антипризм, и построим по ним соответствующие атомы так:

f-граф каждого из конструируемых атомов получается в результате замены каждой вершины одномерного остова соответствующего многогранника на ориентированный цикл (см. Рис. 5) (Здесь мы пользуемся тем, что скелет каждого из рассматриваемых многогранников вложим в плоскость). При этом циклический порядок примыкающих к циклу ребер должен повторять порядок ребер, примыкающих к вершине.

Утверждение 6. Атомы, соответствующие архимедовым телам R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, $R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}$, R_{11}, R_{12}, R_{13}(см. Рис. 9, 10, 11), а также бесконечной серии призм $R^1_n, (n \geq 1)$ и антипризм $R^2_n, (n \geq 1)$ (см. Рис. 12), являются высотными, и их группа симметрий транзитивно действует на кольцах белого цвета.

Доказательство. Группы симметрий у построенного f-графа и исходного многогранника совпадают. Так как симметрии полуправильного многогранника транзитивно действуют на его вершинах, то группа симметрий f-графа будет транзитивной на ориентированных циклах f-графа, а значит группа симметрий соответствующего атома будет транзитивной на кольцах белого цвета. Стоит отметить, что группа симметрий атомов, отвечающих архимедовым телам, не будет транзитивна на кольцах обоих цветов, потому что у соотвующего плоского вложения f-графа не все грани имеют одинаковое число сторон, поэтому на гранях группа симметрий плоского вложения f-графа не может образовывать одну орбиту.

Аналогичны рассуждения с бесконечной серией призм и антипризм. Исключение составляет атом (соответствующий 4-угольной призме) R_4^1, плоское вложение f-графа которого совпадает с P_2, и атом (соответствующий антипризме с 3-угольным основанием) R_3^2, плоское вложение f-графа которого совпадает с P_3. То есть эти два атома являются высотными максимально симметричными, группа симметрий которых транзитивно действует на кольцах обоих цветов.

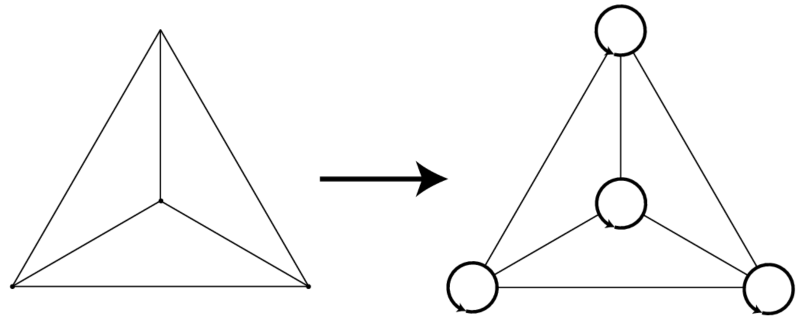

Рис. 5. Построение f-графа по остову многогранника

На рис. 9,10,11 представлены f-графы атомов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}$, которые отвечают усечённому тетраэдру, кубооктаэдру, усечённому кубу, усечённому октаэдру, ромбокубооктаэдру, усечённому кубооктаэдру, плосконосому кубу, икосододекаэдру, усечённому додекаэдру, усечённому икосаэдру, ромбоикосододекаэдру, ромбоусечённому икосододекаэдру и плосконосому додекаэдру соответственно. На Рис. 12 представлены f-графы атомов $R_n^1, (n \geq 1)$ (соответствующих призмам) и $R_n^2, (n \geq 1)$ (соответствующих антипризмам).$\square$

Замечание. Вернёмся к исходному многограннику. Из того что любая симметрия многогранника есть переименование его вершин с сохранением свойства смежности вершин и сохранением циклического порядка рёбер, примыкающих к одной вершине, вытекает, что никакая симметрия многогранника не переводит грань с одним числом сторон в грань с другим числом сторон. Иначе получили бы противоречие с сохранностью циклического порядка рёбер под действием симметрии. Однако в общем случае неверно, что у каждого из рассматриваемых здесь многогранников существует симметрия, переводящая грань с одним числом сторон в грань с тем же числом сторон. Например у курносого куба треугольные грани делятся на две группы: 8 из них окружены только другими треугольными, остальные 24 — квадратной и двумя треугольными. И если предполагать, что существует симметрия, переводящая треугольную грань из одной группы в другую, и зафиксируем любую вершину переводимой грани и два смежных с ней ребра, то получим, что какая-то грань одного типа, смежная с вершиной и одним ребром, перейдёт в грань другого типа, что невозможно.

Рассмотрим случай, когда у атома есть ровно одно белое кольцо, то есть у соответствующего f-графа имеется ровно один ориентированный цикл.

Определение 12. Атомами $FL_n, (n \geq 1)$ назовём атомы, чьи f-графы представляют собой один цикл с $v_1, \ldots, v_{4n+2}$ вершинами, занумерованными в порядке обхода ориентированного цикла, и с хордами $(v_{4i-3}, v_{4i}), 1 \leq i \leq n, (v_{4i-1}, v_{4i+2}), 1 \leq i \leq n$, и (v_{4n-1}, v_2).

Определение 13. Внутреннее ребро произвольного f-графа будем называть *зацепленным* с другим внутренним ребром этого f-графа, если вершины рёбер лежат на одном ориентированном цикле и чередуются в порядке обхода этого цикла.

Определение 14. *Графом сцеплений* будем называть граф, построенный по внутренним рёбрам с концами из одного ориентированного цикла произвольного f-графа атома так: заменяем каждое внутреннее ребро вершиной, и каждые 2 вершины соединяем ребром, если внутренние рёбра, соответствующие этим вершинам были зацепленны.

Утверждение 7. Любой атом, имеющий одно белое кольцо, является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит в себе f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Доказательство. Докажем в одну сторону. Дан f-граф высотного атома, имеющего одно белое кольцо. Зафиксируем ориентированное вложение f-графа в плоскость.

Будем говорить, что внутреннее неориентированное ребро является ребром типа A, если в ориентированном вложении f-графа ребро будет находится внутри ориентированного цикла, и типа B, если вне. Пример см. на Рис. 6.

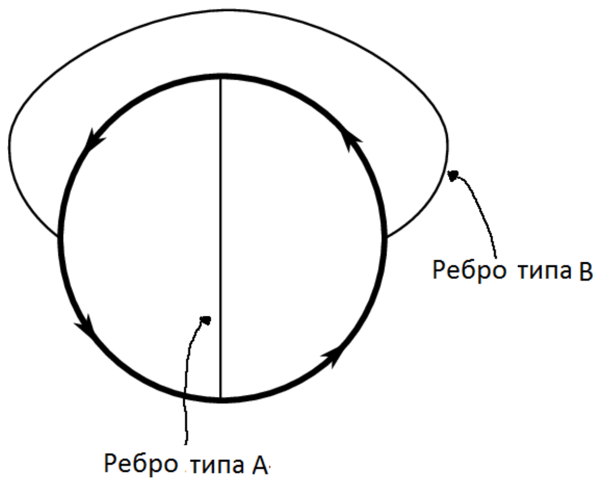

Рис. 6. Наглядное расположение рёбер типа A и типа B в ориентированно вложенном f-графе атома A_2

Отметим, что в данном ориентированном вложении каждое ребро, зацепленное с ребром типа A, будет ребром типа B. А каждое ребро, зацепленное с ребром типа B, будет ребром типа A. И рёбра одного типа не зацеплены между собой. Теперь по совокупности внутренних рёбер исходного f-графа высотного атома построим граф сцеплений T. Тогда вершины получившегося графа T, соответствующие рёбрам типа А будем называть вершинами класса А, а вершины, соответствующие рёбрам типа В будем называть вершинами класса В. Заметим, что по построению каждое ребро графа T соединяет какую-то вершину из одного класса с какой-то вершиной другого класса. Тогда граф T двудольный по определению, а значит не содержит циклов нечётной длины.

Но граф сцеплений, построенный по внутренним рёбрам f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$, не будет двудольным так как будет являться одним циклом нечётной длины, поэтому если атом, имеющий одно белое кольцо, является высотным, то его f-граф не содержит в себе f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Теперь докажем утверждение в другую сторону. Рассмотрим f-граф атома, имеющего одно белое кольцо, не содержащего f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. Проверим, что для этого f-графа есть ориентированное вложение в плоскость.

Построим по внутренним рёбрам этого f-графа граф сцеплений. Так как исходный атом , имеющего одно белое кольцо, не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. То получившийся граф сцеплений не содержит циклов нечётной длины. А значит является двудольным и мы можем разделить все вершины графа сцеплений на два класса C и D так, чтобы каждое ребро графа сцеплений соединяло какую-то вершину из одного класса с какой-то вершиной друго класса. Теперь делаем обратный переход от графа сцеплений к внутренним рёбрам исходного f-графа. Тогда любые 2 внутренних ребра, соответствующие вершинам из одного класса графа сцеплений, не будут зацепленны. И мы можем ориентированно вложить этот f-граф в плоскость так, что ребра класса C попадут внутрь ориентированного цикла, а рёбра класса D окажутся вне. □

Определение 15. Серия атомов $A_k^1, (k \geq 1)$ называется серия высотных атомов, имеющим одно белое кольцо. Где k соответствует числу неориентированных рёбер f-графа этого атома. Тогда f-граф атомов этой серии не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

По утверждению 7 f-граф атомов этой серии не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. Количество этих атомов счётное число, но для каждого фиксированного k их число ограничено. Причём, если зафиксировать какое-либо ориентированное вложение f-графа атома A_k^1, мы получим ещё одну характеристику этого атома: числа n_1 и m_1. Здесь n_1 означает число рёбер типа А, m_1 - число рёбер типа В относительно фиксированного вложения f-графа в плоскость.

Примеры серии $A_k^1, (k \geq 1)$ приведены на Рис. 7. Так, например, рассмотрим атом E_n. Тогда $E_n = A_n^1$, число $n_1 = n$, $m_1 = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда у атома есть ровно два белых кольца, то есть у соответствующего f-графа имеется ровно два ориентированных цикла. Определим

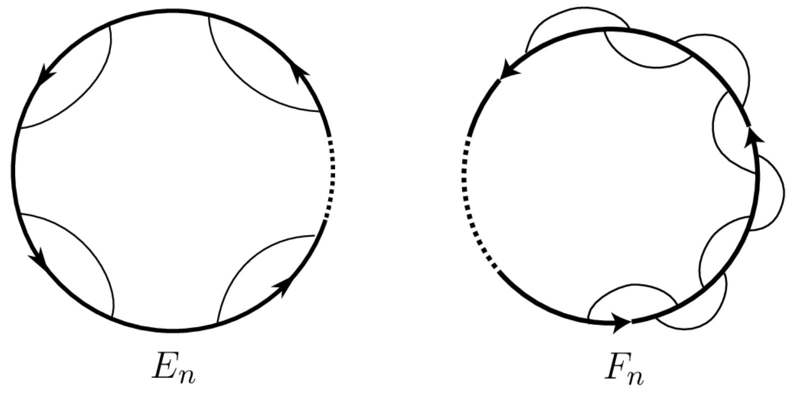

Рис. 7. Примеры f-графов атомов с одним ориентированным циклом

распределение внутренних неориентированных рёбер f-графа по классам: внутреннее ребро будет входить в класс A_1, если его вершины чередуются с вершинами внешних рёбер по обходу цикла. Внутренние рёбра, каждое из которых зацепленно с ребром класса A_1, определим в класс B_1. Внутренние рёбра, не попавшие ни в один класс, и каждое из которых зацепленно с ребром класса B_1, определим в класс A_1. Продолжаем такое распределение по классам, пока ещё остались внутренние рёбра, не попавшие ни в один класс, и каждое из которых зацепленно с ребром класса A_1 или B_1. Распределение внутренних рёбер по классам A_1 и B_1 закончится, так как рёбер конечное число. Остальные внутренние рёбра, не попавшие в класс A_1 или B_1, будут рёбрами класса C_1. Теперь рассмотрим внешние, соединяющие 2 цикла рёбра. Фиксируем один ориентированный цикл и некоторое внешнее ребро. Далее нумеруем внешние ребра числами от 1 до n в том порядке, в каком концы этих ребер встречаются при обходе по заданному ориентированному циклу, начиная с заданного внешнего ребра. Тогда при обходе другого ориентированного цикла концы уже занумерованных внешних ребер будут встречаться в некотором циклическом порядке $(i_1, \ldots, i_n)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8.(критерий высотности атома, имеющего ровно два белых кольца) Атом, имеющий два белых кольца, является высотным тогда и только тогда, когда цикл $(i_1, \ldots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, ..., 1)$, рёбра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны и для каждого ориентированного цикла f-графа атома верно, что совокупность рёбер класса C_1 с концами на одном ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Замечание. В. О. Мантуров [3] доказал следующий критерий высотности.

Теорема. Атом является высотным тогда и только тогда, когда его остов может быть вложен в плоскость так, что в каждой вершине исходный циклический порядок остова и циклический порядок, порожденный вложением в плоскость, совпадают.

На практике проверка высотности атома является довольно сложной, поэтому вышеизложенный критерий утверждения 8 упрощает задачу проверки высотности атома, имеющего 2 белых кольца.

Доказательство.

Докажем в одну сторону. Если цикл $(i_1, i_2 ... i_n)$ не совпадает с циклом $(n, n-1, ..., 1)$, то мы имеем пересечения внешних неориентированных рёбер, и в этом случае атом не будет высотным. Если же f-граф атома допускает ориентированное вложение S в плоскость, то, в этом вложении, исходя из процесса обозначения всех внутренних рёбер f-графа, рёбра классаA_1 будут лежать внутри(если в S ориентированные циклы не лежат один в другом, и вне, если циклы лежат один в другом) соответствующего ориентированного цикла, а рёбра класса B_1-вне(если рёбра A_1 внутри, и внутри, если рёбра A_1-вне) соответствующего ориентированного цикла. Очевидно, рёбра классов A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны. Причём рёбра классов A_1 и B_1 не зацепленны ни с какими рёбрами класса C_1, иначе это противоречило бы определению рёбер класса C_1 (если какое-то ребро c_1 класса C_1 зацепленно с ребром класса A_1, то ребро c_1, исходя из процесса обозначения внутренних рёбер, есть ребро класса B_1, противоречие, аналогично объясняется, почему ребро класса C_1 не может быть зацепленно с ребром класса B_1). И, по утверждению 7 заключаем, что каждый ориентированный цикл f-графа с совокупностью рёбер класса C_1 с концами на этом ориентированном цикле не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Докажем в другую сторону. Рассмотрим f-граф G атома, имеющего 2 белых кольца, с условием, что цикл $(i_1, \ldots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, ..., 1)$, рёбра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны и для каждого ориентированного цикла f-графа G верно, что совокупность рёбер класса C_1 с концами на одном ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. Проверим, что f-граф G допускает ориентированное вложение в плоскость. Действительно, так как цикл $(i_1, \ldots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, ..., 1)$, то мы можем зафиксировать вложение двух ориентированных циклов и внешних рёбер f-графа G так, что оба цикла не лежат один в другом и ориентированы одинаково. Фиксируем это вложение. Далее, вложим совокупность рёбер класса C_1(так как по утверждению 7 каждый ориентированный цикл f-графа с совокупностью рёбер класса C_1 с концами на этом ориентированном цикле допускает вложение в плоскость). Условие того, что рёбра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны, позволяет нам погрузить рёбра A_1(соответственно B_1) внуть (соответственно вне) ориентированного цикла так, чтобы никакие 2 ребра из класса A_1(соответственно B_1) не пересекались, и никакое ребро класса A_1(соответственно B_1) не пересекалось с ребром класса C_1 (иначе ребро класса A_1(соответственно B_1) было бы зацепленно с ребром класса $_1$, что противоречит условиям обозначения внутренних рёбер f-графа). Сделаем вышеописанное погружение рёбер класса A_1(соответственно B_1) с дополнительными условиями: без самопересечений, без пересечений внешних рёбер. Получили ориентированное вложение f-графа в плоскость.$\square$

Рассмотрим ориентированное вложение G f-графа атома $X = (P^2, K)$, имеющего два белых кольца, в плоскость. Когда группа симметрий $Sym(X)$ атома транзитивно действует на ориентированных циклах G? Оказывается, когда расположения внутренних рёбер на одном ориентированном цикле однозначно определяют расположения внутренних рёбер на другом ориентированном цикле. И относительно того, как группа симметрий вложения G действует на вершинах внешних рёбер на одном ориентированном цикле, определяются расположения внутренних рёбер этого цикла. То есть ориентированный цикл должен переходить в себя при поворотах, определяемых $Sym(G)$. Пример показан на Рис. 8.

Если есть симметрия ориентированно вложенного f-графа высотного атома(имеющего 2 белых кольца), переводящая выделенную красным вершину 1(на рисунке 8) в вершину 2, то внутреннее ребро, между концами которого есть только вершина 1, этой же симметрией переведётся в ребро, между концами которого есть только вершина 2. Этот пример иллюстрирует, что ориентированный цикл должен переходить в себя при поворотах, определяемых $Sym(G)$.

Определение 16. Серия атомов $B^1_{k,l}, (k, l \geq 1)$ называется серия высотных атомов, имеющих два белых кольца, и симметрия которых транзитивно действует на этих кольцах. Здесь число k соответствует количеству внутренних рёбер на каждом ориентированном цикле f-графа этого атома, l - число внешних рёбер, соединяющих два ориентированных цикла.

Каждый атом из этой серии должен удовлетворять критерию высотности из утверждения 8 и внутренние рёбра f-графа этого атома определяется в соответствии с рассуждениями выше. Пример показан на Рис.8.

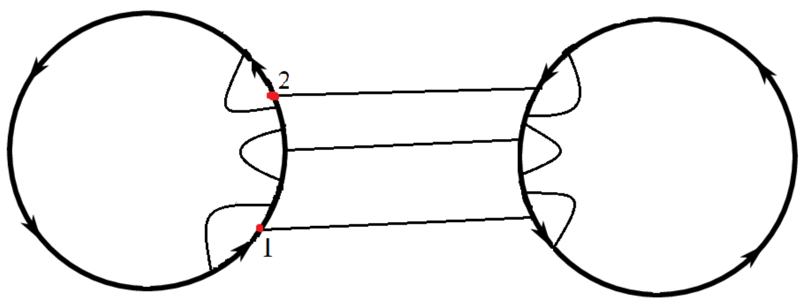

Рис. 8. f-граф атома $B^1_{3,3}$

4. Основная теорема.

Следующее предложение взято из статьи И.М.Никонова [6].

Предложение 1. Атомы, получаемые из максимально симметричных высотных атомов путем удвоения ребер являются высотными, группа симметрий которых транзитивна на вершинах. Если P — максимально симметричный атом и G — его f-граф, то после удвоения неориентированных рёбер атома P мы получим новый атом $P^{'}$ с соответствующим f-графом $G^{'}$.

Замечание. Поскольку в f-графе максимально симметричного атома симметрии действуют транзитивно на вершинах графа G, то они задают транзитивное действие на ориентированных циклах графа $G^{'}$.

Теорема 2. Любой высотный атом с группой симметрий, транзитивной на вершинах атома и транзитивной на кольцах белого цвета, изоморфен одному из атомов следующего списка: $D_n, (n \geq 3), C_n, (n \geq 1), P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, D_n^{''}, (n \geq 2), P_1^{''}, P_2^{''}, P_3^{''}, P_4^{''}, P_5^{''}, E_n, (n \geq 1), F_n, (n \geq 1), Q_1, Q_3$. Конкретное описание всех атомов этого списка дано в статье И.М.Никонова [6].

Доказательство. Пусть $X = (P^2, K)$ - высотный атом с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого цвета и вершинах атома, и G — его f-граф. Тогда по утверждению 4 все ориентированные циклы G содержат одинаковое количество вершин. Опираясь на результаты статьи [6] выпишем список высотных атомов, имеющих f-граф, все ориентированные циклы которого содержат одинаковое количество вершин, а группа симметрий каждого атома из списка транзитивно действует на вершинах атома: $D_n, (n \geq 3)$, C_n, $(n \geq 1)$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, $D_n^{''}, (n \geq 2), P_1^{''}, P_2^{''}, P_3^{''}, P_4^{''}, P_5^{''}$, $E_n, (n \geq 1), F_n, (n \geq 1), Q_1, Q_3$. Напомним, что $C_2 = D_2$, $E_1 = D_1$, $F_1 = A_2$.

По утверждению 5 группа симметрий максимально симметричных высотных атомов транзитивно действует на кольцах обоих цветов, а в статье [6] доказано транзитивное действие группы симметрий на вершинах атома. Напомним список максимально симметричных высотных атомов: A_2, $D_n, (n \geq 1)$, C_n, $(n \geq 1)$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

По предложению 1 и замечанию к нему, атомы, получаемые из максимально симметричных высотных атомов путем удвоения ребер являются высотными, группа симметрий которых транзитивна на вершинах и на кольцах белого цвета. Список этих атомов: $A_2^{''}$, $D_n^{''}, (n \geq 1)$, $C_n^{''}$, $(n \geq 1)$, $P_1^{''}, P_2^{''}, P_3^{''}, P_4^{''}, P_5^{''}$. Напомним, что $A_2^{''} = F_2$, $C_n^{''} = C_{2n}$, $(n \geq 1)$, $D_1^{''} = E_2$.

f-граф атомов серии $E_n, (n \geq 1), F_n, (n \geq 1)$ имеет один ориентированный цикл, значит, каждый из атомов этой серии имеет одно белое кольцо.

А атом $Q_1 = R_2$ и $Q_3 = R_8$. $\square$

ИСТОЧНИКИ И ЛИТЕРАТУРА

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет 444 с., (1999).

[2] Волчанецкий Н. В., Никонов И. М. Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. №2. 3–6.

[3] Мантуров В.О. Бифуркации, атомы и узлы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. №1. 3–8.

[4] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Изд-во Московского университета, в сборн. "Соврем. пробл. матем. и механ."под ред. А. Т. Фоменко, сс. 58–97 (2009).

[5] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т., Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сборник, 199 (9), сс. 3–96 (2008).

[6] И. М. Никонов, “Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий” //в печати

[7] Фоменко А. Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Известия А.Н. СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с. 1276–1307

[8] Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степеняи свободы // Известия АН СССР. 1990, т.54, №3, с. 546–575.

[9] Е.А.Кудрявцева, А.Т.Фоменко. "Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях". - Доклады РАН, серия: математика, 2012, том 446, № 6, с.615-617

[10] A.T.Fomenko, A.Yu.Konyaev. "New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems". - Topology and its applications, 2012, vol.159, pp.1964-1975.

[11] A.T.Fomenko, A.Yu.Konyaev. "Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems". - In: "Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications". Series "Solid Mechanics and Its Applications". Vol.211, pp.3-21. Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer. 2014.

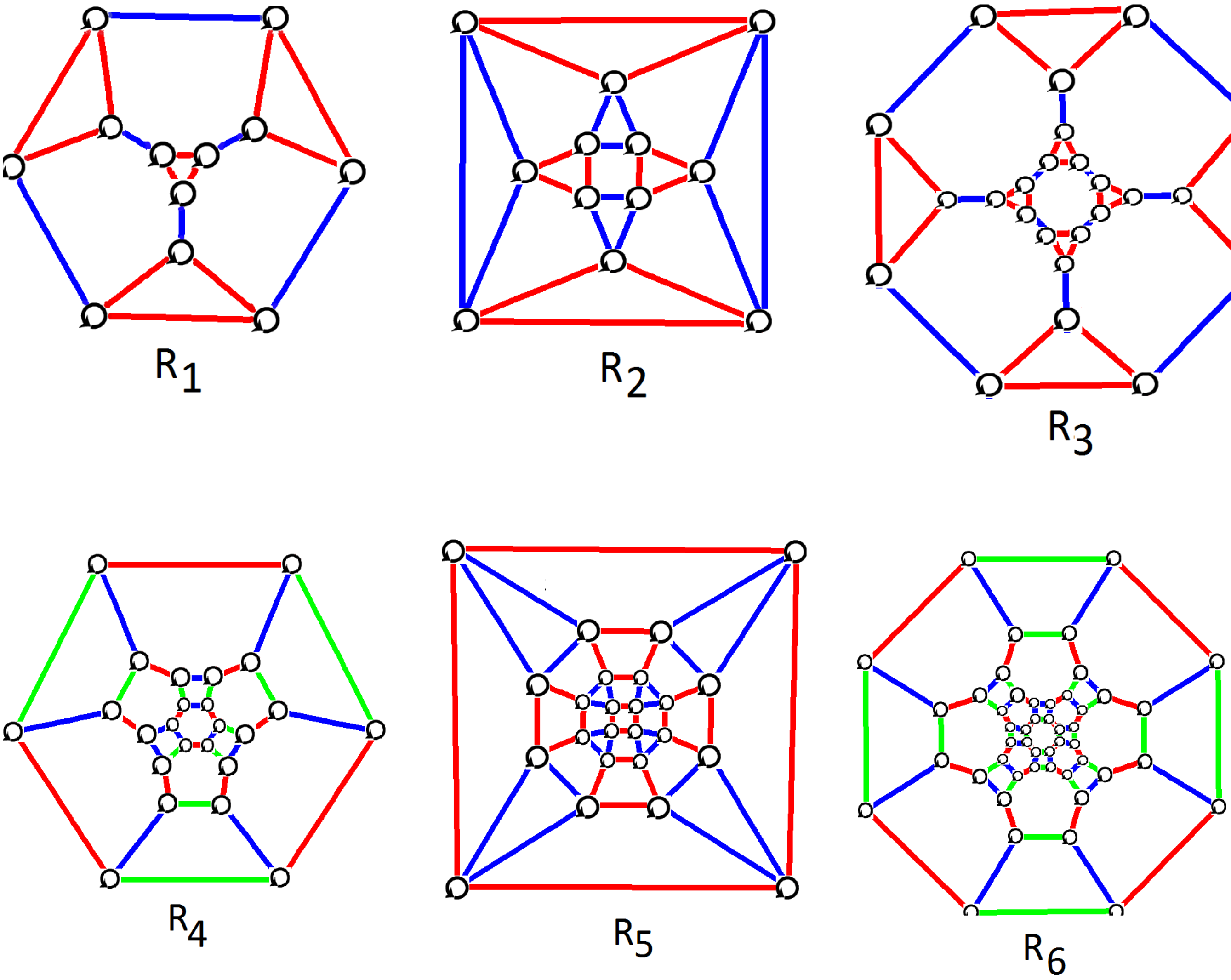

Рис. 9. f-графы атомов R_1 - R_6

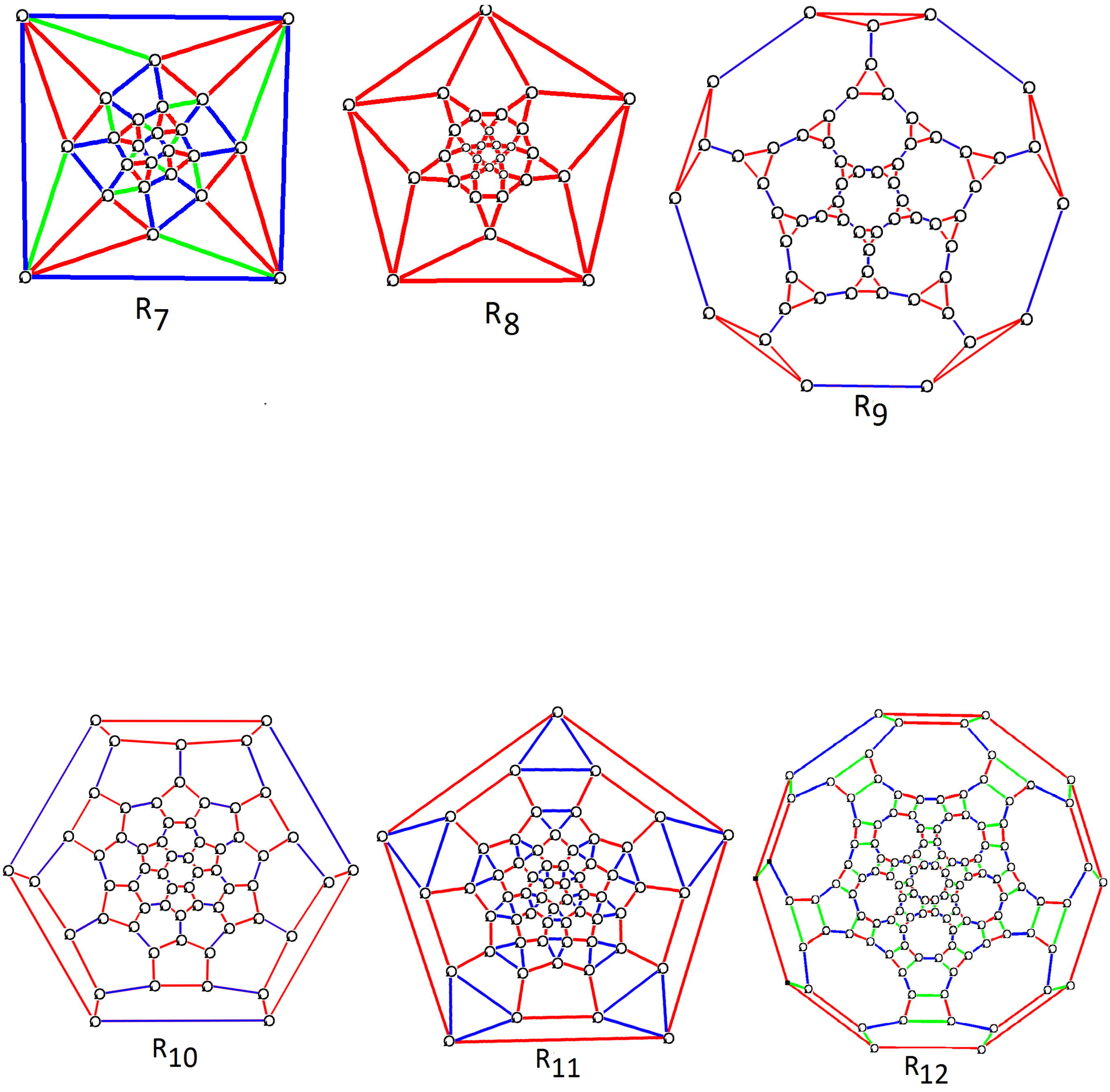

Рис. 10. f-графы атомов R_7 - R_{12}

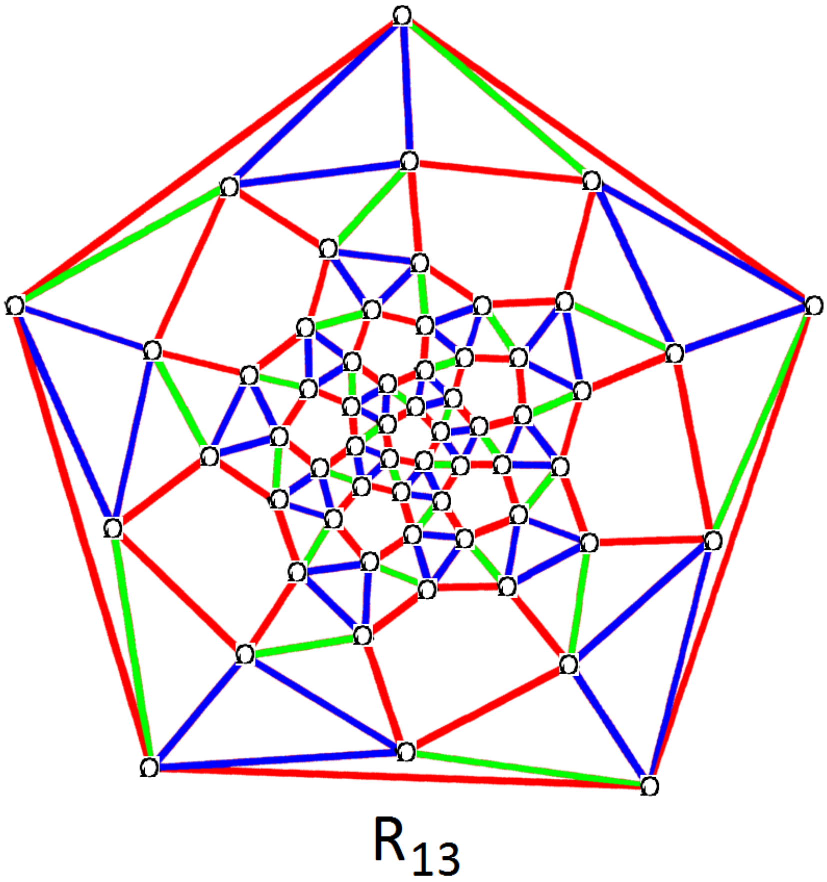

Рис. 11. f-граф атома R_{13}

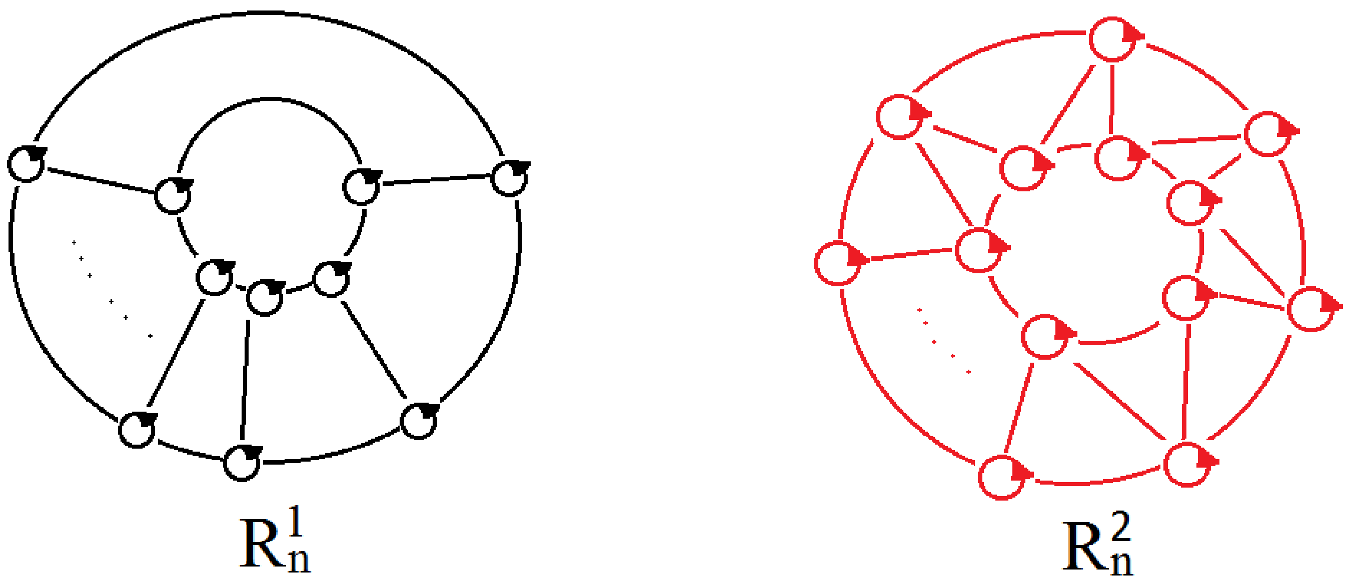

Рис. 12. f-графы атомов R_n^1 и R_n^2