Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Свойства отображения, сопоставляющего каждому метрическому компакту семейство его непустых компактных подмножеств

Курсовая работа студента 307 группы Михайлова Ивана Александровича
Научный руководитель: профессор Тужилин Алексей Августинович

Москва, 2017

Введение

В работе исследуются свойства отображения $\mathcal{H}$, сопоставляющего каждому метрическому компакту семейство его непустых компактных подмножеств. Показано, что это отображение является непрерывным и 1-липщецевым. Существует гипотеза, что не бывает биективных изометрий пространства Громова–Хаусдорфа на себя, кроме тождественного отображения. $\mathcal{H}$, возможно, является изометричным вложением пространства Громова–Хаусдорфа в себя. В работе приведено несколько классов примеров пространств, расстояние между которыми сохраняется при данном отображении. В дополнение приводятся свойства, которые возможно упрощают доказательство изометричности $\mathcal{H}$.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть A — произвольное множество. Через $\#A$ будем обозначать *мощность* множества A.

Пусть Z — произвольное метрическое пространство. Расстояния между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Через $\operatorname{diam} Z$ обозначим диаметр Z. Если $X, Y \subset Z$ — непустые подмножества, то положим $|XY| = \inf\{|xy| : x \in X, y \in Y\}$, а $|XY|' = \sup\{|xy| : x \in X, y \in Y\}$. Если $X = \{x\}$, то вместо $|\{x\}Y| = |Y\{x\}|$ и $|\{x\}Y|' = |Y\{x\}|'$ будем писать $|xY| = |Yx|$ и $|xY|' = |Yx|'$ соответственно.

Для непустых $X, Y \subset Z$ положим $|XY|_Z = \max\{\sup\limits_{x\in X} |xY|, \sup\limits_{y\in Y} |yX|\}$. Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между X и Y*. Семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства Z обозначим через $\mathcal{H}(Z)$. Хорошо известно [1], что $\mathcal{H}(Z)$ с расстоянием Хаусдорфа является метрическим пространством.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройка (X', Y', Z), состоящая из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, называется *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $|X'Y'|_Z \le r$. На множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой [1].

Метрическое пространство называется *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс компактен, если и только если он конечен. Симплекс, состоящий из n точек, расстояние между которыми равны t, обозначим через $t\Delta_n$. Если $t = 1$, то пространство $t\Delta_n$ будем для краткости обозначать Δ_n.

Предложение 1.1 ([2]). *Для натуральных p, q и вещественных $t, s > 0$ имеет место*

$$2d_{GH}(t\Delta_p, s\Delta_q) = \begin{cases} |t-s|, & \text{если } p = q, \\ \max\{t, s-t\}, & \text{если } p > q, \\ \max\{s, s-t\}, & \text{если } p < q. \end{cases}$$

Предложение 1.2 ([2]). *Пусть M — конечное метрическое пространство, $n = \#M$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}, m > n$ и $t > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(t\Delta_m, M) = \max\{t, \operatorname{diam} M - t\}.$$

Для произвольного метрического пространства M положим

$$\varepsilon(M) = \inf\{|xy| : x, y \in M, x \ne y\}.$$

Предложение 1.3 ([2]). *Пусть M — конечное метрическое пространство и $n = \#M$, тогда*

$$2d_{GH}(t\Delta_n, M) = \max\{t - \varepsilon(M), \operatorname{diam} M - t\}.$$

Пусть M — произвольное множество, тогда через $\mathcal{D}_k(M)$ обозначим семейство всевозможных разбиений M на k его непустых подмножеств. Пусть теперь M — метрическое пространство и $D = \{M_1, \ldots, M_k\} \in \mathcal{D}_k(M)$. Положим $\operatorname{diam} D = \max\{\operatorname{diam} X_1, \ldots, \operatorname{diam} X_k\}$, $\alpha(D) = \min\limits_{i \neq j} |M_i M_j|$, а $\beta(D) = \max\limits_{i \neq j} |M_i M_j|'$.

Предложение 1.4 ([2]). *Пусть M — компактное метрическое пространство и $m \in \mathbb{N}, m < \#M$. Тогда для любого $t > 0$ выполняется*

$$2d_{GH}(t\Delta_m, M) = \inf\big\{\max(\operatorname{diam} D, t - \alpha(D), \beta(D) - t) : D \in \mathcal{D}_m(M)\big\}.$$

2 Основные результаты

Хорошо известно [1], что если X — компактное метрическое пространство, то $\mathcal{H}(X)$ — тоже компакт. Рассмотрим отображение $\mathcal{H}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, сопоставляющие каждому метрическому компакту X семейство всех его непустых компактных подмножеств. Докажем, что отображение $\mathcal{H}$ является 1-липшецевым (и, следовательно, непрерывным).

Пусть $X, Y \in \mathcal{M}$ — неизометричные метрические компакты, и X, Y изометрично вложены в метрическое пространство Z. В силу комкатности Y, для любого $x \in X$ существует $y' \in Y$ такое, что $|xY| = |xy'|$. Введем обозначение $y' = \gamma(x)$, тем самым определив отображение $\gamma\colon X \to Y$. Пусть $A \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество, тогда $\overline{\gamma(A)} \in \mathcal{H}(Y)$, где $\overline{B}$ обозначает замыкание подмножества B метрического пространства. Докажем несколько предложений, описывающих свойства компакта $\overline{\gamma(A)}$.

Предложение 2.1. *Для любого $A \in \mathcal{H}(X)$ и $a \in A$ имеем $|a\overline{\gamma(A)}| = |a\gamma(a)|$.*

Доказательство. В силу определения γ, для любого $y \in Y$ верно, что $|ay| \geq |a\gamma(a)|$, поэтому $|a\overline{\gamma(A)}| = \inf\limits_{y \in \overline{\gamma(A)}} |ay| = |a\gamma(a)|$, так как $\gamma(a) \in \overline{\gamma(A)}$. □

Предложение 2.2. *Для любого $A \in \mathcal{H}(X)$ выполняется $|A\overline{\gamma(A)}|_Z = \sup\limits_{a \in A} |a\gamma(a)|$.*

Доказательство. Пусть $y \in \overline{\gamma(A)}$. Рассмотрим два случая.

1. Если $y \in \gamma(A)$, то существует $a \in A$ такое, что $y = \gamma(a)$. Но так как $|yA| = \inf\limits_{a \in A} |ya|$, то $|yA| \leq |a\gamma(a)|$.

2. Если $y \in \partial\gamma(A)$, то существует последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек из A такая, что $\gamma(a_n) \to y$ при $n \to \infty$. Так как в метрическом компакте любая последовательность точек имеет сходящуюся подпоследовательность, то, без ограничения общности, можно считать, что $a_n \to a \in A$. Предположим, что $|a\gamma(a)| < |ay|$, тогда $\varepsilon := |ay| - |a\gamma(a)| > 0$. Существует номер $k > 0$ такой, что $|aa_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|y\gamma(a_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Из неравенства треугольника для $a\gamma(a)a_k$ получаем:

$$|a_k\gamma(a)| \leq |a\gamma(a)| + |aa_k| < |a\gamma(a)| + \tfrac{\varepsilon}{3} = |ay| - \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{3} = |ay| - \tfrac{2}{3}\varepsilon < \\ < |ay| - |aa_k| - |y\gamma(a_k)| \leq |a_k\gamma(a_k)|,$$

противоречие с определением $\gamma(a_k)$. Значит $|ay| = |a\gamma(a)|$ и, следовательно, $|yA| \leq$ $\leq |a\gamma(a)|$.

Итак, для любого $y \in \overline{\gamma(A)}$ существует $a \in A$ такое, что $|yA| \leq |a\gamma(a)|$, откуда $\sup\limits_{y \in \overline{\gamma(A)}} |yA| \leq$ $\leq \sup\limits_{a \in A} |a\gamma(a)|$. Значит, в силу предложения 2.1,

$$|A\overline{\gamma(A)}|_Z = \max\{\sup_{y \in \overline{\gamma(A)}} |yA|, \ \sup_{a \in A} |a\gamma(a)|\} = \sup_{a \in A} |a\gamma(a)|,$$

что и требовалось. □

Следствие 2.1. *Для любого* $A \in \mathcal{H}(X)$ *имеет место* $|A\overline{\gamma(A)}|_Z \leq \sup\limits_{x \in X} |x\gamma(x)|$.

Предложение 2.3. *Для любых* $A \in \mathcal{H}(X)$ *и* $B \in \mathcal{H}(Y)$ *имеем* $|AB|_Z \geq |A\overline{\gamma(A)}|_Z$.

Доказательство. Заметим, что для любого $a \in A$ имеет место $|aB| = \inf\limits_{y \in B} |ay| \geq \inf\limits_{y \in Y} |ay| =$ $= |a\gamma(a)|$. Значит, $\sup\limits_{a \in A} |aB| \geq \sup\limits_{a \in A} |a\gamma(a)| = |A\overline{\gamma(A)}|_Z$, поэтому

$$|AB|_Z = \max\{\sup_{a \in A} |aB|, \ \sup_{b \in B} |bA|\} \geq |A\overline{\gamma(A)}|_Z,$$

что и требовалось. □

Следствие 2.2. *Для любого* $A \in \mathcal{H}(X)$ *имеем*: $|A\mathcal{H}(Y)| = |A\overline{\gamma(A)}|_Z$.

Теорема 2.1. *Пусть* X *и* Y *— метрические компакты, погруженные в метрическое пространство* Z*, тогда*

$$|\mathcal{H}(X)\mathcal{H}(Y)|_{\mathcal{H}(Z)} = |XY|_Z.$$

Доказательство. Заметим, что из следствия 2.1 вытекает ограниченность всех расстояний $|A\overline{\gamma(A)}|_Z$ величиной $\sup\limits_{x \in X} |x\gamma(x)|$, а, значит, $\sup\limits_{A \in \mathcal{H}(X)} |A\overline{\gamma(A)}|_Z \leq \sup\limits_{x \in X} |x\gamma(x)| = \sup\limits_{x \in X} |xY|$. Принимая во внимание следствие 2.2, получим, что $\sup\limits_{A \in \mathcal{H}(X)} |A\mathcal{H}(Y)| \leq \sup\limits_{x \in X} |xY|$.

С другой стороны, для любого $x \in X$ выполняется $|x\gamma(x)| = |\{x\}\{\gamma(x)\}|_Z = |\{x\}\overline{\gamma(\{x\})}|_Z$. Значит,

$$\sup_{x \in X} |xY| = \sup_{x \in X} |x\gamma(x)| \leq \sup_{A \in \mathcal{H}(X)} |A\overline{\gamma(A)}|_Z = \sup_{A \in \mathcal{H}(X)} |A\mathcal{H}(Y)|.$$

Таким образом, $\sup\limits_{A \in \mathcal{H}(X)} |A\mathcal{H}(Y)| = \sup\limits_{x \in X} |xY|$.

Построив аналогичное γ отображение $\chi\colon Y \to X$, получим, что $\sup\limits_{B \in \mathcal{H}(Y)} |B\mathcal{H}(X)| = \sup\limits_{y \in Y} |yX|$.

Но тогда

$$|\mathcal{H}(X)\mathcal{H}(Y)|_{\mathcal{H}(Z)} = \max\{\sup_{A \in \mathcal{H}(X)} |A\mathcal{H}(Y)|, \ \sup_{B \in \mathcal{H}(Y)} |B\mathcal{H}(X)|\} =$$

$$= \max\{\sup_{x \in X} |xY|, \sup_{y \in Y} |yX|\}| = |XY|_Z,$$

что и требовалось. □

Теорема 2.2. *Для любых метрических компактов X и Y верно, что*

$$d_{GH}\big(\mathcal{H}(X),\mathcal{H}(Y)\big) \le d_{GH}(X,Y).$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 вытекает, что если для X, Y существует реализация (X,Y,Z) такая, что $|XY|_Z < g$, то для $\mathcal{H}(X),\mathcal{H}(Y)$ существует реализация $\big(\mathcal{H}(X),\mathcal{H}(Y),\mathcal{H}(Z)\big)$ такая, что $|\mathcal{H}(X)\mathcal{H}(Y)|_{\mathcal{H}(Z)} < g$. Тогда, в силу определения расстояние по Громову–Хаусдорфу, $d_{GH}\big(\mathcal{H}(X),\mathcal{H}(Y)\big) \le d_{GH}(X,Y)$. □

Следствие 2.3. *Отображение $\mathcal{H}$ непрерывно.*

Следствие 2.4. *Отображение $\mathcal{H}$ является 1-липшецевым.*

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что отображение $\mathcal{H}$ является липшицевым с константой C, где $C \le 1$. Покажем, что $C = 1$. Хорошо известно, что расстояние от одноточечного пространства до любого метрического пространства равно половине диаметра. Очевидно, что $\mathcal{H}\big(\{x\}\big) = \{x\}$ и $d\big(\mathcal{H}(Y)\big) = d(Y)$, где $d(X)$— диаметр пространства X. Значит, $\big|\{x\}Y\big| = \Big|\mathcal{H}\big(\{x\}\big)\mathcal{H}(Y)\Big|$. Поэтому $C \ge 1$, следовательно $C = 1$. □

3 Примеры

В этом разделе будут построены несколько классов примеров, в которых сохраняется расстояние Громова–Хаусдорфа между X и Y при отображении $\mathcal{H}$.

Предложение 3.1. *Отображение $\mathcal{H}$ сохраняет расстояние между симплексами.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{H}(t\Delta_p) = t\Delta_{2^p-1}$. Поэтому, согласно формуле указанной в предложении 1.1, $\mathcal{H}$ сохраняет расстояние Громова–Хаусдорфа между произвольными конечными симплексами. □

Предложение 3.2. *Пусть M — конечное метрическое пространство $m = \#M, n \ge m$ и $t > 0$, тогда*

$$d_{GH}(t\Delta_n, M) = d_{GH}\big(\mathcal{H}(t\Delta_n),\mathcal{H}(M)\big)$$

Доказательство. Заметим, что $\varepsilon(M) = \inf\{|xy| : x,y \in M, x \ne y\} = \varepsilon\big(\mathcal{H}(M)\big)$ и $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}\mathcal{H}(X)$. Из предложения 1.2 и предложения 1.3 следует требуемое. □

Покажем следующую оценку расстояния Хаусдорфа.

Предложение 3.3. *Пусть $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ и $Y = \{y_1,\dots,y_k\}$ — конечные метрические подпространства Z, тогда для любой перестановки σ выполняется* $|XY|_Z \le \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} |x_i y_{\sigma(j)}|$

Доказательство. Заметим, что для любой точки x_i имеем $|x_iY| \le |x_i y_{\sigma(j)}|$, следовательно $\sup\limits_{1\le i\le n}|x_iY| \le \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} |x_i y_{\sigma(j)}|$. Аналогично, $\sup\limits_{1\le j\le k}|y_{\sigma(j)}X| \le \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} |x_i y_{\sigma(j)}|$, значит и $|XY|_Z \le \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} |x_i y_{\sigma(j)}|$, что и требовалось. □

Для построения еще одного класса примеров необходимо доказать следующий факт (идея доказательства взята из [3]).

Предложение 3.4. *Если X — связный метрический компакт, то $\mathcal{H}(X)$ тоже связно.*

Доказательство. Заметим, что если X связно, то связна и любая его степень (X^n, d_n), где $d_n(x, x') = \max\limits_{1\le i\le n} d(x_i, x'_i)$. Рассмотрим вложение $\pi_n\colon X^n \to \mathcal{H}(X)$, определенное следующим образом : $\pi_n(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\}$. Очевидно, что $\pi_n(X^n)$ является семейством всех конечных подмножеств X с не более чем n элементами. В силу предложения 3.3, π_n является 1-липшицевым, следовательно, непрерывным. Поэтому $\pi_n(X^n)$ будет связно, как образ связного пространства при непрерывном отображении. Значит $\bigcup\limits_n \pi_n(X^n)$ тоже связно, потому что $\pi_n(X^n)\cap\pi_k(X^k) = \pi_k(X^k) \ne \emptyset$ при всех $k \le n$. Но конечные множества всюду плотны в $\mathcal{H}(X)$, следовательно, $\mathcal{H}(X) = \overline{\bigcup\limits_n \pi_n(X^n)}$ тоже связно, как замыкание связного пространства. $\square$

Докажем следующее свойство связных пространств

Предложение 3.5. *Если $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ — связное метрическое пространство, то для любого натурального $i \le n$ существует $j \ne i$ такое, что $|X_iX_j| = 0$.*

Доказательство. Покажем, что если для некоторого натурального i при любых $j \ne i$ выполняется $|X_iX_j| > 0$, то X несвязно.

Докажем сначала это утверждение для случая $n = 2$. Предположим, что $X = X_1 \sqcup X_2$, где $|X_1X_2| > 0$. Покажем, что $|\overline{X_1}\ \overline{X_2}| = \inf\{|x_1x_2| : x_1 \in \overline{X_1}, x_2 \in \overline{X_2}\} > 0$, где $\overline{X_1}$ обозначает замыкание. Заметим, что для любых $x_1 \in \overline{X_1}$ и $x_2 \in \overline{X_2}$ существуют последовательности $\{x_i^1\}_{i=1}^{\infty} \subset X_1$ и $\{x_j^2\}_{j=1}^{\infty} \subset X_2$, для которых $x_i^1 \to x_1, i \to \infty$, а $x_j^2 \to x_2, j \to \infty$. Но тогда $|x_1x_2| \ge \inf\limits_{i,j} |x_i^1 x_j^2|$, следовательно, $|x_1x_2| > 0$, т.е. $|\overline{X_1}\ \overline{X_2}| > 0$. Но $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, значит и $\overline{X_1} \cap \overline{X_2} = \emptyset$. Получается, что мы представили X как объединение двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств $\overline{X_1}$ и $\overline{X_2}$, следовательно, X несвязно.

Теперь пусть $n > 2$. Рассмотрим произвольное $1 \le i \le n$. Предположим, что для любого $j \ne i$ имеем $|X_iX_j| > 0$. Но тогда $\bigl|X_i(\bigcup\limits_{j\ne i} X_j)\bigr| > 0$, так как у нас конечное число множеств. Используя случай $n = 2$ получим, что X опять несвязно. $\square$

Предложение 3.6. *Пусть X — связный метрический компакт, тогда для любого действительного числа t такого, что $t \ge \operatorname{diam} X$, и любого натурального p имеем*

$$d_{GH}(t\Delta_p, X) = d_{GH}\bigl(\mathcal{H}(t\Delta_p), \mathcal{H}(X)\bigr).$$

Доказательство. Покажем, что $d_{GH}(t\Delta_p, X) = \frac{1}{2}t = d_{GH}\bigl(\mathcal{H}(t\Delta_p), \mathcal{H}(X)\bigr)$. Для этого воспользуемся формулой из предложения 1.4:

$$2d_{GH}(t\Delta_p, M) = \inf\bigl\{\max(\operatorname{diam} D, t - \alpha(D), \beta(D) - t) : D \in \mathcal{D}_p(M)\bigr\}.$$

Заметим, что для любого разбиения D выполняется $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} X \le t$ и $\beta(D) = \max\limits_{i\ne j} |X_iX_j|' \le$

$\leq \operatorname{diam} X \leq t$. В силу предложения 3.5, имеем $\alpha(D) = \min\limits_{i \neq j} |X_i X_j| = 0$, поэтому $t - \alpha(D) = t$. Значит $\max(\operatorname{diam} D, t - \alpha(D), \beta(D) - t) = t$, следовательно, $d_{GH}(t\Delta_p, X) = \frac{1}{2}t$.

В силу того, что $\mathcal{H}$ сохраняет связность (предложение 3.4) и диаметр, для $\mathcal{H}(X)$ верны те же рассуждения, поэтому $d_{GH}\big(\mathcal{H}(t\Delta_p), \mathcal{H}(X)\big) = \frac{1}{2}t$, что и требовалось. □

4 Дополнительные свойства отображения $\mathcal{H}$

В этом разделе приводятся рассуждения, которые могут помочь в доказательстве (или нахождении контрпримера) изометричности $\mathcal{H}$.

Предложение 4.1. *Предположим, что отображение $\mathcal{H}$ сохраняет расстояние между точками некоторого всюду плотного подмножества $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{H}$ изометрично на всем $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{H}$ является 1-липшецевым (следствие 2.4), то оно, очевидно, сохраняет сходимость. Теперь пусть X и Y — произвольные метрические компакты, тогда, в силу всюду плотности $\mathcal{K}$ в $\mathcal{M}$, существуют последовательности метрических пространств $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ из $\mathcal{K}$ такие, что $X_i \to X$, а $Y_i \to Y$ при $i \to \infty$. Тогда $\mathcal{H}(X_i) \to \mathcal{H}(X)$, а $\mathcal{H}(Y_i) \to \mathcal{H}(Y)$, более того, в силу неравенства треугольника, $d_{GH}(X_i, Y_i) \to d_{GH}(X, Y)$, а $d_{GH}\big(\mathcal{H}(X_i), \mathcal{H}(Y_i)\big) \to d_{GH}(\big(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(Y)\big)$ при $i \to \infty$. Если $\mathcal{H}$ сохраняет расстояние между компактами из $\mathcal{K}$, то для любого натурального i имеет место $d_{GH}(X_i, Y_i) = d_{GH}\big(\mathcal{H}(X_i), \mathcal{H}(Y_i)\big)$, значит, $d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(\big(\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(Y)\big)$ для любых метрических компактов X и Y, что и требовалось. □

Следствие 4.1. *Если ограничение $\mathcal{H}$ на множество всех конечных метрических пространств изометрично, то оно изометрично на всем $\mathcal{M}$.*

Конечное метрическое пространство назовем *пространством общего положения*, если все его расстояния попарно различны, а неравенство треугольника всегда строгое.

Следствие 4.2. *Если $\mathcal{H}$ сохраняет расстояния между пространствами общего положения с одинаковым числом точек, то оно изометрично на всем $\mathcal{M}$.*

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., *Курс метрической геометрии*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, ArXiv e-prints, 2016.

[3] https://math.stackexchange.com/questions/1101549/connectedness-of-a-metric-space-implies-connectedness-of-the-corresponding-hausd