

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Интегрируемые "бильярдные книжки" моделируют все  
3-атомы интегрируемых гамильтоновых систем

Integrable Billiard's Books Model 3-atom in Hamiltonian  
Dynamical Systems

Курсовая работа  
3 курс

Выполнила  
И.С. Харчева  
(I.S. Kharcheva)

Научные руководители:  
А.Т. Фоменко  
В.В. Ведюшкина

Москва 2017

## Содержание

1	Простейшая бильярдная область.	3
2	Бильярдная книжка.	4
3	Динамическая система бильярдной книжки. Интегралы.	7
4	Атом. Молекула.	10
5	Общий вид 3-атомов.	13
6	Моделирование 3-атомов при помощи бильярдных книжек	17

# 1 Простейшая бильiardная область.

**Определение 1.** Семейством софокусных квадрик называется множество кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с евклидовыми координатами  $(x, y)$ , описываемых уравнением

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1, \quad (1)$$

где  $a > 0$  и  $b > 0$  называются параметрами этого семейства, а число  $\lambda \in [0, \max(a, b)]$  - параметром кривой из этого семейства или параметром квадрики.

**Замечание 1.** Без ограничения общности далее всегда будем предполагать, что  $b < a$ .

**Замечание 2.** По определению считаем, что случай  $\lambda = a$  отвечает прямой  $x = 0$ , а случай  $\lambda = b$  отвечает фокальной прямой  $y = 0$ .

**Замечание 3.** Кривая из семейства софокусных квадрик является эллипсом при  $\lambda \in [0, b)$ , гиперболой при  $\lambda \in (b, a)$ , прямыми при  $\lambda = a$  и при  $\lambda = b$ . Эллипсы и гиперболы из этого семейства имеют одни и те же фокусы и пересекаются под прямым углом. Прямая в случае  $\lambda = b$  проходит через них, в случае  $\lambda = a$  является серединным перпендикуляром отрезка, соединяющего эти фокусы.

**Определение 2.** С этим семейством можно естественно связать эллиптические координаты  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , где  $\lambda_1 \in (b, a)$ ,  $\lambda_2 \in (-\inf, b)$  (см. рис. 1).

**Определение 3.** Простейшей бильiardной областью назовем двумерное гладкое многообразие  $\omega'$  с кусочно-гладким краем, которое может быть вложено в плоскость с евклидовыми координатами  $(x, y)$  так, что оно будет ограничено и край будет являться объединением дуг из семейства софокусных квадрик, углы, направленные внутрь области, между которыми равны  $\frac{\pi}{2}$ .

**Определение 4.** Определим бильiardное движение по простейшей бильiardной области, как движение материальной частицы без трения по прямым с абсолютно упругим отражением о границу области.

**Замечание 4.** Условие на углы в определении 3 простейшей бильiardной области является естественным. Действительно, поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямым углом, то угол, направленный внутрь области может быть равен только  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ . В случае  $\frac{3\pi}{2}$  векторное поле, порожденное траекториями движения частицы будет не полным. А именно, рассмотрим

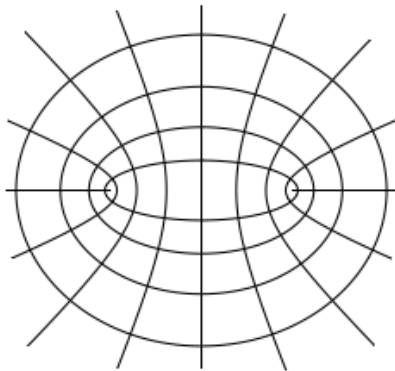


Рис. 1: Эллиптические координаты.

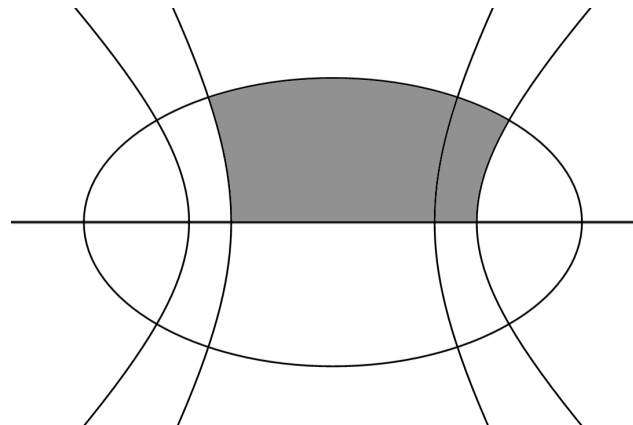


Рис. 2: Пример простейшей бильярдной области.

траектории, близкие к траектории, попадающей в угол  $\frac{3\pi}{2}$ . В любой ее окрестности есть траектории, которые продолжают движение прямо, и траектории, которые отражаются о границу области (см. рис. 3). Значит, однозначно определить продолжение траектории после прохождения угла мы не можем.

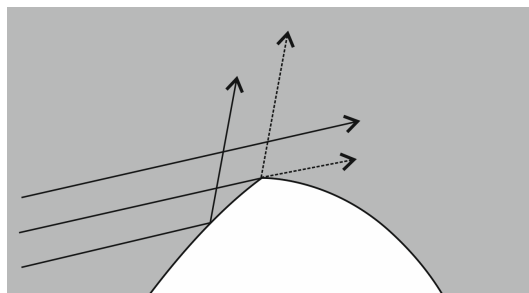


Рис. 3: Пример, иллюстрирующий невозможность непрерывно определить траекторию в случае, когда существует угол на границе бильярдной области, равный  $\frac{3\pi}{2}$

## 2 Бильярдная книжка.

**Определение 5.** Фиксируем простейшую бильярдную область  $\omega'$  и число  $n \in \mathbb{N}$ . Для каждой из дуг границы  $\omega'$ , являющейся связной частью квадрики припишем произвольную перестановку порядка  $n$  со следующими условиями:

1. если две дуги из границы имеют общую точку, то есть являются соседними, то перестановки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , приписанные им, коммутируют  $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ ;
2. к вогнутым со стороны бильярдной области дугам границы всегда приписаны тождественные перестановки.

Простейшую бильярдную область  $\omega'$  вместе с указанными перестановками назовем *склежкой* (см. рис. 4).

**Определение 6.** Фиксируем склейку  $\nu$ . Возьмем несвязное объединение  $n(\nu)$  простейших бильярдных областей (*листов*)  $\omega'(\nu)$ , то есть  $\bigsqcup_{i=1}^{n(\nu)} \omega'_i(\nu)$  и профакторизуем по следующему отношению эквивалентности, зависящему от склейки: дуги границ  $\omega'_i(\nu)$  и  $\omega'_j(\nu)$  будем считать эквивалентными, если они отвечают одной и той же дуге простейшей бильярдной области и ей приписана перестановка  $\sigma(\nu)$ , у которой после разложения ее в произведение независимых циклов  $i$ -ый и  $j$ -ый элементы находятся одном цикле. Получившееся топологическое пространство  $\omega(\nu) := (\bigsqcup_{i=1}^{n(\nu)} \omega'_i(\nu)) / \sim$  будем называть *бильярдной книжкой* (или кратко *книжкой*), отвечающей склейке  $\nu$  (см. рис. 4).

**Замечание 5.** Получившееся топологическое пространство не обязательно связно.

**Определение 7.** Определим *бильярдное движение по книжке*, отвечающей склейке  $\nu$ , как движение без трения материальной точки (см. рис. 4) по книжке  $\omega$  такое, что:

1. внутри всех листов, из которых состоит бильярдная книжка, материальная точка движется по прямой без трения;
2. на границе абсолютно упруго отражается, переходя на другой лист по перестановке  $\sigma(\nu)$ , приписанной к дуге, от которой она отражается;
3. в точке угла, которая является общей точкой двух дуг с приписанными перестановками  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , она переходит с листа  $i$  на лист  $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i)$  и идет в обратном направлении.

**Замечание 6.** Ограничения на перестановки в определении 5 склейки и факторизация в определении 6 бильярдной книжки являются естественными.

1. Пусть перестановки  $\sigma_1, \sigma_2$ , приписанные к соседним дугам книжки (первой и второй дуге соответственно), не коммутируют. То есть существует такой лист  $i$ , что  $\sigma_1 \circ \sigma_2(i) \neq \sigma_2 \circ \sigma_1(i)$ . Тогда в любой окрестности траектории, идущей по листу  $i$  в направлении угла, образованного этими

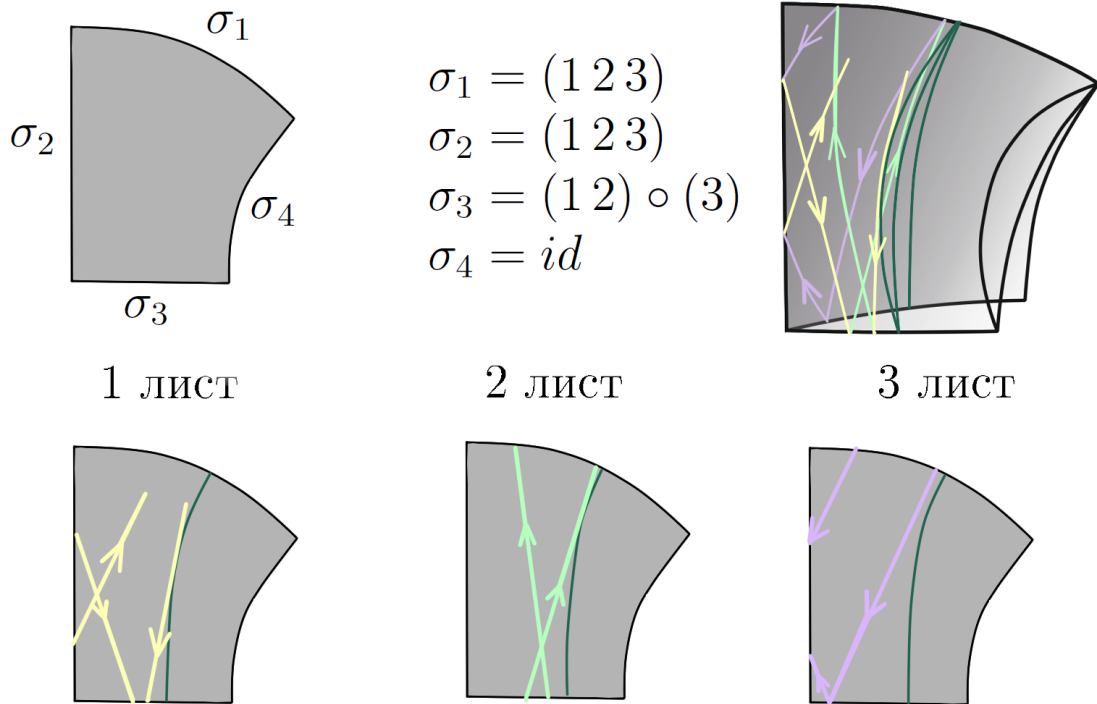


Рис. 4: Пример склейки, соответствующей ей бильярдной книжке и одной из траекторий на ней.

дугами, есть два вида траекторий (см. рис. 5). Это траектории, которые ударяются о первую дугу переходят по перестановке на лист  $\sigma_1(i)$ , потом ударяются о вторую и переходят на лист  $\sigma_1 \circ \sigma_2(i)$ , продолжая на нем путь. И траектории, которые ударяются сперва о вторую дугу переходят по перестановке на лист  $\sigma_2(i)$ , потом ударяются о первую и переходят на лист  $\sigma_2 \circ \sigma_1(i)$ , продолжая на нем путь. Таким образом, в любой окрестности есть неблизкие друг к другу траектории, которые продолжают свое движение на разных листах и однозначно определить траекторию, попавшую в угол на  $i$ -ом листе мы не можем.

2. Пусть к вогнутой дуге книжки приписана нетождественная перестановка  $\sigma$ . Тогда существует лист  $i$ , такой, что  $\sigma(i) \neq i$ . Поскольку дуга вогнута, то существует траектория, которая начинает свое движение на  $i$ -ом листе и касается этой вогнутой дуги. Тогда в любой окрестности этой дуги есть траектории, которые проходят далее по прямой на  $i$ -ом листе, и траектории, которые ударяются о вогнутую границу и переходят на

лист  $\sigma(i)$  (см. рис. 6). Эти траектории не близкие. Так что снова мы не можем однозначно определить траекторию, касающуюся дуги.

3. Некоторые невогнутые дуги мы профакторизовали. Это было необходимо, поскольку для каждой невогнутой дуги существует предельная траектория, которая идет только по ней. При этом близкие к этой траектории переходят с одного листа на другой (см. рис. 7). Поэтому точки, на этой предельной траектории и, соответственно, на этой дуге должны принадлежать обоим листам.

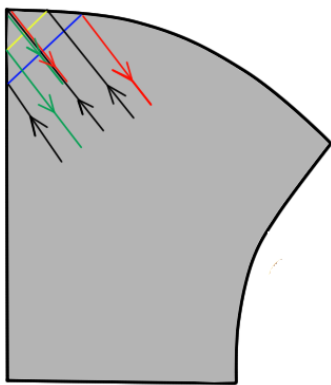


Рис. 5: Невозможно однозначно определить траекторию в углу, если приписаны некоммутирующие перестановки соседним дугам.

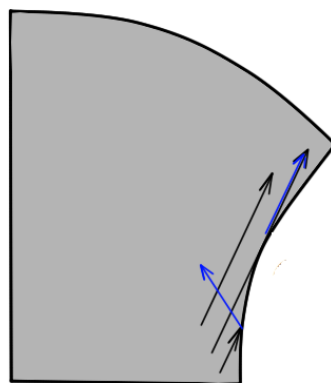


Рис. 6: Невозможно однозначно определить траекторию, касающуюся вогнутой границы, если на ней нетождественная перестановка.

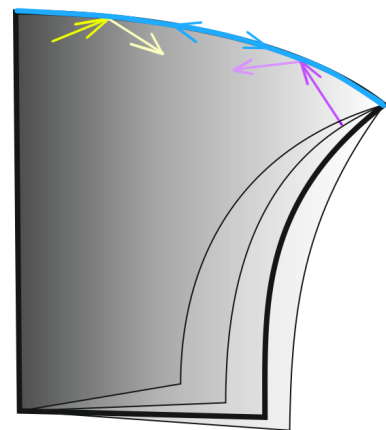


Рис. 7: Предельная траектория.

### 3 Динамическая система бильярдной книжки. Интегралы.

Далее мы будем изучать топологическое пространство  $M^4$  - объект динамической системы бильярдной книжки, соответствующей склейке  $\nu$ . Определим  $M^4$  следующим образом:

**Определение 8.** Возьмем несвязное объединение  $n$  простейших бильярдных областей  $\omega'$ , указанных в склейке  $\nu$  и снабдим каждую точку вектором

скорости, т.е. умножим на  $\mathbb{R}^2$ . При этом существует *каноническая проекция*  $\pi : (\bigsqcup_{i=1}^n \omega'_i) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \omega' \subset \mathbb{R}^2$ , которая осуществляется забыванием координат из  $\mathbb{R}^2$  и того, какой связной компоненте принадлежит точка. Профакторизуем  $(\bigsqcup_{i=1}^n \omega'_i) \times \mathbb{R}^2$  по отношению эквивалентности, указанному ниже, которое описывает, как траектории отражаются и на какой лист переходят (см. рис. 8). Точки  $(x_1, v_1)$  и  $(x_2, v_2)$  из  $(\bigsqcup_{i=1}^n \omega'_i) \times \mathbb{R}^2$ , где  $x_1, x_2 \in (\bigsqcup_{i=1}^n \omega'_i)$ ,  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ , будем считать эквивалентными, если выполнены следующие условия:

1.  $\pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2))$
2.  $\pi((x_1, v_1))$  и  $\pi((x_2, v_2))$  лежат на границе  $\omega'$
3. векторы  $v_1$  и  $v_2$  имеют равную длину  $|v_1| = |v_2|$
4. вектор  $v_1 - v_2$  равен нулю или ортогонален касательной к границе области  $\omega'$  в точке  $\pi((x_1, v_1))$ , если граница области  $\omega'$  - гладкая в этой точке
5. вектор  $v_1 + v_2$  равен нулю, если точка  $\pi((x_1, v_1))$  на границе области  $\omega'$  является точкой перегиба
6. вектор  $v_1$  направлен из области  $\omega'$ , вектор  $v_2$  - внутрь области  $\omega'$
7.  $x_1 \in \omega'_i, x_2 \in \omega'_{\sigma(i)}$ , где  $\sigma$  - перестановка, приписанная к границе области, на которой находится точка  $\pi((x_1, v_1))$ , если граница  $\omega'$  - гладкая в этой точке
8.  $x_1 \in \omega'_i, x_2 \in \omega'_{\sigma_1 \circ \sigma_2(i)}$ , где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  - перестановки, приписанные к дугам границы области, на которых находится точка  $\pi((x_1, v_1))$ , если эта точка является точкой перегиба на границе области  $\omega'$

Полученное после факторизации топологическое пространство и будем обозначать далее как  $M^4$ .

**Замечание 7.** Точка на  $M^4$  - это, по своей сути, положение материальной частицы, движущейся по области, которое фиксируется точкой на бильярдной книжке и ее вектором скорости.

На  $M^4$  есть две функции, которые постоянны на протяжении всей траектории (интегралы), - это квадрат модуля вектора скорости, поскольку мы рассматриваем движение материальной частицы без трения и с абсолютно-упругим отражением о границу и параметр квадратики, о котором пойдет речь ниже.



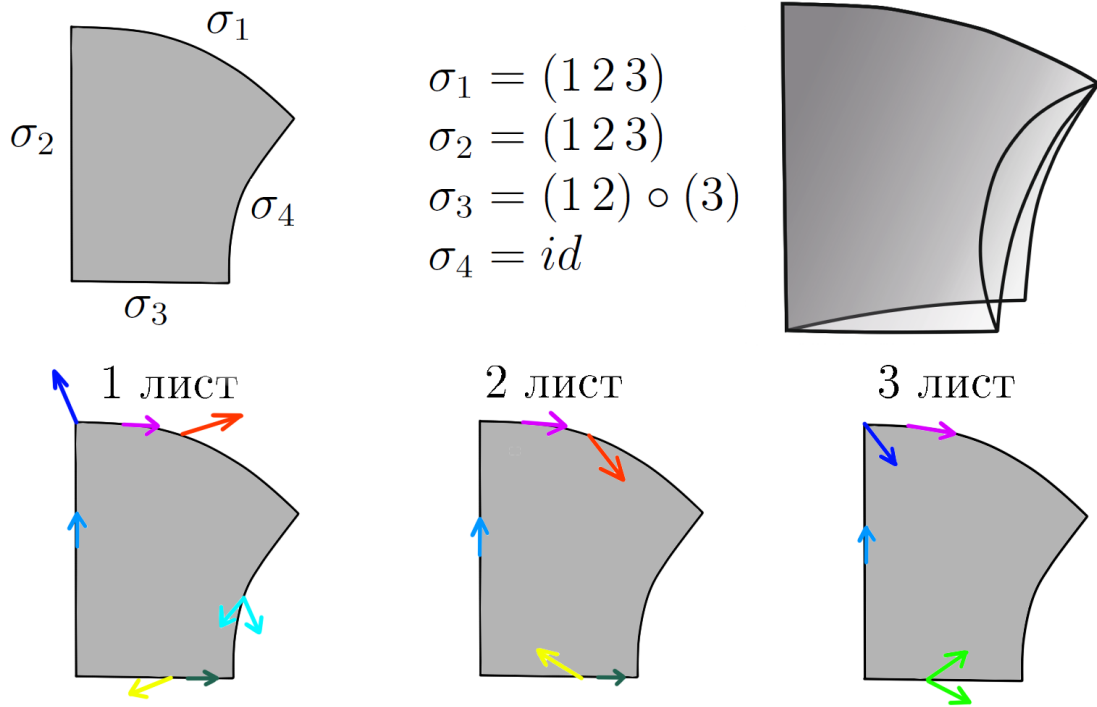


Рис. 8: Пример, на котором изображена склейка, бильярдная книжка, соответствующая этой склейке и ниже одним цветом изображены векторы, которые мы считаем эквивалентными в определении 8.

В книге В.В. Козлова и Д.В. Трещёва [1, гл. 4] сказано, что любая бильярдная траектория в области, ограниченной дугами софокусных квадрик, касается некоторой другой софокусной с ними квадрики (см. рис. 9). Это можно проверить непосредственным вычислением в эллиптической системе координат. Касание в частном случае - в эллиптическом бильярде следует из еще более раннего факта - из классической теоремы Якоби-Шалля [2].

**Теорема 1** (Якоби, Шаль). *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще  $n - 1$  конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек геодезической.*

Случай бильярдной книжки в этом смысле ничем не отличается от случая бильярда в области, ограниченной дугами софокусных квадрик. Действительно, если все листы спроецировать на один, то получится бильярд

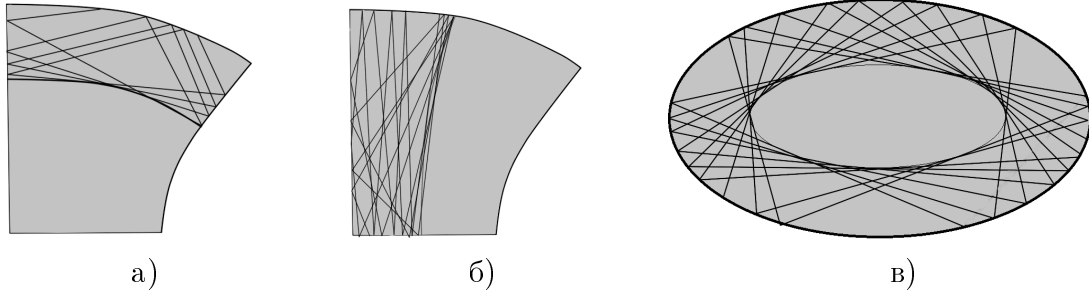


Рис. 9: На всех рисунках рассмотрен бильярд в области, ограниченной дугами софокусных квадрик. На рисунке а) траектория касается софокусного эллипса, на рисунке б) - софокусной гиперболы. Рисунок в) иллюстрирует бильярд в эллипсе. В данном случае траектория касается еще одного софокусного с ним эллипса.

в простейшей области  $\omega'$ , ограниченной дугами софокусных квадрик. И тогда, на протяжении всей траектории будет сохраняться параметр квадрики  $\lambda$ , которой касается траектория после проекции (см. рис. 10). Это и будет еще одним интегралом.

**Явный вид интегралов.** Пусть  $m \in M^4$ . берем любую точку  $m'$  из класса эквивалентности точки  $m$ . Это будет точка из  $(\bigsqcup_{i=1}^n \omega'_i) \times \mathbb{R}^2$ . И сопоставим ей точку  $m'' = (x_1, x_2, v_1, v_2)$  в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , полученную забыванием, какому из листов принадлежит  $m'$ . Тогда интегралы будут иметь вид:

$$v = v_1^2 + v_2^2 \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a}{v_1^2 + v_2^2} \quad (3)$$

В силу определения эквивалентности на пространстве  $(\bigsqcup_{i=1}^n \omega'_i) \times \mathbb{R}^2$  (см. опр. 8) значение функций не зависит от выбора представителя  $m'$ , то есть функции корректно заданы.

**Определение 9.** *Изоэнергетическим топологическим пространством* назовем  $Q^3 := \{m \in M^4 : v(m) = 1\}$ , где  $v(m)$  задается уравнением (2).

Будем изучать топологию  $Q^3$ , раслаивая его на уровни интеграла  $\lambda$ . Для этого нам понадобится инструмент, описанный в книге [3] А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко, а именно: понятия атомов и молекул.

## 4 Атом. Молекула.

Рассмотрим гладкое многообразие  $X^n$  и на нем гладкую функцию  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

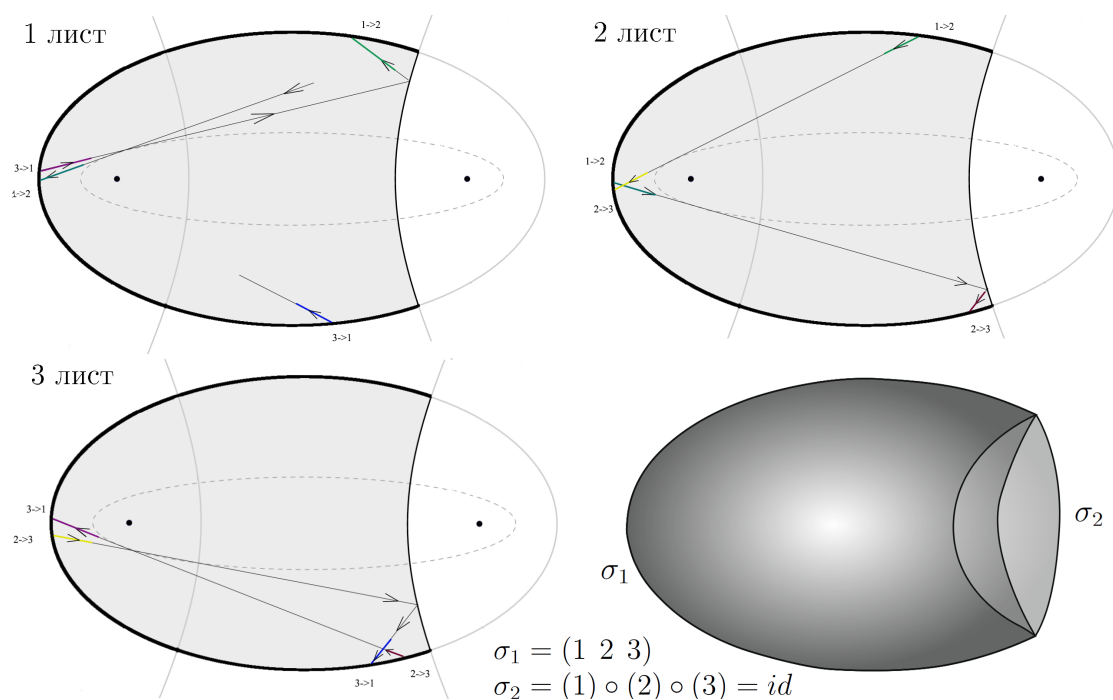


Рис. 10: Пример, иллюстрирующий, что траектория на бильярдной книжке также касается квадрики, софокусной с границей

**Определение 10.** Точка  $x$  называется *критической* для функции  $f$ , если все частные производные равны нулю в этой точке. В противном случае точка называется *регулярной*.

**Определение 11.** Критическая точка  $x$  называется *невырожденной* для функции  $f$ , если определитель матрицы частных производных отличен от нуля.

**Определение 12.** Уровень ( $f = c$ ) называется *критическим*, если на этом уровне есть хотя бы одна критическая точка, в противном случае он называется *регулярным*.

**Определение 13.** Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

Пусть  $f$  - функция Морса.

**Определение 14.** Введем на  $X$  следующее отношение эквивалентности: на каждом уровне функции  $f$  точки  $x_1$  и  $x_2 \in X$  будем считать эквивалентными, если они принадлежат одной компоненте связности. Профакторизуем  $X$  по

этому отношению эквивалентности и получим некий граф (см. рис. 11), который называется *графом Рибо* для функции  $f$  на топологическом пространстве  $X$ .

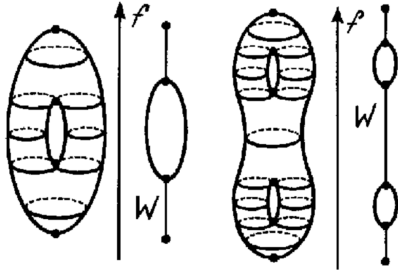


Рис. 11: Граф Рибо для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

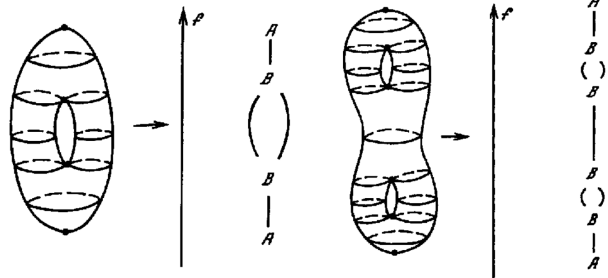


Рис. 12: Молекула для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

**Определение 15.** Рассмотрим достаточно малую  $\varepsilon$ -окрестность некоторой точки графа Рибо, принадлежащей связной компоненте слоя, где есть критическая точка. Ее прообраз с точностью до послыюного гомеоморфизма будем называть *атомом*.

**Замечание 8.** Все вершины графа Рибо лежат на критическом слое. Кроме того, множество критических значений имеет меру нуль, а в прообразе всех регулярных значений лежит  $n - 1$ -мерный тор.

**Определение 16.** Граф Рибо вместе с указанными атомами в соответствующих точках на нем называется *грубой молекулой* для функции  $f$  на многообразии  $X$  (см. рис. 12).

Введенные выше определения изначально были определены для гладких функций Морса на многообразии. Но, поскольку в нашем случае это не так, мы обобщим эту конструкцию до случая, когда  $X$  топологическое пространство, у которого почти все точки диффеоморфны диску  $D^n$ , а функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  на нем только непрерывна.

Граф Рибо можно определить таким же способом.

**Определение 17.** Рассмотрим прообраз точки на графе, который не гомеоморфен  $n - 1$ -мерному тору. Прообраз достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестности этой точки с точностью до послыюного гомеоморфизма назовем *атомом*.

**Определение 18.** Граф Роба с указанными атомами в соответствующих точках назовем *грубой молекулой* для функции  $f$  на топологическом пространстве  $X$ .

**Замечание 9.** Ясно, что в случае, когда  $X$  - гладкое двумерное или трехмерное многообразие, а  $f$  - гладкая функция Морса, такое определение будет совпадать с более ранним. Поэтому, это действительно обобщение определений.

В случае, когда  $X$  - гладкое двумерное или трехмерное многообразие, а  $f$  - гладкая функция Морса, в книге [3] А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко в явном виде описан вид всех атомов и молекул. Кроме того, если бы  $M^4$  у нас было гладким многообразием, то теорема Лиувилля дала бы нам то, что в прообразе всех регулярных значений находятся торы. В нашем случае мы не можем пользоваться обоими этими фактами, так что будем доказывать вид молекулы независимо. Однако, аналогия с гамильтоновыми динамическими системами существует. В теории гамильтоновых динамических систем молекула описывает топологию окрестности каждого отдельного уровня. Поэтому, описав молекулу нашей динамической системы, мы сможем указать с какими динамическими системами и в какой окрестности совпадает наша.

## 5 Общий вид 3-атомов.

В случае, когда многообразие  $X$  имеет размерность 2, то атомы будем называть *2-атомами*, когда размерность 3 — *3-атомами*.

Ниже в разделе будет описана теория, подробно изложенная в книге [3] А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко.

2-атомы описывают перестройку одного количества окружностей в другое, 3-атомы - перестройку торов, так как на ребрах стоят регулярные точки.

Атомы бывают двух сортов: атомы типа А (минимума и максимума функции) и седловые атомы. Атомы первого типа послойно гомеоморфны двумерному диску  $D$ , расслоенному на окружности, в случае 2-атома и  $D \times S^1$ , расслоенному на торы, в случае 3-атома.

**Определение 19.** *Крестом* называется прообраз  $\varepsilon$ -окрестности точки 0 функции  $x^2 - y^2$ , заданной в некоторой окрестности точки  $(0, 0)$  со структурой слоения, необходимой для того, чтобы говорить о послойном гомеоморфизме (см. рис. 13). Здесь уровень 0 - критический.

Любой седловой 2-атом  $P$  может быть склеен из  $k \in \mathbb{N}$  крестов так, чтобы каждый уровень  $(x^2 - y^2 = c)$ ,  $c \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$  на одном кресте склеивался

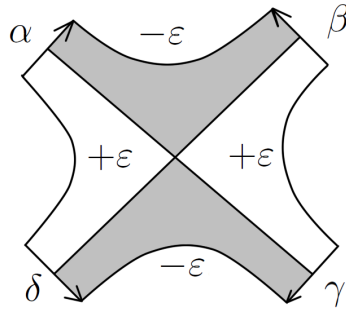


Рис. 13: Крест. Закрашены уровни  $c \in (-\varepsilon, 0)$ , не закрашены уровни  $c \in (0, +\varepsilon)$ .

№	Атом	Код
<b>Сложность 1</b>		
<b>Ориентируемые</b>		
1		$A-$
2		$\succ B-$
<b>Неориентируемый</b>		
$\tilde{1}$		$-\tilde{B}-$

<b>Сложность 2</b>		
<b>Ориентируемые</b>		
1		$-C_1-$
2		$\succ C_2 \prec$
3		$-D_1 \llcorner$
4		$\succ D_2 \prec$

Рис. 14: Таблица некоторых 2-атомов. Тут можно явно увидеть, как нужно склеивать кресты, чтобы получить атом.

соответствующим уровнем ( $x^2 - y^2 = c$ ) на другом кресте (см. рис. 14).  $k$  называется *сложностью атома*  $P$ .

Могут получиться, как ориентируемые (как самостоятельное многообра-

зие) атомы, так и неориентируемые. Ориентируемые атомы могут быть погружены в плоскость.

Естественно связывать с 2-атомом граф, который является прообразом критических уровней, несколько колец, являющихся прообразом  $(-\varepsilon, 0)$  и несколько колец, являющихся прообразом  $(0, +\varepsilon)$ . У такого графа вершины могут быть только кратности 0 или 4.

**Замечание 10.** 3-атомы бывают также, как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Если на каком-то уровне возникает неориентируемый атом, то многообразие в целом получается неориентируемым. В теории интегрируемых гамильтоновых систем бывают только ориентируемые многообразия, поэтому вопрос о представлении неориентируемых 3-атомов пока неактуален.

Любой ориентируемый седловой 3-атом может быть получен одним из двух способов:

1. Прямым произведением некоторого ориентируемого седлового 2-атома на окружность  $S^1$ .
2. Второй способ устроен несколько сложнее. Здесь мы получим *атом со звездочками*. Пусть дан 2-мерный ориентируемый седловой атом  $\hat{P}$ . Для определенности фиксируем на нём функцию  $\hat{f}$ , которая задает слоение. Предположим, что на нём задана инволюция, т.е. гладкое отображение  $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$ , обладающее следующими свойствами:

- (a)  $\tau^2 = id$ ,
- (b)  $\tau$  сохраняет уровень, т.е.  $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$ ,
- (c)  $\tau$  сохраняет ориентацию,
- (d) некоторое конечное число критических точек является неподвижными точками инволюции  $\tau$

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр  $P \times [0, 2\pi]$  и склеим его основания по инволюции  $\tau$ , отождествляя точки  $(x, 2\pi)$  и  $(\tau(x), 0)$ . В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие  $U$  с краем. Функция  $\hat{f}$  естественным образом продолжается на  $U$ , поскольку  $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$ , и ее поверхности уровня задают структуру слоения на  $U$  с единственным особым слоем. Отметим, что топологически многообразие  $U$  является расслоением над окружностью со слоем  $\hat{P}$ .

Если профакторизовать  $\hat{P}$  по инволюции  $\tau$ , получим другой 2-атом  $P$ . Выделим на нем звездочками точки на критической окружности, которые сохраняются под действием инволюции  $\tau$ . Полученный 2-атом  $P$  с

выделенными звездочками называется *атомом со звездочками*, а 2-атом  $\hat{P}$  называется *дублем  $P$* .

Иногда в после факторизации получается кольцо, расслоенное на окружности. В этом случае будем считать, что у нас атом  $A$  со звездочками.

Ясно, что дубль  $\hat{P}$  является разветвленным двулистным накрытием над 2-атомом  $P$ , причем точками ветвления являются как раз звездочки атома  $P$ .

Следует иметь ввиду, что дублей у одного атома со звездочкой может быть несколько и все они задают один и тот же 3-атом. Поэтому многообразие  $U$  однозначно определяется атомом со звездочками  $P$ .

Свяжем с таким атомом граф, являющийся графом для 2-атома  $P$ , но добавим к множеству его вершин звездочки. *Сложность атома со звездочкой* - это число вершин его графа.

Таким образом все ориентируемые 3-атомы можно описать ориентируемыми 2-атомами и ориентируемыми 2-атомами, на которых стоит конечное число звездочек на критическом уровне.

**Пример 1.** На рис. 17 приведен пример простого 3-атома  $A^*$ . Он устроен несколько сложнее атома  $B$  (см. рис. 16), который является прямым произведением восьмёрки на окружность. Нужно удалить из полнотория лишь одно тонкое полноторие, но обходящее два раза вдоль оси. Особый слой  $L$  получается протаскиванием вдоль окружности вращающейся восьмерки, успевающей повернуться на угол  $\pi$  за один оборот. При прохождении через особый уровень один тор перестраивается в один тор.

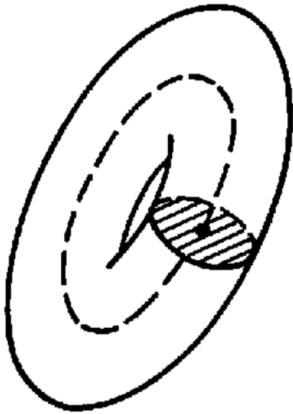


Рис. 15: 3-атом  $A$ .

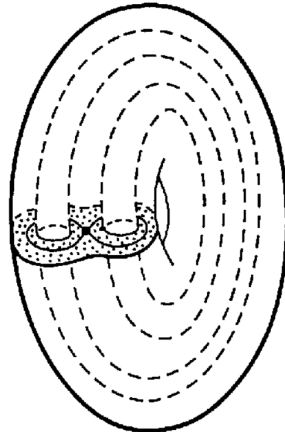


Рис. 16: 3-атом  $B$ .

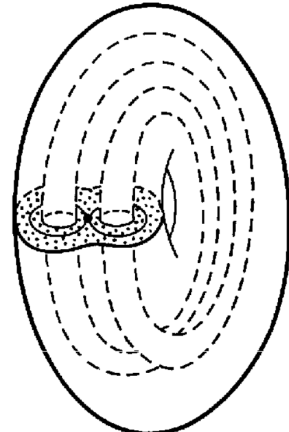


Рис. 17: 3-атом  $A^*$ .



## 6 Моделирование 3-атомов при помощи бильярдных книжек

**Гипотеза (А.Т. Фоменко)** *Бильярдные книжки позволяют моделировать:*

1. *все 3-атомы*
2. *все грубые молекулы Фоменко*
3. *все меченные молекулы Фоменко-Цишанга*

Удалось доказать первую часть гипотезы А.Т. Фоменко.

**Теорема 2.** *Для любого седлового ориентируемого 3-атома существует бильярдная книжка, такая что в её изоэнергетическом многообразии  $Q^3$  найдётся  $\varepsilon$ -окрестность особого уровня  $\lambda = b$ , послойно гомеоморфная этому атому.*

**Замечание 11.** Особому уровню  $\lambda = b$  соответствуют траектории, лежащие на прямых, которые проходят через фокусы.

**Замечание 12.** Заметим, что случай неседлового 3-атома нам не интересен, поскольку он встречается в каждой бильярдной книжке на уровнях  $\lambda = 0$  и  $\lambda = a$ .

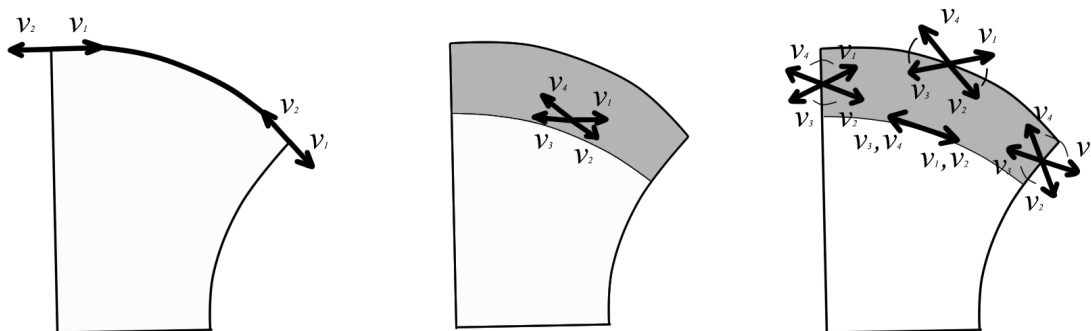
Действительно, рассмотрим, например, простейшую бильярдную область, ограниченную эллипсом, гиперболой и двумя прямыми (см. рис. 21). А бильярдная книжка пусть состоит из одного листа, то есть перестановки на границах - тождественные перестановки из одного элемента.

Вспомним каноническую проекцию  $\pi : M^4 \rightarrow \omega'$  из определения 8. Рассмотрим эту проекцию только на точках из  $Q^3$  и это сужение будем дальше также называть  $\pi : Q^3 \rightarrow \omega'$ .

Уровню  $\lambda = 0$ , отвечает траектория, которая движется только по границе эллипса. То есть проекция  $\pi$  из определения 8 этого уровня на  $\omega'$  - это дуга эллипса. А в прообразе каждой ее точки лежат только векторы, идущие налево и направо, причем, сталкиваясь о левую или правую границу левый вектор склеивается с правым, образуя окружность (см. рис. 18).

Близкие регулярные уровни - это уровни  $\lambda = \varepsilon$ . Докажем, что его прообраз тор. Уровню  $\lambda = \varepsilon$  отвечают траектории, которые касаются эллипса, близкого к граничному. Проекция  $\pi$  всех точек из  $Q^3$ , лежащих на этом уровне есть  $\omega'$  без внутренней части эллипса с параметром  $\varepsilon$  (см. рис. 18), поскольку точки внутри эллипса не могут лежать на прямых, касающихся его. Обозначим эту часть  $\omega'$  за  $\omega'_\varepsilon$ . Тогда в прообразе каждой точки лежит 4 вектора  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . На верхней и нижней границе склеиваются верхний и нижний векторы, на

левой и правой границе - левый и правый векторы. Если изобразить четыре двумерных диска, соответствующие четырем векторам, а на границах обозначить склейки этих векторов и склеить их, получим двумерный тор (см. рис. 19).



Критический уровень (окружность)      Близкий к критическому уровню (тор)

Рис. 18: Бильярдная книжка, моделирующая 3-атом  $A$ .

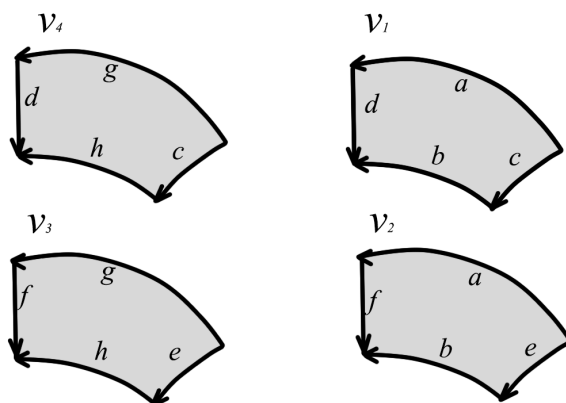


Рис. 19: Склейка двумерных дисков, отвечающих векторам  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , в тор.

Таким образом окрестность уровня  $\lambda = 0$  состоит из торов, уменьшающихся до окружности, находящейся на критическом уровне, а это и есть 3-атом  $A$ . А любой неседловой атом - это атом  $A$  минимума или максимума функции.

**Алгоритм построения.** Пусть дан произвольный седловой 3-атом  $U$  без звездочек. Тогда  $U = P \times S^1$ , где  $P$  - соответствующий ему 2-атом. Он представляется в виде склейки из  $k$  крестов, где  $k \in \mathbb{N}$  - сложность атома.  $P$  можно

погрузить в плоскость с сохранением ориентации (см. [3, стр. 96]). Тогда на каждом из ребер графа, соответствующего атому  $P$  можно задать направление так, чтобы отрицательный уровень оставался слева. Это направление можно распространить по непрерывности на близкие регулярные уровни. Разделим его пополам по положительному уровню. Тогда каждый крест выглядит так, как указано на рис. 20. Зафиксируем положение крестов в плоскости, как показано на рисунке. Теперь мы можем называть половины крестов верхними и нижними. Заномеруем кресты. На  $i$ -м кресте поставим сверху индекс  $2i - 1$ , снизу  $2i$ . И теперь мы можем указать склейку. Склейка содержит простейшую бильярдную область, ограниченную эллипсом, гиперболой и двумя прямыми, указанную на рис. 21. Осталось только задать перестановки. Проведем аналогию: половина креста - это простейшая бильярдная область, из которой склеена книжка, направление на ребрах графа - направление траектории.  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  будут перестановками из  $2k$  элементов. Три из них мы можем сразу написать.

$$\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)\dots(2k-1\ 2k), \quad \sigma_3 = \sigma_4 = id \quad (4)$$

Осталось указать перестановку  $\sigma_2$ . Смотрим на исходящее направление  $i$ -ой половины креста. Это ребро склеено с некоторым входящим направлением  $j$ -ой половины креста. Задаем  $\sigma_2(i) = j$ . Прделаав такую операцию для всех половин крестов, получим перестановку  $\sigma_2$  из  $2k$  элементов.

Алгоритм построения седлового 3-атома со звездочками опишем кратко. Сначала строим дубль для атома со звездочками. Это будет седловой атом без звездочек. Применяем к нему первую часть алгоритма. И указываем  $\sigma_3$  теперь не тождественной, а в соответствии с инволюцией, которая определена на дубле.

*Доказательство теоремы 2.* Докажем, что построенная по алгоритму бильярдная книжка действительно имеет на уровне  $\lambda = b$  наперед заданный ориентируемый седловой 3-атом  $U$  без звездочек. Пусть 3-атом  $U$  без звездочек имеет сложность  $k$ . По алгоритму мы построим склейку  $\nu$ , по которой однозначно строится бильярдная книжка с  $2k$  числом листов.

Вспомним каноническую проекцию  $\pi : M^4 \rightarrow \omega'$  из определения 8. Рассмотрим эту проекцию только на точках из  $Q^3$  и это сужение будем дальше также называть  $\pi : Q^3 \rightarrow \omega'$ .

На  $\omega'$  есть эллиптические координаты. Фиксируем гиперболу - координатную линию, пересекающую  $\omega'$ . И рассмотрим ее часть, лежащую в  $\omega'$ . Далее будем опускать то, что это дуга гиперболы, именуя просто гиперболой. Изучим прообраз фиксированной гиперболы в  $Q^3$  в  $\varepsilon$ -окрестности уровня интеграла ( $\lambda = b$ ). Покажем, что он эквивалентен 2-атому  $P$ , соответствующему 3-атому  $U$ .

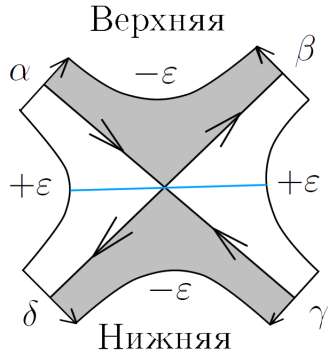


Рис. 20: Крест, разделенный на верхнюю и нижние половины и с указанным направлением. Закрашены уровни  $c \in (-\varepsilon, 0)$ , не закрашены уровни  $c \in (0, +\varepsilon)$ .

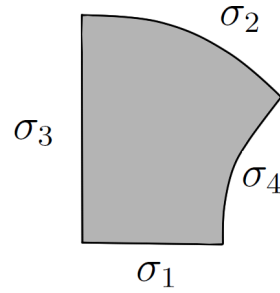


Рис. 21: Склейка - простейшая билиардная область, ограниченная эллипсом, гиперболой и двумя прямыми с указанными перестановками.

Фиксируем уровень интеграла ( $\lambda = b$ ). В этом случае траектории лежат на прямых, которые проходят через фокусы. Значит, для каждой внутренней точки  $x \in \omega'$  ее прообраз  $\pi^{-1}(x)$  состоит из  $8k$  векторов единичной длины, которые направлены от или к одному из двух фокусов на всех  $2k$  листах. Тогда в прообразе фиксированной гиперболы лежат  $8k$  векторов, умноженных на отрезок (см. рис. 22). Приближаясь к фокальной оси векторы, направленные вниз и соответствующие им векторы, направленные вверх, становятся ближе, и на фокальной оси уже совпадают. То есть отрезки там соединяются. Получаются критические уровни  $4k$  половин крестов.  $2k$  половин крестов состоит из векторов, направленных влево, оставшиеся  $2k$  половин - из направленных вправо. Укажем на каждом полукресте направление: если вектор направлен вверх, то он соответствует исходящему направлению на ребре графа полукреста, вниз - входящему.

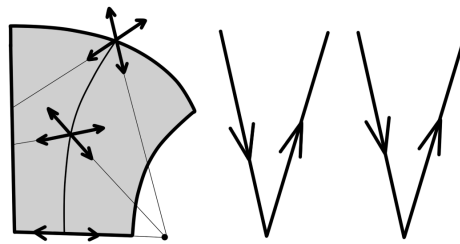


Рис. 22: Прообраз гиперболы на уровне  $\lambda = b$ .

Таким образом, на каждом листе прообраз гиперболы на уровне  $\lambda = b$  есть критический уровень двух полукрестов с фиксированным направлением. Одному из полукрестов соответствуют векторы, направленные влево, другому - вправо.

Рассмотрим близкие регулярные уровни к критическому все также в прообразе гиперболы. Уровню  $\lambda = b - \varepsilon$  отвечают траектории, которые касаются

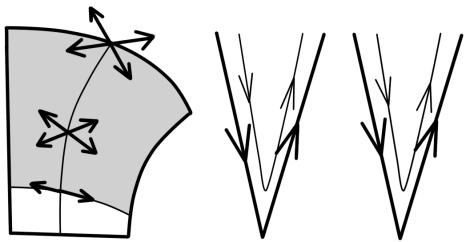


Рис. 23: Прообраз гиперболы на уровне  $\lambda = b - \varepsilon$ .

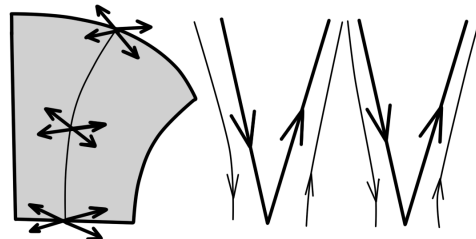


Рис. 24: Прообраз гиперболы на уровне  $\lambda = b + \varepsilon$ .

тонкого эллипса, близкого к фокальному отрезку. Проекция  $\pi$  всех точек из  $Q^3$ , лежащих на этом уровне есть  $\omega'$  без внутренней части эллипса (см. рис. 23), поскольку точки внутри эллипса не могут лежать на прямых, касающихся его. Обозначим эту часть  $\omega'$  за  $\omega'_{b-\varepsilon}$ . Тогда в прообразе внутренних точек  $\omega'_{b-\varepsilon}$  лежит  $8k$  векторов (см. рис. 23). Векторы направленные вниз и соответствующие им векторы, направленные вверх так же, как и на критическом уровне  $\lambda = b$  склеиваются, приближаясь к границе эллипса. Поэтому прообраз гиперболы также состоит из двух склеенных отрезков. Однако, тут они не доходят до фокальной прямой и находятся выше критического уровня. Здесь можно также указать направление, как и на критическом уровне (см. рис. 23).

Уровню  $\lambda = b + \varepsilon$  отвечают траектории, которые касаются узкой гиперболы, близкой к лучам на фокальной прямой, выходящим из фокусов в бесконечность. Проекция  $\pi$  всех точек из  $Q^3$ , лежащих на этом уровне есть  $\omega'$ , поскольку гипербола  $\frac{x^2}{a-b-\varepsilon} + \frac{y^2}{-\varepsilon} = 1$  лежит вне  $\omega'$  и из любой точки из  $\omega'$  можно провести касательную к ней. Тогда в прообразе внутренних точек  $\omega'$  лежит  $8k$  векторов (см. рис. 24), а в прообразе каждой части фиксированной гиперболы лежит  $8k$  векторов, умноженных на отрезок. На фокальной прямой они не склеиваются. Критический уровень при малом сдвиге на  $\varepsilon$  на каждой половине креста распадается на две связные компоненты: векторы, идущие наверх и вниз. На них также можно распространить направление соответствующее векторам движущимся наверх и вниз (см. рис. 24).

Таким образом, на каждом листе прообраз гиперболы в  $\varepsilon$ -окрестности уровня  $\lambda = b$  есть два полукреста, на которых можно естественным образом

фиксировать направление. Одному из полукрестов соответствуют векторы, направленные влево, другому - вправо.

Осталось проверить, что 2-атом  $P$  правильно склеен из полукрестов. Пусть все также фиксирована гипербола из эллиптических координат. Смотрим на ее прообраз.

Что происходит на части границы, состоящей из отрезка фокальной прямой?

На  $i$ -м листе вектор, направленный вниз, склеивается с соответствующим вектором, направленным вверх на  $\sigma_1(i)$ -м листе согласно отношению эквивалентности из определения 8  $M^4$ . В случае уровня  $\lambda = b + \varepsilon$  на каждом полукресте есть только один такой вектор. В случае уровня  $\lambda = b$  тоже один, но тот, который получился склейкой векторов, направленных вниз и направленных вверх. То есть, по сути, там склеиваются 4 вектора в 1. В случае уровня  $\lambda = b - \varepsilon$  таких векторов и вовсе нет. При этом, если векторы касались эллипса, то они переходят на другой лист, также касаясь того же эллипса. Аналогично с гиперболой и фокусами. Поэтому уровень остается тем же. Кроме того, два полукреста будут склеены крест, если мы укажем перестановку  $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4) \dots (2k-1\ 2k)$ .

Что происходит на эллиптической границе?

Векторы, направленные вверх на  $i$ -м листе склеиваются с соответствующими векторами, направленными вниз на  $\sigma_2(i)$ -м листе согласно отношению эквивалентности в определении 8  $M^4$ . То есть исходящее ребро  $i$ -го полукреста склеивается со входящим ребром  $\sigma_2(i)$ -го полукреста. Поэтому, чтобы задать склейку атома  $P$  из крестов, нужно указать  $\sigma_2(i)$  в соответствии со склейкой крестов, что мы и сделали в алгоритме. Ясно, что при этом склеиваются соответствующие уровни.

Таким образом, в прообразе  $\pi^{-1}$  гиперболы в окрестности уровня  $\lambda = b$  мы получили два 2-атома  $P$ , соответствующих 3-атому  $U$ . Один из них отвечает векторам, направленным вправо, другой - влево. Осталось понять, почему окрестность уровня  $\lambda = b$  послойно эквивалентна прообразу гиперболы, соответствующему правым (или левым) векторам, умноженному на окружность.

На правой эллиптической и левой границах правые и левые векторы склеиваются, поскольку к этим границам приписаны тождественные перестановки. То есть на внутренних точках у нас два полукреста, соответствующие правым и левым векторам. А на границах эти кресты склеиваются, тем самым образуя окружность (см. рис. 25).

Таким образом, окрестность уровня  $\lambda = b$  послойно эквивалентна прообразу гиперболы, умноженному на окружность, то есть 2-атому  $P$ , умноженному на окружность, а это и есть 3-атом  $U$ , что и требовалось доказать.

Доказательство случая, когда 3-атом  $U$  - со звездочками проводится ана-

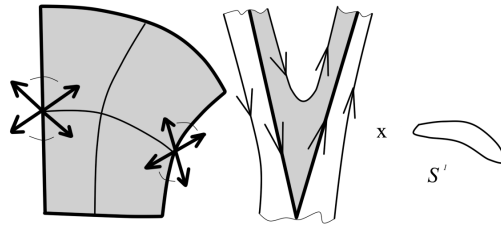


Рис. 25: Склейка левых и правых векторов дает окружность полукрестов .

логично, только теперь на левой границе области у нас происходит переход с одного листа на другой, в соответствии с инволюцией. И тем самым получается не обычное умножение на окружность, а расслоение, описанное в конструкции атома со звездочкой на стр. 15.

□

## Список литературы

- [1] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991
- [2] Jacobi C. G. J. *Vorlesungen uber dynamik.* – 1884 (Перевод на русский язык: Якоби К. *Лекции по динамике* М.; Л.: ОНТИ, 1936)
- [3] *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.*// А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко - том 1. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 1999
- [4] *Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик* / Фокичева В. В. // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.