

Московский государственный университет имени  
Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

## Дипломная работа

### **Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков в потенциальном поле на двумерных многообразиях вращения**

Topological classification of integrable geodesic flows in a potential field on two-dimensional manifolds of revolution

Выполнила: студентка 6 курса Тимонина Д.С.

Научные руководители:

акад. Фоменко А.Т.

проф. Ошемков А.А.

Москва, 2017 г.

# 1 Введение

Теории лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем, созданной А.Т. Фоменко и его школой (см. [1], том 1,2), посвящено много работ. Суть теории А.Т. Фоменко заключается в том, что интегрируемой системе с двумя степенями свободы, ограниченной на трехмерное неособое компактное изоэнергетическое многообразие, сопоставляется некоторый инвариант, имеющий структуру графа с числовыми метками. Этот инвариант, называемый меченой молекулой, или инвариантом Фоменко-Цишанга, дает полное описание (с точностью до послышной эквивалентности) слоения Лиувилля данной системы на изоэнергетических поверхностях.

Е.Н. Селивановой была получена лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на торе (см. [1], том 2, параграф 3.1), Т.З. Нгуеном, Л.С. Поляковой и В.С. Матвеевым на двумерной сфере (см. [1], том 2, параграф 3.3). Е.О. Кантонистова продолжила их работу и получила полную классификацию интегрируемых геодезических потоков на многообразиях вращения с потенциалом в случае линейного интеграла.

В данной работе обобщена теоремы В.С. Матвеева и Е.Н Селивановой: получена Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на торе вращения и на бутылке Клейна с потенциалом в случае линейного интеграла. Эта классификация получена на основе вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга (меченых молекул) исследуемых систем.

Подробное изложение основ теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, а также ее приложения к исследованию механических систем см. в работе А.Т. Фоменко [3], а также в работах А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [1], [4], [5], А.Т. Фоменко [6], [7], А.Т. Фоменко и П.В. Морозова [8], А.В. Болсинова, А.Т.Фоменко и А.А. Ошемкова [9], Е.А. Кудрявцевой, И.М. Никонова, А.Т. Фоменко [10], Е.А. Кудрявцевой, А.Т. Фоменко [11], А.Ю. Коняева, А.Т. Фоменко [12], В.В. Фокичевой (Ведюшкиной) и А.Т. Фоменко [13], [14].

Автор выражает благодарность А.Т.Фоменко за постановку задачи и А.А.Ошемкову за многочисленные и важные обсуждения.

## 2 Топология интегрируемого геодезического потока на торе вращения в потенциальном поле

### 2.1 Постановка задачи

**Определение 1.** Многообразие  $M$  с заданной на нем метрикой  $g$  называется *многообразием вращения* (с метрикой вращения соответственно), если определено эффективное действие окружности  $S^1$  на  $M$  изометриями.

Рассмотрим риманово многообразие  $M$ , диффеоморфное двумерному тору ( $M = T^2$ ), со стандартными угловыми координатами  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  и метрику  $g$  следующего вида:

$$ds^2 = d\theta^2 + f^2(\theta)d\varphi^2, \quad (1)$$

где  $f(\theta) : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  – гладкая положительная функция.

**Замечание 1.** Многообразие  $M = T^2$  с определенной на нем метрикой (1) – многообразие вращения с метрикой вращения (при действии элемента  $\varphi_0$  группы  $S^1$  точка с координатами  $(\varphi, \theta) \in M$  переходит в точку с координатами  $(\varphi + \varphi_0, \theta) \in M$ ).

Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении  $T^*M$  к  $M$  со стандартной симплектической структурой  $\omega = dp \wedge dq$  и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + V(q), \quad (2)$$

где  $q = (q^1, q^2)$  – локальные координаты на  $M = T^2$ ,  $p = (p^1, p^2)$  – соответствующие импульсы, т.е. координаты в  $T_q^*M$ , а  $g^{ij}$  – матрица, обратная к матрице метрики  $g$ .

**Определение 2.** Пусть  $(M, g)$  – многообразие, такое что  $M = T^2$ , с заданной на нем метрикой  $ds^2 = d\theta^2 + f^2(\theta)d\varphi^2$ . Будем говорить, что пара функций  $(f(\theta), V(\theta))$  (где  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $V : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  – гладкая функция) задает *натуральную механическую систему, инвариантную относительно вращения*, на  $(M, g)$ .

**Утверждение 1.** *Гамильтонова система с гамильтонианом (2) на многообразии вращения  $M = T^2$  для всех пар функций  $(f(\theta), V(\theta))$  является вполне интегрируемой в смысле Лиувилля.*

*Доказательство.* Фазовое пространство системы четырехмерно, каждая точка задается координатами  $(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi)$ , где  $(p_\theta, p_\varphi)$  – импульсы точки,  $(\theta, \varphi)$  – координаты точки.

Система имеет два первых интеграла:  
интеграл энергии

$$H = \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(\theta)} + V(\theta)$$

и дополнительный первый интеграл  $K = p_\varphi$  (т.к.  $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ ).

Соответствующие им векторные поля полны, так как изоэнергетические поверхности  $Q_h^3 = \{H = h = const\}$  компактны.  $\square$

## 2.2 Построение грубой молекулы

**Утверждение 2.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q_h^3$  является неособой тогда и только тогда, когда  $h \neq V(\theta_i)$ , где  $V'(\theta_i) = 0$ .*

*Доказательство.* Изоэнергетическая поверхность  $Q_h^3$  является неособой тогда и только тогда, когда на ней  $dH \neq 0$ . Запишем  $dH$  :

$$dH = \left\{ p_\theta, \frac{p_\varphi}{f(\theta)^2}, -\frac{p_\varphi^2}{f'(\theta)f^3(\theta)} + V'(\theta), 0 \right\}.$$

$dH = 0$  тогда и только тогда, когда  $p_\varphi = 0$ ,  $p_\theta = 0$ ,  $V'(\theta) = 0$ . Т. к. гамильтониан имеет вид  $H = \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(\theta)} + V(\theta)$ , то в точках  $(0, 0, \theta, \varphi)$ , где  $dH = 0$  имеем:  $H = V(\theta)$ ,  $V'(\theta) = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.1.** *Функция  $K$  является функцией Ботта на неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  тогда и только тогда, когда функция  $U_h(\theta) := 2f^2(\theta)(h - V(\theta))$ , называемая эффективным потенциалом, является функцией Морса.*

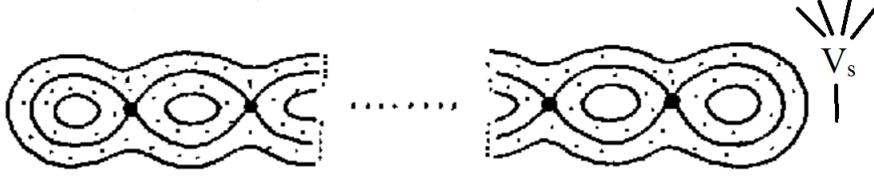


Рис. 1:

*Доказательство.* На  $Q_h^3$  в качестве локальных координат можно выбрать либо  $(\varphi, \theta, p_\varphi)$ , либо  $(\varphi, \theta, p_\theta)$ . Ограничивая интеграл  $K$  на изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3$ , получаем либо функцию

$$K|_{Q_h^3} = p_\varphi$$

в координатах  $(\varphi, \theta, p_\varphi)$ , либо функцию

$$K|_{Q_h^3} = \pm f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta) - p_\theta^2}$$

в координатах  $(\varphi, \theta, p_\theta)$ .

Т.к. критические окружности в нашем случае  $\{p_\theta = \text{const}, p_\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ , то условие боттовости функции  $K$  (т.е. морсовость функции  $K$ , ограниченной на двумерную трансверсаль к критическим окружностям) совпадает с условием морсовости функции  $\pm f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta) - p_\theta^2}$ . Критические точки этой функции – это в точности точки вида:  $(\theta, p_\theta)$ , где  $\theta$  – критическая точка функции  $f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta)}$ ,  $p_\theta = 0$ . Т.к. матрица вторых производных функции  $\pm f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta) - p_\theta^2}$  в точках  $(\theta, p_\theta)$ , где  $\theta$  – критическая точка функции  $f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta)}$ ,  $p_\theta = 0$ , невырождена тогда и только тогда, когда  $\left(f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta)}\right)'' \neq 0$  в критических точках функции  $f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta)}$ , то условие боттовости интеграла  $K$  равносильно морсовости функции  $f(\theta) \sqrt{2h - 2V(\theta)}$ .  $\square$

Напомним читателю определения некоторых 3-атомов:

- (1) 3-атом  $A$ . Топологически этот 3-атом представляет собой полноторие, расслоенное на концентрические торы, сжимающиеся на ось полнотория.
- (2) 3-атом  $V_s$  ( $s \geq 2, V_2 = B$ ). Этот 3-атом является прямым произведением 2-атома, изображенного на рис. 1, и  $S^1$ . Слоение Лиувилля естественным образом индуцируется с 2-атома.
- (3) 3-атом  $P_m$  ( $m \geq 1, P_1 = B$ ). Этот 3-атом является прямым произведением 2-атома, изображенного на рис. 2, и  $S^1$ . Слоение Лиувилля естественным образом индуцируется с 2-атома.

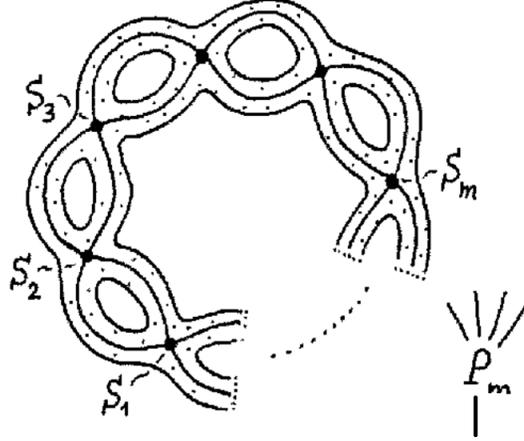


Рис. 2:

**Лемма 2.2.** Пусть  $Q \subseteq Q_h^3$  – связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой интеграл  $K$  – функция Ботта. Тогда грубая молекула, соответствующая  $Q$ , может содержать атомы только трех видов  $V_s$  ( $s \geq 2$ ),  $P_m$  ( $m \geq 1$ ),  $A$ . При этом при  $K > 0$  входящее ребро для каждого атома  $V_s$  одно, а исходящих  $s$ , а для атома  $P_m$  входящих ребер два, а исходящих  $m$  (при  $K < 0$  картина антисимметрична, т.е. входящих ребер для каждого атома  $V_s$  –  $s$ , а исходящее одно, а для атома  $P_m$  входящих ребер  $m$ , а исходящих два, см. рис. 3). При этом сама молекула без учета ориентации симметрична.

*Доказательство.* Фиксируем значение двух интегралов  $H = h$ ,  $K = k$ . Получим такие точки  $(p_\theta, k, \theta, \varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , на  $T^*M$ , которые удовлетворяют уравнению:

$$\frac{p_\theta^2}{2} + \frac{k^2}{2f^2(\theta)} + V(\theta) = h.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$p_\theta = \pm \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2},$$

где периодическая (с периодом  $2\pi$ ) функция  $U_h(\theta) := 2f^2(\theta)(h - V(\theta))$  называется *эффективным потенциалом*.

На каждом отрезке  $[\theta_1; \theta_2]$ , таком что  $U_h(\theta) - k^2 \geq 0$ ,  $p_\theta(\theta)$  – либо точка (если  $k^2 = \max_{[\theta_1; \theta_2]} U_h(\theta)$ ), либо окружность, либо разомкнутая цепь окружностей (если  $k^2 = \min_{[\theta_1; \theta_2]} U_h(\theta)$ ,  $[\theta_1; \theta_2] \neq [0; 2\pi]$ ), либо замкнутая цепь окружностей (если  $[\theta_1; \theta_2] = [0; 2\pi]$ ,  $k^2 = \min_{[0; 2\pi]} U_h(\theta)$ ) (см рис.4). При этом меняя значение  $k$ , видим, что окрестности этих особых слоев соответствуют 2-атомам, изображенным на рис. 1 и 2. Следовательно, (умножая еще на окружность  $S^1$ , т.к.  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ) получаем, что бифуркационным дугам соответствуют либо атом  $A$ , либо атом  $V_s$  (где  $V_2 = B$ ), либо атом  $P_m$  (где  $P_1 = B$ ,  $P_2 = C_2$ ), а прообразами точек отображения момента, не принадлежащим бифуркационным дугам, является один или несколько

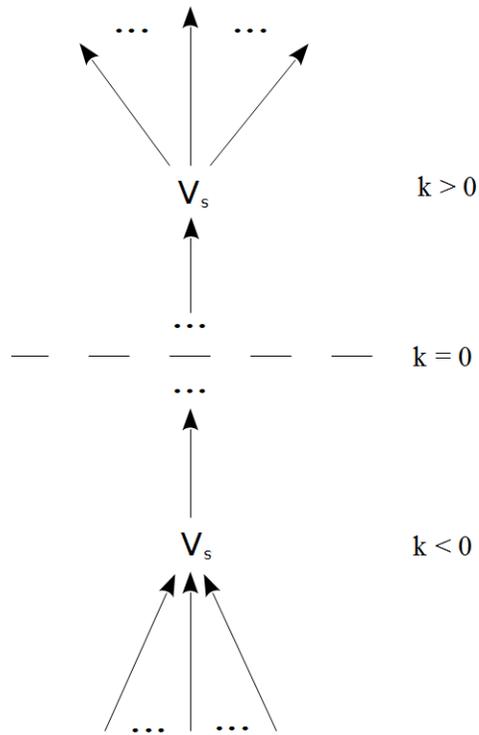


Рис. 3:

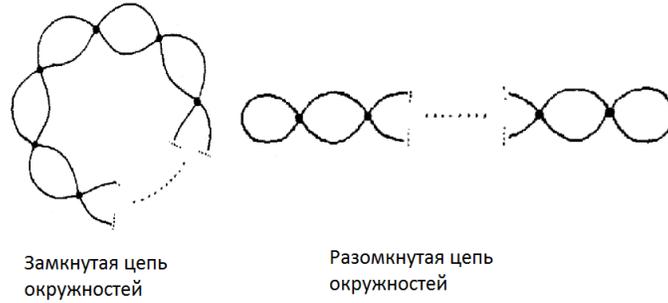


Рис. 4:

торов Лиувилля. В случае, когда выражение  $U_h(\theta) - k^2$  положительно для любого значения  $\theta$ , прообразом точки  $(h, k)$  является два тора

$$T_1^2 = \left\{ \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, k, \theta, \varphi \right\}, T_2^2 = \left\{ -\frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, k, \theta, \varphi \right\}.$$

Симметричность молекулы следует из того, что выражение  $\frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}$  принимает одинаковые значения для  $k$  и  $-k$ .

Следовательно, непрерывно изменяя значение второго первого интеграла  $k$ , можем по следующему алгоритму построить грубую молекулу по графику функции  $U_h(\theta)$ :

- (1) Строим график функции  $U_h(\theta)$  и проводим горизонтальные линии, соответствующие разным значениям  $k^2$ . Тем отрезкам этих прямых, которые оказались строго “ниже” графика функции  $U_h(\theta)$ , соответствуют торы Лиувилля (каждому отрезку – один тор, за исключением того случая, когда график функции  $U_h(\theta)$  положителен на всей области определения. Тогда отрезкам, проходящим ниже глобального минимума функции  $U_h(\theta)$ , соответствует 2 тора Лиувилля).
- (2) Если функция  $U_h(\theta)$  положительна на всей области определения, то отрезку, проходящему через глобальный минимум  $U_h(\theta)$ , соответствует атом  $P_m$ . Иначе атома  $P_m$  ( $m > 1$ ) в молекуле нет. Если функция  $U_h(\theta)$  принимает отрицательные значения, то  $Q_h^3$  может иметь несколько компонент связности, иначе  $Q_h^3$  – связное многообразие.
- (3) Рассмотрим одну компоненту связности  $Q_h^3$ . Каждому отрезку, проходящему через локальный(ые) минимум(ы) функции  $U_h(\theta)$ , соответствует атом  $V_l$ , где  $(l - 1)$  – число локальных минимумов, через которые этот отрезок проходит.
- (4) Каждому локальному максимуму функции  $U_h(\theta)$  соответствует атом  $A$ .

Таким образом строим половину грубой молекулы связной компоненты  $Q_h^3$ . Вторая половина симметрична.  $\square$

Чтобы лучше понять, что происходит, рассмотрим пример:

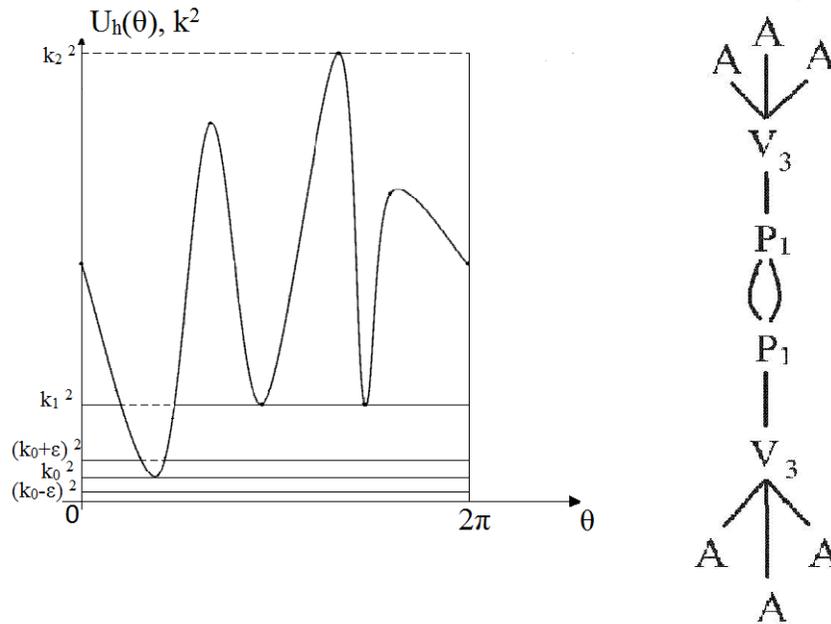


Рис. 5:

**Пример 1.** Пусть график функции  $U_h(\theta)$  выглядит так, как показано на рис. 5. Тогда точке с координатами  $(h, k_0)$  соответствует атом  $P_1$ . Точке с координатами  $(h, k_0 - \varepsilon)$  соответствует два тора Лиувилля, которые при бифуркации перестраиваются в один тор Лиувилля, образ которого при отображении момента – точка  $(h, k_0 + \varepsilon)$ . Точке с координатами  $(h, k_1)$  аналогично соответствует атом  $V_3$ . Рассмотрим точку с координатами  $(h, k_2)$ . Ей соответствует атом  $A$ . Если мы рассмотрим точку с координатами  $(h, k_2 - \varepsilon)$ , то ее прообразом при отображении момента будет один тор Лиувилля, который “выродился в этом атоме в окружность” и т.д. Т. е.  $Q_h^3$  в данном примере имеет одну компоненту связности, а соответствующая грубая молекула имеет вид, как показано на рис. 5.

**Лемма 2.3.** Пусть  $Q \subseteq Q_h^3$  – связная компонента неособой энергетической поверхности, на которой  $K$  – функция Ботта. Тогда значению  $K = 0$  не может соответствовать бифуркация торов Лиувилля (т.е. 0 – не критическое значение функции  $K$ ).

*Доказательство.* Доказательство приведено в работе [2]. □

**Теорема 1.** Рассмотрим систему на многообразии вращения  $M = T^2$ , заданную парой функций  $(V(\theta), f(\theta))$ . Пусть  $Q \subseteq Q_h^3$  – связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой  $K$  – функция Ботта. Тогда молекула системы симметрична (без учета

ориентации на ребрах) относительно оси  $h$ , а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания  $k$ . Молекула в зависимости от графика эффективного потенциала может иметь следующий вид:

- (1) Если функция  $U_h(\theta)$  положительная на всей области определения, то  $W \equiv P_m = P_m \equiv W$ , где “ $\equiv$ ” –  $m$  торов Лиувилля. Число  $m$  равно числу глобальных минимумов функции  $U_h(\theta)$ . При этом  $Q_h^3$  имеет всего одну компоненту связности.
- (2) Если функция  $U_h(\theta)$  принимает отрицательные значения, то соответствующая  $Q$  молекула имеет вид  $W - W$ . При этом число компонент связности многообразия  $Q_h^3$  равно половине количества раз, которое график функции  $U_h(\theta)$  пересекает ось  $U_h(\theta) = 0$  (т.е. каждому такому отрезку  $[\theta_i, \theta_j]$ , на котором  $U_h(\theta) \geq 0$ , соответствует одна компонента связности  $Q_h^3$ ).

Здесь каждая молекула  $W$  – это либо один атом  $A$ , либо лес. Все неконцевые вершины дерева – это атомы  $V_i$ , а концевые вершины имеют тип  $A$ . При этом при  $K > 0$  входящее ребро для каждого атома  $V_i$  одно, а исходящих  $l$ . (при  $K < 0$  картина антисимметрична, т.е. без учета ориентации на ребрах молекула симметрична относительно уровня  $K = 0$ , а ориентации на кусках  $W_+ = W(K > 0)$  и  $W_- = W(K < 0)$  противоположна, см. рис. 3).

Построение грубой молекулы по графику функции  $U_h(\theta)$  осуществляется с помощью описанного выше алгоритма.

*Доказательство.* Утверждение теоремы вытекает из леммы 2.2, леммы 2.3.  $\square$

**Утверждение 3.** Рассмотрим связную компоненту  $Q$  неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ . Разрежем ее на две части вдоль поверхности  $K = 0$ . Тогда она распадется на два связных куска, каждый из которых является полноторием, если  $h < \max V(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , или на две поверхности  $T^2 \times D^1$ , если  $h > \max V(\theta)$ .

*Доказательство.* Разрежем все  $Q_h^3$  вдоль поверхности  $K = 0$ . Рассмотрим тот кусок  $Q_h^3$ , на котором  $p_\varphi \geq 0$ . Он задается системой:

$$\begin{cases} \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(\theta)} + V(\theta) = h, \\ p_\varphi \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем к виду:

$$\begin{cases} p_\varphi^2 = f^2(\theta) (2h - 2V(\theta) - p_\theta^2), \\ p_\varphi \geq 0. \end{cases}$$

Координата  $p_\varphi$  восстанавливается однозначно, следовательно осталось понять, что задает на плоскости  $(\theta, p_\theta)$  неравенство:

$$2h - 2V(\theta) - p_\theta^2 \geq 0 \iff -\sqrt{2h - 2V(\theta)} \leq p_\theta \leq \sqrt{2h - 2V(\theta)}.$$

Если  $h < \max V(\theta)$ , то  $p_\theta(\theta) = \pm\sqrt{2h - 2V(\theta)}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  – одна или несколько окружностей, следовательно  $-\sqrt{h - 2V(\theta)} \leq p_\theta \leq \sqrt{h - 2V(\theta)}$  – диски. Следовательно, умножая на окружность  $S^1$ , т.к.  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , получаем требуемое.

Если  $h > \max V(\theta)$ , то неравенство  $-\sqrt{2h - 2V(\theta)} \leq p_\theta \leq \sqrt{2h - 2V(\theta)}$  задает  $S^1 \times D^1$ . Следовательно, умножая на окружность  $S^1$ , получаем требуемое.  $\square$

### 2.3 Вычисление меток

Грубая молекула содержит много информации о структуре слоения Лиувилля, однако эта информация не полна, в том смысле, что молекула не определяет диффеоморфный тип многообразия  $Q_h^3$ , а тем более, слоения Лиувилля на нем (с точностью до послыоного диффеоморфизма). Поэтому к молекуле необходимо добавить информацию о склейке отдельных атомов, которую несут в себе метки (подробнее см. [1]).

**Теорема 2.** Пусть  $Q^3$  – связная компонента неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ . Рассмотрим молекулу системы, соответствующую  $Q^3$ .

- (1) Метки на ребрах типа  $A - V_l$  молекулы:  $r = 0, \varepsilon = 1$ .
- (2) Метки на ребрах типа  $A - P_k$  молекулы:  $r = 0, \varepsilon = 1$ .
- (3) Метки на ребрах типа  $V_k - V_l$  молекулы, где оба седловых атома находятся в одной полуплоскости ( $k > 0$  или  $k < 0$ ):  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .
- (4) Метки на ребрах типа  $P_k - V_l$  молекулы:  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .
- (5) Если грубая молекула имеет вид  $A - A$ , то метки ребре молекулы:  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .
- (6) Метки на центральном ребре молекулы ( $P_m - P_m$  или  $V_s - V_s$  в зависимости от вида грубой молекулы):  $r = \infty, \varepsilon = -1$ .
- (7) Если молекула отлична от  $A - A$ , то молекула имеет единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов  $A$ . Метка  $n$  в этом случае равна 0.

*Доказательство.* Для вычисления меток нам необходимо выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов. Напомним правила их выбора. Пусть 3-атом имеет тип  $A$ , т.е. является полноторием. Тогда в качестве первого базисного цикла  $\lambda$  возьмем меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория. В нашем случае:

$$\left\{ p_\theta = \pm \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, p_\varphi = \text{const}, \theta \in [\theta_1, \theta_2], \varphi = \text{const} \right\}.$$

В качестве второго цикла можно взять любой цикл  $\mu$ , дополняющий  $\lambda$  до базиса. Возьмем слой, задаваемый следующим образом:  $\{p_\theta = \text{const}, p_\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z}\}$  – слой слоения Зейферга (его ориентация определяется естественным образом ориентацией гамильтонова векторного потока на критической окружности).

Пусть 3-атом является седловым ( $V_l$  или  $P_m$ ). Он имеет структуру тривиального  $S^1$ –расслоения над 2-атомом. В этом случае в качестве первого базисного цикла  $\lambda$  берем слой этого расслоения (в нашем случае:  $\{p_\theta = \text{const}, p_\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z}\}$ ) (ориентация выбирается аналогично). Теперь рассмотрим сечение 3-атома, над которым этот атом представим как тривиальное  $S^1$ –расслоение. Оно высекает на каждом граничном торе некоторый цикл, который и возьмем в качестве второго базисного цикла  $\mu$  (в нашем случае это будет либо цикл  $\left\{ p_\theta = \pm \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, p_\varphi = \text{const}, \theta \in [\theta_1, \theta_2], \varphi = \text{const} \right\}$ , либо цикл

$$\{p_\theta = \text{const}, p_\varphi = \text{const}, \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z}, \varphi = \text{const}\}$$

в зависимости от атома ( $V_l$  или  $P_m$ ) и граничного тора).

Заметим, что  $\dot{\varphi} = f^2(\theta)p_\varphi$ . Следовательно, если два атома одновременно лежат выше уровня  $k = 0$  (или одновременно ниже этого уровня), то производная угловой координаты  $\varphi$  вдоль векторного поля  $\text{sgrad}H$  имеет один и тот же знак и следовательно, ориентации циклов  $\{p_\theta = \text{const}, p_\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z}\}$  этих атомов будут совпадать. Иначе (если рассматриваемые атомы лежат в разных полуплоскостях  $k > 0$  и  $k < 0$ ) эти циклы будут иметь противоположную ориентацию.

Теперь выпишем матрицы склейки в явном виде.

- (1) Выпишем матрицу склейки на ребре  $A - V_l$  (на ребре  $A - P_m$  матрица склейки выписывается аналогично и будет такой же). Так как второй базисный цикл около атома  $A$  совпадает с первым базисным циклом около атома  $V_l$  и эти атомы лежат в одной полуплоскости ( $k > 0$  или  $k < 0$ ), то матрица склейки будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ .

- (2) Выпишем матрицу склейки на ребре  $V_k - V_l$  (на ребре  $V_k - P_m$  матрица склейки выписывается аналогично и будет такой же). Так как первый базисный цикл около атома  $V_k$  совпадает с первым базисным циклом около атома  $V_l$  и эти атомы лежат в одной полуплоскости ( $k > 0$  или  $k < 0$ ), то матрица склейки будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = 1$ .

- (3) Выпишем матрицу склейки на центральном ребре  $V_s - V_s$  (на ребрах  $P_m = P_m$  матрица склейки выписывается аналогично и будет такой же). Так как первый базисный цикл около атома  $V_s$  совпадает с первым базисным циклом около атома  $V_s$ , но имеют разные ориентации, то матрица склейки будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = -1$ .

- (4) Пусть молекула имеет вид  $A - A$ . Так как вторые базисные циклы у атомов  $A$  и  $A$  совпадают, но имеют разные ориентации, то матрица склейки будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = 1$ .

- (5) Если молекула  $W - W$  отлична от  $A - A$ , то молекула имеет единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов  $A$ . Метка  $n$  в этом случае равна 0, т. к. все  $\theta_i$  (из определения метки  $n$ ) оказываются равными 0.

□

**Следствие 1.** В случае, когда грубая молекула, соответствующая  $Q^3$ , имеет вид  $A - A$ , имеем  $Q^3 = S^1 \times S^2$ .

**Замечание 2.** Если  $V(\theta) = 0$ , то грубая молекула имеет тип 1 (см. теорему 1), т.к. в этом случае  $U_h(\theta) > 0$  на всей области определения, а метки такие, как описано в теореме 2. Следовательно, результаты, полученные в данной работе, при  $V(\theta) = 0$  совпадают с результатами, полученными Е.Н. Селивановой (см. [1], том 2, стр. 122). Т.е. результаты, полученные в теоремах 1, 2, являются обобщением теоремы Е.Н. Селивановой (см. [1], том 2, стр. 122).

### 3 Топология интегрируемого геодезического потока на бутылке Клейна в потенциальном поле

#### 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим риманово многообразие  $T^2$  (двумерный тор) со стандартными угловыми координатами  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  и метрику  $g$  следующего вида:

$$ds^2 = d\theta^2 + f^2(\theta)d\varphi^2,$$

где  $f(\theta) : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  — положительная гладкая функция.

Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении  $T^*T^2$  к  $T^2$  со стандартной симплектической структурой  $\omega = \text{pr} \wedge \text{dq}$  и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + V(q), \quad (3)$$

где  $q = (q^1, q^2)$  — локальные координаты на  $T^2$ ,  $p = (p^1, p^2)$  — соответствующие импульсы, т.е. координаты в  $T_q^*T^2$ , а  $g^{ij}$  — матрица, обратная к матрице метрики  $g$ .

Интеграл энергии в координатах  $(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi)$  имеет вид:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(\theta)} + V(\theta).$$

Здесь  $V(\theta) : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция.

Дополнительный первый интеграл  $K = p_\varphi$ .

Пусть теперь  $V(\theta), f(\theta)$  — четные функции.

Рассмотрим на торе инволюцию  $\xi$ , задаваемую в координатах  $\theta, \varphi$  следующей формулой:

$$\xi(\varphi, \theta) = (\varphi + \pi, -\theta).$$

Бутылку Клейна можно представить в виде:

$$K^2 = T^2/\xi,$$

так как профакторизовать двумерный тор  $T^2$  по инволюции  $\xi$  — значит склеить половину тора  $T^2$  изображенного на рис. 6, с собой с той ориентацией, которая показана на рис. 6.

Инволюция  $\xi$  сохраняет метрику тора, так как матрицы метрики в точках  $(\varphi, \theta)$  и  $(\varphi + \pi, -\theta)$  совпадают в силу четности функции  $f(\theta)$ . Поэтому эту метрику можно “спустить вниз” с тора на бутылку Клейна, факторизуя по действию  $\xi$ . Получится метрика на  $K^2$ .

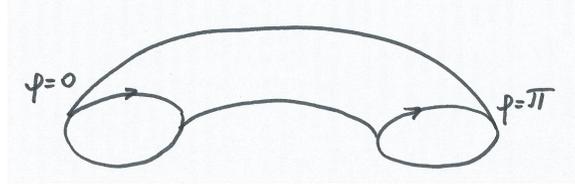


Рис. 6:

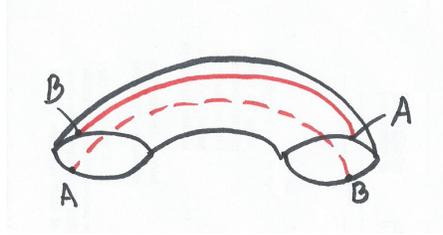


Рис. 7:

**Замечание 3.** Действие окружности на бутылке Клейна такое, как показано на рис. 7 (бутылка Клейна разрезана, буквами показано, какие точки с какими нужно склеить, а на рисунке 7 показана орбита точки  $B$ ).

Имеем:

$$T^*K^2 = T^*T^2/\xi^*,$$

где  $\xi^*(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = (-p_\theta, p_\varphi, -\theta, \varphi + \pi)$ .

### 3.2 Построение грубой молекулы

**Лемма 3.1.** а) Пусть атом  $V_{2k-1}$  равен прямому произведению сечения, изображенного на рисунке 8а) на плоскости  $(\theta, p_\theta)$ , и окружности с координатой  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Тогда при факторизации этого атома по инволюции  $\xi^*$  получим атом  $V_k$ .

б) Пусть атом  $P_{2k}$  равен прямому произведению сечения, изображенного на рисунке 9а) на плоскости  $(\theta, p_\theta)$ , и окружности с координатой  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Тогда при факторизации этого атома по инволюции  $\xi^*$  получим атом  $V_{k+1}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим половинку атома  $V_{2k-1}$  (см. рис. 10). Чтобы получить атом, который имеем в результате факторизации атома  $V_{2k-1}$  по инволюции  $\xi^*$ , нужно склеить части с номерами без штрихов с номерами со штрихами в прямом порядке (см. рис. 10, номер 1 склеиваем с 1', 2 — с 2' и т.д.) согласно инволюции  $\xi^*$ . В результате этого получим атом, изображенный на рис. 11 (штриховыми линиями показаны оси торов; изображен полученный в результате факторизации атома  $V_3$ ). Чтобы понять, какая база слоения Зейферта у полученного атома, достаточно профакторизовать сечение, изображенное на рис. 8а) по инволюции  $\xi^{**}(p_\theta, \theta) = (-p_\theta, -\theta)$ , см. рис. 12.

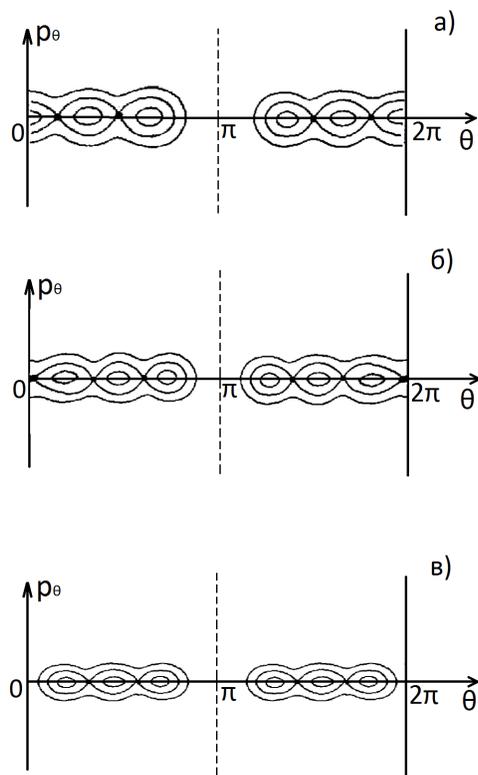


Рис. 8:

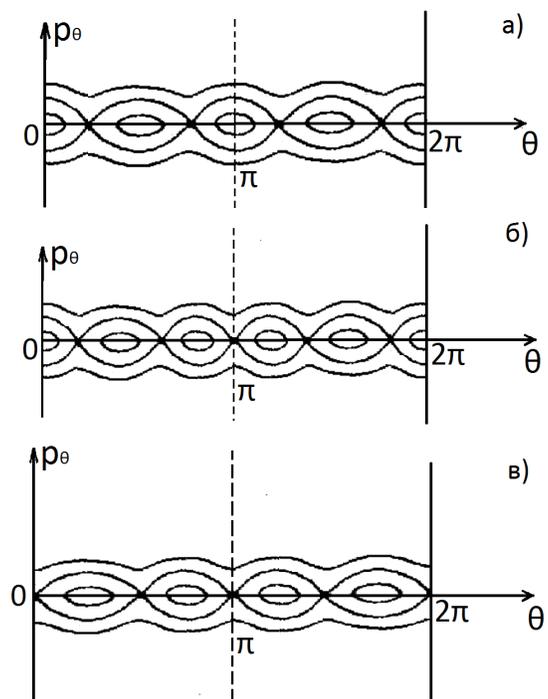


Рис. 9:

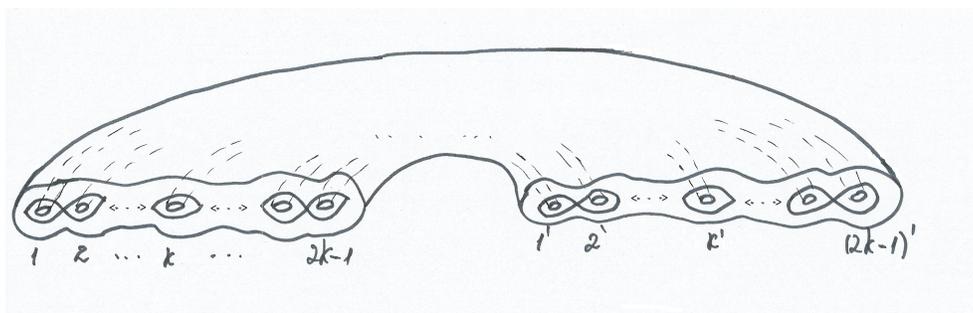


Рис. 10:

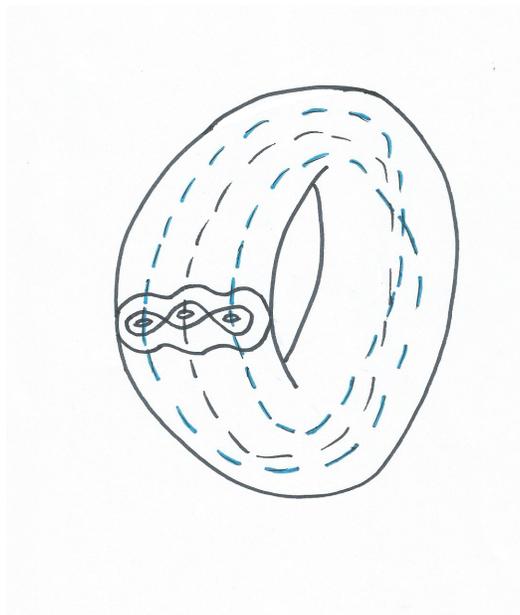


Рис. 11:

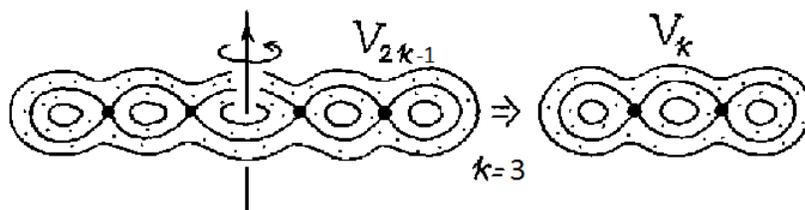


Рис. 12:

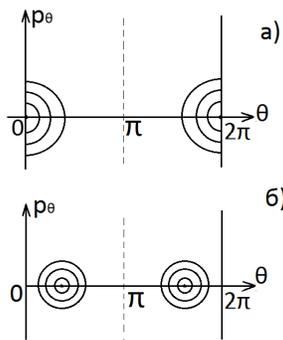


Рис. 13:

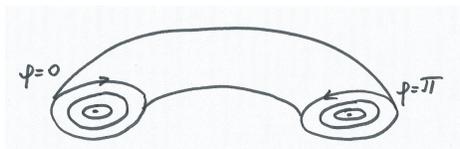


Рис. 14:

Полученный атом является атомом  $V_k$ , так как база слоения Зейферта — 2-атом  $V_k$  без звездочек (так как особых слоев полученный 3-атом не имеет).

Аналогично доказывается пункт б) леммы.  $\square$

**Лемма 3.2.** Пусть атом  $A$  равен прямому произведению сечения, изображенного на рисунке 13а) на плоскости  $(\theta, \rho_\theta)$ , и  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Тогда при факторизации этого атома по инволюции  $\xi^*$  получим снова атом  $A$ .

*Доказательство.* Профакторизовать рассматриваемый атом  $A$  по инволюции  $\xi^*$  — значит склеить половину атома  $A$ , изображенного на рис. 14, с собой с той ориентацией, которая показана на рис. 14. Получаем снова полноторие, расслоенное на концентрические торы, сжимающиеся на ось полнотория. Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть система на бутылке Клейна  $K^2$  задана парой функций  $f(\theta)$  и  $V(\theta)$  так, как описано выше. Тогда молекула системы, соответствующая связной компоненте изоэнергетической поверхности  $Q_K^3$ , симметрична и имеет вид  $W - W$ , где каждая молекула  $W$  — это либо один атом  $A$ , либо дерево. Все неконцевые вершины дерева — это атомы  $V_l, V_k^*, V_k^{**}, A^*, A^{**}$ , а концевые вершины имеют тип  $A$ . Построение грубой молекулы осуществляется по графику функции  $U_h(\theta) = 2f^2(\theta)(h - V(\theta))$  согласно алгоритму, описанному в конце доказательства этой теоремы.

*Доказательство.* Рассмотрим двулистное накрытие  $\pi : T^2 \rightarrow K^2$ , отвечающее описанной инволюции. Оно индуцирует двулистное накрытие  $\pi : Q_T^3 \rightarrow Q_K^3$  соответствующих изоэнергетических 3-поверхностей, отвечающих тору и бутылке Клейна. Накрытие  $\pi$  является послойным отображением лиувиллевых слоений на  $Q_T^3$  и  $Q_K^3$ . Инволюция  $\xi$  с тора  $T^2$  естественно определяет инволюцию на изоэнергетической поверхности  $Q_T^3$ . Отображение  $\pi : Q_T^3 \rightarrow Q_K^3$  является в действительности факторизацией  $Q_T^3$  по действию этой инволюции. Отсюда следует, что и молекула  $W_K$  получается из молекулы  $W_T$  естественной факторизацией по действию  $\xi$ .

Опишем теперь действие этой инволюции на  $Q_T^3$  более подробно. Структура этого слоения уже была описана в предыдущей работе [2]. Для описания молекулы  $W_K$  рассмотрим взаимодействие инволюции  $\xi^*$  с атомами молекулы  $W_T$ . Напомним, что атомы в  $W_T$  бывают трех типов  $V_k, P_m, A$ .

Отметим, что точки  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  всегда являются критическими точками эффективного потенциала  $U_h(\theta) = 2f^2(\theta)(h - V(\theta))$ , так как  $U_h(\theta)$  — четная функция (так как функции  $f(\theta)$  и  $V(\theta)$  — четные).

Напомним, что фиксируя значения первых интегралов  $H = h, K = k$  (в случае тора), мы получили следующую зависимость координаты  $p_\theta$  от координаты  $\theta$ :

$$p_\theta = \pm \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}.$$

Ясно, что инволюция  $\xi^*(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = (-p_\theta, p_\varphi, -\theta, \varphi + \pi)$  на плоскости  $(\theta, p_\theta)$  реализует центральную симметрию относительно точки  $(0, 0)$ .

Взаимодействие инволюции с торами Лиувилля и атомами:

- Тор Лиувилля переходит в себя под действием инволюции  $\xi^*$  (см. рис. 15а). В результате факторизации тор превращается в новый тор Лиувилля.
- Инволюция переставляет местами два тора Лиувилля (см. рис 15б). В результате факторизации эти 2 тора превращаются в один тор Лиувилля.
- Пусть атом  $V_{2k-1}$  переходит в себя под действием  $\xi^*$ , а его сечение на плоскости  $(\theta, p_\theta)$  расположено так, как показано на рис. 8,а. В этом случае атом  $V_{2k-1}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_k$  (см. лемму 3.1).
- Пусть сечение атома  $V_{2k}$  на плоскости  $(\theta, p_\theta)$  расположено так, как показано на рис. 8,б. При этом атом переходит в себя под действием  $\xi^*$ . Ясно, что в этом случае атом  $V_{2k}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_k^*$  (по определению атома со звездочкой). В частности, в случае атома  $V_2 (= B)$  факторизуется и превращается в атом  $A^*$
- Инволюция переставляет местами два изоморфных седловых атома вида  $V_k$  (т.е. сечения атомов на плоскости  $(\theta, p_\theta)$  расположено так, как показано на рис. 8, в). В результате эти два атома превращаются в один атом  $V_k$ .
- Инволюция отображает в себя атом  $A$  (см. рис. 13, а). В результате атом  $A$  склеивается при факторизации в один атом  $A$ .
- Инволюция переставляет местами два изоморфных атома  $A$  (см. рис. 13, б) В результате два атома  $A$  склеиваются при факторизации в один атом  $A$  (см. лемму 3.2).

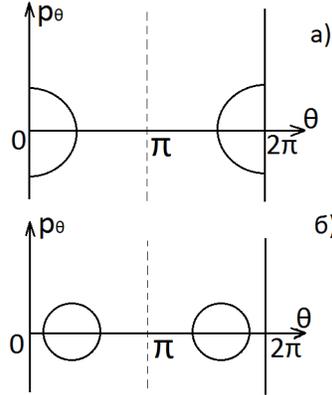


Рис. 15:

- Пусть сечение атома  $P_{2k}$  такое, как показано на рис. 9, а. При этом атом  $P_{2k}$  переходит в себя под действием  $\xi^*$ . В этом случае атом  $P_{2k}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_{k+1}$  (см. лемму 3.1).
- Пусть сечение атома  $P_{2k+1}$  такое, как показано на рис. 9, б. Тогда атом  $P_{2k+1}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_{k+1}^*$ . В частности атом  $P_1$  факторизуется и превращается в атом  $A^*$ .
- Пусть сечение атома  $P_{2k}$  такое, как показано на рис. 9, в). Тогда атом  $P_{2k}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_k^{**}$  (по определению атома со звездочкой). В частности атом  $P_2$  факторизуется и превращается в атом  $A^{**}$ .

Рассмотрим два центральных ребра молекулы, состоящие из торов Лиувилля

$$T^1 = \left\{ \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, k, \theta, \varphi \right\}, \quad T^2 = \left\{ -\frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, k, \theta, \varphi \right\}$$

соответственно.

При факторизации они склеятся в одно ребро.

То есть объединяя алгоритм построения грубой молекулы для системы на торе с выше-сказанным, получаем алгоритм для построения грубой молекулы для системы на бутылке Клейна:

**Алгоритм.**

- (1) Строим грубую молекулу для связной компоненты изоэнергетической поверхности для системы на торе так, как описано в работе [2].
- (2) Заменяем атомы в полученной молекуле так, как описано в перечне выше.

Теорема доказана. □

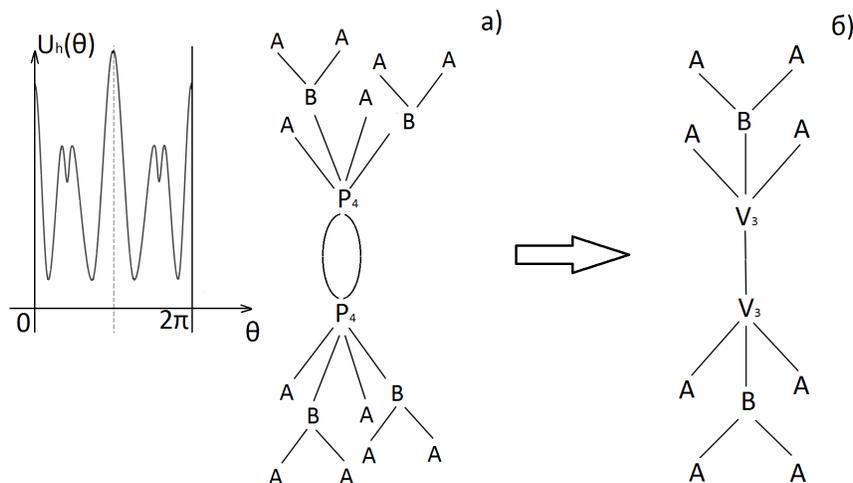


Рис. 16:

**Пример 2.** Рассмотрим пример. Пусть график эффективного потенциала  $U_h(\theta)$  (для некоторого  $h$ ) выглядит так, как показано на рис. 16. Тогда молекула, соответствующая  $Q_T^3$  (изоэнергетическая поверхность тора при  $H = h$ ), будет иметь вид такой, как показано на рисунке 16а, а молекула, соответствующая  $Q_K^3$ , будет иметь вид такой, как показано на рисунке 16б.

### 3.3 Вычисление меток

**Теорема 4.** Пусть  $Q^3$  — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  на бутылке Клейна. Рассмотрим молекулу системы, соответствующую  $Q^3$ .

Метки на нецентральных ребрах молекулы следующие:

- (1) на ребрах между седловыми атомами метки:  $\varepsilon = 1$ ,  $r = \infty$ ;
- (2) на ребрах между седловыми атомами и атомами типа  $A$  метка  $r = 0$ , за исключением тех случаев, когда атом  $A$  отвечает неподвижной точке инволюции (см. рис. 13а). В этом случае метка  $r = \frac{1}{2}$ . Метка  $\varepsilon$  в обоих случаях равна  $+1$ ;
- (3) на центральном ребре молекулы, соединяющем седловые атомы, метки следующие:  $\varepsilon = -1$ ,  $r = \infty$ ;
- (4) если молекула имеет форму  $A - A$ , то метки:  $\varepsilon = 1$ ,  $r = \infty$ ;
- (5) если молекула  $W - W$  отлична от  $A - A$ , то молекула имеет единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов  $A$ . Метка  $n$  в этом случае
  - равна  $0$ , если центральное ребро соединяет атомы, полученные при факторизации атомов  $V_s$ , сечение которых изображено на рис 8в;

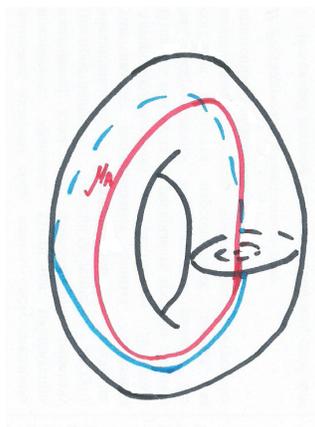


Рис. 17:

- равна  $-1$ , если центральное ребро соединяет атомы, полученные при факторизации атомов  $V_s$ , сечение которых изображено на рис 8а,б;
- равна  $-2$ , если центральное ребро соединяет атомы, полученные при факторизации атомов  $P_m$ .

*Доказательство.* Для вычисления меток нам необходимо выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов.

1) Пусть 3-атом имеет тип  $A$ , т.е. является полноторием. Тогда в качестве первого базисного цикла возьмем меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория. В нашем случае это, как и в случае тора,:

$$\left\{ p_\theta = \pm \frac{1}{f(\theta)} \sqrt{U_h(\theta) - k^2}, p_\varphi = const, \theta \in [\theta_1, \theta_2], \varphi = const \right\}$$

для всех атомов  $A$ . В качестве второго цикла можно взять любой цикл  $\mu$ , дополняющий  $\lambda$  до базиса. Возьмем слой  $\mu_A$ , изображенный на рис. 17 в случае, когда атом  $A$  получается факторизацией из атома  $A$ , сечение которого изображено на рис.13а. Если же атом  $A$  получается факторизацией из атома  $A$ , сечение которого изображено на рис.13б, то цикл  $\mu_A$  берем такой же, какой брали в случае тора.

2) Пусть 3-атом является седловым. В этом случае в качестве первого базисного цикла  $\lambda$  берем слой расслоения Зейферта (который естественным образом получается при факторизации атомов).

Заметим, что если два седловых атома находятся в одной полуплоскости ( $K > 0$  или  $K < 0$ ), то ориентация слоев слоения Зейферта будет совпадать, как и в случае тора, если же в разных, то будет противоположной.

Выбор циклов  $\mu$  для седловых атомов следующий:

- (1) Если седловой атом не имеет звездочек, то он является фактором седлового атома, сечение которого изображено на рис. 8а, 8в, 9а. Тогда выбираем второй цикл так, как показано на рис. 18-19 (в каждом из этих случаев), т. е. второй базисный цикл на граничном

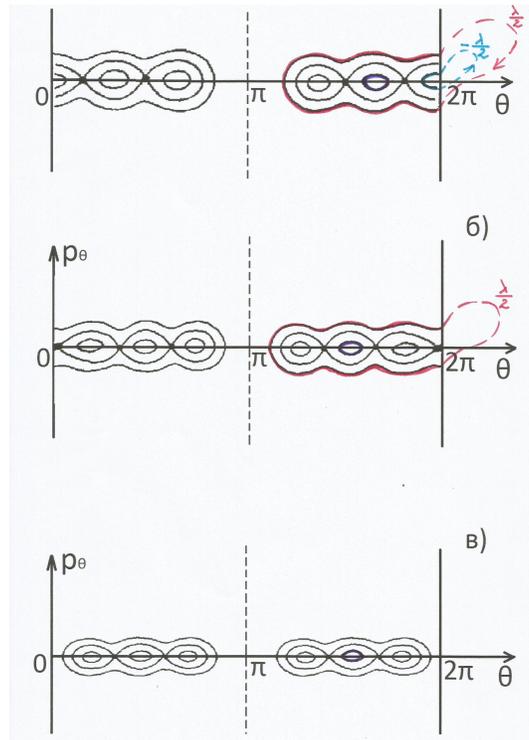


Рис. 18:

торе либо  $\mu_i = \hat{\mu}_i$ , либо  $\mu_i = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_i \pm \lambda)$ , либо (в случае атома  $P_m$ )  $\mu_i = \frac{\hat{\mu}_i}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\hat{\mu}_i}{2} + \frac{\lambda}{2}$ . Заметим, что в совокупности все вторые циклы связаны условием существования глобального сечения, проходящего через них.

- (2) Если седловой атом имеет звездочки, то он является фактором седлового атома, сечение которого изображено на рис. 8б, 9б, 9в. Тогда выбираем второй цикл так, как показано на рис. 18-19 (в каждом из этих случаев), т. е. второй базисный цикл на граничном торе либо  $\mu_i = \hat{\mu}_i$ , либо  $\mu_i = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_i + \lambda)$ , либо (в случае атома  $P_m$ )  $\mu_i = \frac{\hat{\mu}_i}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\hat{\mu}_i}{2} + \frac{\lambda}{2}$ . Заметим, что при таком выборе будет выполняться условие

$$\sum \mu_i = \frac{1}{2}(\sum \hat{\mu}_i + s\lambda) = \frac{\partial \hat{P} + s\lambda}{2},$$

где  $\hat{\mu}_i$  — вторые базисные циклы на седловых атомах тора,  $\hat{P}$  — сечения, изображенные на рис. 8б, 9б, 9в, а число  $s$  — число критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.

Выпишем матрицы склейки в явном виде.

- 1) Пусть два седловых атома лежат в одной полуплоскости. Тогда матрица склейки на

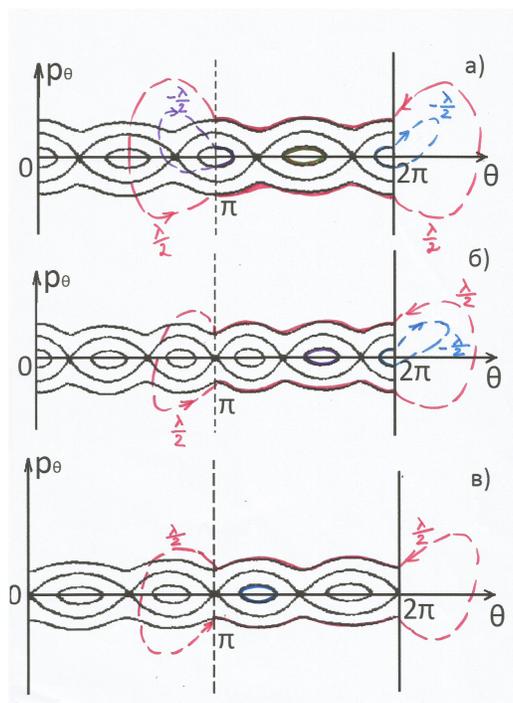


Рис. 19:

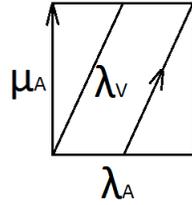


Рис. 20:

ребре, соединяющем эти два седловых атома, будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix},$$

где для каждой пары атомов имеем, возможно, разные  $p$ . Первая строка матрицы имеет такой вид, так как слои слоения Зейферта совпадают для седловых атомов, лежащих в одной полуплоскости ( $K > 0$  или  $K < 0$ ). Вторая строка матрицы получается автоматически.

Из вида матрицы следует, что метки следующие:  $\varepsilon = 1$ ,  $r = \infty$ .

2) Рассмотрим ребро, соединяющее атом  $A$ , получающийся в результате факторизации атома  $A$ , сечение которого изображено на рисунке 13а, и седлового атома. Выразим базисные циклы на граничном торе седлового атома через базисные циклы на граничном торе атома  $A$  (см. рис. 20).

Имеем:

$$\begin{cases} \lambda_V = 2\mu_A \pm \lambda_A \\ \mu_V = \pm \frac{1}{2}(2\mu_A \pm \lambda_A) \pm \frac{\lambda_A}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_V \\ \mu_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 2 \\ \pm 1/0 & \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mu_A \end{pmatrix}.$$

Т.е. матрица склейки между седловым атомом и атомом  $A$  при  $K > 0$  будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 2 \\ \pm 1/0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

т.е. метки  $\varepsilon = 1$ ,  $r = \frac{1}{2}$ .

3) Рассмотрим ребро, соединяющее атом  $A$ , получающийся в результате факторизации атома  $A$ , сечение которого изображено на рисунке 13б, и седлового атома. Выразим базисные циклы на граничном торе седлового атома через базисные циклы на граничном торе атома  $A$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mu_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_V \\ \mu_V \end{pmatrix},$$

где  $p$  — некоторое целое число.

Первая строка матрицы следует из того, что матрица склейки на ребре между седловым атомом и атомом  $A$  в случае тора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторая строка матрицы получается автоматически.

Т.е. метки  $\varepsilon = 1$ ,  $r = 0$ .

4) Выпишем матрицу склейки на ребре, соединяющем атомы из разных полуплоскостей ( $K > 0$  и  $K < 0$ ):

а) Пусть седловые атомы, которые соединяет ребро, получены в результате факторизации атомов  $P_m$ . Тогда в силу выбора базисных циклов имеет:

$$\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_- \\ \mu_- \end{pmatrix}.$$

вторая строчка матрицы получается автоматически.

Из вида матрицы следует, что метки следующие:  $\varepsilon = -1$ ,  $r = \infty$ .

Вычислим  $q$ :

$$\begin{cases} \mu_+ = -\lambda_- + \mu, \\ \mu_- = \lambda_- + \mu. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mu_+ = \mu_- - 2\lambda_-.$$

Таким образом,  $q = -2$ .

б) Пусть седловые атомы, которые соединяет ребро, получены в результате факторизации атомов  $V_m$ , сечение которого изображено на рис. 18в. Тогда в силу выбора базисных циклов имеем матрицу склейки:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как в случае тора на центральном ребре между седловыми атомами  $V_m$  имеет такую же матрицу.

Из вида матрицы следует, что метки следующие:  $\varepsilon = -1$ ,  $r = \infty$ .

в) Пусть седловые атомы, которые соединяет ребро, получены в результате факторизации атомов  $V_m$ , сечение которого изображено на рис. 18а, б. Тогда в силу выбора базисных циклов имеем матрицу склейки (вторая строка матрицы получается аналогично):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы следует, что метки следующие:  $\varepsilon = -1$ ,  $r = \infty$ .

Найдем  $w$ :

$$\begin{cases} \mu_+ = -\frac{\lambda_-}{2} + \frac{\mu}{2}, \\ \mu_- = \frac{\lambda_-}{2} + \frac{\mu}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mu_+ = \mu_- - \lambda_-.$$

Т. е.  $w = -1$ .

г) Пусть атомы, которые соединяет центральное ребро, получены в результате факторизации атомов  $A$ , т.е. молекула имеет вид  $A - A$ . Так как вторые базисные циклы у атомов  $A$  и  $A$  совпадают, но имеют разные ориентации, то в силу выбора базисных циклов матрица склейки имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $r = \infty$ ,  $\varepsilon = 1$ .

Ясно, что здесь имеется одна семья, получаемая отбрасыванием атомов  $A$  (кроме случая, когда молекула имеет форму  $A - A$ ). Вычислим отвечающую ей метку  $n$ :

$$n = \sum_{\text{исходящие ребра}} \left[ \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right] + \sum_{\text{входящие ребра}} \left[ \frac{-\delta_i}{\beta_i} \right] + \sum_{\text{внутренние ребра}} \left[ \frac{-\gamma_i}{\alpha_i} \right].$$

Так как матрица склейки на ребре, соединяющем седловой атом и атом  $A$  равна либо

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 2 \\ \pm 1/0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix},$$

то матрица на том же ребре, но с противоположной ориентацией имеет вид либо

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \mp 1 & 2 \\ \pm 1/0 & \mp 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

в зависимости от ребра.

В силу того, что молекула симметрична, а симметричные ребра ориентированы противоположным образом, то матрица склейки на соединяющем атомы симметричном ребре равна

$$M' = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

см. [1] том 1, стр 196, т. е. равна либо

$$M' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 2 \\ \pm 1/0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

либо

$$M' = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т. е. сумма  $\sum_{\text{исходящие ребра}} \left[ \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right] + \sum_{\text{входящие ребра}} \left[ \frac{-\delta_i}{\beta_i} \right]$  (в формуле для метки  $n$ ) равна 0. Матрица на внутренних нецентральных ребрах молекулы имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица на том же ребре, но с противоположной ориентацией имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что молекула симметрична, а симметричные ребра ориентированы противоположным образом, то матрица склейки на соединяющем атомы симметричном ребре равна

$$C' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix},$$

см. [1] том 1, стр 196, т. е. равна

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix}.$$

А значит, метка  $n$  в нашем случае вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\text{внутренние ребра}} \left[ \frac{-\gamma_i}{\alpha_i} \right] = \sum_{\text{внутренние нецентральные ребра}} \left[ \frac{-\gamma_i}{\alpha_i} \right] + \sum_{\text{центральное ребро}} \left[ \frac{-\gamma_i}{\alpha_i} \right] = \\ &= 0 + \left[ \frac{-\gamma}{\alpha} \right] = \left[ \frac{-\gamma}{\alpha} \right], \end{aligned}$$

где  $\alpha, \gamma$  — элементы матрицы на центральном ребре молекулы.

Т. е. если центральное ребро соединяет атомы, полученные при факторизации атомов  $P_m$ , то метка  $n = -2$ .

Если же центральное ребро соединяет атомы, полученные при факторизации атомов  $V_s$ , сечение которых изображено на рис 18а, б, то метка  $n = -1$ .

Если же центральное ребро соединяет атомы, полученные при факторизации атомов  $V_s$ , сечение которых изображено на рис 18в, то метка  $n = 0$ .

Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 4.** Если  $V(\theta) = 0$ , то результаты, полученные в настоящей работе совпадают с результатами, полученными В.С. Матвеевым (см. [1], том 2, стр. 136).

## 4 Топология интегрируемого геодезического потока на проективной плоскости в потенциальном поле

Напомним некоторые результаты полученные, Е.О. Кантонистой в ее работе см. [15].

Но сначала сформулируем задачу, рассматриваемую Е.О. Кантонистой в ее работе. Потом вкратце изложим необходимые факты, использованные или доказанные ей в ее работе.

Рассмотрим риманово многообразие вращения  $M = S^2$  с натуральными координатами  $(r, \varphi)$ ,  $r \in (0; L)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , в которых метрика вращения записывается в виде:

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2.$$

В окрестности полюсов введем локальные координаты

$$x = f(r) \cos \varphi, \quad y = f(r) \sin \varphi.$$

Метрика в полюсах записывается в виде:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Лемма (А. Бессе). Метрика на многообразии вращения  $M$  и функция  $V(r)$  на нем являются гладкими в полюсах (т.е. в точках  $r = 0$  и  $r = L$ ), если существуют гладкие функции  $F = F(r)$  и  $W = W(r)$ , определенные на всей числовой прямой, такие что  $F|_{[0;L]} = f$ ,  $W|_{[0;L]} = V$  и выполнены следующие условия:

1)  $F(-r) = -F(r) = F(2L-r)$ , т.е. функции  $F(r)$  и  $F(L+r)$  нечетны (или, что эквивалентно, функция  $F(r)$  — периодична с периодом  $2L$  и нечетна) и  $F'(0) = 1$ ,  $F'(L) = -1$ ;

2)  $W(-r) = W(r) = W(2L-r)$ , т.е. функции  $W(r)$  и  $W(L+r)$  четны (или, что эквивалентно, функция  $W(r)$  — периодична с периодом  $2L$  и четна).

Рассмотрим натуральную механическую систему на кокасательном расслоении  $T^*S^2$ . Функция гамильтона для этой задачи запишется следующим образом вне полюсов:

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r),$$

В полюсах:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(0).$$

Рассматриваемая система интегрируема по Лиувиллю: имеет второй первый интеграл  $K = p_\varphi$  (вне полюсов),  $K = xp_y - yp_x$  (в окрестности полюсов).

Система имеет 2 точки ранга 0:  $(0, N)$ ,  $(0, S)$ , где  $S, N$  — полюса сферы.

**Теорема 5.** (Е. О. Кантонистова.) *Рассмотрим систему на многообразии вращения  $M \approx S^2$ , заданную парой функций  $(V(r), f(r))$ . Пусть  $Q \subseteq Q_h^3$  — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой  $K$  — функция Ботта. Тогда молекула системы симметрична (без учета ориентации на ребрах) относительно оси  $h$ , а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания  $k$ . Т.е. молекула имеет вид  $W - W$ , где соединяющее молекулы ребро суть один тор Лиувилля, а каждая молекула  $W$  — это либо один атом  $A$ , либо дерево. Все неконцевые вершины дерева — это атомы  $V_i$ , а концевые вершины имеют тип  $A$ . При этом при  $k > 0$  входящее ребро для каждого атома  $V_i$  одно, а исходящих  $l$  (при  $k < 0$  картина антисимметрична, т. е. без учета ориентации на ребрах молекула симметрична относительно  $h$ , а ориентации на кусках  $W_+ = W(k > 0)$  и  $W_- = W(k < 0)$  противоположна.*

Заметим, что в полюсах сферы дополнительный первый интеграл  $K = 0$ . Вне полюсов первые интегралы данной системы аналогичны случаю тора (см. работу [2]).

Вне полюсов сферы, как и в случае тора (см. работу [2]), можно фиксировать значение двух интегралов  $H = h$ ,  $p_\varphi = k$ . Получим такие точки  $(p_r, k, r, \varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , на  $M \approx S^2$ , которые удовлетворяют уравнению:

$$\frac{p_r^2}{2} + \frac{k^2}{2f^2(r)} + V(r) = h.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$p_r = \pm \frac{1}{f(r)} \sqrt{U_h(r) - k^2},$$

где функция  $U_h(r) := 2f^2(r)(h - V(r))$ .

По графику функции  $U_h(r)$  можно построить ту часть грубой молекулы, которая не имеет общих точек с полюсами сферы (аналогично, как и для случая тора). Напомним, что в

полосах  $K = 0$ . То есть меняя значения  $k$  ( $k > 0$  и  $k < 0$ ), получаем грубую молекулу, соответствующую  $Q \subseteq Q_h^3$  – связной компоненте неособой изоэнергетической поверхности. Но так как полюсам не могут соответствовать особые слои слоения Лиувилля (см. работу Е.О. Кантонистовой), то грубая молекула, соответствующую связной компоненте неособой изоэнергетической поверхности, строится по графику функции  $U_h(r)$  так же, как и для случая тора.

Также заметим, что  $U_h(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  (см. лемму Бессе), что и естественно, так как в полюсах  $K = 0$ .

На этом обзор результатов Е.О.Кантонистовой заканчиваем и сформулируем новую задачу. Рассмотрим на сфере инволюцию  $\eta$ , задаваемую в координатах  $r, \varphi$  следующей формулой:

$$\eta(\varphi, r) = (\varphi + \pi, L - r).$$

В полюсах инволюция действует следующим образом:

$$\eta(S) = N.$$

Проективную плоскость можно представить в виде:

$$RP^2 = S^2/\eta.$$

Имеем:

$$T^*RP^2 = T^*S^2/\eta^*,$$

где  $\eta^*(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (-p_r, p_\varphi, L - r, \varphi + \pi)$ .

Пусть теперь функции  $f, V$  такие, что  $f(r) = f(L - r)$  и  $V(r) = V(L - r)$ .

**Теорема 6.** Пусть система на проективной плоскости  $RP^2$  задана парой функций  $f(r)$  и  $V(r)$  так, как описано выше. Тогда молекула системы, соответствующая связной компоненте изоэнергетической поверхности  $Q_{RP}^3$ , симметрична и имеет вид  $W - W$ , где каждая молекула  $W$  – это либо один атом  $A$ , либо дерево. Все неконцевые вершины дерева – это атомы  $V_l, V_k^*, A^*$ , а концевые вершины имеют тип  $A$ . Построение грубой молекулы осуществляется по графику функции  $U_h(r) = 2f^2(r)(h - V(r))$ .

*Доказательство.* Рассмотрим двулистное накрытие  $\pi : S^2 \rightarrow RP^2$ , отвечающее описанной инволюции. Оно индуцирует двулистное накрытие  $\pi : Q_S^3 \rightarrow Q_{RP}^3$  соответствующих изоэнергетических 3-поверхностей, отвечающих сфере и проективной плоскости. Накрытие  $\pi$  является послойным отображением лиувиллевых слоений на  $Q_S^3$  и  $Q_{RP}^3$ . Инволюция  $\eta$  со сферы  $S^2$  естественно определяет инволюцию на изоэнергетической поверхности  $Q_S^3$ . Отображение  $\pi : Q_S^3 \rightarrow Q_{RP}^3$  является в действительности факторизацией  $Q_S^3$  по действию этой инволюции.

Опишем теперь действие этой инволюции на  $Q_S^3$  более подробно. Для описания молекулы  $W_{RP}$  рассмотрим взаимодействие инволюции  $\eta^*$  с атомами молекулы  $W_S$ . Напомним, что атомы в  $W_S$  бывают двух типов  $V_k, A$ .

Отметим, что точки  $r = 0, r = L$  являются критическими точками эффективного потенциала  $U_h(r) = 2f^2(r)(h - V(r))$ , так как график  $U_h(r)$  симметричен относительно  $r = L/2$ . Ясно, что инволюция  $\eta^*(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (-p_r, p_\varphi, L - r, \varphi + \pi)$  на плоскости  $(r, p_r)$  реализует центральную симметрию относительно точки  $(0, 0)$ .

Взаимодействие инволюции с торами Лиувилля и атомами полностью аналогично случаю бутылки Клейна:

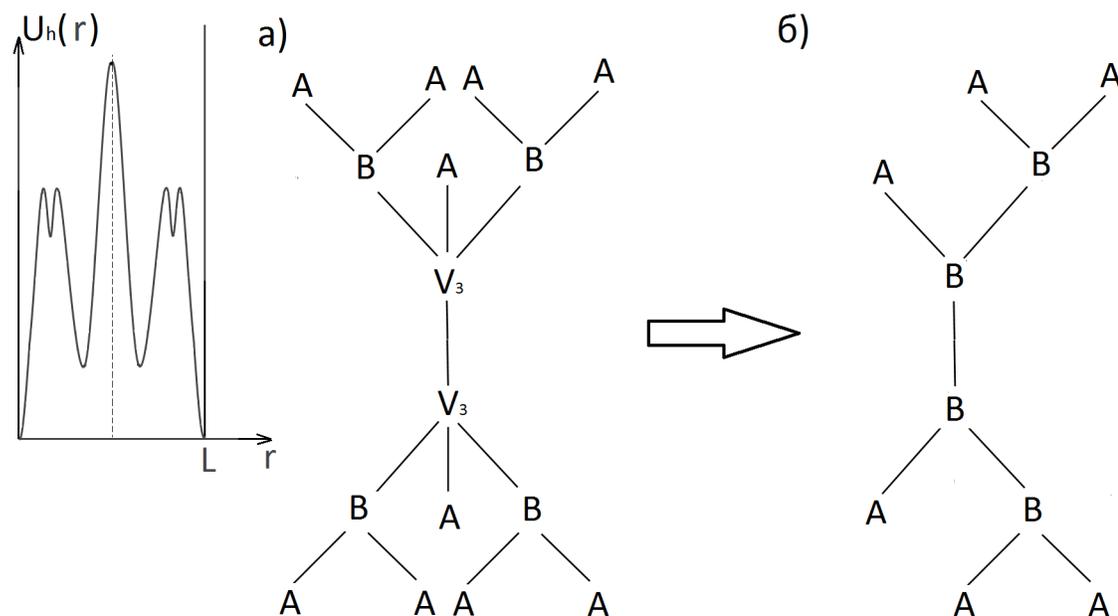


Рис. 21:

- Тор Лиувилля переходит в себя под действием инволюции  $\eta^*$  (см. рис. 15а,  $L = 2\pi$ ). В результате факторизации тор превращается в новый тор Лиувилля.
- Инволюция переставляет местами два тора Лиувилля (см. рис 15б,  $L = 2\pi$ ). В результате факторизации эти 2 тора превращаются в один тор Лиувилля.
- Пусть атом  $V_{2k-1}$  переходит в себя под действием  $\eta^*$ , а его сечение на плоскости  $(r, p_r)$  расположено так, как показано на рис. 8а ( $L = 2\pi$ ). В этом случае атом  $V_{2k-1}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_k$ .
- Пусть сечение атома  $V_{2k}$  на плоскости  $(r, p_r)$  расположено так, как показано на рис. 8б ( $L = 2\pi$ ). При этом атом переходит в себя под действием  $\eta^*$ . Ясно, что в этом случае атом  $V_{2k}$  факторизуется и превращается в новый атом  $V_k^*$  (по определению атома со звездочкой). В частности, в случае атома  $V_2 (= B)$  факторизуется и превращается в атом  $A^*$ .
- Инволюция переставляет местами два изоморфных седловых атома вида  $V_k$  (т.е. сечения атомов на плоскости  $(r, p_r)$  расположено так, как показано на рис. 8в,  $L = 2\pi$ ). В результате эти два атома превращаются в один атом  $V_k$ .
- Инволюция отображает в себя атом  $A$  (см. рис. 13а,  $L = 2\pi$ ). В результате атом  $A$  склеивается при факторизации в один атом  $A$ .

- Инволюция переставляет местами два изоморфных атома  $A$  (см. рис. 13б,  $L = 2\pi$ ). В результате два атома  $A$  склеиваются при факторизации в один атом  $A$ .

Поэтому заменяя соответствующие атомы в молекуле для сферы на профакторизованные атомы в молекуле для проективной плоскости, получаем грубую молекулу для проективной плоскости (в качестве примера см. рис 21, а – молекула для сферы, б – молекула для проективной плоскости).  $\square$

## Список литературы

- [1] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко "Интегрируемые гамильтоновы системы". 1999. Ижевск: издательский дом "Удмуртский университет".
- [2] Д. С. Тимонина "Topological classification of Integrable geodesic flows in a potential field on the torus of revolution". Журнал Лобачевского. В печати.
- [3] А.Т. Фоменко, "Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем". Усп.матем.наук, 1989, т.44, вып.1 (265), стр.145-173
- [4] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, "Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела". Функц.анализ и его приложения, 1995, том 29, вып.3, стр.1-15
- [5] A.V.Bolsinov, A.T.Fomenko, "Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification". CHAPMAN and HALL/CRC.A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004.
- [6] А.Т.Фоменко, "Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем". Известия АН СССР, серия матем., т.55, вып.4, 1991, стр.747-779
- [7] А.Т.Фоменко, "Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях". Функц.анализ и его приложения, 1991, т.25, вып.4, стр.23-25
- [8] A.T.Fomenko, P.V.Morozov, "Some new results in topological classification of integrable systems in rigid body dynamics". Proceedings of the Workshop "Contemporary Geometry and Related Topics". Belgrade, Yugoslavia, 15-21 May 2002, World Scientific Publishing Co., 2004, pp.201-222.
- [9] A.V.Bolsinov, A.T.Fomenko, A.A.Oshemkov, "Topological Methods in the Theory of Integrable Hamiltonian Systems"(монография). Cambridge Scientific Publishers, 2006.
- [10] Е.А.Кудрявцева, И.М.Никонов, А.Т.Фоменко, "Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия". Матем.Сб., 2008, т.199, вып.9, стр.3-96.
- [11] Е.А.Кудрявцева, А.Т.Фоменко, "Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях". Доклады РАН, серия: математика, 2012, том 446, вып.6, стр.615-617.

- [12] A.Yu.Konyaev, A.T.Fomenko, "Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems". In: "Continuous and Disturbed Systems.Theory and Applications". vol.211, pp.3-21, Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer, 2014.
- [13] В.В. Фокичева, А.Т. Фоменко, "Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела". -Доклады РАН, серия: математика. 2015, том 465:2, с. 150-153.
- [14] Victoria V. Fokicheva and Anatoly T. Fomenko. "Billiard Systems as the Models for the Rigid Body Dynamics". In: "Studies in Systems, Decision and Control "Advances in Dynamical Systems and Control". vol.69, pp.13-32. Editors: Victor A.Sadovnichiy, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia. Michael Z.Zgurovsky, National Technical University of Ukrain "Kyev Polytechnic Institute". Kyev, Ukrain. Springer International Publishing Switzerland 2016.
- [15] Е. О. Кантонистова "Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле". Матем. сб., 2016, том 207:3, стр. 47–92