Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

Кафедра Теоретической механики и мехатроники

Дипломная работа

Кручение Рейдемейстера трехмерных граф-многообразий, возникающих в гамильтоновой динамике

Выполнил: студент 6-го курса
Солодских Кирилл
Научные руководители:
Попеленский Ф. Ю.
Трещев Д. В.
Фоменко А. Т.

Москва, 2017 г.

Содержание

УДК 514.853

Кручение Рейдемейстера трехмерных граф-многообразий, возникающих в гамильтоновой динамике

В данной работе изучается топология изоэнергетических трехмерных многообразий интегрируемых гамильтоновых систем, реализуемых в виде специального класса т. н. «молекул». А именно, для данного класса многообразий вычислено кручение Рейдемейстера в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга. Обнаружена связь между кручением изоэнергетического многообразия и устойчивыми периодическими траекториями.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: Кручение Рейдемейстера, граф-многообразия Вальдхаузена, многообразия Зейферта, инварианты Фоменко-Цишанга, меченые молекулы, гамильтоновы системы.

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Граф-многообразия были введены в топологию трехмерных многообразий Ф. Вальдхаузеном(см. [1], [2]). Это большой класс многообразий, однако он не исчерпывает всего класса компактных ориентируемых трехмерных многообразий. Оказалось, что граф-многообразия возникают в теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы как изоэнергетические трехмерные поверхности. А именно, А. Т. Фоменко совместно с С. В. Матвеевым показали, что изоэнергетическая поверхность гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, интегрируемой при помощи боттовского интеграла, обязательно является граф-многообразием([3], [4]). Более того любое граф-многообразие реализуется, как изоэнергетическая поверхность некоторой гамильтоновой системы интегрируемой при помощи боттовского интеграла.

Структура работы. Первый раздел содержит введение в теорию интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Во втором разделе дается определение кручения Рейдемейстера. Третий раздел содержит основную теорему автора. Пользуясь данной теоремой, вычисляются кручения некоторых семейств изоэнергетических многообразий, которые уже были обнаружены в реальных механических задачах. Четвертый раздел является небольшим обзором механических систем с изоэнергетическими поверхностями, реализованных простыми молекулами.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям – Ф. Ю. Попеленскому и А. Т. Фоменко за постановку интересной задачи, за плодотворные консультации, а также за развитие интереса автора в области алгебраической и симплектической топологии.

1.2. Граф-многообразия Вальдхаузена.

Определение 1. Компактное трехмерное ориентируемое многообразие называется граф-многообразием, если после вырезания из него конечного количества попарно непересекающихся двумерных торов, получается открытое многообразие, каждая связная компонента которого является расслоением Зейферта над двумерной поверхностью со слоем окружность.

Такие многообразия удобно представлять в виде меченых графов, вершинам которых соответствуют связные компоненты(многообразия Зейферта), получающиеся после вырезания торов, ребрам соответствуют торы, по которым склеиваются связные компоненты. Выбрав базис в фундаментальных группах граничных торов каждой связной компоненты, каждому ребру можно приписать матрицу индуцированного изоморфизма фундаментальных групп, соответствующего склейки по тору. Есть возможность однозначно задать класс «допустимых» базисов в фундаментальных группах граничных торов. Такое представление многообразия в виде графа мы будем называть *граф-структурой*. Заметим, что одно многообразие допускает много различных граф-структур.

1.3. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Инварианты Фоменко-Цишанга. Рассмотрим гамильтонову систему $sgradH$ с двумя степенями свободы на симплектическом многообразии $(\mathbf{M}^4, \omega)$, где ω – симплектическая структура, $H\colon \mathbf{M^4} \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Пусть данная система имеет дополнительный интеграл F, который является боттовским. Пусть также система нерезонансна(более подробно см. [5], [6]). В этом случае на мгообразии возникает слоение Лиувилля, слоями которго являются связные компоненты совместных поверхностей уровня(предположим, что они компактны) интегралов H и F. Ограничив систему на невырожденную поверхность постоянной энергии $\mathbf{Q}^3_c = \{x \in \mathbf{M^4} \mid H(x) = c\}$, мы получим слоение Лиувилля на $\mathbf{Q}^3_c$. А. Т. Фоменко и Х. Цишанг доказали, что слоение Лиувилля возникающие на $\mathbf{Q}^3_c$, однозначно задает некоторую граф-структуру(см. [7], [8]), причем две системы Лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны граф-структуры, которые они задают. А. Т. Фоменко также было показано, что окрестности особых слоев Лиувилля являются расслоениями Зейферта над двумерными поверхностями, они были классифицированы с точность до послойного гомеморфизма(см. [7]). Класс лиувилливой эквивалентности окрестности особого слоя называется *3-атомом*. Оказывается если атом имеет особые слои расслоения Зейферта, то эти слои могут иметь тип только (2, 1), в этом случае атому приписываются звездочки в количестве особых слоев. Опишем более подробно геометрическую конструкцию слоения Лиувилля на $\mathbf{Q}^3_c$ на следующем примере.

Пусть атомам системы соответствуют тривиальные расслоения расслоения Зейферта над двумерными ориентируемыми поверхностями рода g с m дырками со слоем окружность, то есть атомам соответствуют многообразия гомеоморфные $\mathbf{P}^2_{g,m} \times S^1$, где $\mathbf{P}^2_{g,m}$ – ориентируемая поверхность рода g с m дырками. Атом, которому соответствует многообразие $D^2 \times S^1$ обозначается буквой A, все атомы, которые не являются атомом A, называются *седловыми*. В фундаментальных группах граничных торов атомов(далее мы не будем различать атом и 3-многообразие, которое ему соответствует) выбираются *допустимые системы координат* следующим образом. На граничном торе атома A в качестве первого базисного цикла выбирается цикл λ, который гомотопен тривиальному циклу при естественном вложении тора на границу атома. Второй цикл μ гомотопен ориентированной потоком $sgradH$ критической окружности(рис. 1). Цикл μ определен неоднозначно.

В случае седлового атома цикл λ на граничных торах – окружность, изотопная слоям расслоения Зейферта, ориентированная потоком $sgradH$, а циклы μ_i – выбираются в базе расслоения, как показано на рисунке 2. Тогда согласно теории А. Т. Фоменко и Х. Цишанга, слоение Лиувилля на многообразии $\mathbf{Q}_c^3$ кодируется меченым графом. Вершинам этого графа соответствуют атомы, вершины помечаются символом, которым обозначается атом. Две вершины являются соседними, если граничные торы атомов данных вершин склеиваются по некоторому гомеоморфизму. Ребрам приписываются *матрицы склейки*, это матрицы изоморфизмов фундаментальных групп, индуцированных гомеоморфизмами склеек, в базисах описанных нами выше. Определитель матрицы склейки равен -1. Оказывается, можно заменить матрицы склейки на некоторые числовые метки таким образом, что по ним восстанавливаются матрицы склейки с точностью до лиувиллевой эквивалентности, получаемых слоений. Такой меченый граф называется *меченой молекулой* или *тонким инвариантом лиувиллевой эквивалентности Фоменко-Цишанга.*

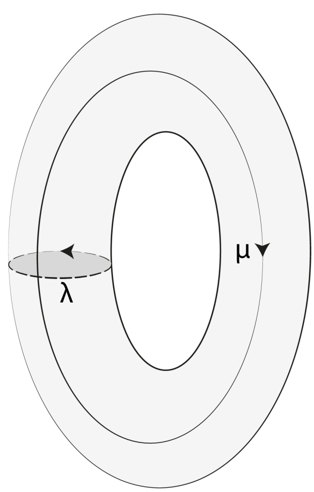

Рис. 1. Координаты на границе атома А

Определение 2. Две меченые молекулы называются изоморфными, если они изоморфны, как меченые графы.

Следующая теорема дает полную лиувиллеву классификацию нерезонансных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, интегрируемых при помощи боттовского интеграла.

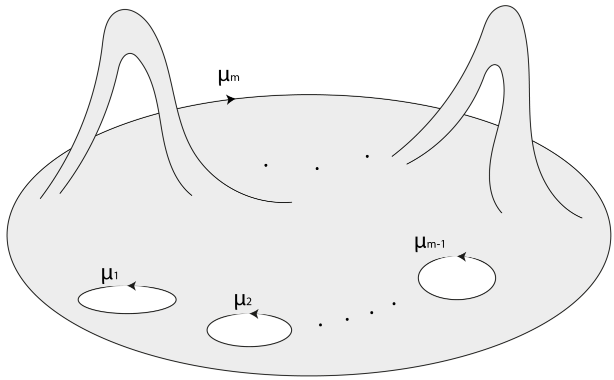

Рис. 2. Координаты на базе седлового атома

Теорема 1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Две гамильтоновы системы лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы изоморфны.*

1.4. Простые молекулы. Меченые молекулы это не только инвариант Лиувиллевой эквивалентности систем, это также простой способ представления граф-многообразий. Далее в работе мы будем рассматривать специальный класс молекул.

Определение 3. Молекула называется простой, если она имеет всего один седловой атом без звездочек, который является плоским.

Определение 4. Атом называется плоским, если ему соответствует расслоение Зейферта над двумерной сферой с m дырками.

Если плоский атом не имеет звездочек, то он гомеоморфен $S^2_m \times S^1$, то есть атом представляет из себя полноторие из которого вырезали $m-1$ полноторий, осевые окружности, которых изотопны осевой окружости исходного полнотория. Многообразие, которое соответствует простой молекуле получается приклеиванием полноторий к $S^2_m \times S^1$ по некоторому гомеоморфизму граничных торов.

Инварианты Фоменко-Цишанга для простых молекул выражаются через матрицы склейки следующим образом

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$r_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \mod 1, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} \operatorname{sign}(b_i), & \text{если } b_i \neq 0; \\ \operatorname{sign}(a_i), & \text{если } b_i = 0. \end{cases}, \quad n_V = \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right] + \dots + \left[\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right]$$

Метки r_i, ε_i приписываются ребрам молекулы, целочисленная метка n_V приписывается седловому атому V.

Далее нам понадобится фундаментальная группа многообразия Q^3 соответствующего простой молекуле. Она легко вычисляется с помощью теоремы

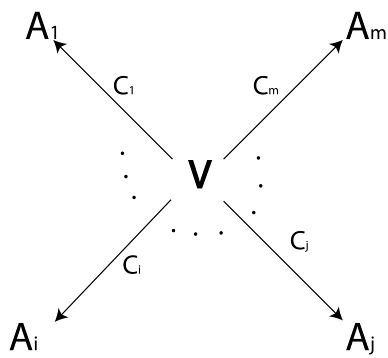

Рис. 3. Простая молекула. A_i – атомы A, C_i – матрицы склейки.

Зейферта-ван Кампена. Выпишем ее копредставление

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \left\langle\, \lambda_V, \mu_1, \dots \mu_m \;\middle|\; [\lambda_V, \mu_i], \lambda_V^{\alpha_i}\mu_i^{\beta_i}, \mu_1 \dots \mu_m, \quad i = 1, \dots, m \,\right\rangle . \tag{1.1}$$

Применение и развитие этих результатов см., в частности, в [9], [10], [11], [12], [13].

§ 2. Кручение Рейдемейстера-Франца

2.1. Кручение цепного комплекса. Рассмотрим произвольный конечный цепной комплекс над полем $\mathbb{F}$

$$C = (0 \to C_n \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \to 0), \tag{2.1}$$

где C_i - конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, для $i = 0, \dots, n$.

Определение 5. Цепной комплекс C называется базированным, если в пространствах C_i заданы базисы c_i, для $i = 0, \dots, n$. Комплекс C называется ациклическим, если последовательность (4) точна, то есть группы $H_i(C)$ тривиальны , для $i = 0, \dots, n$.

Пусть комплекс C базированный и ациклический. Тогда последовательности

$$0 \to B_i \hookrightarrow C_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} B_{i-1} \to 0, \quad B_i = Im\partial_i$$

точны. Выберем базис b_i в B_i, так как отображение ∂_{i-1} является эпиморфизмом, то для базиса b_{i-1} в B_{i-1} можно рассмотреть один из его прообразов $\tilde{b}_{i-1}$ в C_i(базисы b_{-1} и b_n пусты). Набор векторов b_i $\tilde{b}_{i-1}$ является базисом в C_i, данный базис связан с фиксированным базисом c_i линейным преобразованием, которое задается невырожденной квадратной матрицей A_i над $\mathbb{F}$

$$b_i\tilde{b}_{i-1} = A_i c_i.$$

Введем обозначение

$$[b_i\tilde{b}_{i-1}/c_i] = \det A_i \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}.$$

Определение 6. Кручением базированного цепного комплекса C над полем $\mathbb{F}$ называется элемент

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{n} [b_i \tilde{b}_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{F}^*.$$

Введем отношение эквивалентности на множестве базисов произвольного линейного пространства V над полем $\mathbb{F}$. Два базиса v и u эквивалентны, если $[v/u] = 1$.

Лемма 2.1. *Кручение является корректно определенным инвариантом базированного ациклического цепного комплекса C относительно произвольных замен базисов c_i на эквивалентные.*

Доказательство сводится к непосредственной проверке того, что кручение не зависит ни от поднятия $\tilde{b}_i$, ни от базиса b_i(см. [14; гл. 1]).

Пусть C'_i является подпространством C_i для $i = 1, \ldots, n$. Если $\partial_i(C_i) \subseteq C_{i-1}$, то цепной комплекс

$$C' = (0 \to C'_n \xrightarrow{\partial'_{n-1}} C'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-2}} \ldots \xrightarrow{\partial'_1} C'_1 \xrightarrow{\partial'_0} C'_0 \to 0),$$

где $\partial'_i = \partial_i|_{C'_i}$, называется *подкомплексом* комплекса (2.1). Для цепного комплекса C и его подкомплекса C' можно определить *фактор-комплекс*

$$C/C' = (0 \to C_n/C'_n \xrightarrow{\partial''_{n-1}} C_{n-1}/C'_{n-1} \xrightarrow{\partial''_{n-2}} \ldots \xrightarrow{\partial''_1} C_1/C'_1 \xrightarrow{\partial''_0} C_0/C'_0 \to 0),$$

где ∂''_i – отображение индуцированное ∂_i.

Теорема 2 (Мультипликативность кручения)[14]. *Пусть C, C', C'' – базированные ациклические цепные комплексы над полем $\mathbb{F}$, причем C' является подкомплексом комплекса C', $C'' = C/C'$. Пусть также базис c_i пространства C_i эквивалентен базису $c'_i\tilde{c}''_i$, где $\tilde{c}''_i$ – некоторое поднятие базиса пространства C''_i в C_i, c'_i – базис в C'_i, для $i = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$\tau(C) = \pm\tau(C')\tau(C'') \in \mathbb{F}^*.$$

2.2. Универсальное накрытие. Группа преобразования накрытия. Пусть X – конечный клеточный комплекс с нетривиальной фундаментальной группой. Тогда существует единственное(с точностью до эквивалентности) универсальное накрытие

$$p\colon \tilde{X} \xrightarrow{F} X,$$

причем точки слоя F находятся во взаимнооднозначном соответствии с $\pi_1(X, x)$.

Определение 7. Преобразованием накрытия называется гомеоморфизм g пространства $\tilde{X}$ такой, что $p \circ g = p$. Множество преобразований накрытия образуют группу $\mathrm{Aut}(p)$ относительно композиции.

Группа $\mathrm{Aut}(p)$ изоморфна $\pi_1(X, x)$, то есть фундаментальная группа комплекса X действует гомеоморфизмами на своей универсальной накрывающей $\tilde{X}$. Клеточная структура на X индуцирует клеточную структуру на $\tilde{X}$ следующим образом. Пусть e^k – открытая k-мерная клетка комплекса X с характеристическим отображением $f\colon D^k \to X$. Зафиксируем точки $d \in \mathrm{Int} D^k$ и $\tilde{d} \in p^{-1}(f(d))$, тогда в силу единственности поднятия существует единственное отображение $\tilde{f}\colon D^k \to \tilde{X}$ такое, что $\tilde{f}(d) = \tilde{d}$ и $p \circ \tilde{f} = f$. Получаем $\tilde{e}^k = \tilde{f}(\mathrm{Int} D^k)$ – открытая k-мерная клетка пространства $\tilde{X}$ с характеристическим отображением $\tilde{f}$. Построенное клеточное разбиение $\tilde{X}$ будем называть *эквивариантным.* Зафиксируем нетривиальный элемент $g \in \mathrm{Aut}(p)$, так как отображение g сохраняет накрытие, то $p \circ g \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{f}$, то есть $g \circ \tilde{f}(\mathrm{Int} D^k)$ – открытая клетка пространства $\tilde{X}$, которая отображается при накрытии в e^k. Тем самым группа $\pi_1(X, x)$ свободно и транзитивно действует на множестве клеток $p^{-1}(e^k)$.

2.3. Бимодули. Пусть R, K – произвольные ассоциативные кольца с единицей, A является левым R-модулем и правым K-модулем. Будем говорить, что на A структуры R-модуля и K-модуля *согласованы*, если $\forall r \in R$, $\forall k \in K$, $\forall a \in A$

$$(ra)k = r(ak).$$

Определение 8. Абелева группа A называется (R, K)-бимодулем, если на A заданы согласованные структуры левого R-модуля и правого K-модуля.

Предложение 1. *Пусть A – (R, K)-бимодуль, B – левый K-модуль. Тогда $A \otimes_K B$ имеет естественную структуру левого R-модуля.*

Доказательство. Для элементов модуля $A \otimes_K B$ определим умножение на элементы кольца R следующим образом

$$r(a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n) = (ra_1 \otimes b_1) + \cdots + (ra_n \otimes b_n),$$

где $r \in R$, $a_i \otimes b_i \in A \otimes_K B$. Тогда для любых элементов $r, r_1, r_2 \in R$, $k \in K$

$$(r_1 + r_2)(a \otimes b) = ((r_1 + r_2)a \otimes b) = (r_1 a + r_2 a) \otimes b = (r_1 a \otimes b) + (r_2 a \otimes b),$$

$$(r_1 r_2)(a \otimes b) = (r_1 r_2 a \otimes b) = r_1(r_2(a \otimes b)),$$

$$rk(a \otimes b) = r(ak \otimes b) = (ra)k \otimes b = r(ak) \otimes b,$$

где $a \otimes b \in A \otimes_K B$. Тем самым мы получили корректно определенную структуру левого R-модуля на K-модуле $A \otimes_K B$.

Пусть теперь A является левым R-модулем и задан гомомофризм колец

$$h\colon R \to K,$$

тогда на K можно задать структуру правого R-модуля, причем согласованную с естественной структурой K-модуля. Для элемента $k \in K$ и произвольного элемента $r \in R$ определим умножение

$$kr = kh(r),$$

очевидно, что K является (K, R)-бимодулем. Согласно предложению 1 тензорное произведение $K \otimes_h A$(имеется в виду тензорное произведение как R-модулей, структура R-модуля на K индуцируется гомоморфизмом h) имеет естественную структуру левого K-модуля.

Предложение 2. *Пусть A – свободный левый R-модуль с базисом $a_1, \dots a_n$, тогда для гомоморфизма колец*

$$h\colon R \to K,$$

тензорное произведение $K \otimes_h A$ имеет естественную структуру свободного левого K-модуля, причем базис модуля A индуцирует базис в K-модуле $K \otimes_h A$.

Доказательство. По условию, A представляется в виде

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} R a_n.$$

Тогда

$$k \otimes_h (r_1 a_1 + \dots + r_n a_n) = k h(r_1)(1_K \otimes_h a_1) + \dots + k h(r_n)(1_K \otimes_h a_n),$$

где $k \in K$, $r_1, \dots, r_n \in R$. То есть набор элементов $\{1_K \otimes_h a_i\}_{i=1}^{n}$ является базисом K-модуля $K \otimes_h A$.

2.4. Кручение CW-комплекса. Пусть X – конечный клеточный комплекс

$$X = \bigcup_{i,k} e_i^k, \quad e_i^k - \text{клетка размерности k}.$$

Действие группы $\pi = \pi_1(X)$ на k-мерных клетках $\tilde{X}$ определяет действие на группе клеточных k-мерных цепей $C_k(\tilde{X}) = C_k(\tilde{X}, \mathbb{Z})$, которое линейно продолжается до действия группового кольца $\mathbb{Z}[\pi]$. Получаем, что $C_k(\tilde{X})$ имеет структуру свободного $\mathbb{Z}[\pi]$-модуля, причем набор клеток $\{\tilde{e}_i^k\}_{i=1}^{m}$ является базисом, т. е.

$$C_k(\tilde{X}) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}[\pi] \tilde{e}_i^k.$$

Нетривиальный гомоморфизм колец

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{F}$$

наделяет поле $\mathbb{F}$ структурой $\mathbb{Z}[\pi]$-модуля. Из предложения 2 получаем

$$C_k^h(X) = C_k(\tilde{X}) \otimes_h \mathbb{F} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{F}(1_{\mathbb{F}} \otimes_h \tilde{e}_i^k).$$

Тем самым мы переходим к цепному комплексу над полем $\mathbb{F}$. Если этот комплекс ацикличен, то для него определено кручение $\tau_h^{\tilde{e}}(X)$, соответствующее набору базисных клеток $\tilde{e} = \{\tilde{e}_i^k\}_{i=1}^{m}$. Если данный цепной комплекс не ацикличен, то положим кручение равным 0. Множество элементов $\tau_h(X)$ поля $\mathbb{F}$, которое является объединением $\tau_h^{\tilde{e}}(X)$ по всевозможным базисным наборам клеток $\tilde{e}$, называется *кручением Рейдемейстера-Франца.*

Заметим, что кручение $\tau_h(X)$ однозначно восстанавливается по одному элементу $\tau_h^{\tilde{e}}(X)$, так как при замене базисной клетки $\tilde{e}_i^k$ на клетку $g\tilde{e}_i^k, g \in \pi$

получим, что кручение для нового базисного набора есть $h(g)^{(-1)^k}\tau_h^{\tilde{e}}(X)$. При замене ориентации базисной клетки кручение переходит в $(-1)\tau_h^{\tilde{e}}(X)$. То есть любые два элемента из множества $\tau_h(X) \in \mathbb{F}^*$ совпадают в $\mathbb{F}^*/\pm h(\pi)$. Обозначим также $\tau_h(X)$ образ множества $\tau_h(X)$ при проекции в $\mathbb{F}^*/\pm h(\pi)$. Отметим, что кручение не является гомотопическим инвариантом клеточного комплекса, но является инвариантом *простых гомотопических эквивалентностей*, в том числе кручение инвариантно относительно произвольных гомеоморфизмов клеточных комплексов.

Пусть клеточный комплекс X_1 получается из клеточного комплекса X_2 приклеиванием открытой клетки e^k и открытой клетки e^{k+1} таким образом, что $f^{-1}(e^k)$ является открытым шаром в ∂e^{k+1}, где $f\colon \partial e^{k+1} \to X_2 \cup e^k$ – приклеивающее отображение.

Определение 9. Вложение $i\colon X_2 \to X_1$ называется элементарным растяжением. Обратное отображение $j\colon X_1 \to X_2$ такое, что $i \circ j \sim \mathrm{id}_{X_2}$ и $j \circ i \sim \mathrm{id}_{X_1}$, называется элементарным сжатием.

Определение 10. Гомотопическая эквивалентность называется простой, если она является последовательностью элементарных сжатий и элементарных растяжений.

Предложение 3 (Кручение тора и окружности). *Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $\pi_1 = \pi_1(S^1)$, $\pi_2 = \pi_1(T^2)$. Если гомоморфизмы колец*

$$h_i\colon \mathbb{Z}[\pi_i] \to \mathbb{F}, \quad i = 1, 2$$

такие, что $h_i(\pi_i) \neq 1 \in \mathbb{F}$, для $i = 1, 2$, то

$$\begin{aligned}\tau_{h_1}(S^1) &= (h_1(\lambda) - 1)^{-1} \in \mathbb{F}^*/\pm h_1(\pi_1(S^1)),\\ \tau_{h_2}(T^2) &= 1 \in \mathbb{F}^*/\pm h_2(\pi_1(T^2)),\end{aligned}$$

где λ – образующая фундаментальной группы окружности. В случае когда гомоморфизмы h_1, h_2 тривиальны, кручение не определено, то есть

$$H_*^{h_1}(S^1) \neq 0, \quad H_*^{h_2}(T^2) \neq 0.$$

Доказательство. Универсальные накрывающие для S^1 и T^2 есть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$, соответственно. Фундаментальные группы окружности и тора действуют на своих фундаментальных накрывающих сдвигами на целочисленный вектор. Вычислим только кручение окружности, случай тора получается аналогичными вычислениями.

Рассмотрим клеточное разбиение окружности из двух клеток, одной одномерной e^1 и одной нульмерной e^0. Зададим ориентацию для каждой клетки. Построим эквивариантное клеточное разбиение прямой $\mathbb{R}$. В качестве базисных клеток выберем $\tilde{e}^0, \tilde{e}^1$(см. рис. 4).
Тогда цепной комплекс для $\mathbb{R}$ в этом базисе имеет вид

$$C(\mathbb{R}) = (0 \to \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)]\tilde{e}^1 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)]\tilde{e}^0 \to 0),$$

$$\partial_0(\tilde{e}^1) = \lambda\tilde{e}^0 - \tilde{e}^0 = (\lambda - 1)\tilde{e}^0.$$

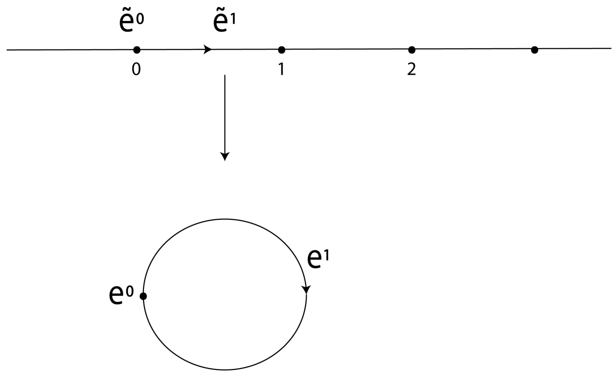

Рис. 4. Универсальное накрытие окружности.

Для гомоморфизма колец в поле

$$h_1\colon \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)] \to \mathbb{F},$$

такого, что $h_1(\pi_1(S^1)) \neq 1$, рассмотрим цепной комплекс

$$C^{h_1}(\mathbb{R}) = (0 \to \mathbb{F} \otimes_h \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)]\tilde{e}^1 \xrightarrow{\partial_0'} \mathbb{F} \otimes_h \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)]\tilde{e}^0 \to 0),$$

$$\partial_0'(\tilde{e}^1) = h_1(\lambda)\tilde{e}^0 - \tilde{e}^0 = (h_1(\lambda) - 1)\tilde{e}^0.$$

Этот цепной комплекс ацикличен тогда и только тогда, когда $h(\lambda) \neq 1$. В соответствии с конструкцией, описанной в 2.1, выберем базис $b_0 = \tilde{e}^0$, его поднятие $\tilde{b}_0 = (h(\lambda) - 1)^{-1}\tilde{e}^1$, базис b_1 пуст. Получаем кручение комплекса $C_1^h(\mathbb{R})$ отвечающее выбранной системе базисов

$$\tau(C^{h_1}(\mathbb{R})) = [b_0/c_0]^{-1}[b_1\tilde{b}^0/c_1] = (h(\lambda) - 1)^{-1}.$$

Следовательно кручение окружности для гомоморфизма h_1 равно

$$\tau_{h_1}(S^1) = (h_1(\lambda) - 1)^{-1} \in \mathbb{F}^*/\pm h_1(\pi_1(S^1)).$$

Следующая лемма является ключевой для вычисления кручения простых молекул.

Лемма 2.2. *Пусть* $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} X_i$ *– конечный клеточный комплекс с нетривиальной фундаментальной группой* $\pi = \pi_1(X)$*, представлен в виде конечного объединения своих неодносвязных подкомплексов(см. рис 5), причем*

$$Y_k = X_k \cap X_{m+1} \neq \varnothing, \quad k = 1, \ldots, m$$

$$X_i \cap X_k = \varnothing, \quad i, k = 1, \ldots, m, i \neq k.$$

Если для гомоморфизма колец $h\colon \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{F}$ *в поле*

$$H_*^{h\circ\tilde{i}_k}(Y_k) = 0, \textit{для } k = 1, \ldots, m,$$

$$H_*^{h\circ\tilde{j}_k}(X_k) = 0, \textit{для } k = 1, \ldots, m+1,$$

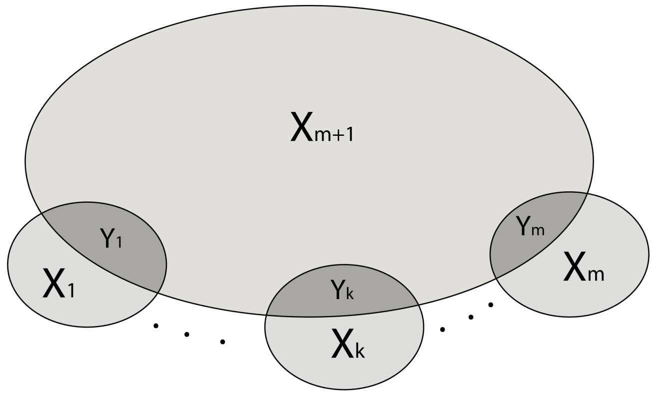

Рис. 5. Комплекс X представленный в виде объединения своих подкомплексов.

где $\tilde{i}_k\colon \mathbb{Z}[\pi_1(Y_k)] \to \mathbb{Z}[\pi]$, $\tilde{j}_k\colon \mathbb{Z}[\pi_1(X_k)] \to \mathbb{Z}[\pi]$ *- гомоморфизмы, индуцированные вложением, то цепной комплекс* $C^h(X)$ *ацикличен, и верно следующее*

$$\tau_h(X) = \tau_{h\circ\tilde{j}_n}(X_{m+1})\prod_{k=1}^{m}\tau_{h\circ\tilde{j}_k}(X_k)\tau_{h\circ\tilde{i}_k}(Y_k)^{-1} \in \mathbb{F}^*/\pm h(\pi).$$

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Y_k$, $Z = \bigcup\limits_{k=1}^{m} X_k$, тогда

$$X = Z \cup X_{m+1}, \quad Z \cap X_{m+1} = Y.$$

Имеет место следующая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C(Y) \to C(Z) \oplus C(X_{m+1}) \to C(X) \to 0.$$

Данная точная последовательность индуцирует точную последовательность для эквивариантных цепных комплексов

$$0 \to \bigoplus_k C^{\tilde{i}_k}(\tilde{Y}_k) \to \bigoplus_k C^{\tilde{j}_k}(\tilde{X}_k) \to C(\tilde{X}) \to 0,$$

Поэтому для гомоморфизма колец

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{F},$$

такого, что $h(\pi) \neq 1$, следующая последовательность точна

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0,$$

$$C' = \bigoplus_k \mathbb{F} \otimes_h C^{\tilde{i}_k}(\tilde{Y}_k), \quad C = \bigoplus_k \mathbb{F} \otimes_h C^{\tilde{j}_k}(\tilde{X}_k), \quad C'' = \mathbb{F} \otimes_h C(\tilde{X}).$$

В данном случае комплекс C' является подкомплексом комплекса C, а комплекс C'' является их фактор-комплексом. Из теоремы 2 получаем

$$\tau(C'') = \tau(C')^{-1}\tau(C)$$

$$\tau(C)=\prod_{k=1}^{m+1}\tau_{h\circ\tilde{j}_k}(X_k),\quad \tau(C')=\prod_{k=1}^{m}\tau_{h\circ\tilde{i}_k}(Y_k).$$

Нам понадобится известный результат, а именно топологическая классификация линзовых пространств, для полноты изложения мы приводим идею доказательства. Известно, что трехмерное линзовое пространство $L(p,q)$ реализуются меченой молекулой $A_1 \xrightarrow{q/p} A_2$(см. [7]), то есть $L(p,q)$ получается склейкой двух полноторий A_1 и A_2 по граничным торам со следующей матрицей склейки

$$C=\begin{pmatrix} q & p \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

В соответствии с обозначениями леммы 2.2 примем

$$X_1=A_1,\quad X_2=A_2,\quad Y=A_1\cap A_2=T^2.$$

Копредставление фундаментальной группы $L(p,q)$ выражается через гомотопический класс допустимого цикла μ_2 на границе атома A_2

$$\pi_1(L(p,q))=\langle\ \mu_2\ \mid\ \mu_2^p\ \rangle\ .$$

Применяя лемму 2.2 получаем следующий результат.

Теорема 3 (Кручение линзовых пространств). *Пусть h – гомоморфизм колец в поле $\mathbb{F}$*

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(L(p,q))]\to\mathbb{F}.$$

Кручение $\tau_h(L(p,q))$ не равно нулю тогда и только тогда, когда $h(\mu_2)\neq 1\in\mathbb{F}$. Если $h(\mu_2)\neq 1\in\mathbb{F}$, то

$$\tau_h(L(p,q))=(h(\mu_2)^\delta-1)^{-1}(h(\mu_2)-1)^{-1}\in\mathbb{F}^*/\pm h(\pi_1(L(p,q))).$$

Теорема 4 ([14], [15]). *Пусть $\eta=e^{\frac{2i\pi}{p}}$, а целые числа $q_1,q_2,\delta_1,\delta_2,\delta$ взаимнопросты с p, причем*

$$q_i\delta_i\equiv -1 \mod p,\quad i=1,2.$$

Если

$$(\eta^{\delta_2\delta}-1)^{-1}(\eta^{\delta}-1)^{-1}=\eta^d(\eta^{\delta_1}-1)^{-1}(\eta-1)^{-1},$$

где d – произвольное целое число, то либо $q_1q_2\equiv\pm1 \mod p$, либо $q_1\equiv\pm q_2 \mod p$.

Из теорем 3, 4 немедленно получается классификация линзовых пространств с точностью до гомеоморфизма.

Теорема 5 (Топологическая классификация линзовых пространств). *Линзовые пространства $L(p_1,q_1)$ и $L(p_2,q_2)$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $p_1=p_2$ и либо $q_1q_2\equiv\pm1 \mod p$, либо $q_1\equiv\pm q_2 \mod p$.*

Доказательство. В обратную сторону утверждение очевидно. Докажем прямое утверждение. Из изоморфности фундаментальных групп $\pi_1(L(p_1,q_1))$ и $\pi_1(L(p_2,q_2))$ следует, что $p_1=p_2=p$. Рассмотрим мономорфизм h группы

$\pi_1(L(p,q_1))$ в группу комплексных корней из единицы, продолжим h до гомоморфизма колец $h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(L(p,q))] \to \mathbb{C}$. Если $L(p,q_1)$ гомеоморфно $L(p,q_2)$, то гомеоморфизм индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, который переводит образующую $\pi_1(L(p_1,q_1))$ в некоторую степень δ взаимнопростую с p. Из теоремы 3 получаем кручения для гомоморфизма h, из условия теоремы следует, что

$$(\eta^{\delta_2\delta}-1)^{-1}(\eta^{\delta}-1)^{-1} = (\eta^{\delta_1}-1)^{-1}(\eta-1)^{-1}, \quad \eta = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Из теоремы 4 получаем требуемое утверждение.

§ 3. Кручение простых молекул

Пользуясь результатами полученными выше и теоремами интегрируемых гамильтоновых систем, нетрудно вычислить кручение трехмерных многообразий, которые реализуются простыми молекулами. Мы будем рассматривать случай когда валентность седлового атома строго больше 2. В качестве разбиения многообразия $\mathbf{Q}^3$ соответствующего простой молекуле в обозначениях леммы 2.2 и подраздела 1.4, нужно взять

$$X_{m+1} = V, \quad X_k = A_k, \quad k = 1,\dots m$$

$$Y_k = V \cap A_k = T^2.$$

Нужно лишь вычислить кручения атомов входящих в молекулу, кручение тора мы знаем из предложения 3. Случай атома A также сводится к предложению 3, так как атом A это полноторие, а полноторие имеет простой гомотопический тип окружности. Согласно разделу 1.2 выберем на граничном торе атома A_i допустимую систему координат $(\lambda_{A_k}, \mu_{Ak})$, тогда μ_{A_k} является образующей фундаментальной группы атома A_i, следовательно

$$\tau_h(A_k) = (h(\mu_{A_k})-1)^{-1},$$

для такого гомоморфизма колец в поле

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(A_i)] \to \mathbb{F},$$

что $h(\mu_{A_i}) \neq 1$. Кручение плоского седлового атома без звездочек дает следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть V – плоский седловой атом без звездочек*

$$\pi_1(V) = \left\langle\, \lambda_V, \mu_1, \dots, \mu_m \;\middle|\; [\lambda_V, \mu_k], \mu_1 \dots \mu_m, \quad k = 1,\dots,m \,\right\rangle.$$

Для произвольного гомоморфизма h колец в поле

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(V)] \to \mathbb{F},$$

кручение $\tau_h(V) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $h(\lambda_V) \neq 1$. Если $h(\lambda_V) \neq 1$, то

$$\tau^h(V) = (h(\lambda_V)-1)^{m-2} \in \mathbb{F}^*/\pm h(\pi_1(V)).$$

Доказательство. Заметим, что атом V просто гомотопически эквивалентен декартовому произведению букета $m-1$ окружностей и окружности. Рассмотрим случай, когда $m=3$, общий случай получается абсолютно аналогично.

Декартово произведение $X=(S^1_{\mu_1}\vee S^1_{\mu_2})\times S^1_{\lambda_V}$ (индексы у окружностей означают то, что они соответствуют образующим в фундаментальной группе атома) имеет клеточное разбиение состоящие из одной нульмерной клетки e^0, трех одномерных клеток $e^1_{\lambda_V}, e^1_{\mu_1}, e^1_{\mu_2}$ и двух двумерных клеток e^2_1, e^2_2. Разобьем комплекс X на два пересекающихся подкомплекса

$$X=X_1\cup X_2,\quad X_1=e^0\cup e^1_{\mu_1}\cup e^1_{\lambda_V}\cup e^2_1,\quad X_2=e^0\cup e^1_{\mu_2}\cup e^1_{\lambda_V}\cup e^2_2.$$

Подкомплексы X_1, X_2 являются торами, которые пересекаются по окружности $S^1_{\lambda_V}$. Комплекс $C(\tilde X)$ получается факторизацией комплекса $C(\tilde X_1)\oplus C(\tilde X_2)$ по подкомплексу $C(\tilde S^1_{\lambda_V})$. Рассмотрим комплекс $\mathbb{F}\otimes_h C(\tilde X)$, граничные операторы в нем имеют следующий вид

$$\partial_1=\begin{pmatrix} h(\lambda_V)-1 & 0\\ 0 & h(\lambda_V)-1\\ h(\mu_1)-1 & h(\mu_2)-1\end{pmatrix},\quad \partial_0=\begin{pmatrix} h(\mu_1)-1 & h(\mu_2)-1 & 1-h(\lambda_V)\end{pmatrix}.$$

Если $h(\lambda_V)\neq 1$, то гомоморфизм ∂_1 является мономорфизмом, и его образ является двумерным линейным подпространством в $\mathbb{F}\otimes_h C_1(\tilde X)$. Ядро оператора ∂_0 также является двумерным подпространством в $\mathbb{F}\otimes_h C_1(\tilde X)$. Следовательно, комплекс ацикличен. В случае когда $h(\lambda_V)=1$ размерность ядра ∂_1 не меньше единицы, поэтому комплекс не является ациклическим. Если $h(\lambda_V)\neq 1$, то комплексы $C(\tilde X_1)\oplus C(\tilde X_2)$, $C(\tilde S^1_{\lambda_V})$ ацикличны, и применяя лемму 2.2 получаем требуемое утверждение.

Теперь мы готовы доказать основную теорему.

Теорема 6 (Кручение простых молекул). *Пусть гомоморфизм h колец в поле*

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3]\to\mathbb{F}$$

такой, что $h(\lambda_V)^{\gamma_k}h(\mu_k)^{\delta_k}\neq 1, k=1,\ldots,m$. Тогда кручение многообразия $\mathbf{Q}^3$ не равно 0 в том и только том случае, когда $h(\lambda_V)\neq 1$. Если $h(\lambda_V)\neq 1$, то

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3)=(h(\lambda_V)-1)^{m-2}\prod_{k=1}^m(h(\lambda_V^{\gamma_k}\mu_k^{\delta_k})-1)^{-1}\in\mathbb{F}^*/\pm h(\pi_1(\mathbf{Q}^3)).$$

Доказательство. Если гомоморфизм h такой, что

$$h(\lambda_V)^{\gamma_k}h(\mu_k)^{\delta_k}\neq 1,\quad h(\lambda_V)\neq 1,$$

то кручение многообразия $\mathbf{Q}^3$ получается применением леммы 2.2 и леммы 3.1. Осталось показать, что если $h(\lambda_V)=1$, то $H^h_*(\mathbf{Q}^3)\neq 0$. Рассмотрим короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0\to\bigoplus_k C^{h\circ\tilde i_k}(Y_k)\to\bigoplus_k C^{h\circ\tilde j_k}(X_k)\to C^h(\mathbf{Q}^3)\to 0,$$

$$\tilde{i}_k\colon \mathbb{Z}[\pi_1(Y_k)] \to \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3)], \quad \tilde{j}_k\colon \mathbb{Z}[\pi_1(X_k)] \to \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3)]$$

где $\tilde{i}_k, \tilde{j}_k$ – гомоморфизмы индуцированные вложением. Введем следующие обозначения

$$C' = \bigoplus_k C^{h\circ\tilde{j}_k}(X_k), \quad C'' = \bigoplus_k C^{h\circ\tilde{i}_k}(Y_k), \quad C = C^h(\mathbf{Q}^3).$$

Из условия теоремы следует, что комплекс C'' ацикличен. Если $h(\lambda_V) = 1$, то из леммы 3.1 следует, что комплекс C' не ацикличен. Предположим, что комплекс C ацикличен. Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары (C', C'')

$$\dots \to H_k(C'') \to H_k(C') \to H_k(C', C'') \to H_{k-1}(C'') \to \dots,$$

гомологии пары $H_k(C', C'')$ изоморфны $H_k(C)$. Но тогда из ацикличности комплексов C'' и C следует ацикличность комплекса C', получаем противоречие. Следовательно комплекс C не ацикличен.

Данная теорема имеет простую механическую интерпретацию. Грубо говоря, кручение $\tau_h(\mathbf{Q}^3)$ выражается через кручение $\tau_h(V)$ особого слоя дополнительного интеграла системы и кручения $\tau_h(S_1^1), \dots, \tau_h(S_m^1)$ устойчивых периодических траекторий системы. Устойчивая периодическая траектория S_k^1 гомотопна элементу $\lambda_V^{\gamma_k}\mu_k^{\delta_k} \in \pi_1(\mathbf{Q}^3)$. Седловые окружности, которые лежат на особом слое гомотопны элементу λ_V. Гомотопический класс седловых окружностей будем обозначать S_V. В итоге теорему 6 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 7. *Пусть на многообразии $\mathbf{Q}^3$ существует вполне интегрируемая гамильтонова система, слоение Лиувилля которой описывается простой молекулой. Пусть гомоморфизм колец h в поле*

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3] \to \mathbb{F},$$

такой, что $h(S_i^1) \neq 1$, для $i = 1, \dots, m$. Тогда кручение $\tau_h(\mathbf{Q}^3)$ не равно нулю тогда и только тогда, когда $h(S_V) \neq 1$. В случае когда $h(S_V) \neq 1$ имеет место соотношение

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3) = \tau_h^{2-m}(S_V)\tau_h(S_1^1)\dots\tau_h(S_m^1).$$

Следующие подразделы являются следствиями теоремы 6.

3.1. Случай нулевых r-меток. Пусть все r-метки простой молекулы равны нулю, а n-метка не равна $0, 1, -1$. Без ограничения общности матрицы склейки в этом случае имеют следующий вид

$$C_m = \begin{pmatrix} n & \varepsilon_m \\ \varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_i \\ \varepsilon_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Фундаментальная группа многообразия $\mathbf{Q}^3$ является циклической группой порядка n

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \langle\ \lambda_V \mid \lambda_V^n\ \rangle,$$

поэтому многообразие $\mathbf{Q}^3$ гомеоморфно некоторой линзе $L(n, q)$(см. [16]).

Следствие 1. *Многообразие $\mathbf{Q}^3$ гомеоморфно линзе $L(n,1)$.*

Доказательство. Из теоремы 2.4 мы знаем, что фундаментальная группа и кручение являются полным набором инвариантов для линзовых пространств, поэтому для доказательства нам осталось вычислить кручение.

Рассмотрим вложение h группы $\pi_1(\mathbf{Q}^3)$ в группу комплексных корней из 1 степени n

$$h\colon \pi_1(\mathbf{Q}^3) \to \mathbb{C}^*, \quad \lambda_V \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Продолжим h по линейности до гомоморфизма колец

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3)] \to \mathbb{C},$$

будем обозначать его тем же символом. Из теоремы 6 получаем кручение многообразия $\mathbf{Q}^3$ для гомоморфизма h

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3) = \frac{1}{(\eta-1)^2} \in \mathbb{C}^*/\pm h(\pi_1(\mathbf{Q}^3)), \quad \eta = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Из чего мы заключаем, что $\mathbf{Q}^3$ гомеоморфно $L(n,1)$.

3.2. Случай сферических многообразий Зейферта.

Определение 11. Сферические многообразия Зейферта – это граф-многообразия, которые реализуются простыми молекулами с седловым атомом валентности 3, со следующим ограничением на метки

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} > 1,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – знаменатели r-меток.

Все тройки чисел, которые удовлетворяют этому условию есть

$$(2,3,3), \quad (2,3,4), \quad (2,3,5), \quad (2,2,\beta), \beta \geqslant 2.$$

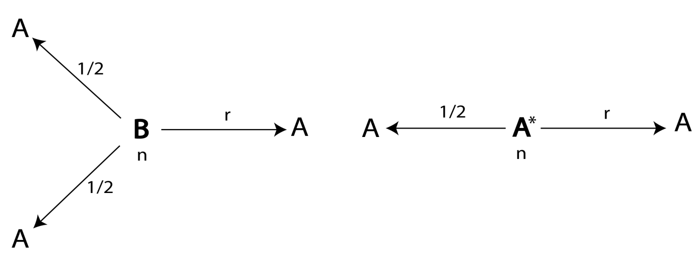

Рис. 6. Реализации сферических многообразий Зейферта меченными молекулами.

Мы рассмотрим параметрическое семейство многообразий соответствующих тройке $(2,2,\beta)$(см. рис. 6). Без ограничения общности можем считать, что матрицы склейки следующие

$$C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная группа этих многообразий имеет копредставление

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \left\langle\ \lambda_V, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ \middle|\ [\lambda_V, \mu_i], \lambda_V^{\alpha}\mu_3^{\beta}, \lambda_V\mu_2^2, \lambda_V\mu_1^2, \mu_1\mu_2\mu_3, \quad i=1,2,3\ \right\rangle.$$

Так как мы рассматриваем гомоморфизмы группового кольца фундаментальной группы в поле, а любой такой гомоморфизм пропускается через проекцию в групповое кольцо первых гомологий, то нам важно лишь устройство $H_1(\mathbf{Q}^3, \mathbb{Z})$. Не трудно убедиться, что

$$H_1(\mathbf{Q}^3, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2|\alpha+\beta|}, & \text{если } \beta \text{ четное} \\ \mathbb{Z}_{4|\alpha+\beta|}, & \text{если } \beta \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Когда β четное, то образующими $H_1(\mathbf{Q}^3, \mathbb{Z})$ являются $\mu_1\mu_2^{-1}$, μ_1, если β нечетное, то μ_1.

Пусть β четное. Для следующего гомоморфизма колец

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3)] \to \mathbb{C},$$

$$h(\mu_1\mu_2^{-1}) = -1, \quad h(\mu_1) = e^{\frac{i\pi}{|\alpha+\beta|}},$$

из теоремы 6 получаем

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3) = \frac{1}{(\eta^{2(\gamma+\delta)}+1)} \in \mathbb{C}^*/\pm h(\pi_1(\mathbf{Q}^3)), \quad \eta = e^{\frac{i\pi}{|\alpha+\beta|}}.$$

Когда β нечетное, то группа первых гомологий мономорфно вкладывается в группу комплексных корней из единицы степени $4|\alpha+\beta|$

$$h\colon \pi_1(\mathbf{Q}^3) \to \mathbb{C}^*, \quad h(\mu_1) = e^{\frac{i\pi}{2|\alpha+\beta|}}.$$

Из теоремы 6 получаем

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3) = \frac{1}{(\eta^{2(\gamma+\delta)}+1)} \in \mathbb{C}^*/\pm h(\pi_1(\mathbf{Q}^3)), \quad \eta = e^{\frac{i\pi}{2|\alpha+\beta|}}.$$

Следствие 2. *Для сферических многообразий Зейферта кручение $\tau_h(\mathbf{Q}^3)$ и первая группа гомологий $H_1(\mathbf{Q}^3, \mathbb{Z})$ не являются полным набором инвариантов.*

Доказательство. Рассмотрим такое сферическое многообразие Зейферта, что

$$C_3 = \begin{pmatrix} \alpha - 2k\alpha_1 & \beta + 2k\alpha_1 \\ \gamma - 2k\gamma_1 & \delta + 2k\gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \alpha+\beta, \gamma_1 = \gamma+\delta,$$

где k – произвольное натуральное число. Такая серия многообразий, как видно, не различается кручением и группой $H_1(\mathbf{Q}^3, \mathbb{Z})$.

На самом деле, сферические зейфертовы многообразия классифицируются фундаментальной группой(см. [4]).

3.3. Общий случай систем на линзах. Рассмотрим такие простые молекулы, что только две r-метки не равны 0. Без ограничения общности можно считать, что матрицы склейки следующие

$$C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_i \\ \varepsilon_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 3, \dots, m.$$

Фундаментальная группа таких многообразий имеет следующее копредставление

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \left\langle \lambda_V, \mu_2 \;\middle|\; [\lambda_V, \mu_1], \lambda_V^{\alpha_1}\mu_2^{-\beta_1}, \lambda_V^{\alpha_2}\mu_2^{\beta_2} \right\rangle .$$

Следствие 3. *Многообразие $\mathbf{Q}^3$ гомеоморфно линзе $L(p, q)$, где*

$$p = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \quad q = \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\delta_2.$$

Доказательство. Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{Q}^3)$ изоморфна коядру гомоморфизма f заданного матрицей A

$$f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Так как НОД$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = 1$, то матрица A элементарными целочисленными преобразованиями строк и столбцов приводится к следующему виду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}.$$

То есть фундаментальная группа $\pi_1(\mathbf{Q}^3)$ изоморфна циклической группе порядка $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$. Образующую t выберем так, что

$$\lambda_V = t^{\beta_1}, \mu_2 = t^{\alpha_1}.$$

Рассмотрим вложение h группы $\pi_1(\mathbf{Q}^3)$ в группу комплексных корней из 1 степени $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$

$$h\colon \pi_1(\mathbf{Q}^3) \to \mathbb{C}^*, \quad t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}}.$$

Продолжим h по линейности до гомоморфизма колец

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3)] \to \mathbb{C},$$

Из теоремы 6 получаем

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3) = \frac{1}{(\eta - 1)(\eta^{\alpha_1\gamma_2+\beta_1\delta_2} - 1)} \in \mathbb{C}^*/\pm h(\pi_1(\mathbf{Q}^3)), \quad \eta = e^{\frac{2i\pi}{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}}.$$

Так как фундаментальная группа является конченой и циклической, то многообразие $\mathbf{Q}^3$ является некоторой линзой $L(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, q)$, из кручения мы заключаем, что

$$\mathbf{Q}^3 \cong L(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\delta_2) \cong L(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\delta_1).$$

§ 4. Примеры интегрируемых систем с простыми молекулами

Многие классические интегрируемые случаи динамики тяжелого твердого тела разобраны в [8]. В случаях Эйлера, Клебша, Жуковского встречаются слоения описываемые простыми молекулами. Во всех этих случаях многообразие $\mathbf{Q}^3$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

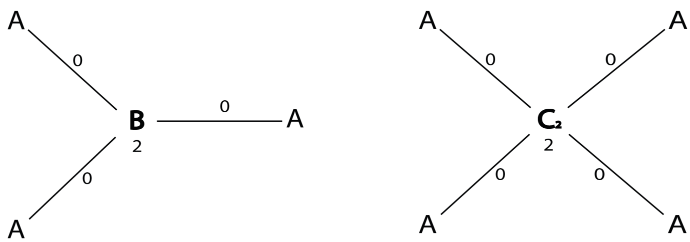

Рис. 7. Слева случай Жуковского, справа случаи Эйлера и Клебша.

Во всех изученных классических интегрируемых случаях динамики тяжелого твердого тела изоэнерегетическая поверхность оказалась гомеомрфной либо $\mathbb{R}P^3$, либо S^3, либо $S^1 \times S^2$, либо их связным суммам. Более богатыми сисетмами в этом смысле оказались обобщенные биллиарды определенные В. В. Фокичевой в [18]. Была найдена бильярдная область, которая задает систему с изоэнергетическими многообразиями гомеоморфными линзе $L(4, 1)$. Также найдена область изоэнергетическими многообразиями гомеоморфными сферическому многообразию Зейферта. Данные молекулы не являются простыми,

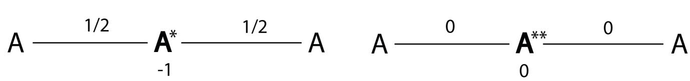

Рис. 8. Молекулы найденные В. В. Фокичевой.

однако существует алгоритм, который позволяет заменить слоение Лиувилля, не меняя многообразия $\mathbf{Q}^3$, таким образом, что седловые атомы будут являться тривиальными расслоениями Зейферта.

Теорема 8 (П. Топалов [19]). *Пусть на $\mathbf{Q}^3$ задано слоение Лиувилля, причем молекула W_1 данного слоения имеет седловой атом V с m звездочками. Тогда на $\mathbf{Q}^3$ существует слоение Лиувилля, молекула W_2 которого получается из молекулы W_1 следующим образом. Атом V заменяется на атом V', валентность атома V' равна сумме валентности атома V и m, род атома V' равен роду атома V. Новые вершины являются атомами A, на новых ребрах стоят метки $r = 1/2$, $\varepsilon = 1$.*

Используя теорему 8 молекулы на рисунке 8 приводятся к молекулам на рисунке 9 соответственно.

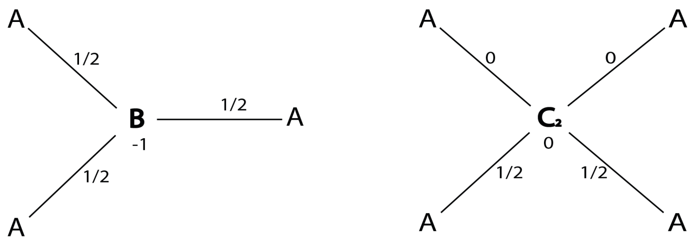

Рис. 9. Редукция молекул с помощью алгоритма П. Топалова.

Полученные молекулы являются простыми. Из следствия 3 получаем, что на рисунке 9 молекуле справа соответствует линза $L(4,1)$, В. В. Фокичева установила этот факт независимо из других соображений.

Список литературы

[1] F. Waldhausen, "Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I", *Inventiones Mathematicae*, 3(4) 308-333, 1967.

[2] F. Waldhausen, "Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II", *Inventiones Mathematicae*, 4(2) 87-117, 1967.

[3] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, "Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий", *УМН*, **43**:1(259) (1988), 5–22

[4] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, Наука, М., 1998.

[5] А. Т. Фоменко, "Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем", *Доклады АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075.

[6] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, "О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике", *Доклады АН СССР*, **294**:2 (1987), 283–287.

[7] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1.*, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.

[8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 2.*, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.

[9] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, "New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems", *Topology and its Applications*, **159** (2012), 1964–1975.

[10] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, "Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях", *Доклады Академии наук*, **446**:6 (2012), 615-617.

[11] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, "Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems", *Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications*, 2014, 3–21.

[12] A. T. Fomenko, S. S. Nikolaenko, "The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid", *Journal of Geometry and Physics*, **87** (2015), 115–133.

[13] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко, "Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела", *Доклады РАН, серия: математика*, **465**:2 (2015), 1–4.

[14] В. Тураев, *Введение в комбинаторные кручения*, МЦНМО, М., 2004.

[15] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory*, Springer New York, 1973.

[16] Mark Jankins, Walter D. Neumann, *Lectures on Seifert manifolds*, Brandeis University, 1983.

[17] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, "Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности", *УМН*, **45**:2(272) (1990), 49–77

[18] В. В. Фокичева, "Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик", *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 127–176

[19] П. И. Топалов, "Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела", *Матем. сб.*, **187**:3 (1996), 143–160

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: solodskihkirill@gmail.com