

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

**Механико-математический факультет**  
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Голикова Екатерина Валериевна

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Геометрия особенностей топологических параболических  
бильярдов.

Geometry of singularities of topological parabolic billiards.

Научные руководители:  
академик РАН А.Т.Фоменко,  
к.ф.-м.н. В.В.Ведюшкина

Москва, 2017 г.

# 1 Введение

## 1.1 История вопроса и постановка задачи

Рассмотрим стандартную бильiardную задачу в некоторой области. Дана замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая на плоскости (при этом все углы в точках излома равны  $\frac{\pi}{2}$ ). Материальная точка движется внутри компактной области  $\Omega$ , ограниченной этой кривой, и отражается на границе по естественному закону (угол падения равен углу отражения), а в точках излома границы движение продолжается по непрерывности. Эта система описывается на кокасательном расслоении к области  $\Omega$  (точка этого расслоения задаётся как координаты этой материальной точки в области и касательный вектор в точке к области) и обладает естественным интегралом – модулем вектора скорости. В некоторых случаях данная система имеет второй интеграл. Одним из таких случаев является случай бильiardной задачи в области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. В работах Фокичевой В.В. (Ведюшкиной) ”Топологическая классификация бильiardов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик” (см.[1], [2]) получена топологическая (лиувиллева) классификация интегрируемых бильiardов в плоских и локально-плоских компактных областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, с помощью методов теории Фоменко-Цишанга об инвариантах интегрируемых систем. Также в ”Классификации бильiardных движений в областях, ограниченных софокусными параболой” [3] замечено, что если перейти от софокусного семейства эллипсов и гипербол к софокусному семейству парабол, то инварианты лиувиллевой эквивалентности – меченые молекулы – сохраняются при условии, что область остается компактной. Была поставлена задача провести классификацию обобщённых бильiardных областей, ограниченных софокусными параболой аналогично работам [1], [2], пользуясь методами и средствами, придуманными Ведюшкиной В.В. Автор выражает благодарность А.Т. Фоменко за постановку задачи, а так же В.В.Ведюшкиной за ценные советы и замечания.

## 1.2 Структура работы

В первой главе даётся краткая история задачи, во второй главе выписаны основные понятия и утверждения, необходимые для понимания материала. Главы 3 и 4 - это классическая постановка бильiardной задачи и полученные ранее результаты для элементарных областей. Шестая глава содержит лиувиллеву классификацию для плоского случая. Основным результатом работы помещён в 5 главе - это классификация обобщённых бильiardных столов, 7 глава - вычисление инвариантов лиувиллевой эквивалентности – меченых молекулы Фоменко-Цишанга для бильiardа в каждой из описанных областей.

## 2 Основные понятия и утверждения

Рассмотрим симплектическое многообразие  $(M^4, \omega)$ , где  $\omega$  - симплектическая форма, т.е. невырожденная, замкнутая кососимметрическая форма на касательных векторах к  $M^4$ :  $\omega(a, b) := \omega_{ij}a^ib^j$ . Если нам дана функция  $H$  на данном многообразии, то можно определить векторное поле  $sgradH$ , ей соответствующее, по правилу  $(sgradH)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$ . Если динамическая система допускает подобное описание, то она называется гамильтоновой, а функция  $H$  в этом случае называется гамильтонианом.

Предположим, что на  $M^4$  существует функционально независимая с  $H$  функция  $f$  такая, что скобка Пуассона  $\{f, H\} := \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} = 0$ . В этом случае говорят, что функции  $f$  и  $H$  находят в инволюции. Функция  $f$  тоже является интегралом системы, а динамическую систему называют интегрируемой по Лиувиллю.

Так как  $f$  и  $H$  функционально независимы, то за исключением некоторого количества особых значений интеграла  $f$  градиенты  $f$  и  $H$  линейно независимы. Если при этом гамильтоновы потоки являются полными, то к совместной поверхности уровня функций  $f$  и  $H$  можно применить теорему Лиувилля, согласно которой эта совместная поверхность уровня, в том случае когда она компактна и связна, гомеоморфна тору, вблизи которого можно найти координаты, называемые действие-угол, такие, что в этих координатах гамильтоново векторное поле выпрямляется. Полученное расслоение  $Q^3$  (а значит и  $M^4$ ) называется слоением Лиувилля. Почти все торы при этом являются замыканием решений системы. Остальные поверхности уровня функций  $f$  и  $H$  (то есть те, где  $grad f$  и  $grad H$  линейно зависимы) называются особыми. Для них также существует эффективный метод описания. Ограничим нашу систему с многообразия  $M^4$  на изоэнергетическую поверхность  $Q_H^3$ . Далее покажем, как можно описать расслоение  $Q_H^3$  на торы и особые слои. Функция  $f$  задаёт отображение  $f : Q_H^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $f = c$  – особое значение интеграла  $f$ . Тогда прообраз окрестности  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  в  $Q_H^3$  – это трёхмерное многообразие с краем, называемое 3-атомом.

**Определение 1.** Пусть  $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$  и  $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$  – две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях  $M_1^4$  и  $M_2^4$ , обладающих, соответственно, интегралами  $f_1, g_1$  и  $f_2, g_2$ . Рассмотрим изоэнергетические поверхности  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ . Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм  $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ , который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  и ориентацию всех критических окружностей.

В силу теоремы Лиувилля многообразии  $Q^3$  расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам). Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на  $Q^3$ . Эта база является одномерным графом  $W$ , называемым графом Кронрода-Риба функции  $f_2|_{Q^3}$ . Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего любой вершине этого графа, описывается комбинаторным объектом, называемым *атомом*. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется *инвариантом (грубой молекулой) Фоменко*. В вершинах  $W$  расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. Однако этот граф  $W$  не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как он не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из полученных матриц перехода – *матриц склейки* – вычисляются числовые метки  $r$ ,  $\epsilon$  и  $n$ , которые, будучи составленными на грубой молекуле  $W$ , полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послойной эквивалентности и уже не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется *меченой молекулой  $W^*$* , т.е. инвариантом Фоменко-Цишанга. (Подробнее см. [4])

### Теорема 1. (Фоменко, Цишанг)

*Две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях*

$Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$  ливиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

### 3 Классическая постановка локально-плоской бильярдной задачи

Пусть область  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причём в точках излома этой ломаной углы равны  $\frac{\pi}{2}$ . Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение материальной точки внутри области  $\Omega$  с естественным отражением на границе  $P = \partial\Omega$ . Эту систему назовём бильярдом в области. Будем считать, что попав в вершину угла  $\frac{\pi}{2}$  на границе, материальная точка отразится назад по той же траектории, не теряя скорости. Тогда фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) | x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim,$$

где отношение эквивалентности задаётся как

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \iff x_1 = x_2 \in P, |v_1| = |v_2|, v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь  $T_xP$  обозначена касательная плоскость к области  $\Omega$  в точке  $x$ , а через  $|v|$  – евклидова длина вектора  $v$ . Система бильярда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Фазовое многообразие  $M^4$  является кусочно-гладким и распадется на гладкие куски (объединение которых мы обозначим  $\widetilde{M}^4$ ), склеенные по точкам, проектирующимся (в случае бильярдной системы) в одни и те же точки границы области, где определен бильярд. На многообразии введем симплектическую структуру только в  $\widetilde{M}^4$ . Будем предполагать, что гладкие симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, то есть их пределы “справа и слева” совпадают.

#### 3.1 Параболический бильярд

**Определение 2.** Зафиксируем систему координат  $OXY$ . Уравнение

$$y^2 + 4px - 4p^2 = 0 \tag{1}$$

описывают семейство софокусных парабол ( $p$  – параметр параболы). Фокус парабол находится в начале координат, а директрисами являются вертикальные прямые, проходящие через точки вида  $(2p, 0)$ . Включим в это семейство прямую  $y = 0$ , соответствующую параметру  $p = 0$ . Будем называть эту прямую *вырожденной параболой*.

**Лемма 3.1. (Ведюшкина)**[3]

Пусть точка  $(x, y)$  принадлежит параболической бильярдной области  $\Omega$ , а именно, области на плоскости, ограниченной дугами софокусных парабол семейства (1), такой, что ее граница не содержит углов  $\frac{3\pi}{2}$ . Рассмотрим траекторию бильярда в области  $\Omega$ , проходящую через точку  $(x_0, y_0)$  в направлении вектора скорости  $(v_1, v_2)$ . Тогда для любой точки  $(x, y, w_1, w_2)$  данной бильярдной траектории выполняется следующее свойство: прямые, проходящие через точки  $(x, y)$  в направлении векторов скорости  $(w_1, w_2)$  касаются (одной и той же) параболы с параметром  $p = \frac{v_2(v_2x - v_1y)}{v_1^2 + v_2^2}$

Относительно стандартной симплектической структуры на плоскости, функции  $|v|$  - модуль вектора скорости и  $p$  - параметр семейства парабол коммутируют. Так как они сохраняются вдоль траекторий бильярда, значит они коммутируют и на границе области. Таким образом, система обладает двумя независимыми интегралами:

- (1)  $|v|$  - модуль вектора скорости,
- (2)  $P$  - параметр семейства парабол.

## 4 Элементарные параболические бильiardные области

**Определение 3.** *Элементарной параболической бильiardной областью  $\Omega$  назовём двумерное связное, компактное, плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, которое имеет изометричное вложение в плоскость, причём граница его образа при этом вложении состоит из сегментов софокусных парабол семейства (1), углы между которыми не превышают  $\pi$ .*

**Определение 4.** Элементарная параболическая бильiardная область  $\Omega$ , ограниченная софокусными параболой семейства (1), называется *эквивалентной* области  $\Omega'$  если она может быть продеформирована в  $\Omega'$  с помощью композиции двух преобразований:

- путем непрерывного изменения границы в классе парабол семейства (1) так, чтобы парабола, на которой лежит изменяемый сегмент была невырожденной во время деформации (т.е. знак параметра  $p$  этой параболы сохранялся);
- симметрией относительно оси семейства (1).

**Определение 5.** Параболическая бильiardная область  $\Omega$ , ограниченная софокусными параболой семейства (1) называется *особой*, если одна из парабол, формирующих ее границу, является вырожденной.

### 4.1 Классификация элементарных параболических бильiardных областей

**Утверждение 1. (Ведюшкина)[1][2][3]** *Существует ровно три класса эквивалентности параболических неособых областей  $\Omega$ , ограниченных дугами софокусных парабол: область  $\Omega_1$ , ограниченная двумя параболой, параметры которых имеют разные знаки, область  $\Omega_2$ , ограниченная тремя параболой, и область  $\Omega_3$ , ограниченная четырьмя параболой с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и двумя отрицательными, не имеющая общих точек с горизонтальной осью  $Ox$ .*

*Существует ровно два класса эквивалентности параболических особых областей: область  $\omega_1$ , ограниченная двумя невырожденными и одной вырожденной параболой, и область  $\omega_2$ , ограниченная тремя невырожденными и одной вырожденной параболой. (Рис.1)*

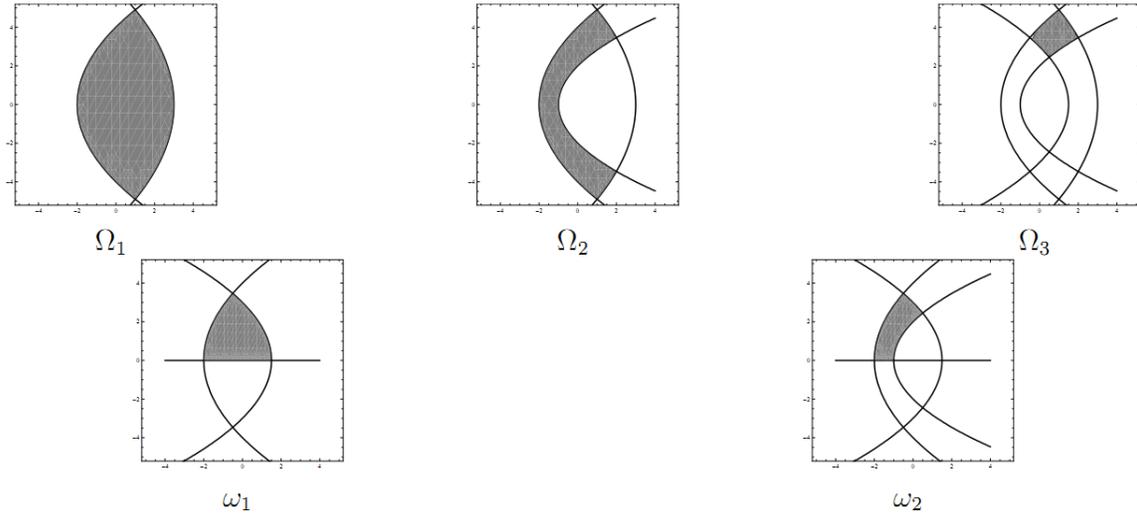


Рис. 1: Параболические билиардные области, ограниченные семейством софокусных парабол.

## 5 Обобщённые билиардные столы, ограниченные дугами софокусных парабол

Для краткости далее будем употреблять не только термин ”обобщённые билиардные столы”, но и просто ”обобщённые билиарды”.

Пусть дан набор компактных (локально-плоских) билиардных областей  $\Omega_i$ , ограниченных дугами софокусных парабол одного семейства. Введём понятие обобщенного билиардного стола. Пусть область  $\Delta$  состоит из нескольких элементарных областей  $\Omega_i$ , склеенных по ряду правил, которые будут уточнены и формализованы ниже. В частности, любые элементарные области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  склеиваются только по ”общим” сегментам границы, причем мы запрещаем все склейки, приводящие либо к углам больше чем  $\pi$  на границе полученной обобщенной области, либо к углам больше чем  $2\pi$  во внутренних точках этой области. Опишем фазовое пространство  $M^4$  обобщенного билиарда. Обозначим  $P_i$  объединение открытых граничных сегментов области  $\Omega_i$ , не являющихся рёбрами склейки. Определим

$$M_{\Omega_i}^4 := \{(x, v) | x \in \Omega_i, v \in T_x \Omega_i, |v| > 0\} / \sim,$$

где отношение эквивалентности задаётся как

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \iff x_1 = x_2 \in P_i, |v_1| = |v_2|, v_1 - v_2 \perp T_{x_1} P_i.$$

Здесь  $T_x P$  обозначена касательная плоскость к области  $\Omega$  в точке  $x$ , а через  $|v|$  – евклидова длина вектора  $v$ . Далее склеим многообразие  $M^4$  из  $M_i^4$ . Обозначим через  $Q_{ij}$  одно из ребер склейки (их может быть несколько) области, вдоль которого склеиваются элементарные

области  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$ . Тогда в случае, если  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  изометрично вложены в плоскость так, что образы склеиваемых сегментов при этих вложениях совпадают и склеиваются по тождественному отображению, а сами области лежат по одну и ту же сторону от этих сегментов, многообразия  $M_i^4$  и  $M_j^4$  склеиваются по следующему правилу:

$$(x_1, v_1) \in M_{\Omega_i}^4 \sim (x_2, v_2) \in M_{\Omega_j}^4 \iff x_1 = x_2 \in Q_{ij}, |v_1| = |v_2|, v_1 - v_2 \perp T_{x_1} Q_{ij}$$

Аналогично определяется правило склеивания  $M_{\Omega_i}^4$  и  $M_{\Omega_j}^4$  в общем случае. Это правило склейки иногда будем называть *обобщённым бильярдным законом*. Мы получаем, что траектория так определённой бильярдной системы “перескакивает” с одной элементарной области на другую в точках пересечения с рёбрами склейки и отражается по стандартному закону отражения при ударе о границу области  $\Delta$ .

Оговорим отдельно случай конической точки – точки, в которой склеиваются два угла различных элементарных областей  $\Omega$ , входящих в состав области  $\Delta$ . В этом случае закон отражения будет выглядеть так – материальная точка, проходя по элементарной области  $\Omega$ , попав в коническую точку, отразится по той же прямой и будет продолжать находиться на той же элементарной области. То есть, “перескакивание” материальной точки в конце ребра склейки возможно, только если локально в этой вершине излома определена склейка четырех элементарных областей. При таком определении фазового многообразия  $M^4$  сохраняется интегрируемость системы, а именно, сохраняется дополнительный интеграл  $P$  – параметр семейства парабол. Это связано с тем, что граница любой плоской (элементарной) области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщенной области  $\Delta$  и, в частности, все ребра склейки, лежат на дугах одного и того же семейства софокусных парабол при изометричных вложениях этих областей в плоскость.

## 5.1 Правила склейки

**Определение 6.** Пусть  $l_1$  и  $l_2$  – выпуклые параболические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных областей  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$ , причём образы этих сегментов при изометричных вложениях областей  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  в плоскость совпадают и содержатся в одном семействе софокусных парабол (1) с параметром  $p_{l_1} = p_{l_2}$ . Определим *склейку* областей  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  вдоль параболических сегментов  $l_1$  и  $l_2$  в случае областей без конических точек или параболических и (или) горизонтальных сегментов  $l_1$  и  $l_2$  в случае областей с коническими точками как склейку вдоль  $l_1$  и  $l_2$  по гомеоморфизму между  $l_1$  и  $l_2$ , согласованному с изометричным вложением областей  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  в плоскость. Границы рёбер склейки назовём *вершинами*.

**Замечание 1.** Элементарные области обладают плоской гладкой римановой метрикой, поэтому при их склейке полученное многообразие также локально плоское, но с кусочно-гладкой римановой метрикой.

**Определение 7.** *Обобщённой бильярдной областью  $\Delta$  без конических точек*, или просто *обобщённым бильярдом без конических точек* назовём двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённых выше склеек элементарных областей вдоль некоторых параболических сегментов. В этом случае в каждой *граничной вершине склейки* сходится одно ребро склейки и два свободных ребра или четыре ребра склейки и ни одного свободного ребра. Будем обозначать такие области  $\Delta_\alpha$ .

**Определение 8.** *Обобщённым бильярдом  $\Delta$  с коническими точками* назовём двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённых выше склеек элементарных областей вдоль некоторых параболических и горизонтальных сегментов при выполнении следующих условий:

- в каждой вершине склейки сходится либо одно ребро склейки и два свободных ребра (*граничные вершины склейки*), либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра – такие вершины назовём *коническими точками*, либо четыре ребра склейки и ни одного свободного ребра – *внутренние вершины склейки*;
- число конических точек больше нуля.

Будем обозначать такие области  $\Delta_\beta$ .

## 5.2 Отношение эквивалентности

**Определение 9.** *Обобщённая область  $\Delta$ , склеенная из элементарных областей  $\Omega_i$  вдоль рёбер склейки  $f_{ij}$  называется эквивалентной другой обобщённой области  $\Delta'$ , склеенной из  $\Omega'_i$  вдоль рёбер склейки  $f'_{ij}$ , если  $\Delta'$  можно получить из  $\Delta$  путём замены элементарных областей  $\Omega_i$  на им эквивалентные.*

## 5.3 Классификация обобщённых бильярдов без конических точек

### 5.3.1 Классификация обобщённых бильярдов без конических точек, склеенных из эквивалентных друг другу элементарных областей

**Утверждение 2.** *Любой обобщённый бильярд  $\Delta$ , склеенный из эквивалентных друг другу элементарных областей и не содержащий конических точек, эквивалентен области, принадлежащей одной из следующих серий:*

- (1) *конечная серия областей, состоящая из пяти "простейших удвоенных" областей вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , которые получаются в результате склейки вдоль одного выпуклого параболического сегмента двух экземпляров элементарной области  $\Omega$  эквивалентной  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \omega_1$  и  $\omega_2$ ;*
- (2) *обобщённый бильярд  $\Delta_\alpha(2'\omega_2)$  (склейка по сегменту, не граничащему с прямолинейным);*
- (3) *обобщённый бильярд вида  $\Delta_\alpha(2\Omega_1 + 2\Omega_1)$ , состоящий из склейки двух удвоенных областей  $\Omega_1$ ;*
- (4) *обобщённый бильярд вида  $\Delta_\alpha(2\omega_1 + 2\omega_1)$ , состоящий из склейки двух удвоенных областей  $\omega_1$ ;*
- (5) *обобщённый бильярд  $\Delta_\alpha(2\Omega_3 + 2\Omega_3)$ , состоящий из склейки двух удвоенных областей  $\Omega_3$ ;*
- (6) *бесконечная серия бильярдных областей, состоящая из "лент"  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)$ ,  $k > 1$ , полученная путём последовательной склейки  $k$  экземпляров областей  $\Omega_2$ ;*

(7) бесконечная серия бильярдных областей, состоящая из "колец"  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)^2$ ,  $k > 0$ , свободная граница – это объединение  $2k$  свободных параболических ребёр.

При этом обобщённые бильярдные столы, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии бильярдны с различными индексами.

**Замечание 2.** Для обобщённых бильярдных  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)$  и  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)^2$  правильнее писать  $\Delta_\alpha(k'\Omega_2)$  и  $\Delta_\alpha(k'\Omega_2)^2$ , но штрихи будем опускать там, где это не приводит к путанице.

Все теоремы о классификациях будем доказывать перебором всех возможных случаев аналогично тому, как это сделано в работе В.В. Фокичевой (Ведюшкиной) "Топологическая классификация бильярдных в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадратов".

*Доказательство.* Пусть  $\Delta$  – обобщённый бильярд, склеенный из элементарных областей  $\Omega$ , принадлежащих к одному классу эквивалентности.

Пусть  $\Omega$  не эквивалентна  $\Omega_2$  и  $\omega_2$ . У таких областей есть два пересекающихся выпуклых параболических сегмента, мы можем склеить только по одному (нет конических точек), при этом не важно по какому, так как получим эквивалентные области. Это "удвоенные области" из первой серии. У области  $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$  есть два свободных выпуклых ребра, можем склеить две такие области, получить (3). Аналогично для  $\Omega_3$  и  $\omega_1$ .

Рассмотрим теперь область  $\Omega = \Omega_2$ . Имеем две возможности: 1) склейка по левому выпуклому ребру, тогда получим "удвоенную область" из первой серии и 2) последовательные склейки вдоль непересекающихся выпуклых сегментов, что приводит к образованию либо длинной полосы - "ленты"  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)$ , либо кольца  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)^2$ , если можно склеить две свободные границы "ленты".

Пусть  $\Omega$  эквивалентна  $\omega_2$ . Тогда имеем два типа удвоенных областей: 1) склейка по левому выпуклому сегменту – область из первой серии и 2) склейка по правому сегменту (т.е. по тому, который не пересекает ось  $Ox$ ) – обобщённая бильярдная область (2).  $\square$

### 5.3.2 Классификация обобщённых бильярдных без конических точек, склеенных из элементарных областей, принадлежащих различным классам эквивалентности

**Утверждение 3.** Любой обобщённый бильярд  $\Delta$ , склеенный из элементарных областей, принадлежащих различным классам эквивалентности и не содержащий конических точек, эквивалентен области, принадлежащей одной из следующих серий:

- (1) конечная серия областей, состоящая из двух областей  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$  и  $\Delta_\alpha(\omega_1 + \omega_2)$ ;
- (2) бесконечная серия областей, состоящая из двух подсерий областей вида  $\Delta_\alpha(k\Omega_2 + \Omega_3)$  и  $\Delta_\alpha(k\Omega_2 + \omega_2)$ , где  $k > 0$ , которые получаются в результате склейки "ленты" и одной из областей  $\Omega_3$  и  $\omega_2$ ;
- (3) бесконечная серия областей, состоящая из трёх подсерий областей вида  $\Delta_\alpha(\omega_2 + k\Omega_2 + \Omega_3)$ , где  $k > 0$ ,  $\Delta_\alpha(\Omega_3 + k\Omega_2 + \Omega_3)$  и  $\Delta_\alpha(\omega_2 + k\Omega_2 + \omega_2)$ , где  $k > 0$ , которые получаются в результате склейки "ленты", возможно пустой, и двух областей  $\Omega_3$  и  $\omega_2$ ;

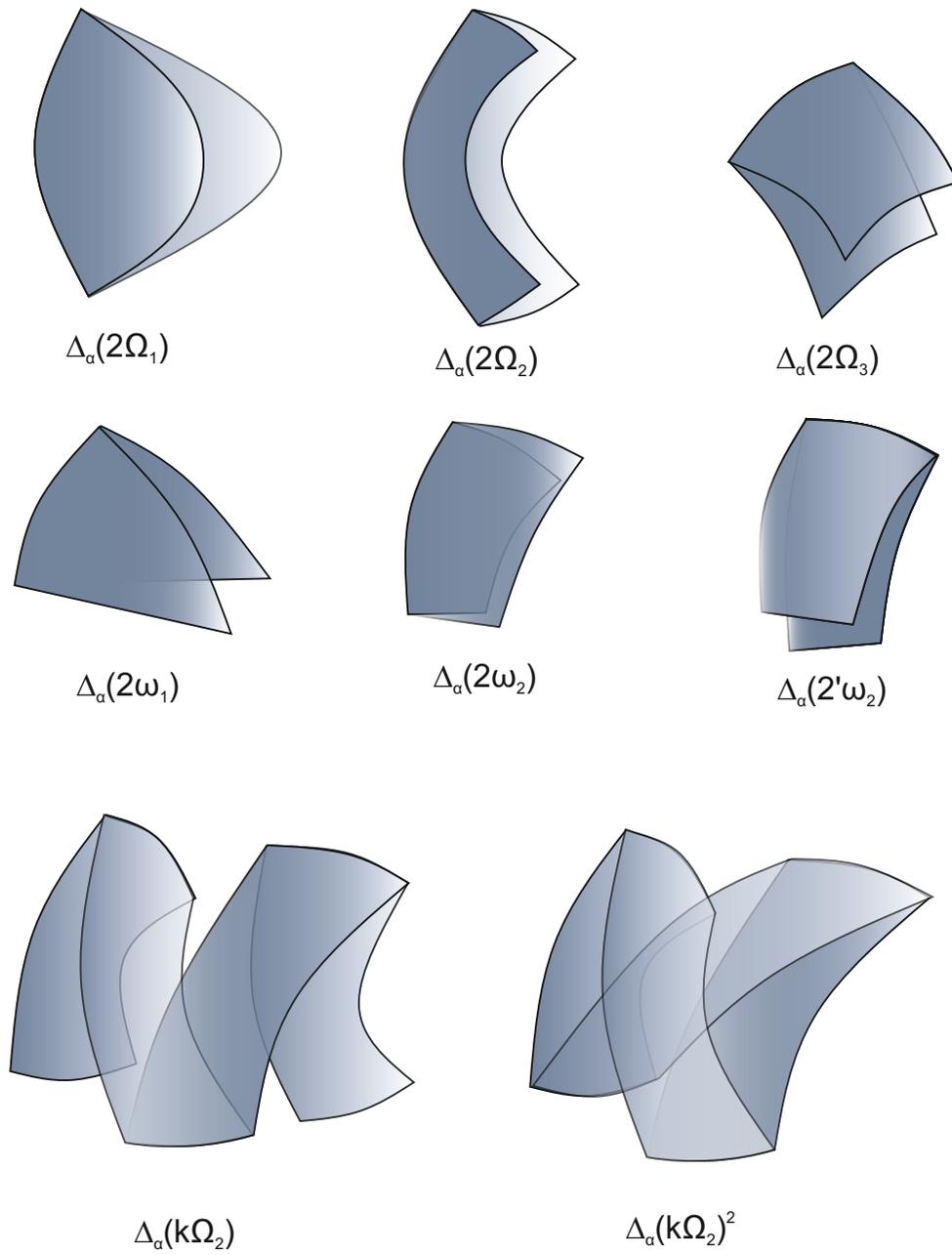


Рис. 2: Обобщенные билиарды без конических точек, склеенные из элементарных областей одинаковых типов.

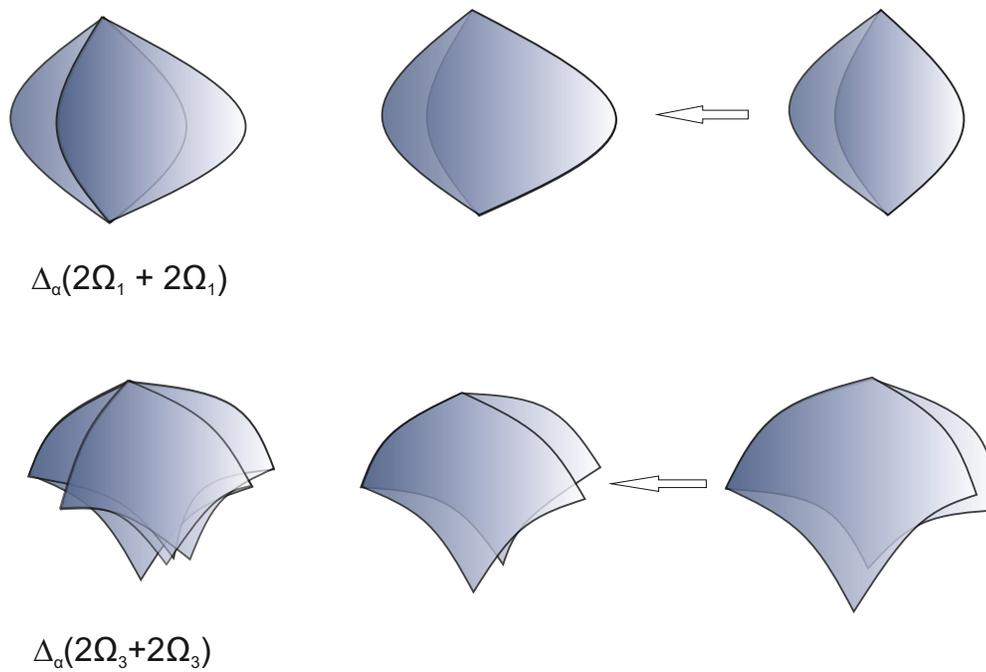
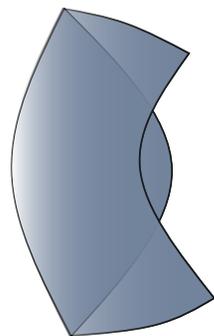
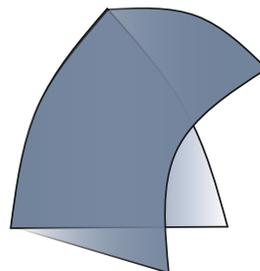


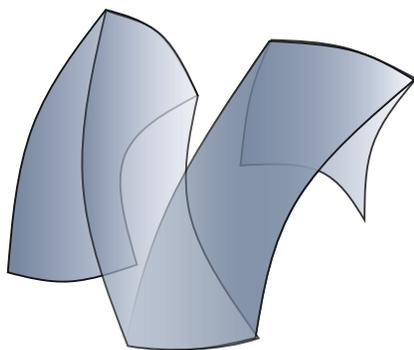
Рис. 3: Обобщенные бильярды без конических точек, склеенные из элементарных областей одинаковых типов. Часть 2



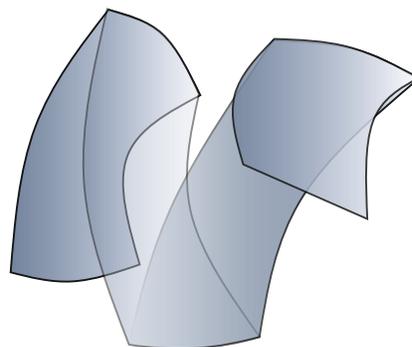
$$\Delta_a(\Omega_1 + \Omega_2)$$



$$\Delta_a(\omega_1 + \omega_2)$$



$$\Delta_a(k\Omega_2 + \Omega_3)$$



$$\Delta_a(k\Omega_2 + \omega_2)$$

Рис. 4: Обобщенные билиарды без конических точек, склеенные из элементарных областей различных типов.

При этом обобщённые бильярдные столы, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

*Доказательство.* Рассмотрим элементарную область  $\Omega_1$ . К ней можно приклеить только область  $\Omega_2$  по левому выпуклому ребру, аналогично для область  $\omega_1$ , к которой приклеиваем  $\omega_2$ . В результате получим первую серию.

Пусть теперь область  $\Delta$  склеена из элементарных областей эквивалентных  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  и  $\omega_2$ . Заметим, что  $\Omega_2$  можно рассматривать как две области  $\omega_2$ , склеенные по прямолинейному сегменту. Заменим все области  $\Omega_2$  в составе  $\Delta$  на пару  $\omega_2$ , тогда все склейки в обобщённом бильярде  $\Delta$  можно рассматривать как склейки областей, эквивалентных  $\omega_2$  и  $\Omega_3$ . Если произошла склейка между  $\omega_2$  и  $\Omega_3$ , то приклеить больше ничего нельзя, поэтому получим следующую схему: к обобщённому бильярду "ленте"  $k\Omega_2$  вдоль свободных границ мы приклеиваем области  $\omega_2$  и  $\Omega_3$ , откуда получаем пять случаев из второй и третьей серий.  $\square$

## 5.4 Классификация обобщённых бильярдов, содержащих конические точки

Введём типы конических точек:  $x$  – это коническая точка, образованная склейкой вдоль выпуклого параболического и прямолинейного сегмента, а  $y$  – это коническая точка, образованная склейкой вдоль двух выпуклых параболических сегментов.

### 5.4.1 Классификация обобщённых бильярдов с коническими точками, склеенных из элементарных областей одного класса эквивалентности

**Утверждение 4.** Любой обобщённый бильярд  $\Delta$ , склеенный из эквивалентных друг другу элементарных областей, содержащий конические точки, эквивалентен области, принадлежащей одной из следующих серий:

- (1) обобщённый бильярд с двумя коническими точками без свободной границы  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$ , состоящий из областей, эквивалентных  $\Omega_1$ ;
- (2) конечная серия областей, состоящая из обобщённых бильярдных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $\omega_1$ , а именно две области со свободной границей  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$  и  $\Delta_\beta(\omega_1)_y^2$  и две области без свободной границы  $\Delta_\beta(\omega_1)_{2yx}^2$  и  $\Delta_\beta((\omega_1)_x^2 + (\omega_1)_x^2)$ ;
- (3) конечная серия областей, состоящая из обобщённых бильярдов, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $\Omega_2$ , а именно три области со свободной границей  $\Delta_\beta(\Omega_2)_y^2$  с одной конической точкой и  $\Delta_\beta(\Omega_2)_{2y}^2$  и  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + (\Omega_2)_y^2)$  с двумя коническими точками;
- (4) конечная серия областей, состоящая из обобщённых бильярдов, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $\omega_2$ , а именно четыре области со свободной границей: две области  $\Delta_\beta(\omega_2)_y^2$  и  $\Delta_\beta(\omega_2)_x^2$  с одной конической точкой и две области  $\Delta_\beta(\omega_2)_{yx}^2$  и  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + (\omega_2)_x^2)$  с двумя коническими точками;
- (5) обобщённый бильярд, состоящий из обобщённых областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $\Omega_3$ , а именно  $\Delta_\beta(\Omega_3)_y^2$  с одной конической точкой;

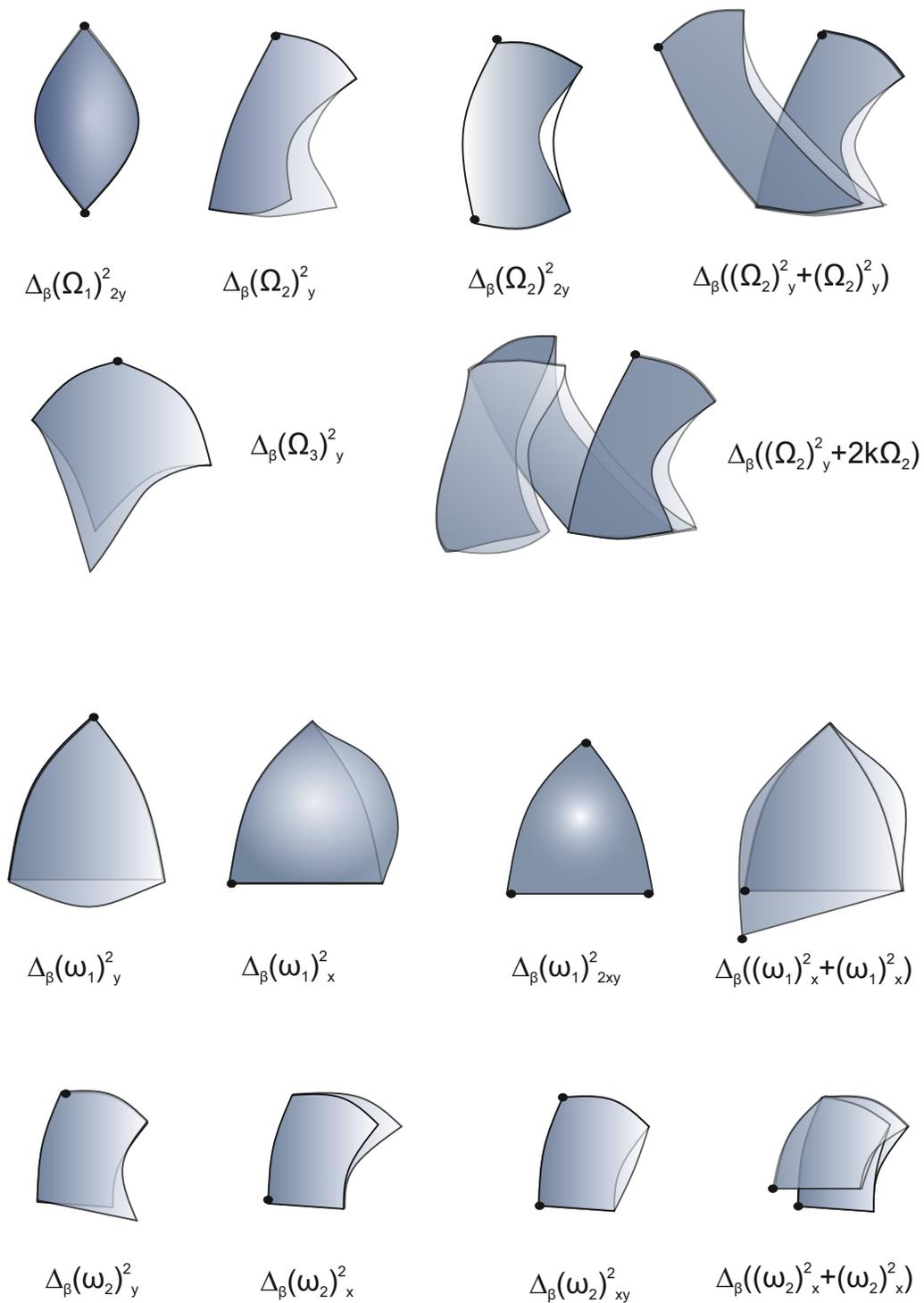


Рис. 5: Обобщенные билиарды с коническими точками, склеенные из элементарных областей одинаковых типов.

- (6) бесконечная серия областей, состоящая из обобщённых бильiardных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных  $\Omega_2$ , а именно  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2)$  с одной конической точкой и  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + (\Omega_2)_y^2)$  с двумя коническими точками.

При этом обобщённые бильiardные столы, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

*Доказательство.* Для области  $\Omega_1$  существует единственный вариант склейки в область с коническими точками, так как она содержит всего два граничных сегмента, по которым и происходит склейка, в результате получаем две конических точки.

Рассмотрим обобщённые бильiardы с коническими точками, склеенные из элементарных областей  $\omega_1$ . Коническая точка может быть образована двумя выпуклыми параболическими сегментами, тогда получим область  $\Delta_\beta(\omega_1)_y^2$ , у которой к свободным прямолинейным сегментам больше ничего приклеить нельзя, или коническая точка получается между параболическим и прямолинейным сегментом, получим  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$ . У этой области свободная граница – это выпуклые параболические сегменты, поэтому к ним можно приклеить ещё один такой же экземпляр обобщённой области и больше ничего приклеить нельзя. Так как границы этой элементарной области только выпуклые и прямолинейные сегменты, то можно склеить по всем дугам и получить область без свободной границы.

Пусть обобщённая область  $\Delta$  получена склейкой из элементарных областей, эквивалентных  $\Omega_2$ . Имеем три выпуклых сегмента, если склеиваем по всем, то получаем область с двумя коническими точками и ничего к ней приклеить больше нельзя. Теперь склеим по двум соседним выпуклым сегментам - обобщённая область  $\Delta_\beta(\Omega_2)_y^2$  с одной конической точкой, осталось два свободных ребра для дальнейшей возможной склейки, следовательно приклеиваем либо такой же экземпляр  $\Delta_\beta(\Omega_2)_y^2$  соответственно по свободным рёбрам, получим область  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + (\Omega_2)_y^2)$  с двумя коническими точками, либо можно приклеить обобщённую область  $\Delta_\alpha(2\Omega_2)$ . Полученная область опять будет иметь два свободных сегмента в составе свободной границы, поэтому процедуру можно проделывать многократно. Вторым вариантом склейки является приклейка ещё одного экземпляра  $\Delta_\beta(\Omega_2)_y^2$ . Таким образом получим две последние бесконечные серии.

Рассмотрим обобщённые бильiardы с коническими точками, склеенные из элементарных областей  $\omega_2$ . Коническую точку могут образовать два склеенных параболических сегмента, либо параболический и прямолинейный, соответственно получим две области с одной конической точки из серии (4). К обобщённой области с одной конической точкой типа  $x$  к свободным выпуклым рёбрам можно доклеить ещё один такой же экземпляр и получить область  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + \omega_2)_x^2)$  с двумя коническими точками. Склейка по всем трём возможным для склейки рёбрам даст область с двумя коническими точками  $\Delta_\beta(\omega_2)_y^2$ .

Элементарная область  $\Omega_3$  содержит ровно два пересекающихся выпуклых сегмента, поэтому существует всего одна область с одной конической точкой (5). К невыпуклым оставшимся сегментам приклеить больше ничего нельзя.

□

#### 5.4.2 Классификация обобщённых бильярдных столов, содержащих конические точки, состоящих из областей, принадлежащих различным классам эквивалентности

**Утверждение 5.** Любой обобщённый бильярдный стол  $\Delta$ , склеенный из элементарных областей, принадлежащих различным классам эквивалентности, содержащий конические точки, эквивалентен области, принадлежащей одной из следующих серий:

- (1) бесконечная серия бильярдных областей вида  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + 2\Omega_3)$ ,  $k \geq 0$  с одной конической точкой;
- (2) бесконечная серия бильярдных областей вида  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + (\omega_2)_x^2)$ ,  $k \geq 0$  с двумя коническими точками;
- (3) бесконечная серия бильярдных областей вида  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2 + 2\Omega_3)$ ,  $k \geq 0$  с одной конической точкой;
- (4) бесконечная серия бильярдных областей вида  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2 + (\omega_2)_x^2)$ ,  $k > 0$  с двумя коническими точками.

При этом обобщённые бильярдные столы, принадлежащие к различным сериям неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

*Доказательство.* Для начала заметим следующий факт – любая элементарная область однозначно определена, если известна пара дуг границы, сходящихся в некоторой вершине излома границы области. Таким образом, если обобщённая область  $\Delta$  содержит конические точки, то в качестве подобласти она содержит одну из областей, описанных в утверждении 4 обобщённых областей, состоящих из элементарных областей одного класса эквивалентности. Поэтому для того чтобы описать произвольный обобщённый бильярд  $\Delta$ , склеенный из элементарных областей различных классов эквивалентности, необходимо описать возможные склейки бильярдной подобласти  $\tilde{\Delta}$ , склеенной из элементарных областей одного класса эквивалентности  $\Omega$ , с различными элементарными областями. Область  $\tilde{\Delta}$  должна иметь свободную границу, причем в её составе обязательно должны находиться выпуклые параболические сегменты для возможной дальнейшей склейки. Рассмотрим в качестве  $\tilde{\Delta}$  обобщённый бильярд  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2)$ . К его свободной границе мы можем приклеить две элементарные области  $\Omega_3$  и при этом больше ничего приклеить не можем, также к свободной границе можно приклеить обобщённую бильярдную область  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2)$ . Пусть  $\Omega = \omega_2$ , а  $\tilde{\Delta} = \Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2)$ , тогда к свободной границы также можно приклеить две элементарные области  $\Omega_3$  и при этом продолжить склейку нельзя. Приклеивая к свободной границе области  $\Omega_2$ , получим бесконечную серию с одной конической точкой, либо можем завершить склейку ещё одним экземпляром  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2)$  и получить серию областей с двумя коническими точками.  $\square$

## 6 Лиувиллева классификация бильярдных систем в плоской области, ограниченной дугами софокусных парабол.

При отражении параболической бильярдной области относительно оси  $Ox$  топология изоэнергетической поверхности  $Q^3$  сохраняется. Отражение относительно оси  $Ox$  фактически

представляет собой замену знаков параметров граничных парабол на противоположные. В дальнейшем, будем считать, что граница области содержит не более одного выпуклого сегмента параболы с отрицательным значением параметра  $p$ .

**Определение 10.** Фиксируем параболическую бильiardную область  $\Omega$ . Граница области  $\Omega$  образована дугами парабол семейства (1). Рассмотрим те сегменты границы, которые лежат на невырожденных параболах и являются выпуклыми по отношению к области  $\Omega$ . Обозначим через  $P_{min}$  и  $P_{max_i}$  значения параметра  $P$  на которых лежат выпуклые параболические сегменты границы области с отрицательными и положительными параметрами  $P$  соответственно. Тогда назовем *особыми* следующие значения интеграла  $P$ :

- минимальное значение интеграла  $P = P_{min}$ ,
- седловое значение интеграла  $P = 0$ ,
- (локально) максимальные значения интеграла  $P = P_{max_i}$ .

Все остальные значения интеграла  $P$  для области  $\Omega$  назовем *неособыми*.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла  $P$ .

Упорядочим особые значения интеграла  $P : P_{min} < 0 < P_{max_1} \leq P_{max_2}$ .

При минимаксных значениях интеграла  $P = P_{min}$  или  $P = P_{max_2}$  траектории представляют собой движения вдоль дуг параболы с параметром  $P_{min}$  или  $P_{max_2}$  соответственно. При  $P = P_{max_1}$  траектории разбиваются на два типа – движения вдоль дуг параболы с параметром  $P_{max_1}$  и траектории, лежащие между параболами с параметрами  $P_{max_1}$  и  $P_{max_2}$ . Траектории второго типа лежат на торе, как будет показано ниже. Рассмотрим траекторию, которой соответствует движение вдоль выпуклого сегмента параболы. Если этот граничный сегмент компактен, то на этом уровне интеграла лежит одна траектория, гомеоморфная окружности в многообразии  $Q^3$ . В случае, если этот граничный сегмент совпадает с параболой, то траектории, соответствующие данному значению интеграла, представляют собой две прямые – движения по параболе в противоположных направлениях.

При седловом значении интеграла  $P = 0$  любая траектория является ломаной, каждое звено которой либо лежит на горизонтальной прямой, либо проходит через фокус семейства (1). При этом звенья гомеоморфны отрезкам.

**Определение 11.** Траектории параболического бильiardа в области  $\Omega$ , целиком лежащие на дугах параболы с минимаксными значениями интеграла, а также траектории, лежащие на седловом уровне интеграла  $P = 0$  назовём *особыми*.

**Утверждение 6.** Для всех неособых значений  $P$  поверхность уровня интеграла в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы параболического бильiardа в компактной области гомеоморфна объединению торов. Для особого значения  $P = P_{max_1}$  поверхность уровня интеграла гомеоморфна объединению тора и окружности.

*Доказательство.* Пусть  $0 < P < P_{max_2}$ . Вырежем из элементарной области  $\Omega$  область, лежащую внутри интегральной параболы (область, в которую не проектируются точки, лежащие на этом уровне интеграла), и обозначим результат через  $\tilde{\Omega}$ . Многообразие  $\tilde{\Omega}$  это в точности результат естественной проекции поверхности уровня интеграла  $P$  на область  $\Omega$ . В состав  $\tilde{\Omega}$  входит несколько элементарных областей и, быть может, дуга параболы в том случае, если  $P = P_{max_1}$ , которой соответствует особая траектория-окружность. Фиксируем некоторую

связную часть  $\tilde{\Omega}$ , и обозначим её через  $\tilde{\Omega}_i$ , где  $i$  - это номер этой части. В каждой внутренней точке  $x$  области  $\tilde{\Omega}_i$  определены четыре вектора скорости  $v_i, i \in \{1..4\}$ , так, что  $(x, v_i)$  лежит на соответствующем уровне интеграла. Вектора скорости  $v_i$  будем различать по тому, как показано далее.

Обозначим экземпляры области, оснащенные векторами скорости следующим образом:  $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$  - вектора скорости направлены по часовой стрелке и от интегральной параболы,  $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$  - вектора скорости направлены по часовой стрелке и к интегральной параболы,  $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$  - вектора скорости направлены против часовой стрелки и к интегральной параболы,  $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$  - вектора скорости направлены против часовой стрелки и от интегральной параболы.

Заметим, что согласно закону отражения на горизонтальных прямолинейных сегментах границ парабол склеиваются  $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$  и  $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$ , а на дугах параболы  $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$  и  $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$  с  $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$ . На интегральной параболы вектора  $v_1$  и  $v_2$ , а также  $v_3$  и  $v_4$  тождественно совпадают. Поэтому в тех случаях, когда  $\tilde{\Omega}_i$  представляет собой четырёхугольник уровень интеграла гомеоморфен четырём четырехугольникам, склеенным по соотношениям выше, и, как легко видеть, представляет собой тор. Для  $P_{min} < P < 0$  всё аналогично.  $\square$

**Определение 12.** Торы, соответствующие отрицательным значениям интеграла  $P$  назовем *отрицательными*, а положительным значениям интеграла  $P$  назовем *положительными*.

## 6.1 Особые уровни интеграла. Атомы

**Утверждение 7.** *Прообраз  $P^{-1}([-\epsilon; +\epsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в элементарной области при некотором, достаточно малом значении  $\epsilon > 0$ , гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям:*

- атом  $B$  для области  $\Omega_2$ ;
- атом  $A^*$  для области  $\Omega_1$ ;
- произведение тора на отрезок для областей  $\omega_1, \omega_2, \Omega_3$ .

*Доказательство.* Пусть элементарная область  $\Omega$  эквивалентна  $\Omega_2$  или  $\omega_2$ . Рассмотрим заполнение области софокусными параболы, такими что их пересечение с фокальной прямой было непусто в области  $\Omega$ . Оснастим каждую точку дуги параболы двумя векторами скорости  $v_1$  и  $v_2$ , направленными к фокусу и параллельно оси  $Ox$  от бесконечно удалённого фокуса - "правая" дуга, либо от фокуса и к бесконечно удалённому - "левая" дуга. На граничных дугах положительных парабол области по закону отражения имеем  $(x, v_1) \sim (x, v_2)$  (соответственно  $(x, v_3) \sim (x, v_4)$ ). По закону отражения на граничных отрицательных параболах точка может быть оснащена одним вектором скорости (или двумя эквивалентными друг другу векторами). В этом случае, вектора, направленные вправо и влево склеиваются друг с другом по закону отражения:  $(x, v_1) \sim (x, v_4)$  и  $(x, v_2) \sim (x, v_3)$ . Таким образом "правые" дуги параболы склеиваются с "левыми" дугами. Следовательно, прообраз  $P^{-1}(0)$  представляет собой прямое произведение окружности на восьмёрку (случай области  $\Omega_2$ ) или окружность (случай области  $\omega_2$ ). Если оснащать каждую дугу параболы, лежащую в области  $\Omega$  векторами скорости, направленными вправо (или влево), так чтобы точки этой параболы лежали бы в прообразе  $P^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$ , то все такие точки образуют плоский атом  $B$  в случае области  $\Omega_2$  и произведение окружности на отрезок для области  $\omega_2$ . Для  $\Omega_3$  конструкция аналогична  $\omega_2$ .

Пусть элементарная область эквивалентна области  $\omega_1$ . Заполним область оснащёнными дугами парабол, как в случае области  $\Omega_2$ , но без горизонтального отрезка. Как и выше, множество всех таких точек будет гомеоморфно прямому произведению окружности, лежащей на слое  $P \in [-\epsilon, \epsilon]$  на отрезок. Прообраз оставшегося горизонтального отрезка, лежащий на особом слое интеграла в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  гомеоморфен окружности. В пределе при стремлении невырожденной дуги к горизонтальному отрезку часть дуги перейдёт в фокус, оснащенный векторами скорости, а часть дуги – в часть отрезка. Таким образом, прообраз особого слоя – это тор, на котором можно выделить цикл типа  $(1, 1)$ , который соответствует движению вдоль горизонтальной границы области. Пусть элементарная область эквивалентна области  $\Omega_1$ . Пусть дуги состоят из верхней и нижней частей. Множество точек  $x$ , принадлежащих объединению дуг и оснащенных векторами скорости  $v$ , такими что значение интеграла  $P \in [-\epsilon, \epsilon]$ , гомеоморфно плоскому атому  $B$ , где особый слой – восьмерка – образован точками, лежащими на уровне интеграла  $P = 0$ . На особом слое при склейке оснащённых дуг происходит перекрутка – верхние дуги склеиваются с нижними, откуда особый слой будет гомеоморфен особому слою атома  $A^*$ .  $\square$

**Утверждение 8.** *Инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула  $W^*$ , описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для параболического бильярда в компактной области  $\Omega$  может быть описана следующим образом.*

- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\Omega_1$ , молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \epsilon=1} A^* \xleftarrow{r=0, \epsilon=1} A$ , метка  $n$  в единственной семье равна 0.
- Если область  $\Omega$  эквивалентна области  $\Omega_2$ , молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=\infty, \epsilon=1} B \xleftarrow{r=0, \epsilon=1} AA$ , где метки  $r=0, \epsilon=1$  на правых ребрах.
- Если область эквивалентна области  $\omega_1, \omega_2$  или  $\Omega_3$ , то молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \epsilon=1} A$ .

*Доказательство.* Рассмотрим области, не содержащие отрезков фокальной прямой, то есть  $\Omega_2, \omega_2$  и  $\Omega_3$ . Согласно утверждению выше изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  расслоено на двумерные торы, и может быть представлено как результат склейки двух полноторий (атомов  $A$ ) по граничному тору. Мы знаем, что изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в любой плоской односвязной области  $\Omega$ , ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют  $\frac{\pi}{2}$ , гомеоморфна сфере  $S^3$  [см. .. Предложение 3.1.3], значит метка  $r=0$ . Пусть теперь область  $\Omega = \Omega_2$ . Молекула имеет один седловой атом, выберем циклы. Эти циклы мы будем выбирать следующим образом: предъявим кривую в бильярдной области  $\Omega$ , которая лежит в проекции данного тора Лиувилля. И покажем, какими векторами скорости мы оснащаем эту кривую, поднимая её до кривой на торе и на многообразии  $Q^3$ . На рисунке 6 показаны выбранные циклы  $\lambda$  и  $\mu$ , матрицы склейки соответственно имеют вид для отрицательного тора  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , откуда метки равны  $r=\infty, \epsilon=1$  для нижнего ребра. Для верхних рёбер матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , откуда метки  $r=0, \epsilon=1$ .

Для области  $\Omega_1$  выберем циклы как на рисунке 7 (для седлового атома показаны циклы  $\hat{\mu}$ ). Для отрицательного тора цикл  $\mu_1$  получим так  $\mu_1 = \frac{\hat{\mu} + \lambda_1}{2}$ , тогда матрица склейки будет иметь вид  $\begin{pmatrix} \pm 2 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Из того, что определитель матрицы должен равняться  $-1$ , получим  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и

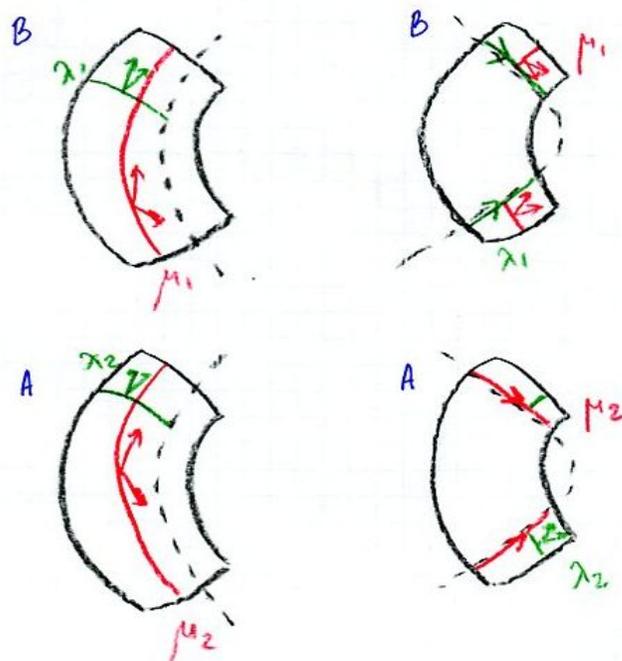


Рис. 6: Выбор циклов  $\lambda$  и  $\mu$  на отрицательных и положительных торах Лиувилля для билиарда в области  $\Omega_2$

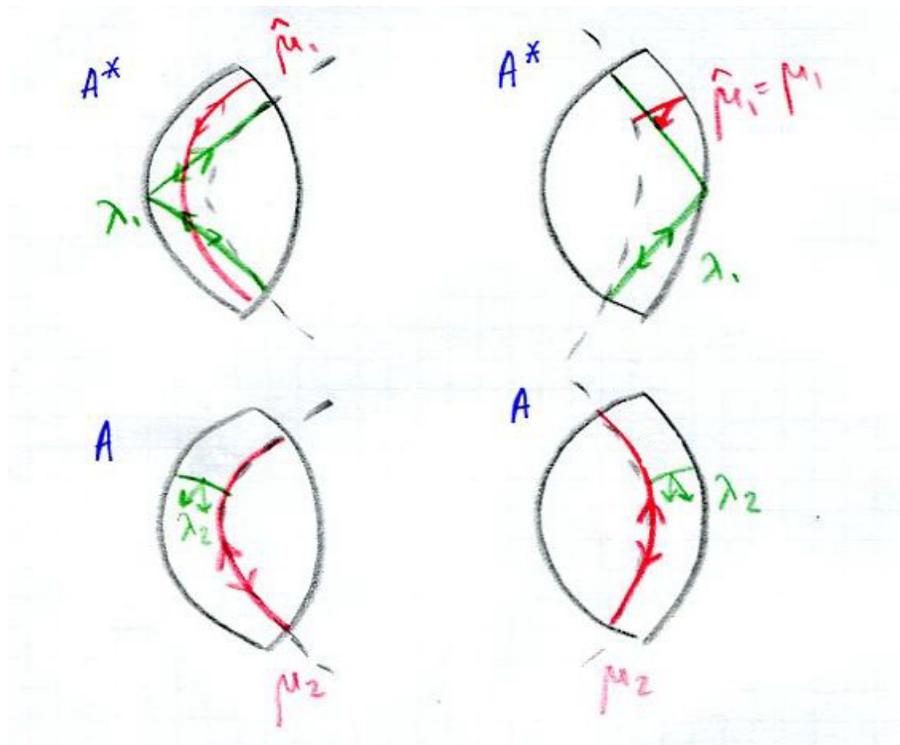


Рис. 7: Выбор циклов  $\lambda$  и  $\mu$  на отрицательных и положительных торах Лиувилля для биллиарда в области  $\Omega_1$

метки  $r = 0, \epsilon = 1$ . Для положительного тора цикл  $\mu_1 = \hat{\mu}$  указан на рисунке, матрица имеет такой же вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и метки  $r = 0, \epsilon = 1$ .  $\square$

## 7 Лиувиллева классификация систем обобщённых билиардов.

### 7.1 Особые и неособые уровни интеграла.

**Определение 13.** Фиксируем обобщённую область  $\Delta$  и рассмотрим в ней обобщённый билиард. Область  $\Delta$  склеена из нескольких элементарных областей  $\Omega_i$ . Граница каждой области  $\Omega_i$  образована сегментами парабол семейства (1). Для каждой области  $\Omega_i$  укажем особые минимаксные значения интеграла согласно определению (10).

Тогда назовем особыми следующие значения интеграла  $P$  для билиарда в обобщенной области:

- (локально) минимальные значения интеграла  $P = P_{min_i}$ , которые являются минимальными хотя бы в одной элементарной области  $\Omega_i$ ,
- седловое значение интеграла  $P = 0$ ,
- (локально) максимальные значения интеграла  $P = P_{max_j}$ , которые являются максимальными хотя бы в одной элементарной области  $\Omega_i$ .

Все остальные значения интеграла  $P$  для области  $\Delta$  назовем *неособыми*.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла  $P$ . Упорядочим особые значения интеграла  $P : 0 \leq P_{min_1} \leq P_{min_2} \leq \dots \leq P_{min_n} < 0 < P_{max_1} \leq \dots \leq P_{max_m}$ , где через  $n$  и  $m$  обозначено количество (локально) минимальных и (локально) максимальных значений интеграла  $P$  соответственно.

При минимальном значении интеграла  $P = P_{min_i}$  каждому выпуклому эллиптическому сегменту границы каждой элементарной области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщенной области  $\Delta$ , и лежащему на параболе с параметром  $P_{min_i}$ , соответствуют траектории, которые представляют собой движения вдоль дуг параболы с параметром  $P_{min_i}$ . В многообразии  $Q^3$  эти траектории являются объединением нескольких окружностей. Так как эти сегменты являются выпуклыми, то других траекторий на этом уровне интеграла, отражающихся от частей границы, соответствующих значению интеграла  $P_{min_i}$  нет. Все другие траектории (если они существуют), как будет показано далее, лежат на торах.

При седловом значении интеграла  $P = 0$  любая траектория является ломаной, каждое звено которой либо лежит на горизонтальной прямой, либо проходит через фокус семейства (1). При этом звенья гомеоморфны отрезкам.

При максимальном значении интеграла  $P = P_{max_j}$ , каждому выпуклому параболическому сегменту границы каждой элементарной области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщенной области  $\Delta$ , и лежащему на параболе с параметром  $P_{max_j}$ , соответствуют траектории, которые представляют собой движения вдоль дуг параболы с параметром  $P_{max_j}$ . В многообразии  $Q^3$  эти траектории являются объединением нескольких окружностей. Все другие траектории (если они существуют), как будет показано далее, лежат на торах.

**Определение 14.** Траектории билиардного движения в (элементарной) области, целиком лежащие на дугах парабол с параметрами  $P_{min_i}$  и  $P_{max_j}$ , а также траектории, лежащие на седловом уровне интеграла  $P = 0$  назовём *особыми*.

## 7.2 Теорема Лиувилля для обобщённого билиарда.

**Утверждение 9.** Для всех неособых значений  $P_{min} < P < 0$  и  $0 < P < P_{max}$  поверхность уровня интеграла в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  динамической системы билиарда в обобщённой области гомеоморфна объединению торов. Для особых значений  $P = P_{max_i}$  и  $P = P_{max_j}$  поверхность уровня интеграла гомеоморфна объединению тора и окружности.

*Доказательство.* Пусть  $0 < P < P_{max}$ .

Поверхности уровня интеграла для обобщённых областей, не содержащих конических точек. Пусть обобщённая область  $\Delta$  не содержит конических точек и склеена из элементарных областей  $\Omega_i, i \in \{1 \dots n\}$ . Вырежем из каждой элементарной области  $\Omega_i$ , входящей в состав обобщённой области, внутренность, ограниченную интегральной параболой. Полученное многообразие является проекцией уровня интеграла на область  $\Delta$ . Фиксируем некоторую компоненту связности этого многообразия и обозначим её через  $\tilde{\Delta}$ . Для того чтобы описать искомый уровень интеграла разрежем  $\tilde{\Delta}$  по её ребрам склейки и рассмотрим отдельно прообразы  $\tilde{\Omega}_i$ . По Утверждению 6 это торы. Так как область  $\Delta$  не содержит конических точек, то любые два ребра склейки не пересекаются. Рассмотрим торы – прообразы  $\tilde{\Omega}_i$ . В каждом торе прообраз любого ребра склейки – дуги параболы – это цикл. Разрежем каждый тор по этим циклам. Склейка двух элементарных областей  $\tilde{\Omega}_i$  и  $\tilde{\Omega}_j$  вдоль ребра склейки  $a_{ij}$  продолжается до склейки пары разрезанных торов вдоль двух циклов одного типа. В результате получается тор.

*Поверхности уровня интеграла для обобщённых областей, содержащих конические точки.*

В случае, когда у нас есть коническая точка, прообразы ребер склейки, лежащих на отрицательном и положительном граничных сегментах, являются парой циклов, образующих базис на этом торе. Если сначала разрезать по упомянутым циклам, а потом склеить попарно, то результатом будет тор.

Для  $P_{min} < P < 0$  доказательство проводится аналогично.  $\square$

## 7.3 Особые уровни интеграла. Описание их окрестности в терминах атомов-бифуркаций

**Утверждение 10.** Трёхмерный прообраз  $P^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы билиарда в обобщённой области  $\Delta$ , склеенной из элементарных областей одинаковых типов, и не имеющей конических точек, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):

- (1) произведение тора на отрезок для “простейших удвоенных” областей вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , где элементарная область  $\Omega$  эквивалентна  $\Omega_3, \omega_1, \omega_2$ , а так же для области  $2'\omega_2$  и областей вида  $\Delta_\alpha(2\omega_1 + 2\omega_1), \Delta_\alpha(2\Omega_3 + 2\Omega_3)$ ;
- (2) атом  $B$  для области  $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$ ;
- (3) атом  $C_2$  для области  $\Delta_\alpha(2\Omega_1 + 2\Omega_1)$ ;
- (4) атом  $B_n$  для областей-лент;

(5) атом  $D_n$  для областей-колец.

В доказательствах утверждений 10-12 про атомы применены те же конструкции, что и в работе [1] В.В. Фокичевой (Ведюшкиной) ”Топологическая классификация интегрируемых билиардов”.

*Доказательство.* Мы показываем, как меняются прообразы особых слоев изоэнергетических поверхностей  $Q^3$  билиарда в элементарных областях при склейке этих элементарных областей в обобщенный билиард. Заметим, что слой интеграла  $p$  для билиарда в обобщенной билиардной области может быть склеен из разрезанных слоев интеграла  $p$  в элементарных областях, составляющих область  $\Omega$ . На слоях интеграла  $p$  необходимо сделать разрезы вдоль точек, проекции которых лежат на ребрах склейки. Затем произвести склейку разрезанных слоев интеграла  $p$  согласно новым правилам склейки – обобщенному билиардному закону. Склейка на неособых торах описана в Утверждении 9. Здесь покажем как происходит склейка особых слоев интеграла  $p$ .

Пусть обобщенный билиард  $\Delta$  эквивалентен области вида  $\Delta_\alpha(2\Omega)$ , где внутренность элементарной области не содержит точек фокальной прямой. Рассмотрим торы  $T^u$  и  $T^d$ , которые представляют собой особые слои динамической системы билиарда в элементарной области. Разрежем каждый тор по окружности, образованной точками параболического сегмента границы – ребра склейки областей – оснащенными векторами скорости. Такие окружности образуют циклы на торах  $T^u$  и  $T^d$ . Два разрезанных тора склеиваются вдоль двух граничных окружностей вследствие обобщенного билиардного закона. При этом получается тор.

Пусть обобщенный билиард  $\Delta$  эквивалентен области  $\Delta_\alpha(\Omega_2)^2$ . Представим эту область, как результат склейки двух экземпляров области  $\omega_2$  вдоль двух граничных сегментов – параболического и горизонтального. Рассмотрим торы  $T^u$  и  $T^d$ , которые представляют собой особые слои динамической системы билиарда в области  $\omega_2$  (см. Утверждение 7). На каждом из торов  $T^u$  и  $T^d$  есть выделенный цикл, образованный точками фокальной прямой, оснащенными векторами скорости, направленными горизонтально. Для начала разрежем каждый тор по окружности, образованной точками параболического сегмента границы – ребра склейки областей  $\omega_2$  – оснащенными векторами скорости. Два разрезанных тора склеиваются вдоль граничных окружностей вследствие обобщенного билиардного закона, образуя новый тор  $T$ . После склейки выделенные на торах  $T^u$  и  $T^d$  циклы перейдут в два гомологичных цикла на торе  $T$ . Однако точки этих циклов в  $Q^3$  одинаковы. Поэтому выделенные циклы необходимо отождествить друг с другом. В результате такой склейки тор  $T$  перейдет в особый слой атома  $B$ . Для области  $\Omega_1$  можно повторить аналогичную конструкцию без склейки по выпуклому параболическому сегменту.

Пусть обобщенный билиард  $\Delta$  склеен из нескольких экземпляров элементарной области  $\Omega_2$  и не эквивалентна  $\Delta_\alpha(\Omega_2)^2$ . Рассмотрим атом  $B$ , описывающий окрестность особого слоя  $p = 0$  для билиардного движения в области  $\Omega_2$ . Рассмотрим отдельно, как склейка пары областей  $\Omega_2$ , обозначенных через  $(\Omega_2)^u$  и  $(\Omega_2)^d$ , продолжается на склейку атомов. Особый слой атома  $B$  образован прямым произведением восьмерки (особого слоя плоского атома  $B$ ), каждая из которых оснащена сонаправленными (вправо или влево) векторами  $v_1$  и  $v_2$  дуг софокусных парабол, заполняющих область  $\Omega_2$  (вектор  $v_1$  направлен “внутри” экземпляра области, а вектор  $v_2$  – “наружу”) на окружность. Оснащенный горизонтальными (других нет) векторами скорости отрезок фокальной прямой является особой окружностью особого слоя атома  $B$ . При склейке областей оснащение дуг каждой гиперболы меняется – в точке склейки областей больше не склеиваются точки вида  $(v_1)^u$  и  $(v_2)^u$  (т.е. мы разрезаем особые слои), которые

склеиваются с векторами  $(v_2)^d$  и  $(v_1)^d$  соответственно. Это приводит к тому, что особые слои атомов  $B := B_1$  после склейки стали гомеоморфны особым слоям атома  $B_2$ . Продолжая такую операцию на особом слое при последовательной склейке областей  $\Omega_2$  в область  $\Delta$  получаем особый слой либо длинного атома  $B_n$  либо атома  $D_n$ .  $\square$

**Утверждение 11.** *Трёхмерный прообраз  $P^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в обобщённой области  $\Delta$ , склеенной из элементарных областей разных типов и не имеющей конических точек, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):*

- (1) атом  $A^*$  для области  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ ;
- (2) атом  $B_n$  для областей  $\Delta_\alpha(k\Omega_2 + \Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(k\Omega_2 + \omega_2)$ ,  $\Delta_\alpha(\omega_2 + k\Omega_2 + \Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(\Omega_3 + k\Omega_2 + \Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(\omega_2 + k\Omega_2 + \omega_2)$ ;
- (3) произведение тора на отрезок для области  $\Delta_\alpha(\omega_1 + \omega_2)$ .

*Доказательство.* Для доказательства этого предложения мы показываем, как меняются прообразы особых слоев из энергетических поверхностей  $Q^3$  бильярда в элементарных областях при склейке этих элементарных областей в обобщенный бильярд. Заметим, что слой интеграла  $P$  для бильярда в обобщённой области может быть склеен из разрезанных слоев интеграла  $P$  в элементарных областях, составляющих область  $\Delta$ . На слоях интеграла  $P$  необходимо сделать разрезы вдоль точек  $x$ , проекции которых лежат на ребрах склейки. Затем произвести склейку разрезанных слоев интеграла  $p$ , согласно новым правилам склейки – обобщенному бильярдному закону. Склейка на неособых положительных торах описана в предложении 9, аналогично может быть описана склейка на отрицательных торах. Здесь покажем как происходит склейка особых слоев интеграла  $P$ .

Пусть обобщённый бильярд  $\Delta$  эквивалентен области вида  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ . Рассмотрим заполнение области  $\Omega_1$  положительными параболой и фокусными отрезками. Продолжим заполнение области  $\Omega_1$  дугами софокусных положительных парабол на всю область  $\Delta$ , а именно склеив их с дугами парабол, заполняющих вторую область. Каждой дуге параболы, заполняющую область  $\Omega_1$  можно поставить в соответствие дугу этой же параболы, но уже в области  $\Omega_2$ . При этом оснащение дуг парабол, лежащих в области  $\Omega_1$  однозначно продолжается до оснащения дуги параболы в области  $\Omega_2$ . Топологически при этом оснащенные дуги не изменятся, т.е. атомы, описывающие топологию бильярда вблизи особого слоя  $\Omega_1$ , и атомы, описывающие топологию бильярда вблизи особого слоя области  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$  топологически эквивалентны. Пусть обобщённая бильярдная область  $\Delta$  имеет вид приклеенной к полосе  $n\Omega_2$  одной или двух областей эквивалентных  $\Omega_3$  или  $\omega_2$ . Приклейка бесфокусной области эквивалентной  $\Omega_3$  или  $\omega_2$  может быть продолжена на склейку прообразов  $p^{-1}([-\epsilon, +\epsilon])$  следующим образом. Для области  $n\Omega_2$  трёхмерный прообраз  $p^{-1}([-\epsilon, +\epsilon])$  представляет собой атом  $B_n$  (см. Утверждение 11), а для областей  $\omega_2$  и  $\Omega_3$  – произведение тора на отрезок. Разрежем особый слой для бесфокусной области – тор – по окружности, образованной точками граничной параболы – ребра склейки между данной областью и экземпляром области  $\Omega_2$ , с которым она склеивается. Аналогичный разрез в особом слое для области  $n\Omega_2$  – это разрез граничного “ушка” каждого особого слоя атома  $B_n$  вдоль окружности, гомеоморфной особому слою этого атома. Заклейка каждого разрезанного “ушка” отрезком из прообраза дуги гиперболы семейства (1) (такой что объединение этих дуг заполняет всю бесфокусную область) сохраняет атом для  $n\Omega_2$ .  $\square$

**Утверждение 12.** Трёхмерный прообраз  $P^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  для динамической системы бильярда в обобщённой области  $\Delta$ , содержащей конические точки, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):

- (1) атом  $B$  для областей  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$ ,  $\Delta_\beta((\omega_1)_x^2 + (\omega_1)_x^2)$ ,  $\Delta_\beta(\Omega_2)_{2y}^2$ ;
- (2) атом  $A^*$  для областей  $\Delta_\beta(\omega_1)_{2xy}^2$ ;
- (3) атом  $A^{**}$  для областей  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$ ;
- (4) атом  $B_k$  для областей  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2)$ ,  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + (\Omega_2)_y^2)$ ,  $\Delta_\beta((\Omega_2)_x^2 + 2\Omega_3 + 2k\Omega_2)$ ;
- (5) атом  $B_k^*$  для областей  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2 + 2\Omega_3)$ ,  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + (\omega_2)_x^2)$ ,  $\Delta_\beta(\omega_2)_x^2$ ,  $\Delta_\beta(\omega_2)_{xy}^2$ ;
- (6) атом  $B_k^{**}$  для области  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2 + (\omega_2)_x^2)$ ;
- (7) произведение тора на отрезок для областей  $\Delta_\beta(\omega_1)_y^2$ ,  $\Delta_\beta(\omega_2)_y^2$ .

*Доказательство.* Рассмотрим элементарную область  $\Omega_1$ , окрестность особого слоя бильярдной системы в области  $\Omega_1$  описывается атомом  $A^*$ . Разрежем особый слой бильярдной системы для области  $\Omega_1$  вдоль положительной (или отрицательной, в силу симметрии неважно) дуги граничной параболы. Определим отображение  $g$  из элементарной области  $\Omega_1$  в обобщённый бильярд  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$ , которое отождествляет две дуги граничной параболы области  $\Omega_1$ , расположенные по разные стороны от оси  $Ox$ . Отображение  $g$  продолжается до склейки разрезанного особого слоя бильярдной системы для области  $\Omega_1$  следующим образом: восьмерки, проектирующиеся в сегмент параболы разреза – теперь уже ребра излома области  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$  склеиваются по другому закону, а именно “верхние” окружности направленные вправо склеиваются с “нижними” окружностями, направленными влево. В результате появляется лишняя “перекрутка”, что приводит к тому, что атом  $A^*$  становится атомом  $B$ . У области  $\Delta_\beta(\omega_1)_{2xy}^2$  возникает ещё одна “перекрутка”, следовательно особый слой даёт атом  $A^*$ , а разрезав вдоль горизонтальной прямой получим, что каждая восьмёрка перейдёт в объединение двух окружностей, следовательно получим обычный тор. Для области  $\Delta_\beta((\omega_1)_x^2 + (\omega_1)_x^2)$  воспользуемся конструкцией, аналогичной области  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$ , получим атом  $B$ . Рассмотрим склейку области  $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$  вдоль граничной окружности в отрезок – получим область  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$ . Исходная область описывается атомом  $B$ , за счёт образования двух конических точек появляются две перекрутки, откуда имеем атом  $A^{**}$ . Рассмотрим области, склеенные из элементарных вида  $\Omega_2$ ,  $\omega_2$  и  $\Omega_3$ . Рассмотрим проекцию  $\Delta$  на плоскость  $Oxy$ . В проекции выберем отрезки фокальной прямой. Рассмотрим связные прообразы этих отрезков в области  $\Delta$ . Эти прообразы бывают двух типов – либо объединение двух отрезков, каждый из которых лежит в своем экземпляре области  $\Omega_2$ , либо отрезки, являющиеся ребрами излома. Обозначим отрезки первого типа в области  $\Delta$  через  $b_i$ , а отрезки второго типа через  $d_i$ . Как было доказано выше, поверхность уровня интеграла  $P > 0$  является тором. Рассмотрим прообраз отрезков  $b_i$  и  $d_i$  на достаточно близком к особому слою торе. В прообразе каждого отрезка  $b_i$  лежат две окружности, которые на торе являются двумя гомологичными нетривиальными циклами: одна из этих окружностей  $s_i^u$  оснащена векторами направленными вверх, а другая  $s_i^d$  – направленными вниз. В прообразе любого отрезка  $d_i$  лежит одна окружность  $S_i$ . При стремлении  $P$  к 0 вектора, которыми оснащены отрезки  $b_i$  и  $d_i$ , стремятся к векторам, направленным горизонтально. На торе это означает следующую склейку – пары окружностей  $s_i^u$  и  $s_i^d$  склеиваются

друг с другом, а окружность, близкая к окружности  $S_i$ , в пределе накрывает её двулистно. Следовательно, если в области  $\Delta$  не было отрезков  $d_i$ , то полученный атом – это длинный ориентируемый атом  $B_n$ , иначе в атоме образуются звездочки – по количеству отрезков  $d_i$  в области  $\Delta$ .  $\square$

## 7.4 Вычисление меток и построение инварианта Фоменко – Цишанга

### 7.4.1 Лиувиллева классификация бильярдов в обобщённых областях, каждая элементарная область в составе которых не содержит фокусов семейства границы

Нам потребуется следующая

**Лемма 7.1. (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко)** *Рассмотрим произвольное ребро какой-либо молекулы  $W$ , и пусть  $(\lambda+, \mu+)$  и  $(\lambda-, \mu-)$  – допустимые системы координат, отвечающие двум атомам, соединённым этим ребром. Будем считать, что все эти циклы лежат на одном и том же торе Лиувилля, в середине ребра.*

*Рассмотрим следующие три важных случая:*

- (1) *если циклы  $\lambda+$  и  $\lambda-$  не пересекаются, т.е. гомологичны на торе, то  $r = \infty$ ;*
- (2) *если циклы  $\lambda+$  и  $\lambda-$  пересекаются ровно в одной точке, то  $r = 0$ ;*
- (3) *если циклы  $\lambda+$  и  $\lambda-$  имеют индекс пересечения 2, то  $r = \frac{1}{2}$ .*

*Во всех этих трех случаях метка  $r$  не зависит от выбора ориентации на многообразии  $Q^3$ , на ребрах молекулы и критических окружностях.*

**Теорема 2.** *Пусть обобщённый бильярд  $\Delta$  состоит из элементарных областей  $\Omega$ , причем ни одна элементарная область не содержит фокусов семейства (1) (то есть  $\Delta$  не содержит в своём составе элементарных областей вида  $\Omega_1$  и  $\omega_1$ ). Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля бильярдного движение в этих обобщённых бильярдных областях, разбиваются на следующие серии:*

- (1)  $\Delta_\alpha(2\Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(2\Omega_3 + 2\Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(2\omega_2)$  и  $\Delta_\alpha(2'\omega_2)$ ;
- (2)  $\Delta_\beta(\omega_2)_y^2$ ,  $\Delta_\beta(\Omega_3)_y^2$ ;
- (3)  $\Delta_\alpha(2\Omega_2)$ ;
- (4)  $\Delta_\alpha(k\Omega_2)$ ,  $\Delta_\alpha(k\Omega_2 + \Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(k\Omega_2 + \omega_2)$ ,  $\Delta_\alpha(\Omega_3 + k\Omega_2 + \Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(\Omega_3 + k\Omega_2 + \omega_2)$ ,  $\Delta_\alpha(\omega_2 + k\Omega_2 + \omega_2)$ ;
- (5)  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2)$ ,  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + 2\Omega_3)$ ;
- (6)  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + (\Omega_2)_y^2)$ ,  $\Delta_\beta(\Omega_2)_{2y}^2$ ;
- (7)  $\Delta_\beta(k\Omega_2)^2$ ;
- (8)  $\Delta_\beta(\omega_2)_x^2$ ,  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2 + 2\Omega_3)$ ;
- (9)  $\Delta_\beta((\Omega_2)_y^2 + 2k\Omega_2 + (\omega_2)_x^2)$ ,  $\Delta_\beta(\omega_2)_{yx}^2$ ;
- (10)  $\Delta_\beta((\omega_2)_x^2 + 2k\Omega_2 + (\omega_2)_x^2)$ .

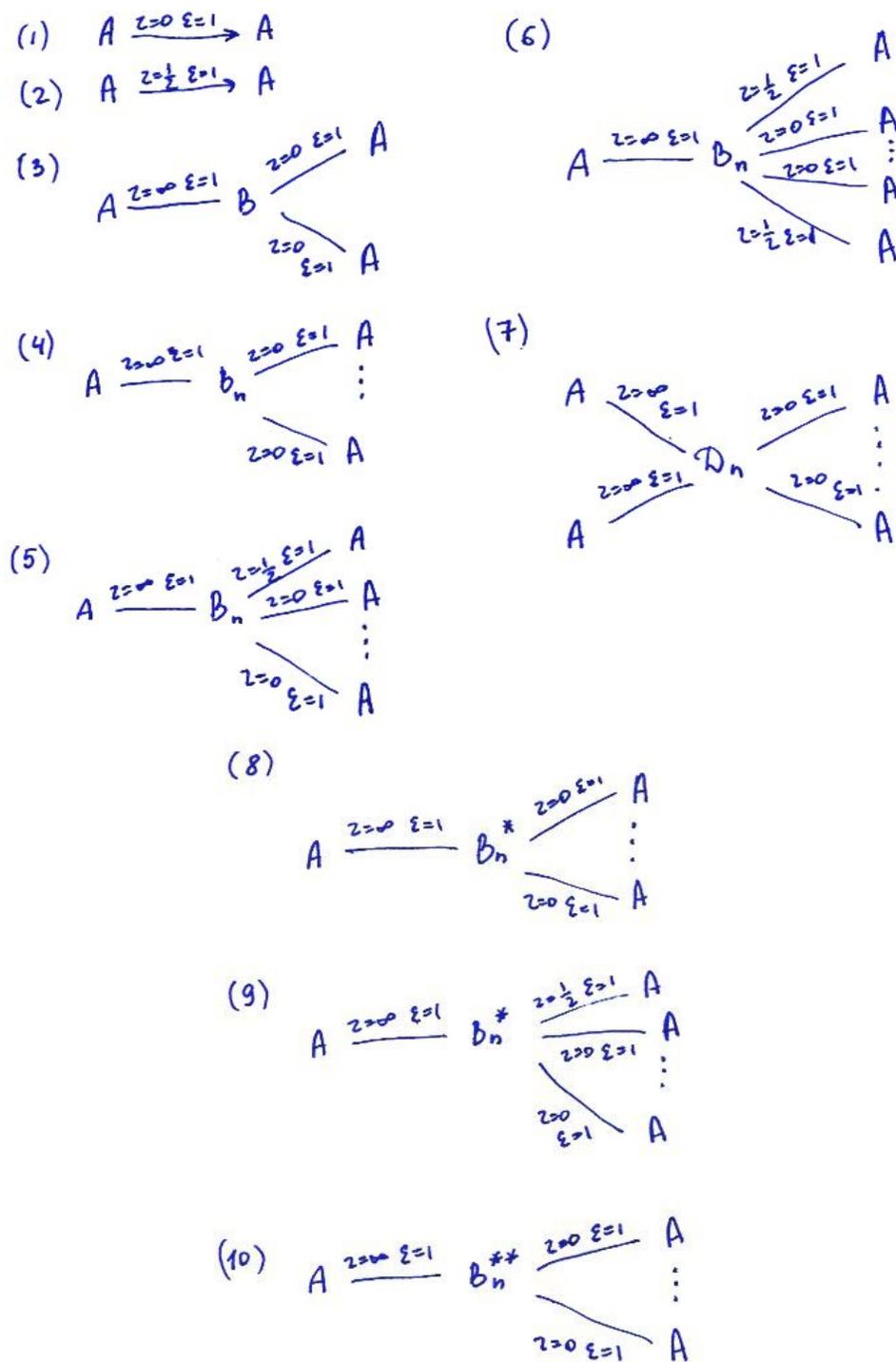


Рис. 8: Молекулы для областей, не содержащих фокусы

Соответствующий вид молекулы изображён на рисунке 8.

*Доказательство.* В работе [1] следствие 3.1.4 гласит, что изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в обобщённой области  $\Omega$  в односвязной области без конических точек гомеоморфна  $S^3$ . Для обобщённых областей  $\Delta_\alpha(2\Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(2\Omega_3 + 2\Omega_3)$ ,  $\Delta_\alpha(2\omega_2)$  и  $\Delta_\alpha(2'\omega_2)$  из утверждения 10 имеем, что изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  этих областей расслоено на двумерные торы, и может быть представлено как результат склейки двух атомов  $A$  по граничному тору, откуда получаем, что метки на ребре  $r = 0, \epsilon = 1$ . Если бильярдная область содержит одну коническую точку, то воспользуемся Предложением 3.2.1 из [1]: изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  бильярда в обобщённой области с одной конической точкой гомеоморфна  $RP^3$ . Из утверждения 12 знаем, что области  $\Delta_\beta(\omega_2)_y^2$  и  $\Delta_\beta(\Omega_3)_y^2$  есть результат склейки двух атомов  $A$ , значит метки на ребре  $r = \frac{1}{2}, \epsilon = 1$ .

Рассмотрим движение в области  $\Delta_\alpha(2\Omega_2)$ . Возьмём те же допустимые циклы, что и у элементарной области  $\Omega_2$  и если цикл пересекает ребро склейки, то продолжим его на второй экземпляр области (см. рис. 9). Тогда на нижнем ребре имеем матрицу склейки  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и

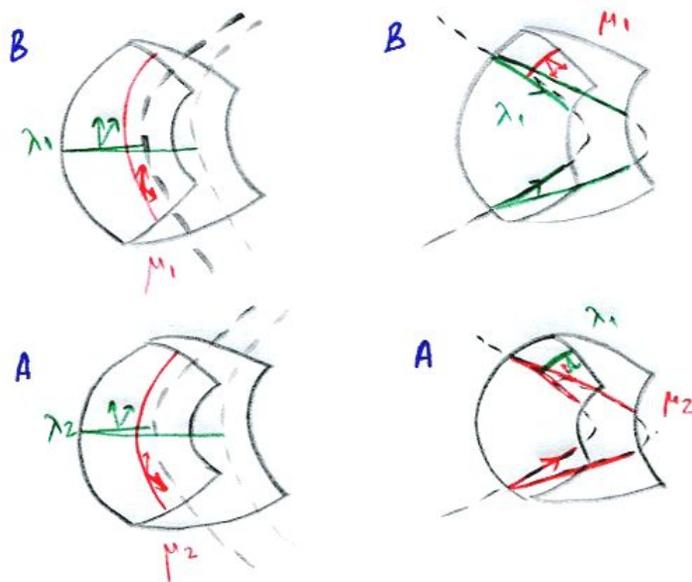


Рис. 9: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей бильярдное движение в области  $\Delta_\alpha(2\Omega_2)$

метки соответственно  $r = \infty, \epsilon = 1$ . Для верхних рёбер молекулы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , откуда  $r = 0, \epsilon = 1$ .

Для серии (4) меняется только количество рёбер, все метки сохраняются.

Появление конических точек у области влияет на метки на верхних рёбрах. Рассмотрим область  $\Delta_\beta(\Omega_2)_y^2$ . Как и в случае удвоенной области, циклы продолжаем через рёбра склейки

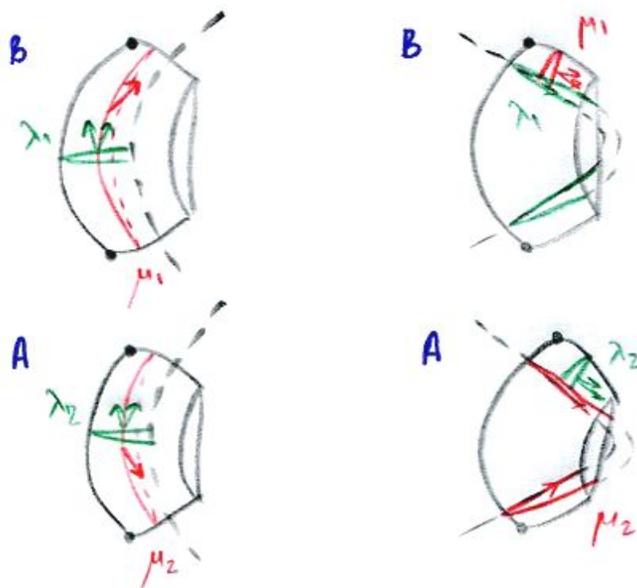


Рис. 10: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(\Omega_2)_{2y}^2$

(см. рис.10). Заметим, что циклы  $\lambda$  (на рисунке справа) пересекаются в двух точках, поэтому метка  $r = \frac{1}{2}$ . Для областей с одной конической точкой типа  $y$  получаем одно ребро с меткой  $\frac{1}{2}$ , для областей с двумя соответственно два ребра.  $\square$

#### 7.4.2 Лиувиллева классификация билиардов в обобщённых областях, в составе которых есть элементарная область, содержащая фокусы семейства границы

**Теорема 3.** Пусть обобщённый билиард  $\Delta$  состоит из элементарных областей  $\Omega$ , причем хотя бы одна элементарная область содержит (внутри области или же на границе) фокус семейства (1). Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля билиардного движения в этих обобщённых билиардных областях, разбиваются на следующие серии:

- (1)  $\Delta_\alpha(2\omega_1), \Delta_\alpha(2\omega_1 + 2\omega_1), \Delta_\alpha(\omega_1 + \omega_2)$ ;
- (2)  $\Delta_\beta(\omega_1)_y^2$ ;
- (3)  $\Delta_\alpha(2\Omega_1), \Delta_\beta(\omega_1)_x^2$
- (4)  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ ;

- (5)  $\Delta_\beta(\omega_1)_{2xy}^2$ ;  
 (6)  $\Delta_\beta((\omega_1)_x^2 + (\omega_1)_y^2)$ ;  
 (7)  $\Delta_\alpha(2\Omega_1 + 2\Omega_2)$ ;  
 (8)  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$ .

Соответствующий вид молекулы изображён на рисунке 11.

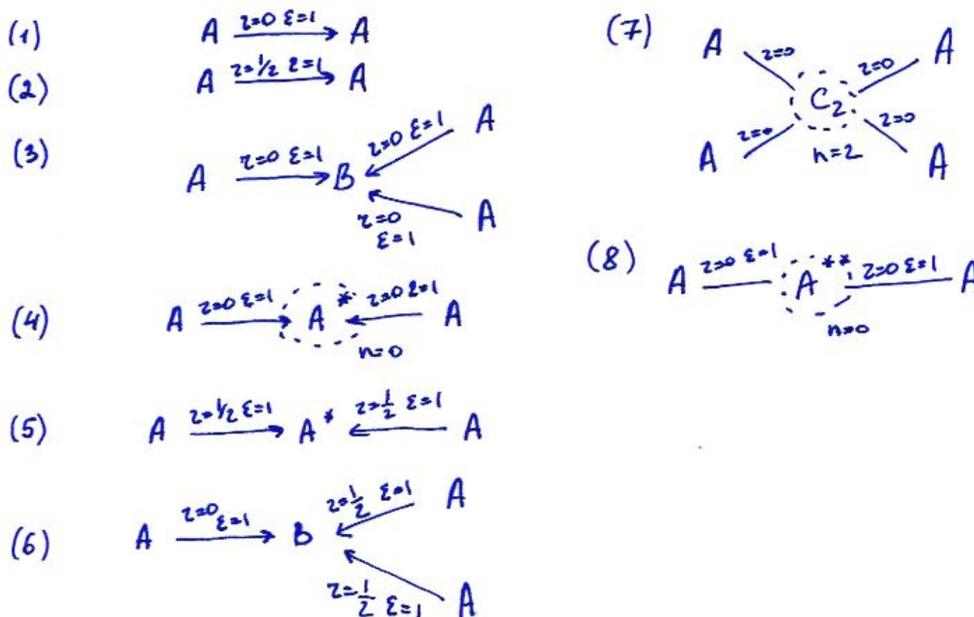


Рис. 11: Молекулы для областей, содержащих фокусы

*Доказательство.* Пусть обобщённый билиард  $\Delta$  не содержит конических точек, лежащих на фокальной прямой, и любая область  $\Omega$  в её составе не содержит фокусов кроме как на границе. В этом случае находим, что если область не содержит конических точек (то есть области  $\Delta_\alpha(2\omega_1)$ ,  $\Delta_\alpha(2\omega_1 + 2\omega_2)$ ,  $\Delta_\alpha(\omega_1 + \omega_2)$ ), следовательно  $Q^3 \simeq S^3$ , откуда молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=0, \epsilon=1} A$ . Если же обобщённая область  $\Delta$  содержит коническую точку типа  $y$  ( $\Delta_\beta(\omega_1)_{2y}^2$ ), то из того факта, что  $Q^3 \simeq RP^3$ , следует, что молекула имеет вид  $A \xrightarrow{r=1/2, \epsilon=1} A$ .

Далее все циклы будем выбирать из условия, что на граничном торе атома  $A$  в качестве цикла  $\lambda$  выбирается цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а в качестве цикла  $\mu$  – цикл, дополняющий  $\lambda$  до базиса, причем ориентация выбирается таким образом, чтобы ориентация цикла  $\mu$  совпадала с ориентацией оси полнотория (атома  $A$ ), т.е. его направление

должно совпадать с ориентацией критической траектории. На атоме  $B$  цикл  $\lambda$  – это слой расслоения Зейферта и при стремлении интегральной параболы к фокальной прямой он должен переходить в отрезок прямой, оснащенный касательными векторами к ней. Для  $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$  на

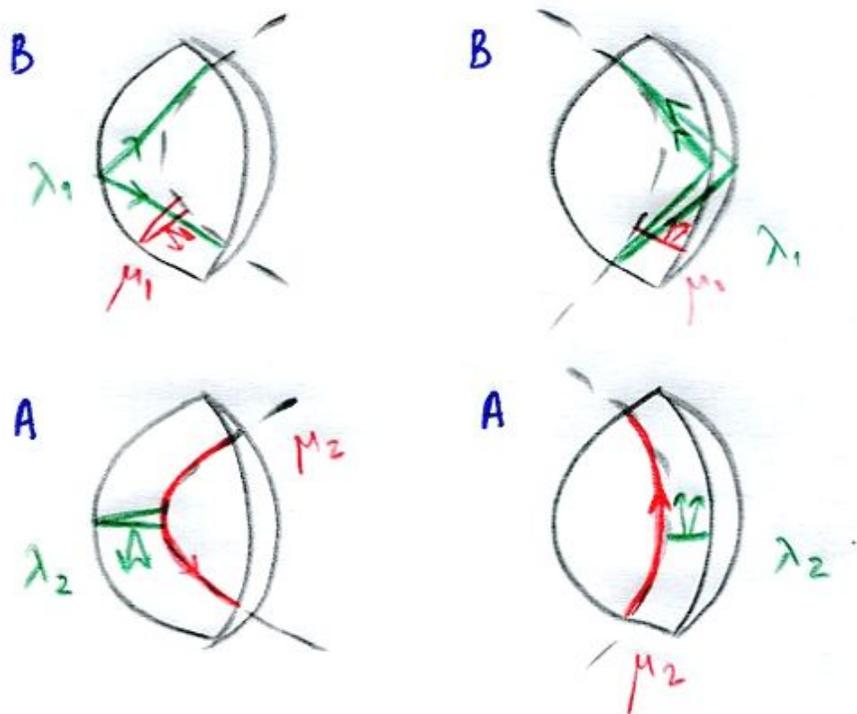


Рис. 12: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$

отрицательных рёбрах будем иметь  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , на положительных матрица склейки имеет вид

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , откуда легко вычислить метки. Для области  $\Delta_\alpha(2\Omega_1 + 2\Omega_1)$  используем те же циклы.

Для  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$  на нижнем ребре получим матрицу  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , на верхнем  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , откуда метки и на нижнем, и на верхнем ребрах  $r = 0, \epsilon = 1$ .

Рассмотрим обобщённую область  $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ . Напомним, что циклы  $\mu$ , соответствующие седловым атомам со звездочками, выбираются следующим образом. Выберем циклы  $\hat{\mu}$  также как и в ориентируемом случае – циклы, высекаемые сечением ориентируемого атома – дубля соответствующего неориентируемого. Напомним, что дубль атома  $A^*$  это атом  $B$ , а дубль атома  $A^{**}$  – атом  $C_2$ . Один из этих циклов нужно оставить, а к одному из циклов, соответствующему другому тору, необходимо добавить цикл, кратный циклу  $\lambda$  – слою расслоения Зейферта, так

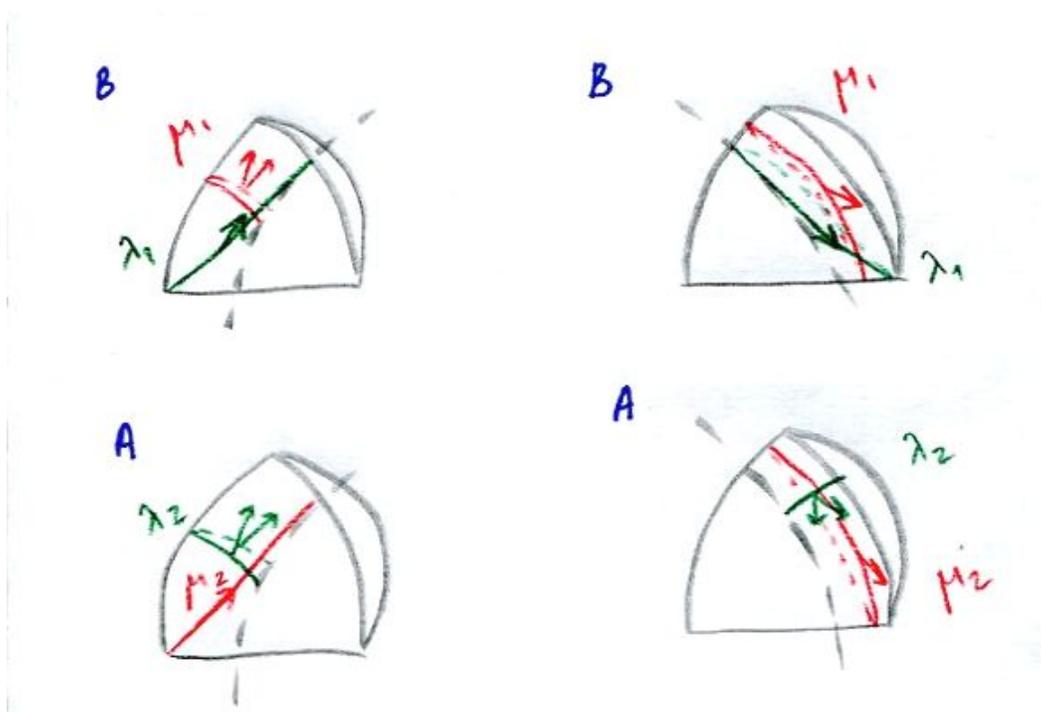


Рис. 13: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области  $\Delta_\beta(\omega_1)_x^2$

чтобы выполнялось соотношение  $\sum \mu_i = \frac{\sum \mu_i + k\lambda}{2}$ , где  $k$  – число звездочек неориентируемого атома. На отрицательном ребре матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . На положительном торе  $\mu_1$  выберем как  $\frac{\hat{\mu}_1 + \lambda_1}{2}$ , тогда матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  и метки  $r = 0, \epsilon = 1$  на всех ребрах. В области  $\Delta_\beta(\omega_1)_{2y,x}^2$  выберем циклы, как показано на рисунке 15. Цикл  $\mu_1$  выберем равным  $\hat{\mu}_1$  в отрицательном случае и равным  $\frac{\hat{\mu}_1 + \lambda_1}{2}$  в положительном. Матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  на нижнем ребре и  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  на верхнем. В случае атома  $A^{**}$ , описывающего топологию слоения Лиувилля билиарда в области  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$ , выберем цикл  $\mu_1$ , соответствующий седловому атому и лежащий на положительном торе следующим образом  $\mu_1 = \hat{\mu}_1 + \lambda$ , а цикл, лежащий на отрицательном торе выберем равным циклу с крышкой. Эти циклы изображены на рисунке 16. На ребрах молекулы  $A - A^{**} - A$ , описывающей топологию слоения Лиувилля для билиарда в области  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$ , матрицы склейки имеют следующий вид:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Откуда получаем искомые метки.  $\square$

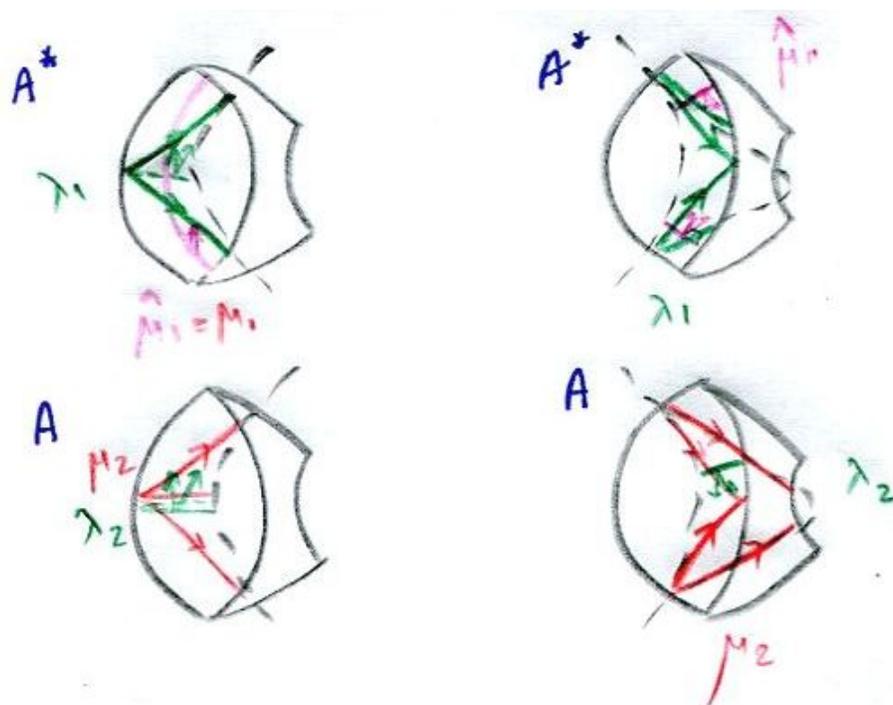


Рис. 14: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей бильярдное движение в области  $\Delta_a(\Omega_1 + \Omega_2)$

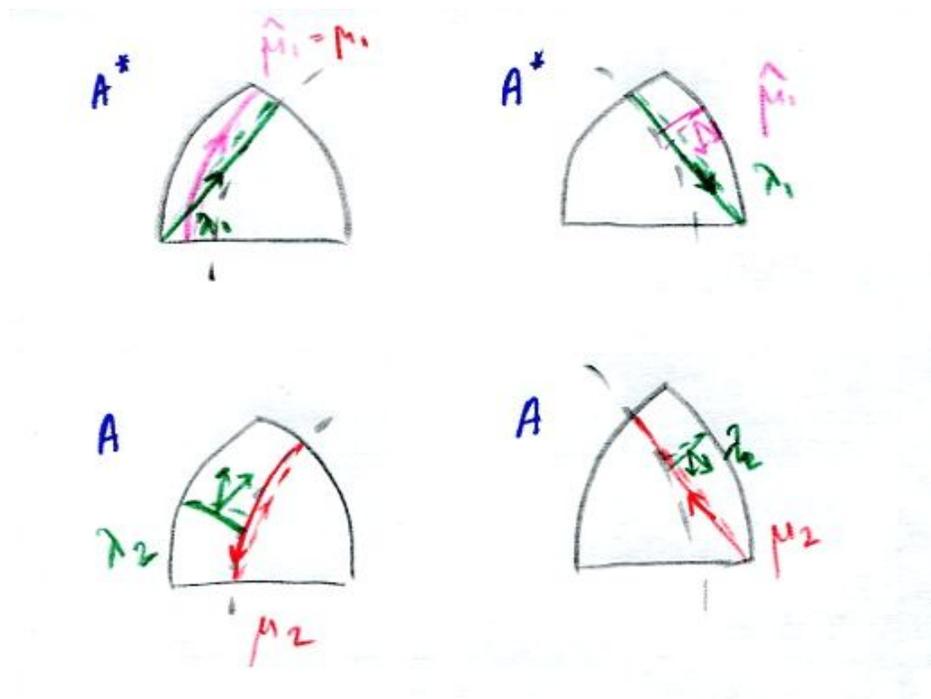


Рис. 15: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей бильярдное движение в области  $\Delta_\beta(\omega_1)_{2yx}^2$

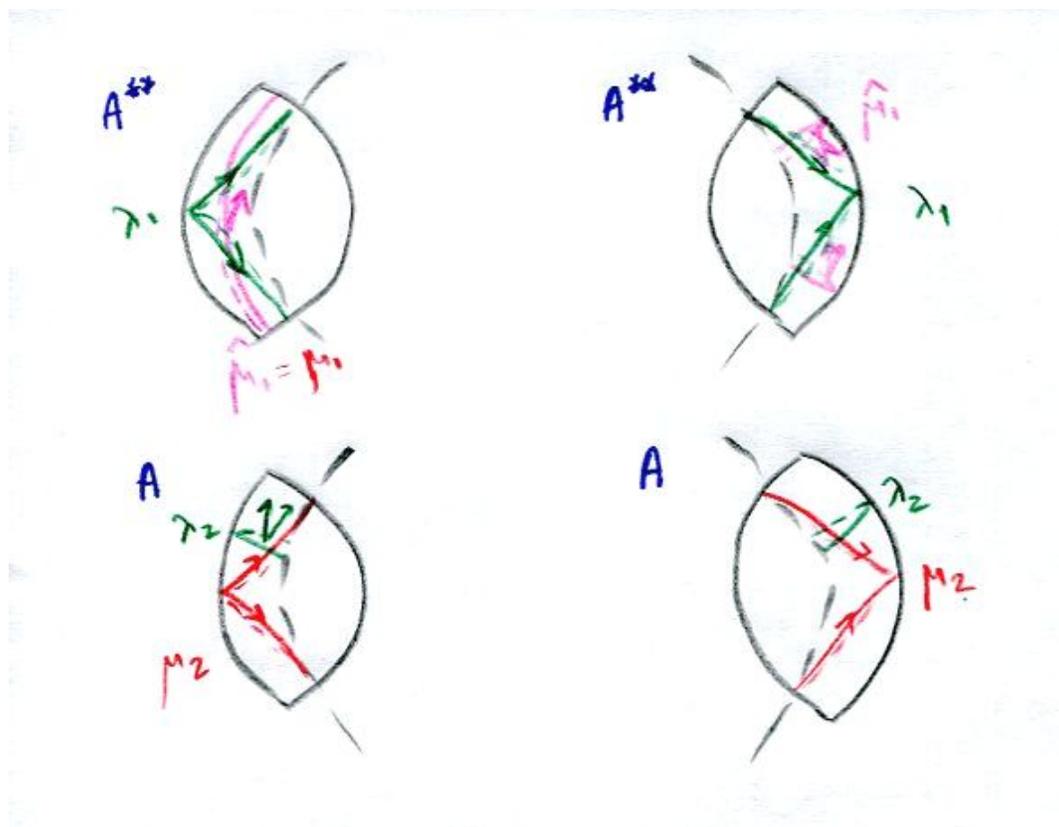


Рис. 16: Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей бильярдное движение в области  $\Delta_\beta(\Omega_1)_{2y}^2$

## Список литературы

- [1] Фокичева В.В. "Топологическая классификация интегрируемых бильярдов" , 2016
- [2] Фокичева В.В. "Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик", Математический сборник, том 206, № 10, с. 127-176
- [3] Фокичева В.В., "Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболой", Матем. сб., 205:8 (2014), 139-160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas" Sb. Math., 205:8 (2014), 1201-1221.
- [4] Болсинов А.В., Фоменко А.Т., "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация." в двух томах, 1999, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет".
- [5] Козлов В.В., Трещёв Д.В., "Генетическое введение в динамику систем с ударами", М.: Издво МГУ, 1991