

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Дипломная работа
Топология слоений Лиувилля
интегрируемого случая
Адлера — ван Мербеке на алгебре Ли
вращений четырехмерного пространства.

Выполнила
студентка 6 курса 603 группы
Бирючева Екатерина Олеговна.
Научный руководитель:
Академик
Анатолий Тимофеевич Фоменко

Москва — 2016

Содержание

1	Введение	3
2	История вопроса	3
3	Основные обозначения	3
3.1	Обозначения, используемые в курсовой	4
4	Типы точек ранга 0 отображения момента.	5
4.1	Теорема о типах невырожденных особых точек при $0 < c < 1$	12
4.2	Теорема о типах невырожденных особых точек при $1 < c < 3$	14
4.3	Теорема о типах невырожденных особых точек при $3 < c < +\infty$	16
5	Оценка сверху количества различных типов Q_h^3.	20
A	Приложение	35
B	Приложение	45
B.0.1	$\gamma < -2$	48
B.0.2	$\gamma = -2$	50
B.0.3	$-2 < \gamma < -1$	51
B.0.4	$\gamma = -1$	53
B.0.5	$-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$	54
B.0.6	$\gamma = -\frac{1}{2}$	56
B.0.7	$-\frac{1}{2} < \gamma < 0$	57
B.0.8	$\gamma = 0$	59
B.0.9	$0 < \gamma < 1$	60
B.0.10	$\gamma = 1$	62
B.0.11	$1 < \gamma < +\infty$	63

1 Введение

В настоящей работе исследуется интегрируемая гамильтонова система случая Адлера—ван Мёрбеке. Начата работа по исследованию топологического типа изоэнергетической поверхности Q_H^3 .

2 История вопроса

Случай интегрируемости, найденный М. Адлером и П. ван Мёрбеке, до сих пор является в динамике твердого тела одним из наиболее сложных и наименее изученных [4]. В статье [5] указаны гамильтониан и коммутирующий с ним интеграл четвертой степени. А. Рейман и М. Семенов-Тянь-Шанский позже указали для этого интегрируемого случая спектральное представление Лакса [11].

В 2014-2015 годах были найдены точки ранга ноль отображения момента, установлен их тип (седло-седло, седло-центр, центр-центр). П. Е. Рябов нашел бифуркационную диаграмму отображения момента. Для этого пришлось несколько преобразовать дополнительный интеграл.

Существование этого интегрируемого случая связано с особой симметрией $so(4)$, допускающей вещественное представление в виде прямой суммы $so(3) \oplus so(3)$; он отсутствует на $so(3, 1)$ и его многомерные обобщения пока что не найдены.

3 Основные обозначения

Определение 1. Симплектической структурой на гладком многообразии M называется дифференциальная 2-форма w , удовлетворяющая двум условиям:

1. $dw = 0$
2. w невырождена в каждой точке многообразия, т.е. в локальных координатах $\det \Omega(x) \neq 0$, где $\Omega(x) = (w_{ij}(x))$ — матрица формы.

Многообразие, снабженное симплектической структурой, называют симплектическим.

Пусть H — гладкая функция на симплектическом многообразии (M, w) .

Определим для этой функции вектор кососимметрического градиента $\text{sgrad}(H)$ из тождества:

$$w(v, \text{sgrad}(H)) = v(H),$$

где v — произвольный касательный вектор, $v(H)$ — производная функции H вдоль v .

Определение 2. Векторные поля вида $\text{sgrad}(H)$ называются гамильтоновыми векторными полями. Функция H называется гамильтонианом векторного поля $\text{sgrad}(H)$.

Гамильтоновы поля сохраняют симплектическую структуру w .

Определение 3. На пространстве всех гладких функций на симплектическом многообразии M можно ввести операцию скобки Пуассона по следующему правилу. Пусть f, g — две гладкие функции. Положим по определению

$$\{f, g\} = w(\text{sgrad}(f), \text{sgrad}(g))$$

Две функции коммутируют, если $\{f, g\} = 0$. Функции, коммутирующие с гамильтонианом, называются первыми интегралами гамильтонова векторного поля $v = \text{sgrad}(H)$.

Иногда вместо симплектической структуры на многообразии при построении гамильтоновой механики в качестве исходной структуры берут скобку Пуассона, при этом необязательно невырожденную. Пример вырожденной скобки Пуассона — скобка Ли-Пуассона ([1]).

3.1 Обозначения, используемые в курсовой

Скобка Ли-Пуассона w , задаваемая соотношениями:

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k \quad \{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k \quad \{M_i, S_j\} = 0$$

Эта скобка вырождена на пространстве \mathbb{R}^6 , однако невырождена на многообразии \mathcal{M} , определяемом ниже.

Многообразие \mathcal{M}^4 , задаваемое функциями:

$$\begin{aligned} M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 &= a^2 \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Эти функции также называются функциями Казимира, инвариантами алгебры Ли.

Гамильтониан и первый интеграл соответственно ([2]):

$$\begin{aligned} H &= -3/2 \cdot (\alpha_2^2 \alpha_3^2 M_1^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 M_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 M_3^2) + \\ &(\alpha_1^4 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\alpha_2 + \alpha_3)^2) M_1 S_1 + \\ &(\alpha_2^4 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 - (\alpha_3^2 + \alpha_1^2)(\alpha_3 + \alpha_1)^2) M_2 S_2 + \\ &(\alpha_3^4 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2) M_3 S_3 + \\ &2/3 \cdot (\alpha_1^4 - \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + (5/4) \alpha_2 \alpha_3)) S_1^2 + \\ &2/3 \cdot (\alpha_2^4 - \alpha_3 \alpha_1 (\alpha_3^2 + \alpha_1^2 + (5/4) \alpha_3 \alpha_1)) S_2^2 + \\ &2/3 \cdot (\alpha_3^4 - \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (5/4) \alpha_1 \alpha_2)) S_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K = & 1/2 \cdot (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) \\
& ((\alpha_2\alpha_3 - 1/3 \cdot \alpha_1^2)S_1^2 + (\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1^2)M_1S_1 + \\
& (\alpha_3\alpha_1 - 1/3 \cdot \alpha_2^2)S_2^2 + (\alpha_3\alpha_1 - 2\alpha_2^2)M_2S_2 + \\
& (\alpha_1\alpha_2 - 1/3 \cdot \alpha_3^2)S_3^2 + (\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_3^2)M_3S_3) + \\
& 1/18 \cdot (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\
& (5/3 \cdot (\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2)S_1^2 + (7\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^2)M_1S_1 + \\
& 5/3 \cdot (\alpha_3\alpha_1 - \alpha_2^2)S_2^2 + (7\alpha_3\alpha_1 - 4\alpha_2^2)M_2S_2 + \\
& 5/3 \cdot (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)S_3^2 + (7\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_3^2)M_3S_3) + \\
& 1/2 \cdot (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + 1/3 \cdot (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)) \\
& (M_1S_1 + M_2S_2 + M_3S_3) - \\
& 1/9 \cdot ((\alpha_1 - \alpha_2)^2 S_1 S_2 (M_1 S_2 + M_2 S_1) + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 S_2 S_3 (M_2 S_3 + M_3 S_2) + \\
& + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 S_3 S_1 (M_3 S_1 + M_1 S_3))
\end{aligned}$$

Гамильтониан и дополнительный интеграл зависят от трех параметров α_1, α_2 и α_3 , связанных соотношением $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

4 Типы точек ранга 0 отображения момента.

Определение 4. Критические точки отображения момента — такие точки многообразия \mathcal{M}^4 , в которых вектора $\text{sgrad}(H)$ и $\text{sgrad}(K)$ линейно зависимы. Если $\text{sgrad}(H) = \vec{0}$ и $\text{sgrad}(K) = \vec{0}$, то такие точки называются критическими точками ранга 0.

Утверждение 1. Координатами критических точек ранга 0 отображения момента \mathcal{M}^4 являются решения системы уравнений ([1]):

$$\begin{cases}
M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = a^2 \\
S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = b^2 \\
\text{sgrad}(H) = w \cdot \text{grad}(H) = \vec{0} \\
\text{sgrad}(K) = w \cdot \text{grad}(K) = \vec{0}
\end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Во-первых, критические точки должны принадлежать многообразию \mathcal{M}^4 , отсюда вытекают первые два уравнения. Во-вторых, по определению, косые градиенты интегралов должны равняться нулевому вектору. Отсюда вытекают вторые два уравнения. \square

Теорема 1. Для параметров в общем положении существуют всего 12

критических точек ранга 0:

$$\begin{aligned}
& \pm(a, 0, 0, b, 0, 0) \\
& \pm(a, 0, 0, -b, 0, 0) \\
& \pm(0, a, 0, 0, b, 0) \\
& \pm(0, a, 0, 0, -b, 0) \\
& \pm(0, 0, a, 0, 0, b) \\
& \pm(0, 0, a, 0, 0, -b)
\end{aligned}$$

Образы этих точек попарно совпадают.

Доказательство. Приведем только схему доказательства.

Для нахождения координат точек ранга 0 достаточно использовать первые 8 уравнений (условие $\text{sgrad}(K) = \vec{0}$ выполняется в таком случае автоматически.) Необходимо исключить переменные M_1 и S_1 (для определенности) из первых двух уравнений, подставить их значения в оставшиеся 6 уравнений $\text{sgrad}(H) = \vec{0}$ и найти координаты. \square

В ходе поиска решений системы уравнений будет видно, что при некоторых значениях параметров количество точек ранга 0 бесконечно.

Теорема 2. *Количество точек ранга 0 бесконечно при следующих условиях на параметры:*

$$\begin{aligned}
\alpha_i + \alpha_j = 0 & \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \text{или} \\
\alpha_i = \alpha_j & \Rightarrow \alpha_k + 2\alpha_j = 0,
\end{aligned}$$

а также при условиях, получающихся из выше указанных путем перестановки индексов (i, j, k) .

Доказательство этого факта будет представлено в приложении.

Определение 5. Бифуркационная диаграмма — образ критических точек на плоскости значений функций (H, K) .

Пусть x — особая точка ранга 0 на многообразии M_c^4 . Тогда на $T_x M$ корректно определены два оператора $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_K = \Omega^{-1} d^2 K$, порождающие в алгебре Ли $so(4)$ некоторую коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}(H, K)$.

Определение 6. Особая точка ранга 0 отображения момента \mathcal{M} невырождена, если соответствующая ей подалгебра $\mathfrak{h}(H, K)$ является картановской.

Коммутативная подалгебра является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна и среди ее элементов вида $\lambda d^2 H + \mu d^2 K$ найдется элемент, имеющий попарно различные собственные значения.

Примем $\mu = 0$, убедимся, что собственные значения $\Omega^{-1} d^2 H$ попарно различны для параметров в общем положении. Если считать оператор

$\Omega^{-1}d^2H$ не на T_xM , а на всем пространстве, то появится дополнительно два нулевых собственных значения, соответствующие функциям Казимира.

Ненулевые собственные значения отнесут каждое невырожденное положение равновесия к одному из типов ([7]):

1. седло-седло: $x, -x, y, -y$;
2. центр-седло: $xi, -xi, y, -y$;
3. центр-центр: $xi, -xi, yi, -yi$;
4. фокус-фокус: $x + yi, x - yi, -x + yi, -x - yi$;

Утверждение 2. *Характеристические многочлены оператора*

$\Omega^{-1}d^2H = \frac{\partial}{\partial x_k} w^{i,j} \frac{\partial h}{\partial x_i}$ *будут равны (соответственно особым точкам):*

$$\begin{aligned}
& \text{для } \pm (a, 0, 0, b, 0, 0) \\
& 1/9 \cdot x^2 (\alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_2 - \alpha_1) (\alpha_3 - \alpha_1) (2\alpha_3 b + \alpha_2 b + 3\alpha_2 a) (2\alpha_2 b + \alpha_3 b + 3\alpha_3 a) + x^2) \cdot \\
& (\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (2\alpha_3 b + \alpha_2 b + 3\alpha_2 a) (2\alpha_2 b + \alpha_3 b + 3\alpha_3 a) + 9x^2) \\
& \text{для } \pm (-a, 0, 0, b, 0, 0) \\
& 1/9 \cdot x^2 (\alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_2 - \alpha_1) (\alpha_3 - \alpha_1) (2\alpha_2 b + \alpha_3 b - 3\alpha_3 a) (2\alpha_3 b + \alpha_2 b - 3\alpha_2 a) + x^2) \cdot \\
& (\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (2\alpha_2 b + \alpha_3 b - 3\alpha_3 a) (2\alpha_3 b + \alpha_2 b - 3\alpha_2 a) + 9x^2) \\
& \text{для } \pm (0, a, 0, 0, b, 0) \\
& 1/9 \cdot x^2 (\alpha_1^2 \alpha_3^2 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_3 - \alpha_2) (2\alpha_3 b + \alpha_1 b + 3\alpha_1 a) (2\alpha_1 b + \alpha_3 b + 3\alpha_3 a) + x^2) \cdot \\
& (\alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2 (2\alpha_3 b + \alpha_1 b + 3\alpha_1 a) (2\alpha_1 b + \alpha_3 b + 3\alpha_3 a) + 9x^2) \\
& \text{для } \pm (0, -a, 0, 0, b, 0) \\
& 1/9 \cdot x^2 (\alpha_1^2 \alpha_3^2 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_3 - \alpha_2) (2\alpha_1 b + \alpha_3 b - 3\alpha_3 a) (2\alpha_3 b + \alpha_1 b - 3\alpha_1 a) + x^2) \cdot \\
& (\alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_2)^2 (2\alpha_1 b + \alpha_3 b - 3\alpha_3 a) (2\alpha_3 b + \alpha_1 b - 3\alpha_1 a) + 9x^2) \\
& \text{для } \pm (0, 0, a, 0, 0, b) \\
& 1/9 \cdot x^2 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_1 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_3) (2\alpha_2 b + \alpha_1 b + 3\alpha_1 a) (2\alpha_1 b + \alpha_2 b + 3\alpha_2 a) + x^2) \cdot \\
& (\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (2\alpha_2 b + \alpha_1 b + 3\alpha_1 a) (2\alpha_1 b + \alpha_2 b + 3\alpha_2 a) + 9x^2) \\
& \text{для } \pm (0, 0, -a, 0, 0, b) \\
& 1/9 \cdot x^2 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_1 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_3) (2\alpha_1 b + \alpha_2 b - 3\alpha_2 a) (2\alpha_2 b + \alpha_1 b - 3\alpha_1 a) + x^2) \cdot \\
& (\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (2\alpha_1 b + \alpha_2 b - 3\alpha_2 a) (2\alpha_2 b + \alpha_1 b - 3\alpha_1 a) + 9x^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Указание: воспользоваться пакетом Wolfram Mathematica и вычислить по определению. \square

При $\alpha_i = 0$ и $\alpha_i = \alpha_j$ происходит обнуление некоторых компонент $\text{sgrad}(H)$, например, при $\alpha_1 = 0$

$$M_3(-3\alpha_1^2 \alpha_3^2 M_2 + (\alpha_1^2 \alpha_3^2 + 2\alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_3) S_2) - S_2(-3\alpha_1^2 \alpha_2^2 M_3 + (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 \alpha_1 \alpha_3) S_3) = 0$$

при любых значениях переменных M_2, M_3, S_2, S_3 . А если посчитать характеристический многочлен в точке $(0, a, 0, 0, b, 0)$, то он будет равен x^6 . Значит, особая точка находится в вырожденном положении равновесия. Также в случае $\alpha_2 = 0$: характеристический многочлен в точке $(a, 0, 0, b, 0, 0)$ равен x^6 . В силу симметрии первых интегралов по переменным и параметрам перестановка их индексов также даст многочлен вида x^6 .

Отметим, что не только при $\alpha_i = 0$ и $\alpha_i = \alpha_j$ характеристический многочлен превращается в x^6 . Если предположить, что $2\alpha_3b + \alpha_2b + 3\alpha_2a = 0$, то характеристический многочлен для точек $\pm(a, 0, 0, b, 0, 0)$ также превратится в x^6 . Найдем все такие соотношения, превращающие хотя бы один характеристический многочлен в x^6 .

Лемма 1. *Критические положения параметров, при которых характеристический многочлен оператора A_H имеет более двух нулевых корней (оператор A_H не имеет четырех различных собственных значений):*

$$2\alpha_i b + \alpha_j b + 3\alpha_j a = 0, \quad 2\alpha_i b + \alpha_j b - 3\alpha_j a = 0.$$

Доказательство. Благодаря удобной форме выписанных характеристических многочленов достаточно просто посмотреть на них и увидеть нужные соотношения. \square

Без ограничения общности исключим параметр $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$, а параметр α_2 представим как функцию от оставшегося параметра α_1 . Тогда критические положения параметров примут следующий конкретный вид.

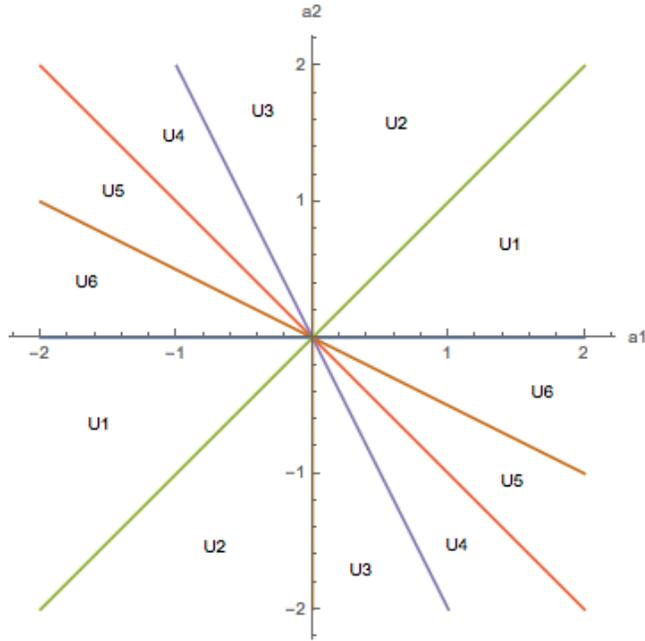
Утверждение 3. *Статические критические положения параметров (не зависящие от параметра $c = b/a$):*

$$\begin{array}{lll} \alpha_2 = 0 & \alpha_2 = \alpha_1 & \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 & \alpha_2 = -\alpha_1 & \alpha_2 = -\alpha_1/2 \end{array}$$

Динамические критические положения параметров (зависящие от параметра c):

$$\begin{array}{lll} \alpha_2 = -\frac{2c}{c+3}\alpha_1, & \alpha_2 = \frac{c-3}{c+3}\alpha_1, & \alpha_2 = -\frac{c+3}{2c}\alpha_1, \\ \alpha_2 = -\frac{c-3}{2c}\alpha_1, & \alpha_2 = \frac{c+3}{c-3}\alpha_1, & \alpha_2 = -\frac{2c}{c-3}\alpha_1 \end{array}$$

График статических критических положений параметров (U_i — сектора между критическими прямыми):



Обозначим для краткости особые точки следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \pm(a, 0, 0, b, 0, 0) &- T_{1+} \\
 \pm(a, 0, 0, -b, 0, 0) &- T_{1-} \\
 \pm(0, a, 0, 0, b, 0) &- T_{2+} \\
 \pm(0, a, 0, 0, -b, 0) &- T_{2-} \\
 \pm(0, 0, a, 0, 0, b) &- T_{3+} \\
 \pm(0, 0, a, 0, 0, -b) &- T_{3-}
 \end{aligned}$$

а соответствующие им характеристические многочлены за $P(T_{i\pm})$

Для определения типа особой точки нужно проверять знак выражений:
для T_{1+} :

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_2 + \frac{3+c}{3-c}\alpha_1)(\alpha_2 - \frac{2c}{3-c}\alpha_1) \\
 \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \frac{3+c}{3-c}\alpha_1)(\alpha_2 - \frac{2c}{3-c}\alpha_1)
 \end{aligned}$$

для T_{1-} :

$$\begin{aligned}
 -(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + \frac{2c}{c+3}\alpha_1)(\alpha_2 - \frac{c-3}{c+3}\alpha_1) \\
 -\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \frac{2c}{c+3}\alpha_1)(\alpha_2 - \frac{c-3}{c+3}\alpha_1)
 \end{aligned}$$

для T_{2+} :

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)\left(\alpha_2 - \frac{c-3}{c+3}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{c-3}{2c}\alpha_1\right)c(c+3) \\ & \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)\left(\alpha_2 - \frac{c-3}{c+3}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{c-3}{2c}\alpha_1\right)c(c+3) \end{aligned}$$

для T_{2-} :

$$\begin{aligned} & -(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)\left(\alpha_2 + \frac{3-c}{3+c}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{3+c}{2c}\alpha_1\right)c(c+3) \\ & -\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)\left(\alpha_2 + \frac{3-c}{3+c}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{3+c}{2c}\alpha_1\right)c(c+3) \end{aligned}$$

для T_{3+} :

$$\begin{aligned} & -(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)\left(\alpha_2 + \frac{2c}{c+3}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{c+3}{2c}\alpha_1\right)c(c+3) \\ & -\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_2 + \frac{2c}{c+3}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{c+3}{2c}\alpha_1\right)c(c+3) \end{aligned}$$

для T_{3-} :

$$\begin{aligned} & \alpha_1\alpha_2\left(\alpha_2 - \frac{2c}{3-c}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{c-3}{2c}\alpha_1\right)c(3-c) \\ & (2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)\left(\alpha_2 - \frac{2c}{3-c}\alpha_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{c-3}{2c}\alpha_1\right)c(3-c) \end{aligned}$$

Если выражение получилось положительным, то он отвечает типу точки «седло», если отрицательным — «центр». Соответственно, если для каждой точки оба выражения положительны, то она точка типа «седло-седло», оба отрицательных — тип «центр-центр», а если одно положительно, а второе отрицательно, то это точка «центр-седло».

Заметим следующую вещь: α_2 зависит от α_1 в этих выражениях линейно, причем все прямые $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ проходят через 0; все прямые пересекаются в 0.

Лемма 2. При $c = 0$, $c = \pm 3$, $c = \pm 1$ каждая из прямых

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{2c}{c+3}\alpha_1 & \alpha_2 &= \frac{c-3}{c+3}\alpha_1 & \alpha_2 &= -\frac{c+3}{2c}\alpha_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{c-3}{2c}\alpha_1 & \alpha_2 &= \frac{c+3}{c-3}\alpha_1 & \alpha_2 &= -\frac{2c}{c-3}\alpha_1 \end{aligned}$$

совпадает с одной из прямых

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0 & \alpha_2 &= \alpha_1 & \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= -2\alpha_1 & \alpha_2 &= -\alpha_1 & \alpha_2 &= -\alpha_1/2 \end{aligned}$$

При переходе параметра c через ± 1 и ± 3 каждая из прямых переходит из сектора U_i , где находилась, в соседний сектор. Будем рассматривать

только $c > 0$. При изменении c в пределах $(0, 1)$ каждая из прямых находится в каком-то своем секторе и не покидает его; то же для изменения c в пределах $(1, 3)$ и $(3, +\infty)$.

Доказательство. $c \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{c+3}{2c} &\in (-\infty, -2) & \frac{c+3}{c-3} &\in (-2, -1) & \frac{c-3}{c+3} &\in (-1, -\frac{1}{2}) \\ -\frac{2c}{c+3} &\in (-\frac{1}{2}, 0) & -\frac{2c}{c-3} &\in (0, 1) & -\frac{c-3}{2c} &\in (1, +\infty) \end{aligned}$$

то есть, эти прямые лежат в указанных секторах U_i и их не покидают. $c \in (1, 3)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{c+3}{c-3} &\in (-\infty, -2) & -\frac{c+3}{2c} &\in (-2, -1) & -\frac{2c}{c+3} &\in (-1, -\frac{1}{2}) \\ \frac{c-3}{c+3} &\in (-1/2, 0) & -\frac{c-3}{2c} &\in (0, 1) & -\frac{2c}{c-3} &\in (1, \infty) \end{aligned}$$

то есть, эти прямые лежат в указанных секторах U_i и их не покидают. $c \in (3, +\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{2c}{c-3} &\in (-\infty, -2) & -\frac{2c}{c+3} &\in (-2, -1) & -\frac{c+3}{2c} &\in (-1, -\frac{1}{2}) \\ -\frac{c-3}{2c} &\in (-\frac{1}{2}, 0) & \frac{c-3}{c+3} &\in (0, 1) & \frac{c+3}{c-3} &\in (1, +\infty) \end{aligned}$$

то есть, эти прямые лежат в указанных секторах U_i и их не покидают. \square

Итак, для $c \in (0, 1)$, $c \in (1, 3)$ и $c \in (3, \infty)$ получился набор из 12 прямых и 12 секторов на плоскости (α_1, α_2) .

Лемма 3. Для каждого значения параметра c :

1. при переходе пары (α_1, α_2) из одного сектора в другой через любую критическую прямую может поменяться тип особой точки ранга 0;
2. тип особой точки изменяется только при переходе пары (α_1, α_2) через критическую прямую.

Доказательство. 1. В утверждении (2) были выписаны характеристические многочлены оператора $\Omega^{-1}d^2H$ для каждой особой точки. Это выражения вида:

$$\begin{aligned} &1/9 \cdot x^2(\alpha_j^2\alpha_k^2(\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_i)(2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a)(2\alpha_j b + \alpha_k b + 3\alpha_k a) + x^2) \cdot \\ &(\alpha_j\alpha_k(\alpha_j - \alpha_i)^2(\alpha_k - \alpha_i)^2(2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a)(2\alpha_j b + \alpha_k b + 3\alpha_k a) + 9x^2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &1/9 \cdot x^2(\alpha_j^2\alpha_k^2(\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_i)(2\alpha_j b + \alpha_k b - 3\alpha_k a)(2\alpha_k b + \alpha_j b - 3\alpha_j a) + x^2) \cdot \\ &(\alpha_j\alpha_k(\alpha_j - \alpha_i)^2(\alpha_k - \alpha_i)^2(2\alpha_j b + \alpha_k b - 3\alpha_k a)(2\alpha_k b + \alpha_j b - 3\alpha_j a) + 9x^2) \end{aligned}$$

и тип особой точки напрямую зависит от мнимости корней этих выражений. Значит, нужно проверить знак (положительность) выражений:

$$\begin{aligned} & (\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_i)(2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a)(2\alpha_j b + \alpha_k b + 3\alpha_k a) \\ & \quad \alpha_j \alpha_k (2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a)(2\alpha_j b + \alpha_k b + 3\alpha_k a) \\ & \quad \text{и} \\ & (\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_i)(2\alpha_j b + \alpha_k b - 3\alpha_k a)(2\alpha_k b + \alpha_j b - 3\alpha_j a) \\ & \quad \alpha_j \alpha_k (2\alpha_j b + \alpha_k b - 3\alpha_k a)(2\alpha_k b + \alpha_j b - 3\alpha_j a) \end{aligned}$$

Сразу видно, что знак меняется при переходе тройки $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ в пространстве через плоскости $\alpha_i = \alpha_j$, $\alpha_i = \alpha_k$, $\alpha_j = 0$, $\alpha_k = 0$. Но $\alpha_k = -\alpha_i - \alpha_j$, поэтому все это можно рассматривать на плоскости (α_i, α_j) . А в зависимости от соответствия параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и параметров $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ получаем прямые: $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_2 = -2\alpha_1$, $\alpha_2 = -\alpha_1/2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha_1$, что есть статические критические прямые.

Осталось рассмотреть, как влияют на знак выражений (1) скобки вида $(2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a)$ и $(2\alpha_j b + \alpha_k b - 3\alpha_k a)$. В зависимости от соответствия

параметров, получатся прямые $\alpha_2 = -\frac{2c}{c+3}\alpha_1$, $\alpha_2 = \frac{c-3}{c+3}\alpha_1$, $\alpha_2 = -\frac{c+3}{2c}\alpha_1$, $\alpha_2 = -\frac{c-3}{2c}\alpha_1$, $\alpha_2 = \frac{c+3}{c-3}\alpha_1$, $\alpha_2 = -\frac{2c}{c-3}\alpha_1$, где $c = b/a$, при переходе через которые может меняться знак выражений. То есть, получились все динамические критические прямые.

2. Знак выражений (1) зависит только от знаков множителей вида α_j , $\alpha_j - \alpha_i$, $2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a$, $2\alpha_k b + \alpha_j b + 3\alpha_j a$; другого типа множителей, от которых зависел бы знак, нет. Для упомянутых множителей показано, что их знак может меняться при переходе пары (α_1, α_2) через любую критическую прямую; других шансов поменять знак нет. Значит, тип критической точки может меняться только при переходе пары (α_1, α_2) через любую критическую прямую. □

4.1 Теорема о типах невырожденных особых точек при $0 < c < 1$

Теорема 3. Для $0 < c < 1$ типы особых точек $T_{i\pm}$ будут следующие:

1. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\infty < k < -\frac{c+3}{2c}$. Тогда:
 T_{1+} — центр-центр, T_{2+} — центр-центр, T_{3+} — центр-седло,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — седло-седло, T_{3-} — центр-седло.
2. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c+3}{2c} < k < -2$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-центр}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-седло}, \\ T_{1-} - \text{центр-центр}, \quad T_{2-} - \text{центр-центр}, \quad T_{3-} - \text{центр-седло}.$$

3. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-2 < k < \frac{c+3}{c-3}$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-седло}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-центр}, \\ T_{1-} - \text{центр-седло}, \quad T_{2-} - \text{центр-центр}, \quad T_{3-} - \text{центр-центр}.$$

4. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\frac{c+3}{c-3} < k < -1$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-седло}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-центр}, \\ T_{1-} - \text{центр-седло}, \quad T_{2-} - \text{седло-седло}, \quad T_{3-} - \text{центр-центр}.$$

5. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-1 < k < \frac{c-3}{c+3}$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-центр}, \quad T_{2+} - \text{центр-седло}, \quad T_{3+} - \text{центр-центр}, \\ T_{1-} - \text{седло-седло}, \quad T_{2-} - \text{центр-седло}, \quad T_{3-} - \text{центр-центр}.$$

6. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\frac{c-3}{c+3} < k < -\frac{1}{2}$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-центр}, \quad T_{2+} - \text{центр-седло}, \quad T_{3+} - \text{центр-центр}, \\ T_{1-} - \text{центр-центр}, \quad T_{2-} - \text{центр-седло}, \quad T_{3-} - \text{центр-центр}.$$

7. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{1}{2} < k < -\frac{2c}{c+3}$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-центр}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-седло}, \\ T_{1-} - \text{центр-центр}, \quad T_{2-} - \text{центр-центр}, \quad T_{3-} - \text{центр-седло}.$$

8. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{2c}{c+3} < k < 0$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-центр}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-седло}, \\ T_{1-} - \text{седло-седло}, \quad T_{2-} - \text{центр-центр}, \quad T_{3-} - \text{центр-седло}.$$

9. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $0 < k < -\frac{2c}{c-3}$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-седло}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-центр}, \\ T_{1-} - \text{центр-седло}, \quad T_{2-} - \text{центр-центр}, \quad T_{3-} - \text{седло-седло}.$$

10. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{2c}{c-3} < k < 1$. Тогда:

$$T_{1+} - \text{центр-седло}, \quad T_{2+} - \text{центр-центр}, \quad T_{3+} - \text{центр-центр}, \\ T_{1-} - \text{центр-седло}, \quad T_{2-} - \text{центр-центр}, \quad T_{3-} - \text{центр-центр}.$$

11. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $1 < k < -\frac{c-3}{2c}$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-центр}, & T_{2+} &- \text{центр-седло}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-центр}, & T_{2-} &- \text{центр-седло}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

12. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c-3}{2c} < k < +\infty$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-центр}, & T_{2+} &- \text{центр-седло}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-центр}, & T_{2-} &- \text{центр-седло}, & T_{3-} &- \text{седло-седло} \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой (3). Так как внутри каждого из указанных в теореме секторов тип критической точки не меняется, то можно выбрать конкретные значения параметров c, α_1, α_2 , соответствующие рассматриваемому сектору, и посмотреть на корни характеристических многочленов в утверждении (2). В зависимости от их мнимости определяются типы точек. \square

4.2 Теорема о типах невырожденных особых точек при $1 < c < 3$

Теорема 4. Для $1 < c < 3$ типы особых точек $T_{i\pm}$ будут следующие:

1. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\infty < k < \frac{c+3}{c-3}$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-центр}, & T_{2+} &- \text{центр-центр}, & T_{3+} &- \text{центр-седло}, \\ T_{1-} &- \text{центр-центр}, & T_{2-} &- \text{седло-седло}, & T_{3-} &- \text{центр-седло}. \end{aligned}$$

2. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\frac{c+3}{c-3} < k < -2$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{седло-седло}, & T_{2+} &- \text{центр-центр}, & T_{3+} &- \text{центр-седло}, \\ T_{1-} &- \text{центр-центр}, & T_{2-} &- \text{центр-центр}, & T_{3-} &- \text{центр-седло}. \end{aligned}$$

3. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-2 < k < -\frac{c+3}{2c}$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-седло}, & T_{2+} &- \text{центр-центр}, & T_{3+} &- \text{седло-седло}, \\ T_{1-} &- \text{центр-седло}, & T_{2-} &- \text{центр-центр}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

4. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c+3}{2c} < k < -1$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-седло}, & T_{2+} &- \text{центр-центр}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-седло}, & T_{2-} &- \text{седло-седло}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

5. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-1 < k < -\frac{2c}{c+3}$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-центр}, & T_{2+} &- \text{центр-седло}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{седло-седло}, & T_{2-} &- \text{центр-седло}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

6. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{2c}{c+3} < k < -\frac{1}{2}$. Тогда:
 T_{1+} – центр-центр, T_{2+} – центр-седло, T_{3+} – седло-седло,
 T_{1-} – центр-центр, T_{2-} – центр-седло, T_{3-} – центр-центр.
7. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{1}{2} < k < \frac{c-3}{c+3}$. Тогда:
 T_{1+} – центр-центр, T_{2+} – седло-седло, T_{3+} – центр-седло,
 T_{1-} – центр-центр, T_{2-} – центр-центр, T_{3-} – центр-седло.
8. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\frac{c-3}{c+3} < k < 0$. Тогда:
 T_{1+} – центр-центр, T_{2+} – центр-центр, T_{3+} – центр-седло,
 T_{1-} – седло-седло, T_{2-} – центр-центр, T_{3-} – центр-седло.
9. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $0 < k < -\frac{c-3}{2c}$. Тогда:
 T_{1+} – центр-седло, T_{2+} – центр-центр, T_{3+} – центр-центр,
 T_{1-} – центр-седло, T_{2-} – центр-центр, T_{3-} – седло-седло.
10. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c-3}{2c} < k < 1$. Тогда:
 T_{1+} – центр-седло, T_{2+} – седло-седло, T_{3+} – центр-центр,
 T_{1-} – центр-седло, T_{2-} – центр-центр, T_{3-} – центр-центр.
11. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $1 < k < -\frac{2c}{c-3}$. Тогда:
 T_{1+} – седло-седло, T_{2+} – центр-седло, T_{3+} – центр-центр,
 T_{1-} – центр-центр, T_{2-} – центр-седло, T_{3-} – центр-центр.
12. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{2c}{c-3} < k < +\infty$. Тогда:
 T_{1+} – центр-центр, T_{2+} – центр-седло, T_{3+} – центр-центр,
 T_{1-} – центр-центр, T_{2-} – центр-седло, T_{3-} – седло-седло.

Доказательство. Воспользуемся леммой (3). Так как внутри каждого из указанных в теореме секторов тип критической точки не меняется, то можно выбрать конкретные значения параметров c, α_1, α_2 , соответствующие рассматриваемому сектору, и посмотреть на корни характеристических многочленов в утверждении (2). В зависимости от их мнимости определяются типы точек. \square

4.3 Теорема о типах невырожденных особых точек при $3 < c < +\infty$

Теорема 5. Для $3 < c < +\infty$ типы особых точек $T_{i\pm}$ будут следующие:

1. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\infty < k < -\frac{2c}{c-3}$. Тогда:
 T_{1+} — центр-центр, T_{2+} — центр-центр, T_{3+} — центр-седло,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — центр-центр, T_{3-} — центр-седло.
2. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{2c}{c-3} < k < -2$. Тогда:
 T_{1+} — седло-седло, T_{2+} — центр-центр, T_{3+} — центр-седло,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — центр-центр, T_{3-} — центр-седло.
3. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-2 < k < -\frac{2c}{c+3}$. Тогда:
 T_{1+} — центр-седло, T_{2+} — центр-центр, T_{3+} — седло-седло,
 T_{1-} — центр-седло, T_{2-} — центр-центр, T_{3-} — центр-центр.
4. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{2c}{c+3} < k < -1$. Тогда:
 T_{1+} — центр-седло, T_{2+} — центр-центр, T_{3+} — центр-центр,
 T_{1-} — центр-седло, T_{2-} — центр-центр, T_{3-} — центр-центр.
5. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-1 < k < -\frac{c+3}{2c}$. Тогда:
 T_{1+} — центр-центр, T_{2+} — центр-седло, T_{3+} — центр-центр,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — центр-седло, T_{3-} — центр-центр.
6. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c+3}{2c} < k < -\frac{1}{2}$. Тогда:
 T_{1+} — центр-центр, T_{2+} — центр-седло, T_{3+} — седло-седло,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — центр-седло, T_{3-} — центр-центр.
7. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{1}{2} < k < \frac{c-3}{2c}$. Тогда:
 T_{1+} — центр-центр, T_{2+} — седло-седло, T_{3+} — центр-седло,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — центр-центр, T_{3-} — центр-седло.
8. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\frac{c-3}{2c} < k < 0$. Тогда:
 T_{1+} — центр-центр, T_{2+} — центр-центр, T_{3+} — центр-седло,
 T_{1-} — центр-центр, T_{2-} — центр-центр, T_{3-} — центр-седло.

9. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $0 < k < -\frac{c-3}{c+3}$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-седло}, & T_{2+} &- \text{центр-центр}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-седло}, & T_{2-} &- \text{центр-центр}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

10. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c-3}{c+3} < k < 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-седло}, & T_{2+} &- \text{седло-седло}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-седло}, & T_{2-} &- \text{центр-центр}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

11. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $1 < k < -\frac{c+3}{c-3}$. Тогда:

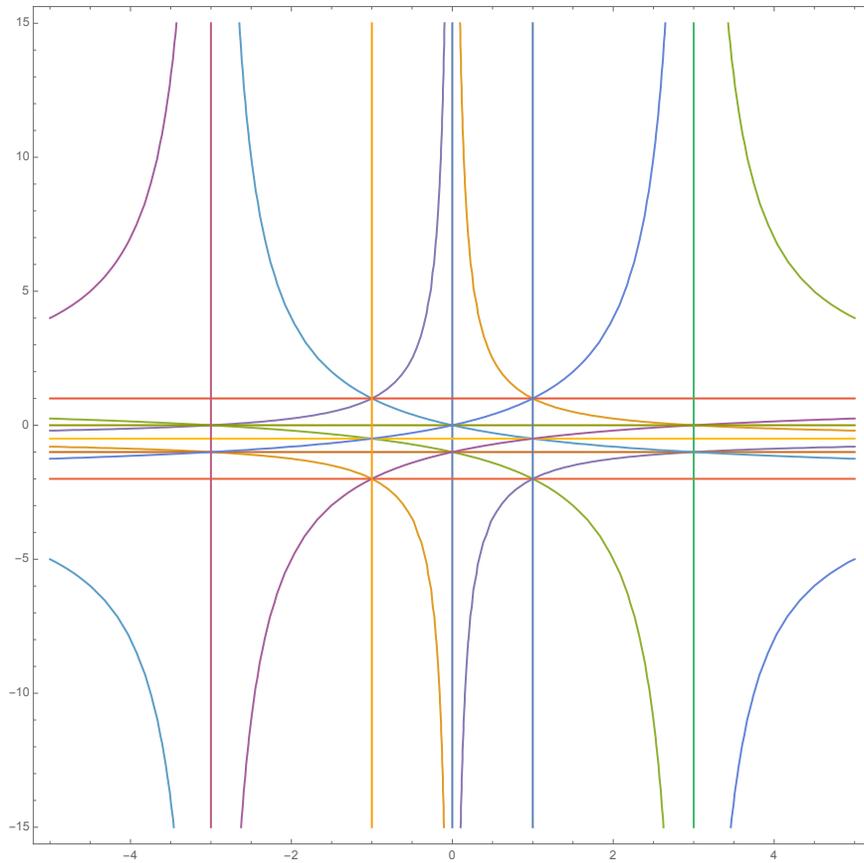
$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{седло-седло}, & T_{2+} &- \text{центр-седло}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-центр}, & T_{2-} &- \text{центр-седло}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

12. Пусть $\alpha_2 = k\alpha_1$, $-\frac{c+3}{c-3} < k < +\infty$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1+} &- \text{центр-центр}, & T_{2+} &- \text{центр-седло}, & T_{3+} &- \text{центр-центр}, \\ T_{1-} &- \text{центр-центр}, & T_{2-} &- \text{центр-седло}, & T_{3-} &- \text{центр-центр}. \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой (3). Так как внутри каждого из указанных в теореме секторов тип критической точки не меняется, то можно выбрать конкретные значения параметров c, α_1, α_2 , соответствующие рассматриваемому сектору, и посмотреть на корни характеристических многочленов в утверждении (2). В зависимости от их мнимости определяются типы точек. \square

Диаграмма, отображающая области, внутри которых тип точек сохраняется. По горизонтали отложен параметр c , по вертикали — параметр $k = \alpha_2/\alpha_1$. Параметр изменяется от -5 до 5, хотя в задаче учитывается только $c > 0$. Параметр k изменяется от -15 до 15.



Если внимательно исследовать типы точек и данный график, то можно заметить, что прямые $c = 0$, $c = \pm 1$ и $c = \pm 3$ на изменение типа точек не влияют. То есть, на самом деле области, внутри которых сохраняются типы точек, будут выглядеть следующим образом (точки расположены по названиям $P_1^+ - P_1^- - P_2^+ - P_2^- - P_3^+ - P_3^-$ либо сверху вниз, либо слева направо; в спорных моментах помогает стрелочка).

5 Оценка сверху количества различных типов Q_h^3 .

Описание топологического типа поверхности $Q_H^3 = \{H = h, dH \neq 0\}$, $h = \text{const}$, проводится следующим образом: берется отображение момента $f_2 \times H$ фазового пространства системы в плоскость \mathbb{R}^2 , где H — гамильтониан, а f_2 — инвариант алгебры $so(4)$, функция Казимира. Образ критических точек этого отображения — бифуркационная диаграмма — разбивает плоскость параметров \mathbb{R}^2 на связные области, где внутри каждой такой области сохраняется тип изоэнергетической поверхности. Q_H^3 при этом есть прообраз точек плоскости.

Рассмотрим случай Адлера—ван Мербеке. Гамильтониан зависит от трех параметров, связанных соотношением $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$; сумму можно разделить на первое слагаемое (без ограничения общности это не получится сделать, придется предположить, что исключаемый параметр $\alpha_1 \neq 0$). Получаем связь $1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$. Исключаем $\beta_3 = -1 - \beta_2$; следовательно, можно сказать, что гамильтониан уже зависит от одного параметра. Назовем его γ .

Координаты критических точек в фазовом пространстве зависят от значений функций Казимира a и b . Из предыдущих рассуждений $c = b/a$, а тип точки зависит только от отношения b к a , то есть только от значения параметра c . Значит, можно избавиться от еще одного параметра: положим $a = 1$, а $b = c$.

Итак, значение гамильтониана H зависит от двух параметров: b и γ . То есть, пространство параметров не одномерно, а двумерно. Посмотрим, какие поверхности получаются при этом.

Всего критических точек в фазовом пространстве 12, значения гамильтониана у них попарно совпадают:

$$\begin{aligned} P_1^+ &= \pm(1, 0, 0, b, 0, 0), & P_2^+ &= \pm(0, 1, 0, 0, b, 0), & P_3^+ &= \pm(0, 0, 1, 0, 0, b), \\ P_1^- &= \pm(-1, 0, 0, b, 0, 0), & P_2^- &= \pm(0, -1, 0, 0, b, 0), & P_3^- &= \pm(0, 0, -1, 0, 0, b). \end{aligned}$$

Их образы, соответственно:

$$\begin{aligned} H(P_1^+) &= \gamma(1 + \gamma)(\gamma(1 - b)^2 + \gamma^2(1 - b)^2 + 4b(1 + b)) \\ H(P_1^-) &= \gamma(1 + \gamma)(\gamma(1 + b)^2 + \gamma^2(1 + b)^2 + 4b(1 - b)) \\ H(P_2^+) &= (1 + \gamma)((1 - b)^2 + \gamma(1 - b)^2 + 4\gamma^2b(1 + b)) \\ H(P_2^-) &= (1 + \gamma)((1 + b)^2 + \gamma(1 + b)^2 + 4\gamma^2b(1 - b)) \\ H(P_3^+) &= \gamma(\gamma - 2(2 + \gamma)(1 + 2\gamma)b - (4 + \gamma(7 + 4\gamma))b^2) \\ H(P_3^-) &= \gamma(\gamma + 2(2 + \gamma)(1 + 2\gamma)b - (4 + \gamma(7 + 4\gamma))b^2) \end{aligned}$$

Эти шесть поверхностей в пространстве параметров \mathbb{R}^3 выделяют несколько связных областей. Прямая, параллельная оси значений H , пересечет поверхности по некоторым точкам (причем, зная, что эти поверхности — суть

полиномы, можно сказать, что пересечений будет не более шести), и, исследовав точки пересечения, можно выявить тип поверхности. Но для начала нужно понять, где именно находятся эти точки пересечения.

Исследовать эту задачу в пространстве неудобно и громоздко, поэтому будем делать "срезы" пространства по переменной γ (впоследствии будет представлена наглядная диаграмма связных областей). В результате при каждом значении γ мы будем получать плоскость, по одной оси которой отложены значения функции Казимира f_2 , а по другой — значения гамильтониана H .

Необходимым инструментом для изучения типа Q_H^3 является теория Морса, которая связывает топологические свойства многообразий и поведение гладких функций на нём в невырожденных критических точках. Гладкой функцией в данной ситуации будет вступать гамильтониан H .

Определение 7. Индексом критической точки x_0 называется максимальная размерность линейного подпространства в плоскости $T_{x_0}M$, на котором форма d^2H отрицательно определена.

Определение 8. Гладкая функция f на M называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены.

Утверждение 4. Гамильтониан H — функция Морса.

Лемма 4. Пусть f — функция Морса, x_0 — ее критическая невырожденная точка. Тогда в некоторой открытой окрестности точки x_0 существуют локальные регулярные координаты y_1, \dots, y_n , что в этих координатах функция f будет выглядеть следующим образом:

$$f(y) = -y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2,$$

где λ является индексом критической точки.

Теперь становится понятно, как по индексу критической точки можно что-либо сказать про поверхность Q_H^3 : если индекс некоторой точки будет равен 0, значит, это точка минимума, и в прообразе является трехмерной сферой. Если же индекс критической точки равен 4, то это точка максимума. Если индекс критической точки больше 0 и меньше 4, то рассуждать о прообразе становится тяжелее.

Утверждение 5. Количество отрицательных собственных значений матрицы — инвариант относительно замены базиса.

В данной задаче это означает, что можно не искать локальные регулярные координаты в окрестности критической точки, которые превратят матрицу оператора dH^2 в диагональную. Достаточно посчитать количество отрицательных собственных значений у самого оператора dH^2 — это и будет индексом Морса критической точки.

Подробное доказательство следующей теоремы будет дано в приложении.

Теорема 6. Для интегрируемого случая Адлера – ван Мербеке получены следующие значения индексов Морса и типы точек (точки упорядочены по убыванию, первая имеет максимальное значение гамильтониана, последняя – минимальное):

1. $-\infty < \gamma < -2$

(a) $-\infty < \gamma < -2 \quad \& \quad 0 < c < 3 \frac{-1}{2\gamma+1}$

$c < 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}.$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_3^-	P_3^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

$c > 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}.$

<i>имя</i>	P_2^+	P_3^-	P_2^-	P_3^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

(b) $-\infty < \gamma < -2 \quad \& \quad 3 \frac{-1}{2\gamma+1} < c < 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$

$c < 3 \frac{\gamma^2-2\gamma-2-2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$

<i>имя</i>	P_2^+	P_3^-	P_2^-	P_3^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$c > 3 \frac{\gamma^2-2\gamma-2-2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$

<i>имя</i>	P_2^+	P_3^-	P_2^-	P_1^+	P_3^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

(c) $-\infty < \gamma < -2 \quad \& \quad 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} < c < 3 \frac{\gamma}{\gamma+2}$

$c < 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$

<i>имя</i>	P_2^+	P_3^-	P_2^-	P_1^+	P_3^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$c > 3^{\frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_3^-	P_1^+	P_3^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$(d) \quad -\infty < \gamma < -2 \quad \& \quad 3 \frac{\gamma}{\gamma+2} < c < +\infty$$

$$c < 3^{\frac{\gamma^2-2\gamma-2+2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_3^-	P_1^+	P_3^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$c > 3^{\frac{\gamma^2-2\gamma-2+2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_3^-	P_3^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

2. $-2 < \gamma < -1$

$$(a) \quad -2 < \gamma < -1 \quad \& \quad 0 < c < 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$c < 3^{\frac{-1-4\gamma-\gamma^2-2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_1^-	P_1^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

$$c > 3^{\frac{-1-4\gamma-\gamma^2-2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_1^-	P_2^-	P_1^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$(b) -2 < \gamma < -1 \quad \& \quad 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} < c < 3 \frac{-1}{2\gamma+1}$$

$$c < 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_1^-	P_2^-	P_1^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$c > 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_1^-	P_2^-	P_3^+	P_1^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$(c) -2 < \gamma < -1 \quad \& \quad 3 \frac{-1}{2\gamma+1} < c < 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}$$

$$c < 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_1^-	P_2^-	P_3^+	P_1^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$c > 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_1^-	P_3^+	P_1^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$(d) -2 < \gamma < -1 \quad \& \quad 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2} < c < +\infty$$

$$c < 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_1^-	P_3^+	P_1^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$c > 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_2^+	P_2^-	P_1^-	P_1^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

3. $-1 < \gamma < -1/2$

(a) $-1 < \gamma < -1/2$ & $0 < c < 3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$

$$c < 3 \frac{-1-4\gamma-\gamma^2-2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_2^-	P_2^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

$$c > 3 \frac{-1-4\gamma-\gamma^2-2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_2^-	P_1^-	P_2^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

(b) $-1 < \gamma < -1/2$ & $3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma} < c < 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}$

$$c < 3 \frac{1-2\gamma-2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_2^-	P_1^-	P_2^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$c > 3 \frac{1-2\gamma-2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_2^-	P_1^-	P_3^+	P_2^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

(c) $-1 < \gamma < -1/2$ & $3 \frac{-\gamma}{\gamma+2} < c < 3 \frac{-1}{2\gamma+1}$

$$c < 3 \frac{-1-4\gamma-\gamma^2+2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_2^-	P_1^-	P_3^+	P_2^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$c > 3 \frac{-1-4\gamma-\gamma^2+2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_2^-	P_3^+	P_2^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

(d) $-1 < \gamma < -1/2$ & $3 \frac{-1}{2\gamma+1} < c < +\infty$

$$c < 3 \frac{1-2\gamma-2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_2^-	P_3^+	P_2^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$c > 3 \frac{1-2\gamma-2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_2^-	P_2^+	P_3^+	P_3^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

4. $-1/2 < \gamma < 0$

(a) $-1/2 < \gamma < 0$ & $0 < c < 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}$

$$c < 3 \frac{-\gamma^2+2\gamma+2-2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_3^-	P_3^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

$$c > 3 \frac{-\gamma^2+2\gamma+2-2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_3^-	P_1^-	P_3^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

(b) $-1/2 < \gamma < 0$ & $3 \frac{-\gamma}{\gamma+2} < c < 3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$

$$c < 3 \frac{1-2\gamma-2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_3^-	P_1^-	P_3^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$c > 3^{\frac{1-2\gamma-2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_3^-	P_1^-	P_2^+	P_3^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$(c) \quad -1/2 < \gamma < 0 \quad \& \quad 3^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} < c < 3^{\frac{1}{2\gamma+1}}$$

$$c < 3^{\frac{-\gamma^2+2\gamma+2+2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_3^-	P_1^-	P_2^+	P_3^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$c > 3^{\frac{-\gamma^2+2\gamma+2+2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_3^-	P_2^+	P_3^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$(d) \quad -1/2 < \gamma < 0 \quad \& \quad 3^{\frac{1}{2\gamma+1}} < c < +\infty$$

$$c < 3^{\frac{1-2\gamma-2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_3^-	P_2^+	P_3^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$c > 3^{\frac{1-2\gamma-2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}}$$

<i>имя</i>	P_1^+	P_1^-	P_3^-	P_3^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

5. $0 < \gamma < 1$

$$(a) 0 < \gamma < 1 \quad \& \quad 0 < c < 3 \frac{\gamma}{\gamma+2}$$

$$c < 3 \frac{-\gamma^2+2\gamma+2-2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_1^-	P_1^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

$$c > 3 \frac{-\gamma^2+2\gamma+2-2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_1^-	P_3^-	P_1^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$(b) 0 < \gamma < 1 \quad \& \quad 3 \frac{\gamma}{\gamma+2} < c < 3 \frac{1}{2\gamma+1}$$

$$c < 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2-2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_1^-	P_3^-	P_1^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$c > 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2-2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_1^-	P_3^-	P_2^+	P_1^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$(c) 0 < \gamma < 1 \quad \& \quad 3 \frac{1}{2\gamma+1} < c < 3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

$$c < 3 \frac{-\gamma^2+2\gamma+2+2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_1^-	P_3^-	P_2^+	P_1^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$c > 3 \frac{-\gamma^2+2\gamma+2+2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_1^-	P_2^+	P_1^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$(d) 0 < \gamma < 1 \quad \& \quad 3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma} < c < +\infty$$

$$c < 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_1^-	P_2^+	P_1^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-y$	$u-y$	$u-c$	$u-y$	$u-c$	$u-y$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$c > 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_1^-	P_1^+	P_2^+	P_2^-
<i>min</i>	$u-y$	$u-y$	$u-c$	$u-c$	$u-y$	$u-y$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

6. $1 < \gamma < +\infty$

$$(a) 1 < \gamma < +\infty \quad \& \quad 0 < c < 3 \frac{1}{2\gamma+1}$$

$$c < 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_2^-	P_2^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-y$	$u-y$	$u-c$	$u-c$	$u-y$	$u-y$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

$$c > 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_2^-	P_3^-	P_2^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-y$	$u-c$	$u-y$	$u-c$	$u-y$	$u-y$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$(b) 1 < \gamma < +\infty \quad \& \quad 3 \frac{1}{2\gamma+1} < c < 3 \frac{\gamma}{\gamma+2}$$

$$c < 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2-2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_2^-	P_3^-	P_2^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-y$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-y$	$u-y$
<i>ind</i>	4	3	2	1	2	0

$$c > 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2-2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_2^-	P_3^-	P_1^+	P_2^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$(c) \quad 1 < \gamma < +\infty \quad \& \quad 3 \frac{\gamma}{\gamma+2} < c < 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$c < 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_2^-	P_3^-	P_1^+	P_2^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	3	2	2	1	0

$$c > 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$$

<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_2^-	P_1^+	P_2^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$c-c$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$(d) \quad 1 < \gamma < +\infty \quad \& \quad 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} < c < +\infty$$

$$c < 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

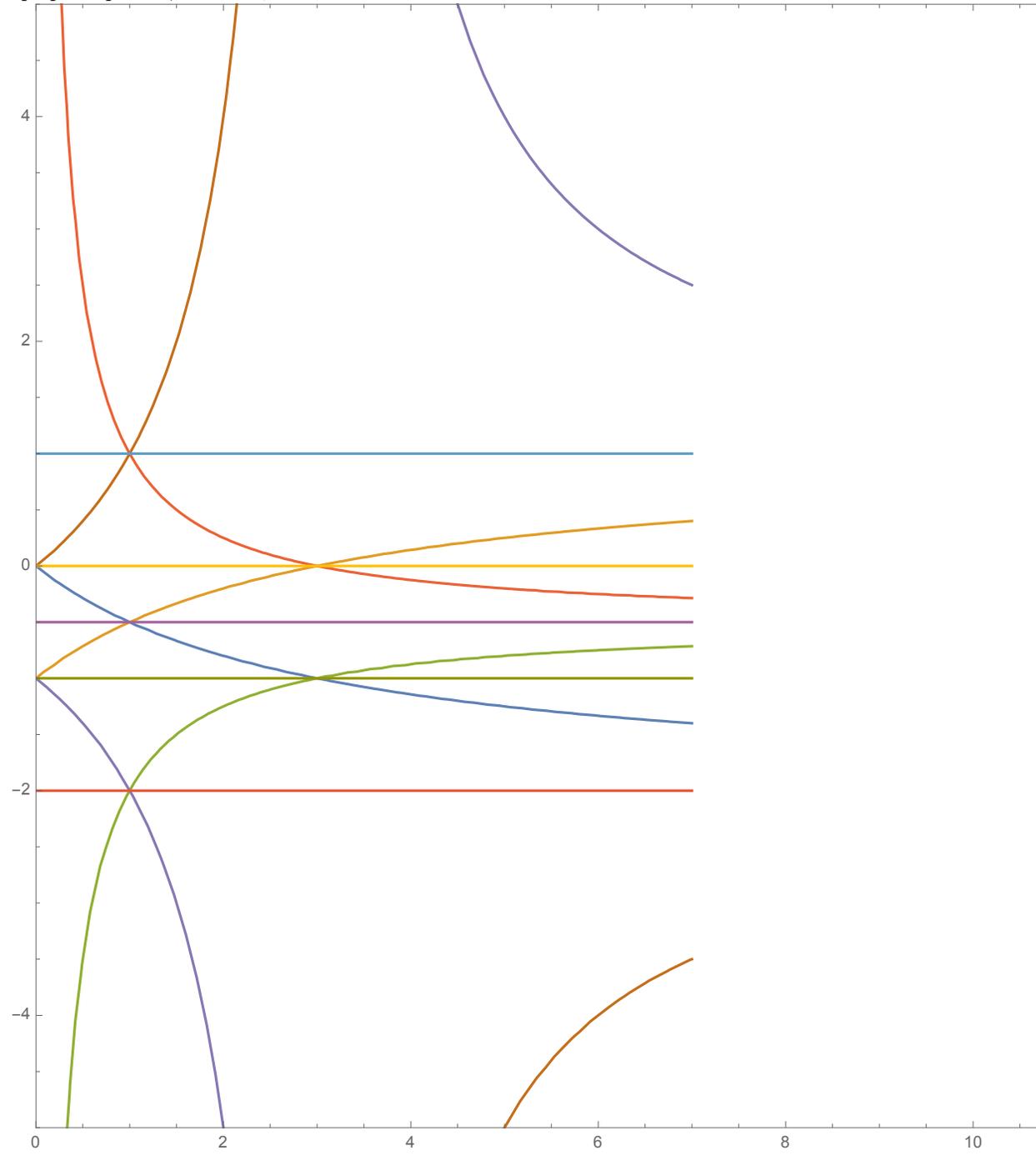
<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_2^-	P_1^+	P_2^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-u$	$u-c$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	2	1	0

$$c > 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$$

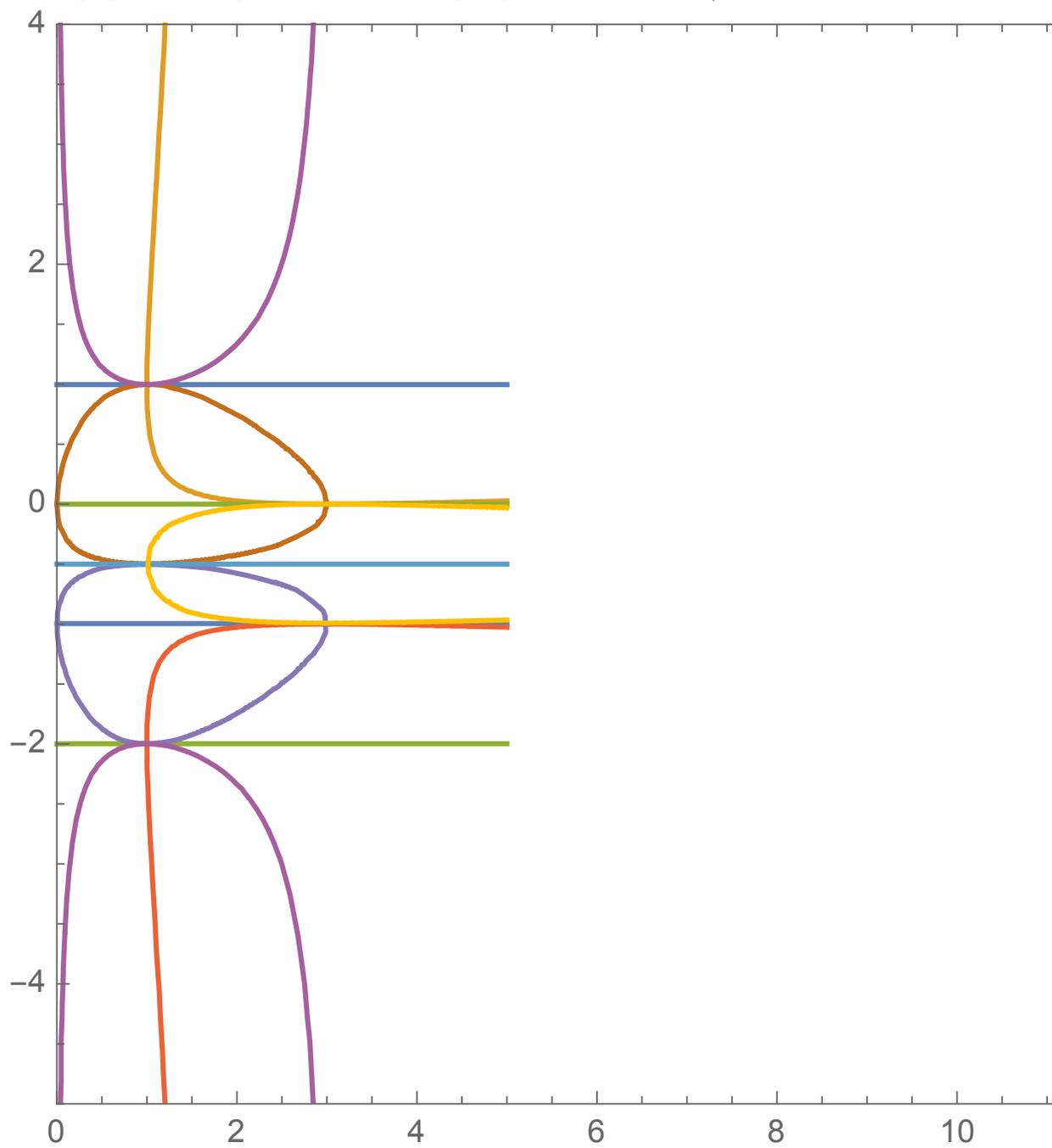
<i>имя</i>	P_3^+	P_3^-	P_2^-	P_2^+	P_1^+	P_1^-
<i>min</i>	$u-u$	$u-u$	$u-c$	$u-c$	$u-u$	$u-u$
<i>ind</i>	4	2	3	1	2	0

Чтобы изобразить все случаи взаимного расположения точек и их типов на плоскости, придется взять два графика:

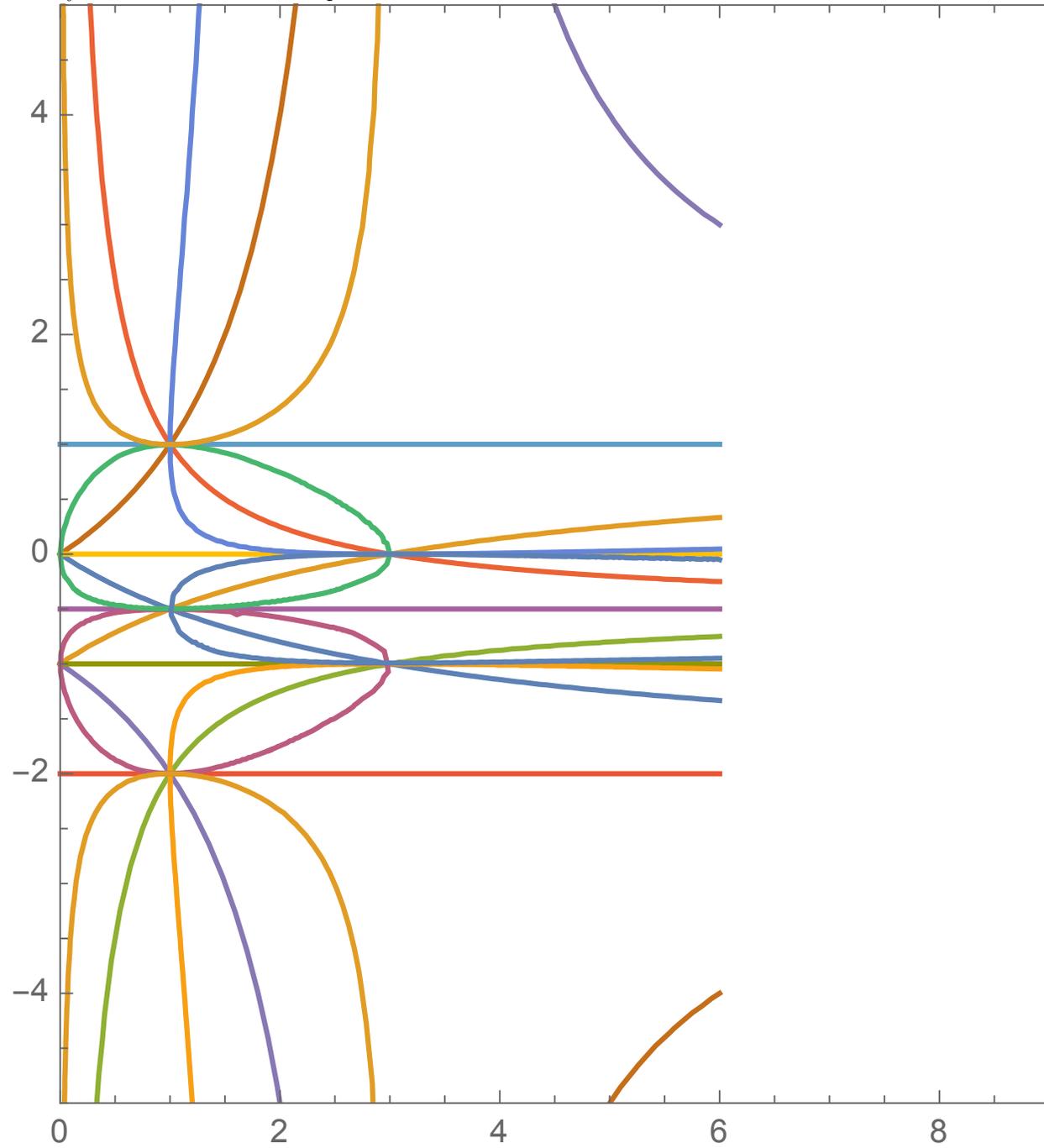
график кривых, меняющих тип:



и график кривых, переставляющих точки местами (в приложении прилагается график, на котором отмечены некоторые расположения точек):



и получить их совместное изображение:



В заключение можно сказать, что всего получается 7 различных состоя-

ний этой динамической системы с точки зрения типов точек и 4 различных состояния с точки зрения индексов Морса (точки указаны в порядке их убывания по значениям гамильтониана):

тип	ц-ц	ц-ц	ц-с	ц-с	ц-ц	ц-ц
ind	4	2	3	1	2	0

тип	ц-ц	ц-с	ц-ц	ц-с	ц-ц	ц-ц
ind	4	3	2	1	2	0

тип	ц-ц	ц-с	с-с	ц-с	ц-ц	ц-ц
ind	4	3	2	1	2	0

тип	ц-ц	ц-с	с-с	ц-ц	ц-с	ц-ц
ind	4	3	2	2	1	0

тип	ц-ц	ц-с	ц-ц	с-с	ц-с	ц-ц
ind	4	3	2	2	1	0

тип	ц-ц	ц-ц	ц-с	с-с	ц-с	ц-ц
ind	4	2	3	2	1	0

тип	ц-ц	ц-ц	ц-с	ц-ц	ц-с	ц-ц
ind	4	2	3	2	1	0

А Приложение

Индексы Морса положений равновесия

Как уже было сказано, для нахождения индексов Морса гамильтониана достаточно найти количество отрицательных собственных значений у оператора d^2H . Вообще говоря, оператор d^2H действует в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(M, S)$, тогда как собственные значения нужно искать у гамильтониана как у функции, действующей на поверхности $M_{a,b}^4$. Поэтому, найдя оператор d^2H , необходимо вычесть из него операторы d^2f_1 и d^2f_2 (где f_1 и f_2 — функции Казимира) с коэффициентами λ_1 и λ_2 , которые ищутся из соотношения $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в некоторой критической точке, затем спроектировать его на касательное пространство к поверхности в той же самой критической точке, и тогда только искать его собственные значения.

Оператор dH^2 :

$$\begin{array}{cccccc} -3(1+\gamma)^2\gamma^2 & 0 & 0 & \gamma(2+\gamma)(\gamma^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & -3(1+\gamma)^2 & 0 & 0 & 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3\gamma^2 & 0 & 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) \\ \gamma(2+\gamma)(\gamma^2-1) & 0 & 0 & \frac{1}{3}(4+4\gamma+7\gamma^2+6\gamma^3+3\gamma^4) & 0 & 0 \\ 0 & (1+2\gamma)(1-\gamma^2) & 0 & 0 & \frac{1}{3}(3+6\gamma+7\gamma^2+4\gamma^3+4\gamma^4) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(2+\gamma)(1+2\gamma) & 0 & 0 & \frac{1}{3}(4+12\gamma+19\gamma^2+12\gamma^3+4\gamma^4) \end{array}$$

1. Найдем индекс Морса для точки P_1^+ .

Касательное пространство в точке $P_1^+ = \pm(a, 0, 0, b, 0, 0)$ задается следующими векторами:

$$AP_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Равенство $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в точке P_1^+ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \gamma(1+\gamma)(-3a\gamma(1+\gamma) + b(-2+\gamma+\gamma^2)) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}(3a(-1+\gamma)\gamma(1+\gamma)(2+\gamma) + b(4+\gamma(1+\gamma)(4+3\gamma(1+\gamma)))) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из этого соотношения находим λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \gamma(1+\gamma)(-3\gamma(1+\gamma) + (b/a)(-2+\gamma+\gamma^2))/2 \\ \lambda_2 &= 1/6(3(a/b)(-1+\gamma)\gamma(1+\gamma)(2+\gamma) + (4+\gamma(1+\gamma)(4+3\gamma(1+\gamma)))) \end{aligned}$$

Оператор, у которого в итоге ищутся собственные значения, выглядит вот так:

$$AP_1^+ \cdot (d^2H - \lambda_1 d^2 f_1 - \lambda_2 d^2 f_2) \cdot (AP_1^+)^{\perp} =$$

$$\begin{pmatrix} (\gamma^2-1)(3(1+\gamma)^2 - \frac{b}{a}\gamma(2+\gamma)) & 0 & 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 & 0 \\ 0 & \gamma(2+\gamma)(\frac{b}{a}+3\gamma^2 - \frac{b}{a}\gamma^2) & 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) \\ 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 & 0 & (\gamma^2-1)((\gamma-1)^2 - 3\frac{a}{b}\gamma(2+\gamma))/3 & 0 \\ 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) & 0 & \gamma(2+\gamma)((2+\gamma)^2 - 3\frac{a}{b}(-1+\gamma^2))/3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$x_1 = -\frac{1}{6ab}\gamma(2+\gamma)(-3b^2 + 3b^2\gamma^2 + 3a^2(\gamma^2 - 1) - 2ab(2 + 2\gamma + 5\gamma^2) +$$

$$+ \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2(9a^4 + 9b^4 + 24ab(1 + 3\gamma + 2\gamma^2)(a^2 - b^2) + 2a^2b^2(17 + 88\gamma + 66\gamma^2 - 32\gamma^3 + 23\gamma^4))}$$

$$x_2 = \frac{1}{6ab}\gamma(2+\gamma)(3b^2 - 3b^2\gamma^2 - 3a^2(-1 + \gamma^2) + 2ab(2 + 2\gamma + 5\gamma^2) +$$

$$+ \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2(9a^4 + 9b^4 + 24ab(1 + 3\gamma + 2\gamma^2)(a^2 - b^2) + 2a^2b^2(17 + 88\gamma + 66\gamma^2 - 32\gamma^3 + 23\gamma^4))}$$

$$x_3 = -\frac{1}{6ab}(\gamma^2 - 1)(6b^2\gamma + 3b^2\gamma^2 + 3a^2\gamma(2 + \gamma) - 2ab(5 + 8\gamma + 5\gamma^2) +$$

$$+ \sqrt{(2 + \gamma)^2(9a^4\gamma^2 + 9b^4\gamma^2 + 24ab\gamma(1 + 2\gamma)(a^2 - b^2) + 2a^2b^2(50 + 232\gamma + 300\gamma^2 + 124\gamma^3 + 23\gamma^4))}$$

$$x_4 = -\frac{1}{6ab}(\gamma^2 - 1)(6b^2\gamma + 3b^2\gamma^2 + 3a^2\gamma(2 + \gamma) - 2ab(5 + 8\gamma + 5\gamma^2) -$$

$$- \sqrt{(2 + \gamma)^2(9a^4\gamma^2 + 9b^4\gamma^2 + 24ab\gamma(1 + 2\gamma)(a^2 - b^2) + 2a^2b^2(50 + 232\gamma + 300\gamma^2 + 124\gamma^3 + 23\gamma^4))}$$

Собственные значения x_i непрерывно зависят от своих параметров. Следовательно, достаточно найти условия, при которых происходит обнуление собственных значений, чтобы описать поведение x_i при всех значениях параметров. При помощи пакета Wolfram.Mathematica проверено, что все собственные значения P_1^+ действительны. Также при помощи пакета Wolfram.Mathematica было найдено, при каких соотношениях на параметры происходит обнуление (т.е. смена знака) собственных значений:

- (a) x_1 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = -\frac{2c}{c-3}$.
- (b) x_2 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = -\frac{2c}{c-3}$.
- (c) x_3 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = \frac{c+3}{c-3}$.
- (d) x_4 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = \frac{c+3}{c-3}$.

где $c = b/a$.

Какой именно знак они принимают на разных интервалах, я выписывать не буду, в основной работе указано, какой индекс Морса в итоге получается на разных участках. Замечу только, что знак собственные значения меняют при переходе только через те кривые, которые меняют тип критической точки.

2. Найдем индекс Морса для точки P_1^- .

Касательное пространство в точке $P_1^- = \pm(a, 0, 0, -b, 0, 0)$ задается следующими векторами:

$$AP_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Равенство $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в точке P_1^- выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \gamma(1+\gamma)(-3a\gamma(1+\gamma) - b(-2+\gamma+\gamma^2)) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}(3a(-1+\gamma)\gamma(1+\gamma)(2+\gamma) - b(4+\gamma(1+\gamma)(4+3\gamma(1+\gamma)))) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из этого соотношения находим λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = \gamma(1+\gamma)(-3\gamma(1+\gamma) - (b/a)(-2+\gamma+\gamma^2))/2$$

$$\lambda_2 = 1/6(3(-a/b)(-1+\gamma)\gamma(1+\gamma)(2+\gamma) + (4+\gamma(1+\gamma)(4+3\gamma(1+\gamma))))$$

Оператор, у которого в итоге ищутся собственные значения, выглядит вот так:

$$AP_1^- \cdot (d^2H - \lambda_1 d^2f_1 - \lambda_2 d^2f_2) \cdot (AP_1^-)^\perp =$$

$$\begin{pmatrix} (-1+\gamma^2)(3(1+\gamma)^2 + \frac{b}{a}\gamma(2+\gamma)) & 0 & -(\gamma-1)(1+\gamma)(1+2\gamma) & 0 \\ 0 & \gamma(2+\gamma)((3+\frac{b}{a})\gamma^2 - \frac{b}{a}) & 0 & \gamma(2+\gamma)(1+2\gamma) \\ -(\gamma-1)(1+\gamma)(1+2\gamma) & 0 & (\gamma^2-1)((\gamma-1)^2 + 3\frac{a}{b}\gamma(2+\gamma))/3 & 0 \\ 0 & \gamma(2+\gamma)(1+2\gamma) & 0 & \gamma(2+\gamma)((2+\gamma)^2 + 3\frac{a}{b}(\gamma^2-1))/3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{6ab}\gamma(2+\gamma)(-3b^2+3b^2\gamma^2+3a^2(\gamma^2-1)+2ab(2+2\gamma+5\gamma^2)- \\
&\quad -\sqrt{9(a^4+b^4)(\gamma^2-1)^2+24ab(b^2-a^2)(\gamma-1)^2(1+3\gamma+2\gamma^2)+2a^2b^2(17+88\gamma+66\gamma^2-32\gamma^3+23\gamma^4)}) \\
x_2 &= \frac{1}{6ab}\gamma(2+\gamma)(-3b^2+3b^2\gamma^2+3a^2(\gamma^2-1)+2ab(2+2\gamma+5\gamma^2)+ \\
&\quad +\sqrt{9(a^4+b^4)(\gamma^2-1)^2+24ab(b^2-a^2)(\gamma-1)^2(1+3\gamma+2\gamma^2)+2a^2b^2(17+88\gamma+66\gamma^2-32\gamma^3+23\gamma^4)}) \\
x_3 &= \frac{1}{6ab}(\gamma^2-1)(6b^2\gamma+3b^2\gamma^2+3a^2\gamma(2+\gamma)+2ab(5+8\gamma+5\gamma^2)- \\
&\quad -\sqrt{(2+\gamma^2)(9a^4\gamma^2+9b^4\gamma^2+24ab(b^2-a^2)\gamma(1+2\gamma))+2a^2b^2(50+232\gamma+300\gamma^2+124\gamma^3+23\gamma^4)}) \\
x_4 &= \frac{1}{6ab}(\gamma^2-1)(6b^2\gamma+3b^2\gamma^2+3a^2\gamma(2+\gamma)+2ab(5+8\gamma+5\gamma^2)+ \\
&\quad +\sqrt{(2+\gamma^2)(9a^4\gamma^2+9b^4\gamma^2+24ab(b^2-a^2)\gamma(1+2\gamma))+2a^2b^2(50+232\gamma+300\gamma^2+124\gamma^3+23\gamma^4)})
\end{aligned}$$

При помощи пакета Wolfram.Mathematica проверяем, что собственные значения всегда действительны, потом смотрим, когда они меняют знак:

- (a) x_1 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = -\frac{2c}{c+3}$.
- (b) x_2 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = -\frac{2c}{c+3}$.
- (c) x_3 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = \frac{c-3}{c+3}$.
- (d) x_4 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1, \gamma = 0, \gamma = 1, \gamma = \frac{c-3}{c+3}$.

где $c = b/a$.

То есть, знак собственные значения меняют при переходе только через те кривые, которые меняют тип критической точки.

3. Найдем индекс Морса для точки P_2^+ .

Касательное пространство в точке $P_2^+ = \pm(0, a, 0, 0, b, 0)$ задается следующими векторами:

$$AP_2^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Равенство $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в точке P_2^+ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -(1+\gamma)(3a(1+\gamma) + b(-1-\gamma+2\gamma^2)) \\ 0 \\ 0 \\ -a(-1-2\gamma+\gamma^2+2\gamma^3) + \frac{1}{3}b(3+6\gamma+7\gamma^2+4\gamma^3+4\gamma^4) \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из этого соотношения находим λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = -(1+\gamma)(3(1+\gamma) + b/a(-1+\gamma)(1+2\gamma))/2$$

$$\lambda_2 = (-a/b(-1+\gamma)(1+\gamma)(1+2\gamma) + 1/3(3+\gamma(6+\gamma(7+4\gamma(1+\gamma)))))/2$$

Оператор, у которого в итоге ищутся собственные значения, выглядит вот так:

$$AP_2^+ \cdot (d^2H - \lambda_1 d^2f_1 - \lambda_2 d^2f_2) \cdot (AP_2^+)^{\perp} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-\gamma^2)(3(1+\gamma)^2 - \frac{b}{a}(1+2\gamma)) & 0 & \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 \\ 0 & (1+2\gamma)(3+\frac{b}{a}(\gamma^2-1)) & 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) \\ \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 & (1-\gamma^2)((\gamma-1)^2 - 3\frac{a}{b}(1+2\gamma))/3 & 0 \\ 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) & 0 & (1+2\gamma)((1+2\gamma)^2 + 3\frac{a}{b}(\gamma^2-1))/3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$x_1 = -\frac{1}{6ab}(-1+\gamma^2)(-3b^2 - 6b^2\gamma - 3a^2(1+2\gamma) + 2ab(5+8\gamma+5\gamma^2) + \sqrt{(1+2\gamma)^2(9a^4+9b^4+24ab(a^2-b^2)(2+\gamma) + 2a^2b^2(23+124\gamma+300\gamma^2+232\gamma^3+50\gamma^4))})$$

$$x_2 = -\frac{1}{6ab}(-1+\gamma^2)(-3b^2 - 6b^2\gamma - 3a^2(1+2\gamma) + 2ab(5+8\gamma+5\gamma^2) - \sqrt{(1+2\gamma)^2(9a^4+9b^4+24ab(a^2-b^2)(2+\gamma) + 2a^2b^2(23+124\gamma+300\gamma^2+232\gamma^3+50\gamma^4))})$$

$$x_3 = \frac{1}{6ab}(1+2\gamma)(-3b^2 + 3b^2\gamma^2 + 3a^2(-1+\gamma^2) + 2ab(5+2\gamma+2\gamma^2) - \sqrt{(\gamma^2-1)^2(9a^4+9b^4+24ab(a^2-b^2)(2+3\gamma+\gamma^2)) + 2a^2b^2(23-32\gamma+66\gamma^2+88\gamma^3+17\gamma^4)})$$

$$x_4 = \frac{1}{6ab}(1+2\gamma)(-3b^2 + 3b^2\gamma^2 + 3a^2(-1+\gamma^2) + 2ab(5+2\gamma+2\gamma^2) + \sqrt{(\gamma^2-1)^2(9a^4+9b^4+24ab(a^2-b^2)(2+3\gamma+\gamma^2)) + 2a^2b^2(23-32\gamma+66\gamma^2+88\gamma^3+17\gamma^4)})$$

При помощи пакета Wolfram.Mathematica проверяем, что собственные значения всегда действительны, потом смотрим, когда они меняют знак:

$$(a) \quad x_1 \text{ меняет знак при } \gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = \frac{c-3}{c+3}.$$

- (b) x_2 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = \frac{c-3}{c+3}$.
- (c) x_3 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = -\frac{c-3}{2c}$.
- (d) x_4 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = -\frac{c-3}{2c}$.

где $c = b/a$.

То есть, знак собственные значения меняют при переходе только через те кривые, которые меняют тип критической точки.

4. Найдем индекс Морса для точки P_2^- .

Касательное пространство в точке $P_2^- = \pm(0, a, 0, 0, -b, 0)$ задается следующими векторами:

$$AP_2^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Равенство $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в точке P_2^- выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -(1+\gamma)(3a(1+\gamma) - b(-1-\gamma+2\gamma^2)) \\ 0 \\ 0 \\ -a(-1-2\gamma+\gamma^2+2\gamma^3) - \frac{1}{3}b(3+6\gamma+7\gamma^2+4\gamma^3+4\gamma^4) \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из этого соотношения находим λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = -(1+\gamma)(3(1+\gamma) - b/a(-1+\gamma)(1+2\gamma))/2$$

$$\lambda_2 = (a/b(-1+\gamma)(1+\gamma)(1+2\gamma) + 1/3(3+\gamma(6+\gamma(7+4\gamma(1+\gamma)))))/2$$

Оператор, у которого в итоге ищутся собственные значения, выглядит вот так:

$$AP_2^- \cdot (d^2H - \lambda_1 d^2f_1 - \lambda_2 d^2f_2) \cdot (AP_2^-)^\perp =$$

$$\begin{pmatrix} (1-\gamma^2)(3(1+\gamma)^2 + \frac{b}{a}(1+2\gamma)) & 0 & \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 \\ 0 & (1+2\gamma)(3-\frac{b}{a}(\gamma^2-1)) & 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) \\ \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 & (1-\gamma^2)((\gamma-1)^2 + 3\frac{a}{b}(1+2\gamma))/3 & 0 \\ 0 & \gamma(2+5\gamma+2\gamma^2) & 0 & (1+2\gamma)((1+2\gamma)^2 - 3\frac{a}{b}(\gamma^2-1))/3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{6ab}(-1 + \gamma^2)(3b^2 + 6b^2\gamma + a^2(3 + 6\gamma) + 2ab(5 + 8\gamma + 5\gamma^2) + \\
&+ \sqrt{(1 + 2\gamma)^2(9a^4 + 9b^4 - 24ab(a^2 - b^2)(2 + \gamma) + 2a^2b^2(23 + 124\gamma + 300\gamma^2 + 232\gamma^3 + 50\gamma^4)}) \\
x_2 &= -\frac{1}{6ab}(-1 + \gamma^2)(3b^2 + 6b^2\gamma + a^2(3 + 6\gamma) + 2ab(5 + 8\gamma + 5\gamma^2) - \\
&- \sqrt{(1 + 2\gamma)^2(9a^4 + 9b^4 - 24ab(a^2 - b^2)(2 + \gamma) + 2a^2b^2(23 + 124\gamma + 300\gamma^2 + 232\gamma^3 + 50\gamma^4)}) \\
x_3 &= -\frac{1}{6ab}(1 + 2\gamma)(-3b^2 + 3b^2\gamma^2 + 3a^2(-1 + \gamma^2) - 2ab(5 + 2\gamma + 2\gamma^2) + \\
&+ \sqrt{9(a^4 + b^4)(\gamma^2 - 1)^2 - 24ab(a^2 - b^2)(\gamma - 1)^2(2 + 3\gamma + \gamma^2) + 2a^2b^2(23 - 32\gamma + 66\gamma^2 + 88\gamma^3 + 17\gamma^4)}) \\
x_4 &= -\frac{1}{6ab}(1 + 2\gamma)(-3b^2 + 3b^2\gamma^2 + 3a^2(-1 + \gamma^2) - 2ab(5 + 2\gamma + 2\gamma^2) - \\
&- \sqrt{9(a^4 + b^4)(\gamma^2 - 1)^2 - 24ab(a^2 - b^2)(\gamma - 1)^2(2 + 3\gamma + \gamma^2) + 2a^2b^2(23 - 32\gamma + 66\gamma^2 + 88\gamma^3 + 17\gamma^4)})
\end{aligned}$$

При помощи пакета Wolfram.Mathematica проверяем, что собственные значения всегда действительны, потом смотрим, когда они меняют знак:

- (a) x_1 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = \frac{c+3}{c-3}$.
- (b) x_2 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = \frac{c+3}{c-3}$.
- (c) x_3 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = -\frac{c+3}{2c}$.
- (d) x_4 меняет знак при $\gamma = -1, \gamma = -1/2, \gamma = 1, \gamma = -\frac{c+3}{2c}$.

где $c = b/a$.

То есть, знак собственные значения меняют при переходе только через те кривые, которые меняют тип критической точки.

5. Найдем индекс Морса для точки P_3^+ .

Касательное пространство в точке $P_3^+ = \pm(0, 0, a, 0, 0, b)$ задается следующими векторами:

$$AP_3^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Равенство $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в точке P_3^+ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(-3a\gamma + b(2 + 5\gamma + 2\gamma^2)) \\ 0 \\ 0 \\ a\gamma(2 + 5\gamma + 2\gamma^2) + 1/3b(4 + 12\gamma + 19\gamma^2 + 12\gamma^3 + 4\gamma^4) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2b \end{pmatrix}$$

Из этого соотношения находим λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \gamma(-3\gamma + b/a(2 + \gamma)(1 + 2\gamma))/2 \\ \lambda_2 &= (a/b\gamma(2 + \gamma)(1 + 2\gamma) + 1/3(4 + \gamma(12 + \gamma(19 + 4\gamma(3 + \gamma)))))/2 \end{aligned}$$

Оператор, у которого в итоге ищутся собственные значения, выглядит вот так:

$$AP_3^+ \cdot (d^2H - \lambda_1 d^2f_1 - \lambda_2 d^2f_2) \cdot (AP_3^+)^{\perp} =$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma(2+\gamma)(\frac{b}{a}(1+2\gamma)+3\gamma^2) & 0 & \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 \\ 0 & -(1+2\gamma)(3+\frac{b}{a}\gamma(2+\gamma)) & 0 & 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 \\ \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 & -\gamma(2+\gamma)((2+\gamma)^2+\frac{a}{b}(3+6\gamma))/3 & 0 \\ 0 & 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 & 0 & -(1+2\gamma)(3\frac{a}{b}\gamma(2+\gamma)+(1+2\gamma)^2)/3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{6ab}\gamma(2 + \gamma)(3b^2 + 6b^2\gamma + a^2(3 + 6\gamma) + 2ab(2 + 2\gamma + 5\gamma^2) + \\ &+ \sqrt{(1 + 2\gamma)^2(9a^4 + 9b^4 + 24ab(b^2 - a^2)(-1 + \gamma)) + 2a^2b^2(17 - 20\gamma - 96\gamma^2 - 32\gamma^3 + 50\gamma^4)}) \\ x_2 &= -\frac{1}{6ab}\gamma(2 + \gamma)(3b^2 + 6b^2\gamma + a^2(3 + 6\gamma) + 2ab(2 + 2\gamma + 5\gamma^2) - \\ &- \sqrt{(1 + 2\gamma)^2(9a^4 + 9b^4 + 24ab(b^2 - a^2)(-1 + \gamma)) + 2a^2b^2(17 - 20\gamma - 96\gamma^2 - 32\gamma^3 + 50\gamma^4)}) \\ x_3 &= -\frac{1}{6ab}(1 + 2\gamma)(6b^2\gamma + 3b^2\gamma^2 + 3a^2\gamma(2 + \gamma) + 2ab(5 + 2\gamma + 2\gamma^2) + \\ &+ \sqrt{(2 + \gamma)^2(24ab(a^2 - b^2)(\gamma - 1)\gamma + 9(a^4 + b^4)\gamma^2) + 2a^2b^2(50 - 32\gamma - 96\gamma^2 - 20\gamma^3 + 17\gamma^4)}) \\ x_4 &= -\frac{1}{6ab}(1 + 2\gamma)(6b^2\gamma + 3b^2\gamma^2 + 3a^2\gamma(2 + \gamma) + 2ab(5 + 2\gamma + 2\gamma^2) - \\ &- \sqrt{(2 + \gamma)^2(24ab(a^2 - b^2)(\gamma - 1)\gamma + 9(a^4 + b^4)\gamma^2) + 2a^2b^2(50 - 32\gamma - 96\gamma^2 - 20\gamma^3 + 17\gamma^4)}) \end{aligned}$$

При помощи пакета Wolfram.Mathematica проверяем, что собственные значения всегда действительны, потом смотрим, когда они меняют знак:

$$(a) \quad x_1 \text{ меняет знак при } \gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{2c}{c+3}.$$

- (b) x_2 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{2c}{c+3}$.
- (c) x_3 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{c+3}{2c}$.
- (d) x_4 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{c+3}{2c}$.

где $c = b/a$.

То есть, знак собственные значения меняют при переходе только через те кривые, которые меняют тип критической точки.

6. Найдем индекс Морса для точки P_3^- .

Касательное пространство в точке $P_3^- = \pm(0, 0, a, 0, 0, -b)$ задается следующими векторами:

$$AP_3^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Равенство $dH = \lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2$ в точке P_3^- выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(-3a\gamma - b(2 + 5\gamma + 2\gamma^2)) \\ 0 \\ 0 \\ a\gamma(2 + 5\gamma + 2\gamma^2) - 1/3b(4 + 12\gamma + 19\gamma^2 + 12\gamma^3 + 4\gamma^4) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2b \end{pmatrix}$$

Из этого соотношения находим λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = \gamma(-3\gamma - b/a(2 + \gamma)(1 + 2\gamma))/2$$

$$\lambda_2 = (-a/b\gamma(2 + \gamma)(1 + 2\gamma) + 1/3(4 + \gamma(12 + \gamma(19 + 4\gamma(3 + \gamma)))))/2$$

Оператор, у которого в итоге ищутся собственные значения, выглядит вот так:

$$AP_3^+ \cdot (d^2H - \lambda_1 d^2f_1 - \lambda_2 d^2f_2) \cdot (AP_3^+)^{\perp} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma(2+\gamma)(\frac{b}{a}(1+2\gamma)-3\gamma^2) & 0 & \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 \\ 0 & (1+2\gamma)(-3+\frac{b}{a}\gamma(2+\gamma)) & 0 & 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 \\ \gamma(-2-\gamma+2\gamma^2+\gamma^3) & 0 & -\gamma(2+\gamma)((2+\gamma)^2-\frac{a}{b}(3+6\gamma))/3 & 0 \\ 0 & 1+2\gamma-\gamma^2-2\gamma^3 & 0 & -(1+2\gamma)(-3\frac{a}{b}\gamma(2+\gamma)+(1+2\gamma)^2)/3 \end{pmatrix}$$

Собственные значения:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{6ab}\gamma(2+\gamma)(-3b^2-6b^2\gamma-3a^2(1+2\gamma)+2ab(2+2\gamma+5\gamma^2)+ \\
&+ \sqrt{(1+2\gamma)^2(9a^4+9b^4+24ab(a^2-b^2)(-1+\gamma))+2a^2b^2(17-20\gamma-96\gamma^2-32\gamma^3+50\gamma^4)}) \\
x_2 &= -\frac{1}{6ab}\gamma(2+\gamma)(-3b^2-6b^2\gamma-3a^2(1+2\gamma)+2ab(2+2\gamma+5\gamma^2)- \\
&- \sqrt{(1+2\gamma)^2(9a^4+9b^4+24ab(a^2-b^2)(-1+\gamma))+2a^2b^2(17-20\gamma-96\gamma^2-32\gamma^3+50\gamma^4)}) \\
x_3 &= -\frac{1}{6ab}(1+2\gamma)(6b^2\gamma+3b^2\gamma^2+3a^2\gamma(2+\gamma)-2ab(5+2\gamma+2\gamma^2)+ \\
&+ \sqrt{(2+\gamma)^2(24ab(a^2-b^2)(\gamma-1)\gamma+9a^4\gamma^2+9b^4\gamma^2)+2a^2b^2(50-32\gamma-96\gamma^2-20\gamma^3+17\gamma^4)}) \\
x_4 &= -\frac{1}{6ab}(1+2\gamma)(6b^2\gamma+3b^2\gamma^2+3a^2\gamma(2+\gamma)-2ab(5+2\gamma+2\gamma^2)- \\
&- \sqrt{(2+\gamma)^2(24ab(a^2-b^2)(\gamma-1)\gamma+9a^4\gamma^2+9b^4\gamma^2)+2a^2b^2(50-32\gamma-96\gamma^2-20\gamma^3+17\gamma^4)})
\end{aligned}$$

При помощи пакета Wolfram.Mathematica проверяем, что собственные значения всегда действительны, потом смотрим, когда они меняют знак:

- (a) x_1 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{2c}{c-3}$.
- (b) x_2 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{2c}{c-3}$.
- (c) x_3 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{c-3}{2c}$.
- (d) x_4 меняет знак при $\gamma = -2, \gamma = -1/2, \gamma = 0, \gamma = -\frac{c-3}{2c}$.

где $c = b/a$.

То есть, знак собственные значения меняют при переходе только через те кривые, которые меняют тип критической точки.

Далее, благодаря непрерывности собственных значений, можно делить плоскость параметров на области и узнавать тип точки для конкретных значений параметров из каждой области.

В Приложение

Взаимное расположение критических точек гамильтониана

Всего критических точек в фазовом пространстве 12, значения гамильтониана у них попарно совпадают ($b = ca$, $a = 1$):

$$\begin{aligned} P_1^+ &= \pm(1, 0, 0, c, 0, 0), & P_2^+ &= \pm(0, 1, 0, 0, c, 0), & P_3^+ &= \pm(0, 0, 1, 0, 0, c), \\ P_1^- &= \pm(-1, 0, 0, c, 0, 0), & P_2^- &= \pm(0, -1, 0, 0, c, 0), & P_3^- &= \pm(0, 0, -1, 0, 0, c). \end{aligned}$$

Их образы, соответственно:

$$\begin{aligned} H(P_1^+) &= \gamma(1 + \gamma)(\gamma(1 - c)^2 + \gamma^2(1 - c)^2 + 4c(1 + c)) \\ H(P_1^-) &= \gamma(1 + \gamma)(\gamma(1 + c)^2 + \gamma^2(1 + c)^2 + 4c(1 - c)) \\ H(P_2^+) &= (1 + \gamma)((1 - c)^2 + \gamma(1 - c)^2 + 4\gamma^2c(1 + c)) \\ H(P_2^-) &= (1 + \gamma)((1 + c)^2 + \gamma(1 + c)^2 + 4\gamma^2c(1 - c)) \\ H(P_3^+) &= \gamma(\gamma - 2(2 + \gamma)(1 + 2\gamma)c - (4 + \gamma(7 + 4\gamma))c^2) \\ H(P_3^-) &= \gamma(\gamma + 2(2 + \gamma)(1 + 2\gamma)c - (4 + \gamma(7 + 4\gamma))c^2) \end{aligned}$$

Немного упростим задачу: будем исследовать эти функции не в $\mathbb{R}(c, \gamma, h)$, а в плоскости $\mathbb{R}(c, h)$ при $\gamma = \text{const}$. Для понимания, как именно расположены кривые на плоскости среза $\gamma = \text{const}$, найдем их пересечения:

$$H(P_1^+) - H(P_1^-) = 0 = 2(\gamma - 1)\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)c \quad (3)$$

$$H(P_1^+) - H(P_2^+) = 0 = -\frac{1}{6}(\gamma - 1)^3(\gamma + 1) \left(c - 3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 - 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2} \right) \cdot \left(c - 3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 + 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2} \right) \quad (4)$$

$$H(P_1^+) - H(P_2^-) = 0 = -\frac{1}{6}(\gamma - 1)^3(\gamma + 1) \left(c - 3 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^2 \quad (5)$$

$$H(P_1^+) - H(P_3^+) = 0 = -\frac{1}{6}\gamma(\gamma + 2)^3 \left(c - 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2} \right) \cdot \left(c - 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2} \right) \quad (6)$$

$$H(P_1^+) - H(P_3^-) = 0 = -\frac{1}{6}\gamma(\gamma + 2)^3 \left(c - 3 \frac{\gamma}{\gamma + 2} \right)^2 \quad (7)$$

$$H(P_1^-) - H(P_2^+) = 0 = -\frac{1}{6}(\gamma - 1)^3(\gamma + 1) \left(c - 3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)^2 \quad (8)$$

$$H(P_1^-) - H(P_2^-) = 0 = -\frac{1}{6}(\gamma - 1)^3(\gamma + 1) \left(c - 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(\gamma - 1)^2} \right) \cdot \left(c - 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(\gamma - 1)^2} \right) \quad (9)$$

$$H(P_1^-) - H(P_3^+) = 0 = -\frac{1}{6}\gamma(\gamma + 2)^3 \left(c - 3 \frac{-\gamma}{\gamma + 2} \right)^2 \quad (10)$$

$$H(P_1^-) - H(P_3^-) = 0 = -\frac{1}{6}\gamma(\gamma + 2)^3 \left(c - 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2} \right) \cdot \left(c - 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2} \right) \quad (11)$$

$$H(P_2^+) - H(P_2^-) = 0 = -2(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)c \quad (12)$$

$$H(P_2^+) - H(P_3^+) = 0 = -\frac{1}{6}(2\gamma + 1)^3 \left(c - 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2} \right) \cdot \left(c - 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2} \right) \quad (13)$$

$$(14)$$

$$H(P_2^+) - H(P_3^-) = 0 = -\frac{1}{6}(2\gamma + 1)^3 \left(c - 3\frac{1}{2\gamma + 1} \right)^2 \quad (15)$$

$$H(P_2^-) - H(P_3^+) = 0 = -\frac{1}{6}(2\gamma + 1)^3 \left(c - 3\frac{-1}{2\gamma + 1} \right)^2 \quad (16)$$

$$H(P_2^-) - H(P_3^-) = 0 = -\frac{1}{6}(2\gamma + 1)^3 \left(c - 3\frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2} \right).$$

$$\left(c - 3\frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2} \right) \quad (17)$$

$$H(P_3^+) - H(P_3^-) = 2\gamma(\gamma + 2)(2\gamma + 1)c \quad (18)$$

Заметим из приведенных выше выражений, что на пересечение кривых и на их взаимное расположение на плоскости влияют только лишь знаки следующих скобок:

$$(\gamma + 2) \quad (\gamma + 1) \quad (2\gamma + 1) \quad \gamma \quad (\gamma - 1),$$

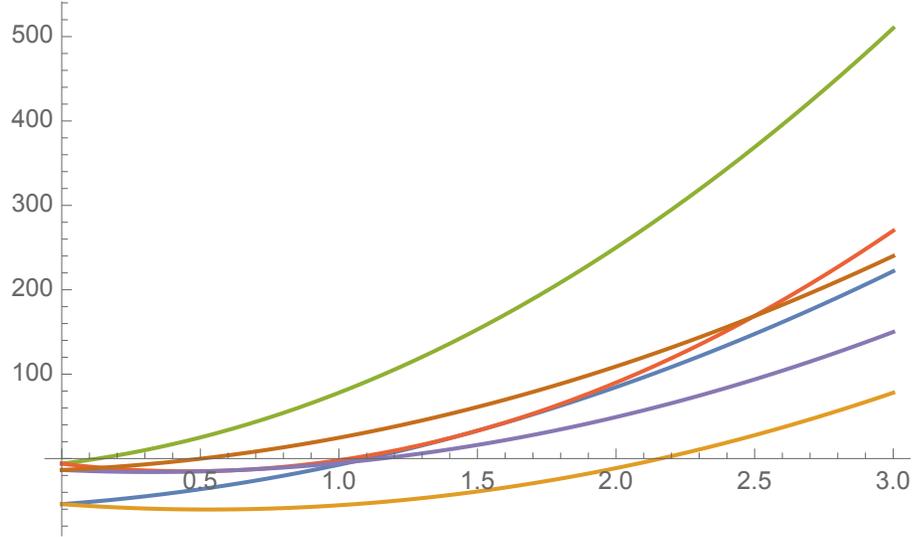
значит, качественно разных диаграмм всего 11. Приведем их.

Для наглядности окрасим кривые в следующие цвета:

1. $H(P_1^+)$ — синяя.
2. $H(P_1^-)$ — оранжевая.
3. $H(P_2^+)$ — зеленая.
4. $H(P_2^-)$ — красная.
5. $H(P_3^+)$ — фиолетовая.
6. $H(P_3^-)$ — коричневая.

По горизонтали отложен параметр c , по вертикали — значение гамильтониана H .

B.0.1 $\gamma < -2$



1. $c = 0$:

$H(P_1^-) = H(P_1^+) > H(P_3^+) = H(P_3^-) > H(P_2^-) = H(P_2^+)$, пересечения.

2. $c \in \left(0, 3 \frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right)$:

$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.

3. $c = 3 \frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$:

$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) = H(P_3^-) < H(P_2^+)$, пересечение.

4. $c \in \left(3 \frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}, 3 \frac{-1}{2\gamma+1} \right)$:

$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$.

5. $c = 3 \frac{-1}{2\gamma+1}$:

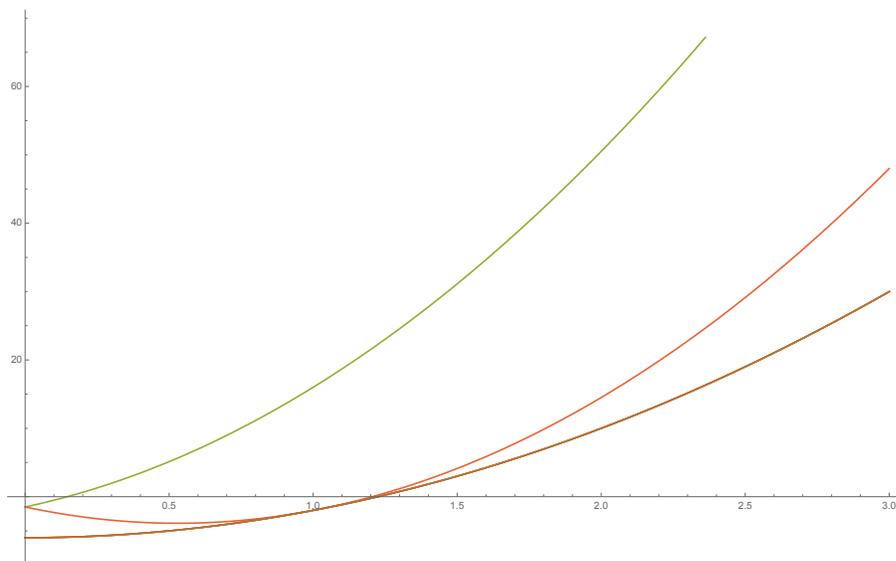
$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) = H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$, касание.

6. $c \in \left(3 \frac{-1}{2\gamma+1}, 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:

$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$.

7. $c = 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_1^+) = H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$, пересечение.
8. $c \in \left(3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$.
9. $c = 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) = H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$, касание.
10. $c \in \left(3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_2^+)$.
11. $c = 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) = H(P_3^-) < H(P_2^+)$, пересечение.
12. $c \in \left(3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}, 3 \frac{\gamma}{\gamma+2} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.
13. $c = 3 \frac{\gamma}{\gamma+2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) = H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$, касание.
14. $c \in \left(3 \frac{\gamma}{\gamma+2}, 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.
15. $c = 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_3^+) = H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$, пересечение.
16. $c \in \left(3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, +\infty \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.

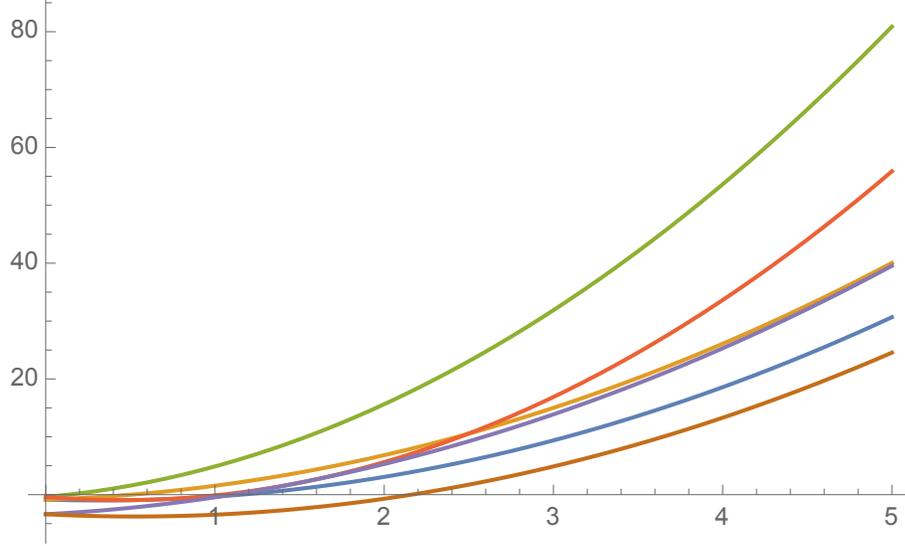
B.0.2 $\gamma = -2$



Отметим, что кривые $H(P_1^+)$, $H(P_1^-)$, $H(P_3^+)$ и $H(P_3^-)$ совпали. В описании будут для простоты исключены $H(P_1^-)$, $H(P_3^+)$ и $H(P_3^-)$.

1. $c = 0$:
 $H(P_1^+) < H(P_2^-) = H(P_2^+)$, пересечение.
2. $c \in (0, 1)$:
 $H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.
3. $c = 1$:
 $H(P_1^+) = H(P_2^-) < H(P_2^+)$, касание.
4. $c \in (1, +\infty)$:
 $H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.

B.0.3 $-2 < \gamma < -1$



1. $c = 0$:

$$H(P_3^-) = H(P_3^+) < H(P_1^+) = H(P_1^-) < H(P_2^-) = H(P_2^+), \text{ пересечения.}$$

2. $c \in \left(0, 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2} \right)$:

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+).$$

3. $c = 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$:

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_1^-) = H(P_2^-) < H(P_2^+), \text{ пересечение.}$$

4. $c \in \left(3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}, 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)$:

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+).$$

5. $c = 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$:

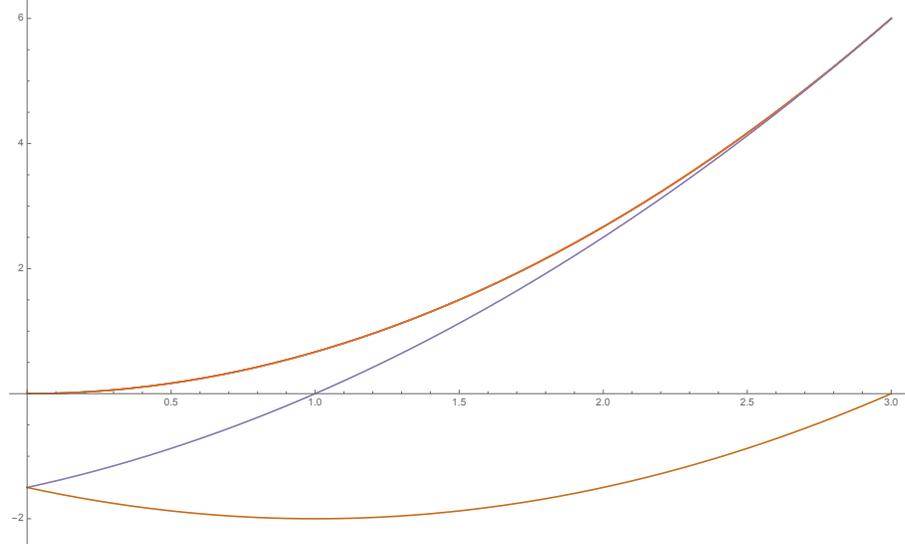
$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) = H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+), \text{ касание.}$$

6. $c \in \left(3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+).$$

7. $c = 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) = H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+)$, пересечение.
8. $c \in \left(3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, 3 \frac{-1}{2\gamma+1} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+)$.
9. $c = 3 \frac{-1}{2\gamma+1}$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) = H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+)$, касание.
10. $c \in \left(3 \frac{-1}{2\gamma+1}, 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_2^+)$.
11. $c = 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) = H(P_1^-) < H(P_2^+)$, пересечение.
12. $c \in \left(3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}, 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.
13. $c = 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) = H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$, касание.
14. $c \in \left(3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}, 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.
15. $c = 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_1^+) = H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$, пересечение.
16. $c \in \left(3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 + 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, +\infty \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_2^+)$.

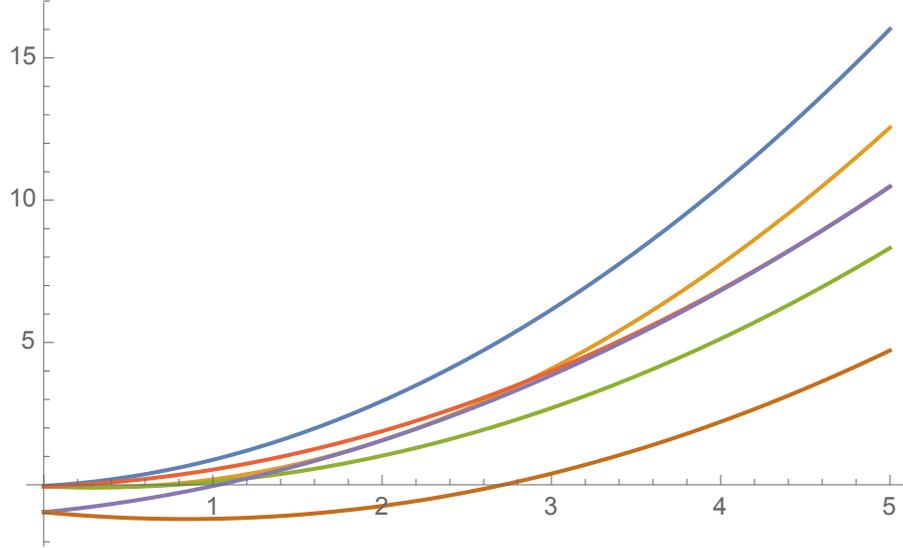
B.0.4 $\gamma = -1$



Отметим, что кривые $H(P_1^+)$, $H(P_1^-)$, $H(P_2^+)$ и $H(P_2^-)$ совпали. В описании будут для простоты исключены $H(P_1^-)$, $H(P_2^+)$ и $H(P_2^-)$.

1. $c = 0$:
 $H(P_3^-) = H(P_3^+) < H(P_1^+)$, пересечение.
2. $c \in (0, 3)$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+)$.
3. $c = 3$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) = H(P_1^+)$, касание.
4. $c \in (3, +\infty)$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_1^+)$.

B.0.5 $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$



1. $c = 0$:

$$H(P_3^-) = H(P_3^+) < H(P_2^+) = H(P_2^-) < H(P_1^-) = H(P_1^+), \text{ пересечения.}$$

$$2. c \in \left(0, 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2} \right):$$

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+).$$

$$3. c = 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}:$$

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_2^-) = H(P_1^-) < H(P_1^+), \text{ пересечение.}$$

$$4. c \in \left(3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}, 3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right):$$

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+).$$

$$5. c = 3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}:$$

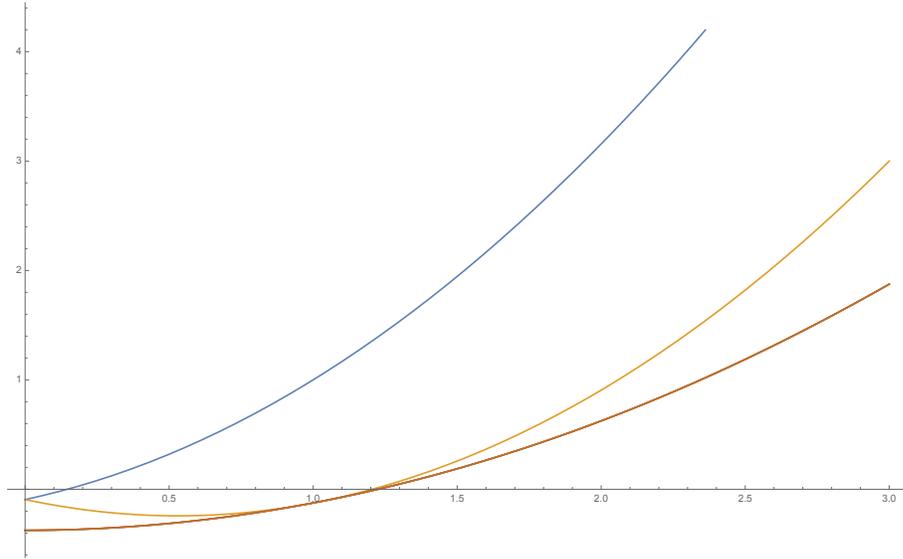
$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) = H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+), \text{ касание.}$$

$$6. c \in \left(3 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}, 3 \frac{1-2\gamma-2\gamma^2-2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right):$$

$$H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+).$$

7. $c = 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) = H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+)$, пересечение.
8. $c \in \left(3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}, 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+)$.
9. $c = 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) = H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+)$, касание.
10. $c \in \left(3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}, 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_2^-) < H(P_1^+)$.
11. $c = 3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) = H(P_2^-) < H(P_1^+)$, пересечение.
12. $c \in \left(3 \frac{-1 - 4\gamma - \gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(2\gamma+1)(\gamma+2)}}{(\gamma-1)^2}, 3 \frac{-1}{2\gamma+1} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.
13. $c = 3 \frac{-1}{2\gamma+1}$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) = H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$, касание.
14. $c \in \left(3 \frac{-1}{2\gamma+1}, 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.
15. $c = 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$:
 $H(P_3^-) < H(P_2^+) = H(P_3^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$, пересечение.
16. $c \in \left(3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}, +\infty \right)$:
 $H(P_3^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_2^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.

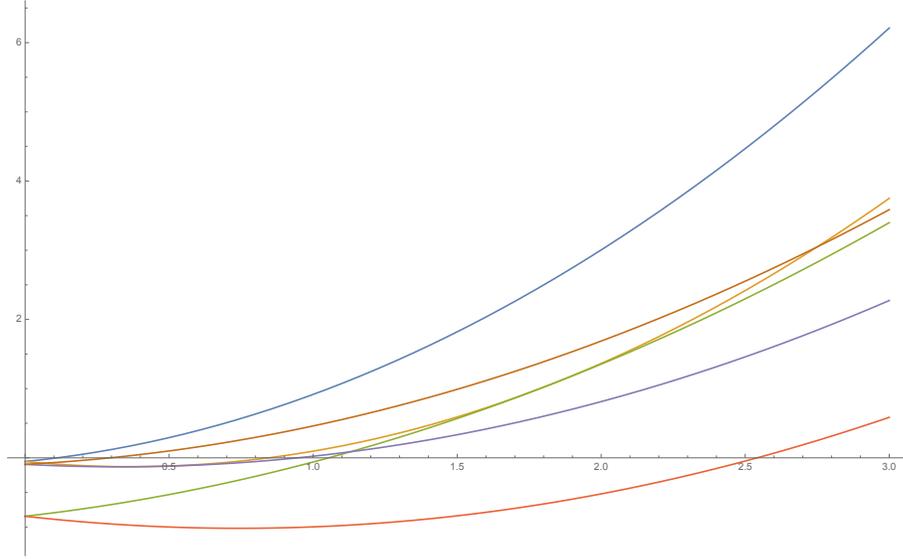
B.0.6 $\gamma = -\frac{1}{2}$



Отметим, что кривые $H(P_2^+)$, $H(P_2^-)$, $H(P_3^+)$ и $H(P_3^-)$ совпали. В описании будут для простоты исключены $H(P_2^-)$, $H(P_3^+)$ и $H(P_3^-)$.

1. $c = 0$:
 $H(P_2^+) < H(P_1^-) = H(P_1^+)$, пересечение.
2. $c \in (0, 1)$:
 $H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.
3. $c = 1$:
 $H(P_2^+) < H(P_1^-) = H(P_1^+)$, касание.
4. $c \in (1, +\infty)$:
 $H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.

B.0.7 $-\frac{1}{2} < \gamma < 0$



1. $c = 0$:

$$H(P_2^-) = H(P_2^+) < H(P_3^+) = H(P_3^-) < H(P_1^-) = H(P_1^+), \text{ пересечения.}$$

2. $c \in \left(0, 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+).$$

3. $c = 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_3^-) = H(P_1^-) < H(P_1^+), \text{ пересечение.}$$

4. $c \in \left(3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2} \right)$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+).$$

5. $c = 3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}$:

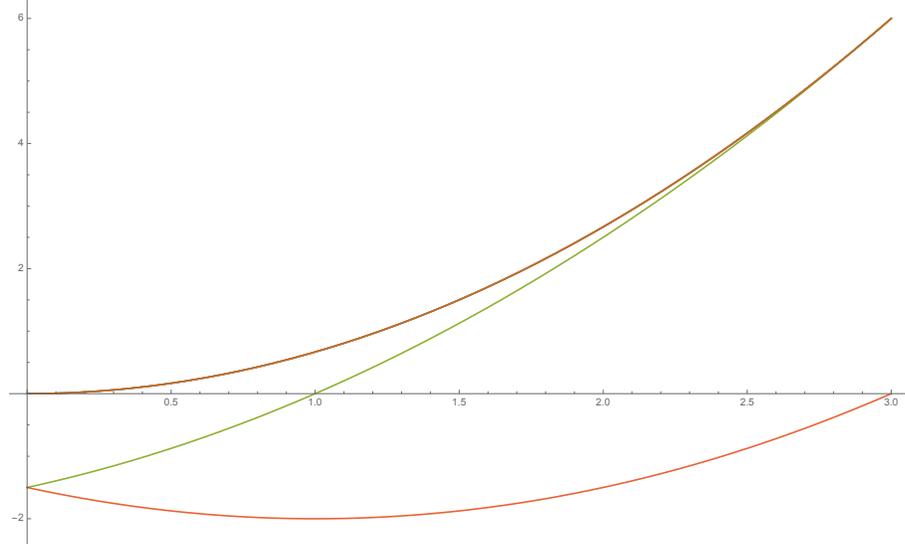
$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) = H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+), \text{ касание.}$$

6. $c \in \left(3 \frac{-\gamma}{\gamma+2}, 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right)$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+).$$

7. $c = 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2}$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) = H(P_3^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+)$, пересечение.
8. $c \in \left(3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2}, 3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+)$.
9. $c = 3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) = H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+)$, касание.
10. $c \in \left(3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}, 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_1^+)$.
11. $c = 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2}$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) = H(P_3^-) < H(P_1^+)$, пересечение.
12. $c \in \left(3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2}, 3 \frac{1}{2\gamma + 1} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.
13. $c = 3 \frac{1}{2\gamma + 1}$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) = H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$, касание.
14. $c \in \left(3 \frac{1}{2\gamma + 1}, 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.
15. $c = 3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2}$:
 $H(P_2^-) < H(P_3^+) = H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$, пересечение.
16. $c \in \left(3 \frac{1 - 2\gamma - 2\gamma^2 + 2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)(\gamma + 2)}}{(2\gamma + 1)^2}, +\infty \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_3^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_1^+)$.

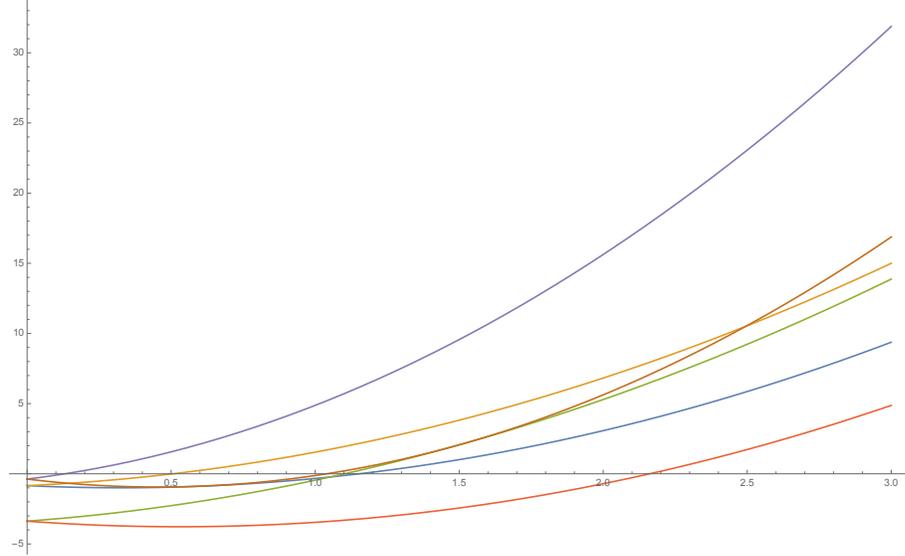
B.0.8 $\gamma = 0$



Отметим, что кривые $H(P_1^+)$, $H(P_1^-)$, $H(P_3^+)$ и $H(P_3^-)$ совпали. В описании будут для простоты исключены $H(P_1^-)$, $H(P_3^+)$ и $H(P_3^-)$.

1. $c = 0$:
 $H(P_2^-) = H(P_2^+) < H(P_1^+)$, пересечение.
2. $c \in (0, 3)$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+)$.
3. $c = 3$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) = H(P_1^+)$, касание.
4. $c \in (3, +\infty)$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+)$.

B.0.9 $0 < \gamma < 1$



1. $c = 0$:

$$H(P_2^-) = H(P_2^+) < H(P_1^+) = H(P_1^-) < H(P_3^-) = H(P_3^+), \text{ пересечения.}$$

2. $c \in \left(0, 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+).$$

3. $c = 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_1^-) = H(P_3^-) < H(P_3^+), \text{ пересечение.}$$

4. $c \in \left(3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, 3 \frac{\gamma}{\gamma+2} \right)$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+).$$

5. $c = 3 \frac{\gamma}{\gamma+2}$:

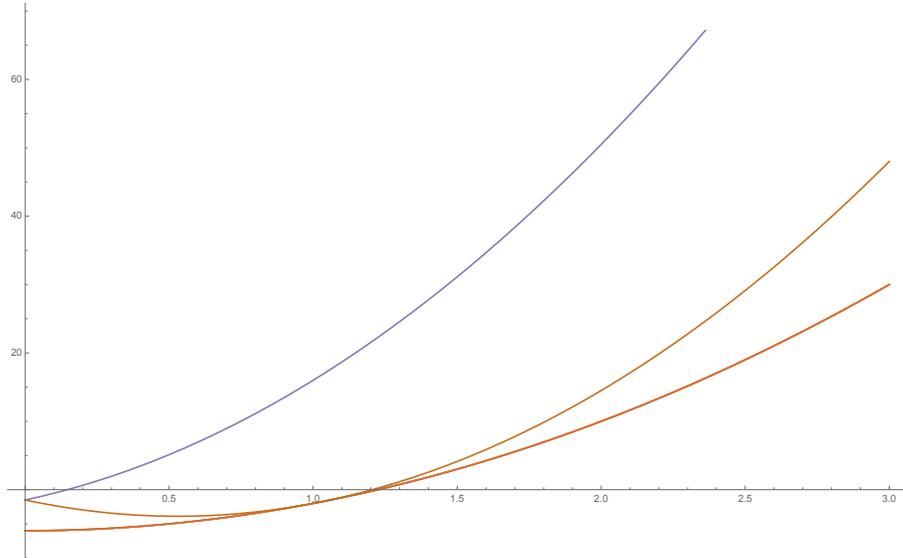
$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) = H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+), \text{ касание.}$$

6. $c \in \left(3 \frac{\gamma}{\gamma+2}, 3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 - 2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2} \right)$:

$$H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+).$$

7. $c = 3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 - 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2}$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) = H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+)$, пересечение.
8. $c \in \left(3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 - 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2}, 3 \frac{1}{2\gamma + 1} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+)$.
9. $c = 3 \frac{1}{2\gamma + 1}$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) = H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+)$, касание.
10. $c \in \left(3 \frac{1}{2\gamma + 1}, 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_1^-) < H(P_3^+)$.
11. $c = 3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2}$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) = H(P_1^-) < H(P_3^+)$, пересечение.
12. $c \in \left(3 \frac{-\gamma^2 + 2\gamma + 2 + 2\sqrt{-(\gamma - 1)(\gamma + 1)(2\gamma + 1)}}{(\gamma + 2)^2}, 3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.
13. $c = 3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) = H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$, касание.
14. $c \in \left(3 \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}, 3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 + 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2} \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.
15. $c = 3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 + 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2}$:
 $H(P_2^-) < H(P_1^+) = H(P_2^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$, пересечение.
16. $c \in \left(3 \frac{1 + 4\gamma + \gamma^2 + 2\sqrt{(\gamma + 2)\gamma(2\gamma + 1)}}{(\gamma - 1)^2}, +\infty \right)$:
 $H(P_2^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_1^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.

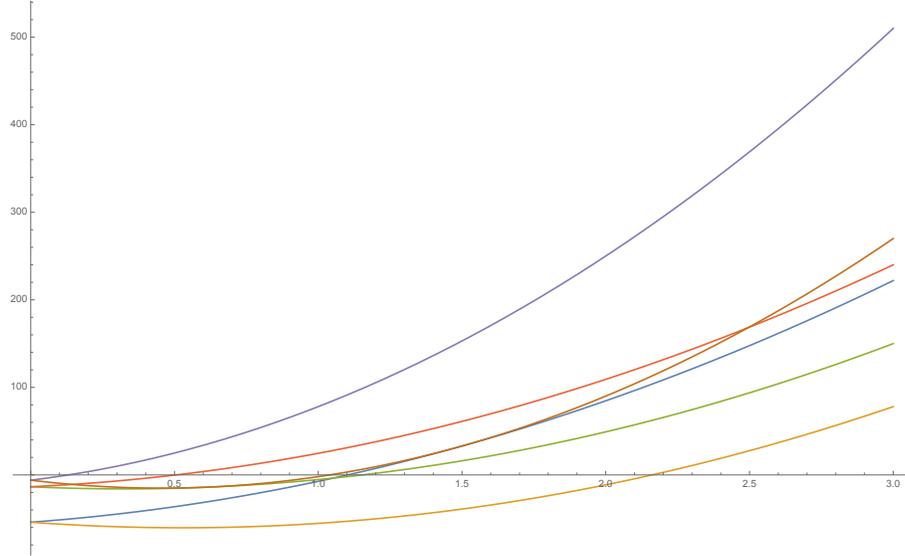
B.0.10 $\gamma = 1$



Отметим, что кривые $H(P_1^+)$, $H(P_1^-)$, $H(P_2^+)$ и $H(P_2^-)$ совпали. В описании будут для простоты исключены $H(P_1^-)$, $H(P_2^+)$ и $H(P_2^-)$.

1. $c = 0$:
 $H(P_1^+) < H(P_3^-) = H(P_3^+)$, пересечение.
2. $c \in (0, 1)$:
 $H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.
3. $c = 1$:
 $H(P_1^+) = H(P_3^-) < H(P_3^+)$, касание.
4. $c \in (1, +\infty)$:
 $H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.

B.0.11 $1 < \gamma < +\infty$



1. $c = 0$:

$$H(P_1^-) = H(P_1^+) < H(P_2^+) = H(P_2^-) < H(P_3^-) = H(P_3^+), \text{ пересечения.}$$

2. $c \in \left(0, 3 \frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right)$:

$$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+).$$

3. $c = 3 \frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$:

$$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_2^-) = H(P_3^-) < H(P_3^+), \text{ пересечение.}$$

4. $c \in \left(3 \frac{-1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}, 3 \frac{1}{2\gamma+1} \right)$:

$$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+).$$

5. $c = 3 \frac{1}{2\gamma+1}$:

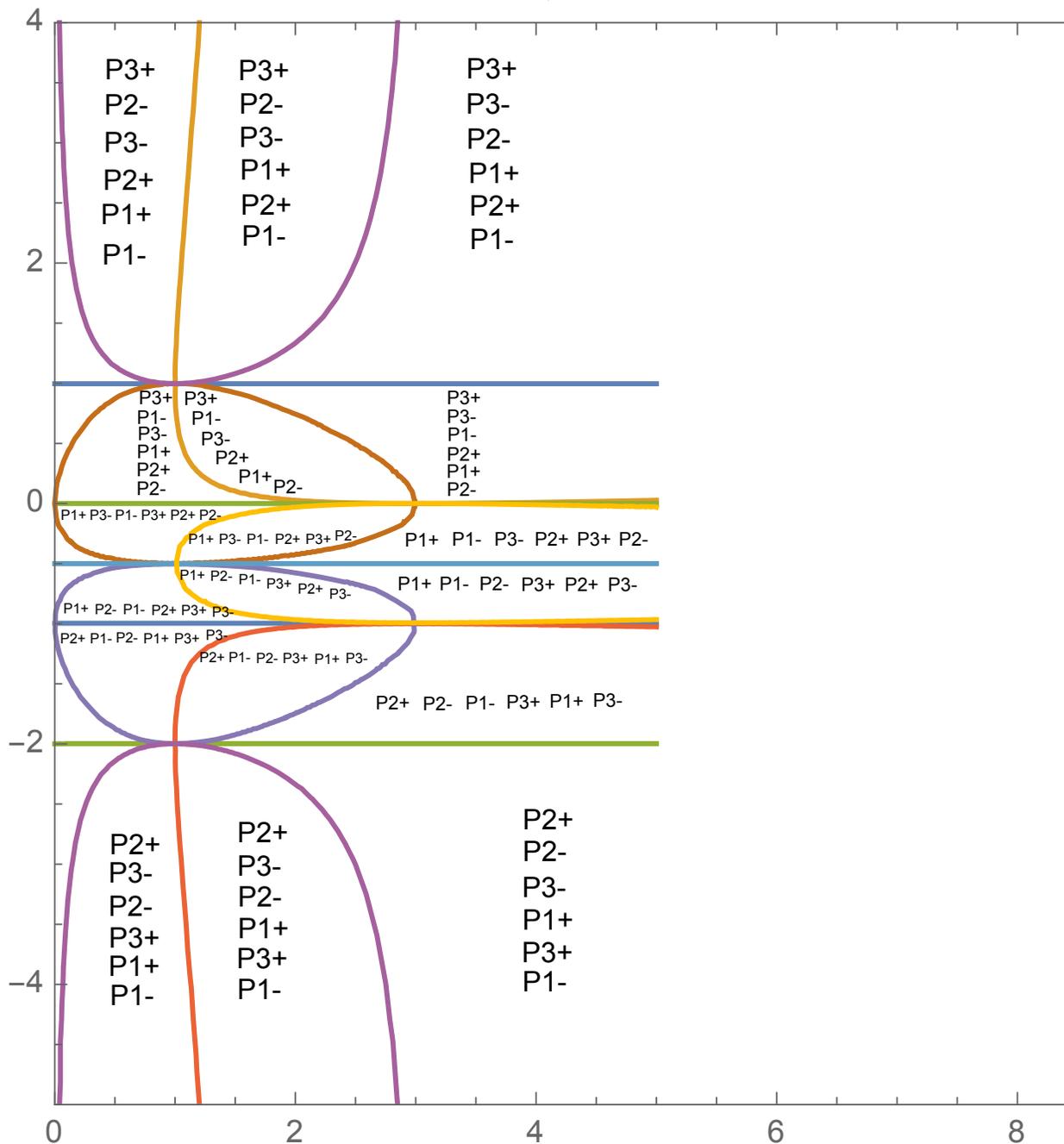
$$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) = H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+), \text{ касание.}$$

6. $c \in \left(3 \frac{1}{2\gamma+1}, 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2} \right)$:

$$H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+).$$

7. $c = 3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_1^+) = H(P_2^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+)$, пересечение.
8. $c \in \left(3 \frac{\gamma^2 - 2\gamma - 2 - 2\sqrt{-(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma+1)}}{(\gamma+2)^2}, 3 \frac{\gamma}{\gamma+2} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+)$.
9. $c = 3 \frac{\gamma}{\gamma+2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) = H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+)$, касание.
10. $c \in \left(3 \frac{\gamma}{\gamma+2}, 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) < H(P_2^-) < H(P_3^+)$.
11. $c = 3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_3^-) = H(P_2^-) < H(P_3^+)$, пересечение.
12. $c \in \left(3 \frac{-1+2\gamma+2\gamma^2+2\sqrt{\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma+2)}}{(2\gamma+1)^2}, 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.
13. $c = 3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) = H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$, касание.
14. $c \in \left(3 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2} \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) < H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.
15. $c = 3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}$:
 $H(P_1^-) < H(P_2^+) = H(P_1^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$, пересечение.
16. $c \in \left(3 \frac{1+4\gamma+\gamma^2+2\sqrt{(\gamma+2)\gamma(2\gamma+1)}}{(\gamma-1)^2}, +\infty \right)$:
 $H(P_1^-) < H(P_1^+) < H(P_2^+) < H(P_2^-) < H(P_3^-) < H(P_3^+)$.

Наглядное изображение некоторой части областей ($P_1^+ - P_1^- - P_2^+ - P_2^- - P_3^+ - P_3^-$ расположены по убыванию либо сверху вниз, либо слева направо). По горизонтали отложен параметр s , по вертикали — γ .



Список литературы

- [1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. — Изд-во УдГУ, 1999.
- [2] Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых гамильтоновых систем. — Москва, Ижевск, 2003.
- [3] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. — Москва, Ижевск, 2001.
- [4] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — Москва, Ижевск, 2005.
- [5] Mark Adler, Pierre van Moerbeke. A new geodesic flow on $so(4)^*$. — Academic Press, 1986
- [6] Логачёва Н.С. Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской-Яхьи. — Математический сборник, 2011
- [7] Морозов П.В. Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела. — Москва, 2006
- [8] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — Лань, 2010.
- [9] Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. — Издательство МГУ, 1983.
- [10] Каролинский Е.А. Теория алгебр Ли. — Харьков, 2003.
- [11] Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body. — Comm. Math. Phys., 1986.