Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Интегралы малых степеней гамильтоновых систем на разрешимых алгебрах Ли

Выполнила: Балабанова Н.А.
Научный руководитель: Фоменко А.Т.

Москва, 2017

1 Введение

В работе [3] А.В. Миловановым была высказана гипотеза:

Гипотеза 1 (Милованов) *На любой разрешимой алгебре Ли существует полный коммутативный набор полиномов не более чем второй степени.*

В этой работе мы попробуем подступиться к этой до сих пор не доказанной гипотезе с двух разных сторон. Во-первых, мы проверим гипотезу Милованова для маломерных алгебр Ли, продолжив работу, начатую Короткевичем в [1]. Во-вторых, мы посмотрим, насколько важна разрешимость в гипотезе Милованова, задавшись следующим общим вопросом:

- Какими свойствами должна обладать алгебра Ли, если на ней существует полный коммутативный набор полиномов малых степеней?

В частности, мы покажем, что наличие полного коммутативного набора из линейных и квадратичных функций не гаратирует разрешимость алгебры Ли.

Коротко опишем план работы и основные полученные результаты:

1. В разделе **Основные определения** вводятся основные необходимые в этой работе понятия.

2. В разделе **Гипотеза Милованова** доказывается гипотеза Милованова для нильпотентных алгебр Ли размерности не более чем 7.

    - Для разрешимых алгебр Ли размерности не более чем 6 искомый полный коммутативный набор был построен Короткевичем методом Садэтова в работе [1].
    - Мы построим полный коммутативный набор для семимерных нильпотентных алгебр Ли, используя метод Садетова (см [1] и [4]), и сравним полученный набор с набором, полученным Умсом в [7].

3. В разделе **Полные коммутативные наборов на полупростых алгебрах** мы исследуем полупростые алгебры Ли. Мы доказываем, что

    - для полупростых алгебр Ли не существует полных коммутативных линейных наборов (**Утверждение 2**) и
    - только у прямых сумм алгебр Ли типа A_1 (т.е. $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ в комплексном случае и $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ или $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ в действительном случае) функции Казимира можно дополнить линейными функциями до полного коммутативного набора (**Утверждение 3**)

4. В разделе **Свойства алгебр с полным коммутативным набором** мы показываем, что наличие полных коммутативных линейных наборов не гарантирует некоторых хороших свойств алгебр Ли:

- В **Замечании 4** мы строим пример алгебры с полным линейным коммутативным набором, у которой орбиты коприсоединенного представления не являются линейными подпространствами.
- В **Теореме 8** мы доказываем, что для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{s}$ существует полупрямая сумма $\mathfrak{s}\oplus_{\rho}\mathbb{K}^n$, у которой радикал будет полным коммутативным идеалом.

2 Основные определения

Определение 1 *Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ называется векторное пространство, снабженное билинейным отображением $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$:*

$$(x,y)\to[x,y],$$

удовлетворяющим следующим аксиомам:

- $[x,x]=0$;
- $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$

В нашем случае в качестве поля $\mathbb{K}$ мы рассматриваем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Данное выше определение не исключает случая бесконечномерных пространств, но все рассматриваемые далее алгебры и группы Ли будут автоматически считаться конечномерными.

Скобкой Пуассона на алгебре функций $\mathfrak{F}$ называется структура алгебры Ли на множестве $\mathfrak{F}$:

$$\{\cdot,\cdot\}\ \ \mathfrak{F}\times\mathfrak{F}\to\mathfrak{F},$$

$$f,g\ \ \to\{f,g\},$$

удовлетворяющая тождеству Лейбница:

$$\{fh,g\}=f\{h,g\}+h\{f,g\}$$

Скобкой Пуассона на многообразии называют скобку Пуассона (гладких) функций на этом многообразии.

Обозначим коалгебру Ли (пространство линейных функций на алгебре $\mathfrak{g}$) как $\mathfrak{g}^*$.

На пространстве полиномов на $\mathfrak{g}^*$ можно ввести линейную скобку Пуассона, называемую скобкой Ли-Пуассона, которая задается на линейных полиномах (которые можно отождествить с элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}$) по формулам:

$$\{x_i,x_j\}=C_{ij}^k x_k,$$

где C_{ij}^k - структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и которая продолжается на алгебру полиномов по правилу Лейбница.

Введем ещё несколько важных понятий из теории групп и алгебр Ли:

a) **Присоединенное представление** алгебры Ли $\mathfrak{g}$ – это линейное представление
$$\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}),$$
которое задается формулой
$$\mathrm{ad}_x(y) \ = \ [x, y].$$

b) **Коприсоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$**
$$\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*),$$
определяется формулой
$$< \mathrm{ad}^*_x \xi, y >= - < \xi, \mathrm{ad}_x, y >,$$
$\forall \ \xi \in \mathfrak{g}^*, x, y \in \mathfrak{g}$.

Пусть алгебра Ли соответствует группе Ли $\mathfrak{G}$. Тогда можно ввести следующие понятия:

a) **Присоединенное представление** группы Ли $\mathfrak{G}$
$$\mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$
является линеаризацией в единице действия группы Ли $\mathfrak{G}$ на себе сопряжением:
$$\mathrm{Ad}_g = (\mathrm{d}\Psi_g)_e,$$
где
$$\Psi : \mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}), \quad \Psi_g(h) = ghg^{-1}$$

b) **Коприсоединенное представление** группы Ли $\mathfrak{G}$
$$\mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$$
является сопряженным к присоединенному, то есть
$$< \mathrm{Ad}^*_g(\xi), y >=< \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} y >,$$
$\forall \ \xi \in \mathfrak{g}^*, y \in \mathfrak{g}, g \in \mathfrak{G}$.

Для произвольного $\xi \in \mathfrak{g}^*$ подпространство, называемое **аннулятором элемента** ξ, определяется следующим образом: $\mathrm{Ann}(\xi) = \{x \in \mathfrak{g} | \ \mathrm{ad}^*_x \xi = 0\}$. Элементы ξ с наименьшей размерностью аннулятора называются **элементами общего положения**.

Орбитой присоединенного представления элемента ξ называется $O(\xi) = \{\eta \in \mathfrak{g}^* \mid \eta = \mathrm{Ad}^*_g(\xi), g \in \mathfrak{G}\}$.

Определение 2 ***Индексом алгебры Ли*** $\mathfrak{g}$ *называется число* $\mathrm{ind}\ \mathfrak{g} = \min_{\xi \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathrm{Ann}(\xi)$

Определение 3 *Набор полиномов $h_1, \dots h_k$ на $\mathfrak{g}^*$ называется* ***полным коммутативным****, если выполнены следующие условия:*

1) $\{h_i, h_j\} = 0 \ \forall i, j \in 1 \dots k$

2) $h_1, \dots h_k$ *функционально независимы*

3) $k = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \mathrm{ind}\mathfrak{g})$

Размерность орбиты $O(\xi)$ равна коразмерности аннулятора

$$\dim O(\xi) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathrm{Ann}\, \xi$$

С другой стороны, число $O(\xi)$ выражается через структурные константы по формуле

$$\dim O(\xi) = \mathrm{rk}\, ||C_{ij}^k \xi_k||$$

Поэтому индекс алгебры Ли также может быть найден по формуле

$$\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = \max_{\xi} \left(\dim \mathfrak{g} - \mathrm{rk}\, ||C_{ij}^k \xi_k||\right),$$

а общее количество функций в полиномиальном наборе будет равным

$$\dim\mathfrak{g} - \frac{\mathrm{rk}\, ||C_{ij}^k \xi_k||}{2}$$

для элемента ξ общего положения.

А.С. Мищенко и А.Т.Фоменко был придуман эффективный метод построения коммутативных наборов на алгебрах Ли, названный ими методом сдвига аргумента. В частности, ими было доказано следующее утверждение:

Теорема 1 (Мищенко, Фоменко) *Пусть $\mathfrak{g}$ - произвольная конечномерная редуктивная вещественная или комплексная алгебра над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Тогда на $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Его можно обощить для произвольной алгебры:

Теорема 2 (Садэтов) *Пусть $\mathfrak{g}$ - произвольная конечномерная алгебра над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Тогда на $\mathfrak{g}^*$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

Теорема Садэтова не дает никаких ограничений на структуру коммутативного набора. С попытками построить более простой набор связана, в частности, гипотеза Милованова, обсуждаемая в этой работе.

3 Гипотеза Милованова

Гипотеза Мищенко-Фоменко была доказана авторами только для случая редуктивных алгебр. Попытки расширить класс алгебр с полиномиальными наборами были предприняты Миловановым ещё до того, как Садэтов доказал, что гипотеза Мищенко-Фоменко верна для всех конечномерных алгебр. Эти рассуждения были включены в раздел "Интегрируемость разрешимых алгебр Ли"в [3]. Основной результат, полученный Миловановым, формулируется следующим образом:

Теорема 3 (Милованов) *Любая разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ интегрируема. При этом полный иволютивный набор на $\mathfrak{g}^*$ можно выбрать из однородных аналитических функций первой степени однороности, каждая из которых выражается в явном виде в квадратурах.*

Методом, изложенным в работе Милованова, его студентами были построены полные коммутативные наборы для разрешимых алгебр размерности 3 и 4, также в ходе написания докторской диссертации им были рассмотрены алгебры более высоких размерностей - вплоть до 7. Везде возникали наборы полиномов степени не больше двух, и таким образом возникла гипотеза о существовании полного инволютивного набора из линейных и квадратичных полиномов на любой разрешимой алгебре Ли. Приведем её ещё раз:

Гипотеза 2 (Милованов) *На любой разрешимой алгебре Ли существует полный коммутативный набор полиномов не более чем второй степени.*

Предположение Милованова было частично подтверждено Короткевичем, построившим по методу Садэтова полные коммутативные наборы для алгебр Ли размерностью 6 и меньше. Результатом стала

Теорема 4 (Короткевич)

1) *На каждой трехмерной вещественой не полупростой алгебре Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

2) *На алгебре с коммутатором* $[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = e_2, [e_3, e_4] = -e_3$ *полный коммутативный набор полиномов:* $y_1, y_2, y2_y3 - y_1y_4$. *На алгебре с коммутаттором* $[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = -e_3, [e_3, e_4] = e_2$ *полный коммутативный набор полиномов:* $y_1, y_2, y_1y_4 + \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2)$. *На остальных четыремерных вещественных алгебрах Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

3) *На алгебре с коммутатором* $[e_3, e_4] = e_2, [e_3, e_5] = e_1, [e_4, e_5] = e_3$ *полный коммутативный набор:* $y_1, y_2, y_3, y_1y_4 - y_2y_5$. *На алгебре с коммутатором* $[e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_4] = e_1, [e_2, e_4] = e_2, [e_2, e_5] = -e_2, [e_3, e_5] = e_3$ *полный коммутативный набор* $y_1, y_2, y_2y_3 + y_1y_5$. *На алгебре с коммутатором* $[e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_4] = 2e_1, [e_2, e_4] = e_2, [e_3, e_4] = e_3, [e_2, e_5] = -e_3, [e_3, e_5] = e_2$ *полный коммутативный набор* $y_1, y_2, y_1y_5 + \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2)$. *На алгебре с коммутатором* $[e_1, e_2] = 2e_1, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] =$

$2e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_4] = e_4, [e_2, e_5] = -e_5, [e_3, e_5] = e_4$полный коммутативный набор $y_2y_4y_5 - y_1y_4^2 + y_3y_5^2, y_4, y_5$. На остальных пятимерных вещественных алгебрах Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.

4) *На алгебре с коммутатором $[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5$ полный коммутативный набор $y_1, y_2, y_2y_3 - y_1y_4$. На алгебре с коммутатором $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_4] = e_5, [e_3, e_4] = e_6$ полный коммутативный набор $y_4, y_5, y_6, y_2y_6 - y_3y_5$. На алгебре с коммутатором $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_4] = e_5, [e_3, e_4] = e_6$ полный коммутативный набор $y_4, y_5, y_6, y_2y_6 - y_3y_5$.На остальных шестимерных вещественных нильпотентных алгебрах Ли существует полный коммутативный набор линейных полиномов.*

Замечание 1 *Очевидно, что единственная упомянутая в теореме алгебра Ли с кубическим полиномиальным набором, то есть алгебра с коммутатором $[e_1, e_2] = 2e_1, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = 2e_3, [e_1me_4] = e_5, [e_2, e_4] = e_4, [e_2, e_5] = -e_5, [e_3, e_5] = e_4$ не является ни разрешимой, ни нильпотентной, поэтому не противоречит основной гипотезе.*

В работе [2] Крейг Сили классифицировал комплексные семимерные нильпотентные алгебры. В работе он приводит 161 таблицу, 6 из которых представляют семейства алгебр Ли с параметром.

Теорема 5 *На следующих алгебрах Ли существуют полные коммутативные наборы не больше, чем второй степени, при этом не существует полного линейного набора:*

1) $[a, b] = d,\ [a, c] = e,\ [b, c] = f$, *набор* $c, d, e, f, g, af - be$;

2) $[a, b] = c, [a, e] = d, [b, c] = e$, *набор* $c, d, e, f, g, ae - bd$;

3) $[a, b] = c, [a, c] = f, [b, c] = g, [d, e] = f$, *набор* $c, e, f, g, ag - bf$;

4) $[a, b] = c, [a, c] = f, [a, d] = g, [b, c] = g, [d, e] = f$, *набор* $c, e, f, g, ag - bf$;

5) $[a, b] = d, [a, c] = e, [a, e] = g, [b, e] = f, [c, d] = f$, *набор* $b, c, f, g, af + de$;

6) $[a, b] = d, [a, c] = e, [a, d] = g, [a, e] = g, [b, e] = f, [c, d] = f$, *набор* $b, c, f, g, af + de$;

7) $[a, b] = c, [a, c] = d, [a, d] = e, [b, c] = f, [b, d] = g, [b, e] = g, [b, f] = g, [c, d] = -g$, *набор* $d, e, f, g, ag + ce$;

8) $[a, b] = c, [a, c] = d, [a, d] = f, [b, e] = f, [b, f] = g, [c, d] = -g$, *набор* $d, e, f, g, ag + cf$;

9) $[a, b] = c, [a, c] = d, [a, e] = f, [a, f]] = g, [b, c] = e, [b, d] = f, [c, d] = g$, *набор* $d, e, f, g, bg - cf$;

10) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=g,[a,e]=f,[a,f]=g,[b,c]=e,[b,d]=f,[c,d]=g,$ *набор* $d,e,f,d,bg-cf$*;*

11) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,d]=g,[b,d]=f,[c,e]=g,$ *набор* $d,e,f,g,af-bg$*;*

12) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,d]=f,[b,e]=f,[c,d]=f,[c,e]=g,$ *набор* $a-c,d,f,g,de+bg$*;*

13) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,d]=g,[b,e]=f,[c,d]=f,[c,e]=g,$ *набор* $b,d,f,g,de+af-cg$*;*

14) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,e]=f,[b,c]=f,[b,e]=g,[c,d]=g,$ *набор* $e,d,g,f,ag-bf$*;*

15) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,d]=f,[a,e]=f,[b,c]=f,[b,e]=g,[c,d]=g,$ *набор* $d,e,f,g,bf+cf-ag$*;*

16) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[b,e]=f,[c,d]=-f,$ *набор* $d,e,f,g,fa+ce$*;*

17) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[b,c]=e,[b,e]=f,[c,d]=-f,$ *набор* $d,e,f,g,af+ce$*;*

18) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[b,c]=g,[b,e]=f,[c,d]=-f,$ *набор* $d,e,f,g,af+ce$*;*

19) $[a,b]=c,[a,e]=d,[a,d]=e,[a,e]=f,[b,c]=g,[c,d]=-g,$ *набор* $d,e,f,g,ec+ag-bf$*;*

20) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[a,e]=f,[b,c]=f,[b,e]=g,[c,d]=-g,$ *набор* $d,e,f,g,ec-ag+bf$*;*

21) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[b,c]=e+g,[b,e]=f,[c,d,]=-f,$ *набор* $d,e,f,g,af+ce$*;*

На следующих алгебрах Ли существуют полные коммутативные наборы не более, чем третьей степени:

1) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,d]=g,[a,e]=f,[b,d]=f,[c,e]=g,$ *набор* d,e,f,g,cf^2+bg^2-afg*;*

2) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[a,e]=f,[b,c]=e,[b,d]=f,[b,e]=g,[c,d]=-g,$ *набор* $d,e,f,g,cf^2-egc+bgf+ag^2$

На всех остальных нильпотентных алгерах Ли над полем $\mathbb{C}$ *существуют полные линейные коммутативные наборы.*

Все перечисленные наборы строились методом неопределенных коэффициентов, кроме наборов для последних двух алгебр - в этих случаях использовался метод Садэтова.

Данный результат может быть улучшен - так, чтобы все наборы на семимерных нильпотентных алгебрах удовлетворяли гипотезе Милованова. Это было сделано Умсом в работе [7] - для алгебр из последнего списка им были найдены полные коммутативные наборы степени два:

1) $[a,b]=d,[a,c]=e,[a,d]=g,[a,e]=f,[b,d]=f,[c,e]=g$, набор $g,f,e^2-2cg+bf,2de-bg+2af,eg+df$;

2) $[a,b]=c,[a,c]=d,[a,d]=e,[a,e]=f,[b,c]=e,[b,d]=f,[b,e]=g,[c,d]=-g$, набор $e,g,f,cg-de,d^2+2af+2bg-2ce$.

Опишем подробнее процесс построения.

Рассмотрим для начала алгебру 1). Её индекс равен трем, и центр универсальной обертывающей алгебры имеет трансцедентную размерность три, с базисом, состоящим из следующих функций: $f_1=g,f_2=f,f_3=2e^3-3d^2h+6deg-6cg^2+6cef+6bfg-6af^2$. Разложим функцию f_3 так:

$$f_3=2e^3+6g(cg-de)-3f(d^2+2af+2bg-2ce)$$

При помощи подсчета можно удостовериться, что функции $cg-de$ и $d^4+2af+2bg-2ce$ находятся в инволюции. Таким образом, мы получили полный набор.

Для алгебры 2) можно провести схожие рассуждения: центр пуассоновой алгебры порождается функциями $g,f,2cg^2-e^2g-d^2f-2agf+2bf^2$. Последняя функция также раскладывается как

$$2cg^2-e^2g-d^2f-2agf+2bf^2=g(e^2-2cg+bf)-f(2de-bg+2af)$$

Для полноты набора необходим ещё один полином. Заметим, что в наборе присутствует симметрия относительно замены $d\to e,g\to f,a\to b$. Путем подсчета также проверяется, что функция $eg+df$ коммутирует со всеми принадлежащими набору.

Замечание 2 *Наборы, полученные методом Садэтова и Умсом, являются функционально независимыми.*

Таким образом, гипотеза Милованова верна для нильпотентных алгебр размерности 7 и меньше.

4 Полные коммутативные наборов на полупростых алгебрах

Сначала сформулируем общий критерий существования полного коммутативного линейного набора на алгебре Ли.

Матрицы C_{ij}^k при фиксированном k определяются следующим образом: $C_{ij}^k=<[x_i,x_j],x^k> i,j\in 1\dots n$, где $<,>$ - значение сопряженного линейного функционала. C_{ij}^k - кососимметрические n - мерные матрицы. Ортогональным преобразованием (засчет чего мы можем рассматривать их и как билинейные формы, и как операторы на $\mathbb{R}^n$), матрица C_{ij}^k приводится к следующему виду:

$$C^k = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & \lambda_1^k \\ -\lambda_1^k & 0 \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \begin{matrix} 0 & \lambda_2^k \\ -\lambda_2^k & 0 \end{matrix} & & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} 0 & \lambda_r^k \\ -\lambda_r^k & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Обозначим через V_k подпространство $\mathbf{R}^n$, где они вырождены,а через L_k - лагранжево подпространство в той части $\mathbf{R}^n$, где эти матрицы не вырождены. Тогда выполнено следующее утверждение:

Утверждение 1 *Если* $\dim(\cap_{k=1}^n V_k \oplus L_k) = n - \frac{d}{2}$*, то коалгебра Ли* $\mathfrak{g}^*$ *будет обладать полным линейным инволютивным набором.*

Доказательство. Условие коммутирования линейных функций $a_1x^1 + \dots a_nx^n$ и $b_1x^1 + \dots b_nx^n$ записывается следующим образом:

$$\sum_{i,j,k} a_i b_j C_{ij}^k x_k = 0$$

коэффициент при каждом из x_k должен быть равен 0, поэтому равенство можно переписать

$$\sum_{i,j} a_i b_j C_{ij}^k = 0, \ k = 1 \dots n$$

Эти выражения - произведение строки $(a_1 \dots a_n)$ на матрицу C_{ij}^k на столбец $(b_1 \dots b_n)$ (при фиксированном k). Таким образом, если все векторы в наборе ортогональны относительно всех матриц C_{ij}^k или одна из них зануляет какую-либо из этих матриц, т.е. если набор полностью содержится в $(\cap_{k=1}^n V_k \oplus L_k)$, то он коммутативен.

Для нужного количества функций размерности должны быть равны требуемым $n - \frac{d}{2}$. ∎

Замечание 3 *Для алгебр Ли малой размерности (например, четыре или пять) подпространства* L_k*, как правило, довольно легко угадываются и являются линейной оболочкой нескольких функций из базиса.*

Очевидным следующим шагом будет попытка рассмотреть хорошо изученный класс алгебр - такие, как простые и полупростые алгебры Ли - и посмотреть, обладают ли они полным линейным инволютивным набором.

Для упрощения рассуждений нам понадобится следующее свойство полупростых алгебр Ли.

Любая полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых. Известно, что для прямой суммы алгебр Ли $\mathfrak{G} = \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2$ выполняются следующие равенства:

$$\mathrm{dim}\mathfrak{G} = \mathrm{dim}\mathfrak{V}_1 + \mathrm{dim}\mathfrak{V}_2$$

$$\mathrm{ind}\mathfrak{G} = \mathrm{ind}\mathfrak{V}_1 + \mathrm{ind}\mathfrak{V}_2$$

Из этих рассуждений можно заключить, что полный коммутативный набор на полупростой алгебре будет объединением коммутативных наборов по всем её простым подалгебрам, и поэтому любые его свойства достаточно проверить отдельно для всех типов простых алгебр.

В работе [6] были приведены коммутативные подалгебры наибольшей размерности для различных полупростых алгебр Ли (через $\alpha(\mathfrak{g})$ обозначается размерность максимальной коммутативной подалгебры в алгебре $\mathfrak{g}$):

$\mathfrak{g}$	$\dim(\mathfrak{g})$	$\alpha(\mathfrak{g})$
$A_n, n \geq 1$	$n(n+2)$	$\lfloor(\frac{n+1}{2})^2\rfloor$
B_3	21	5
$B_n, \geq 4$	n(2n + 1)	$\frac{n(n-1)}{2} + 1$
$C_n, n \geq 2$	n(2n + 1)	$\frac{n(n+1)}{2}$
$D_n, n \geq 4$	n(2n - 1)	$\frac{n(n-1)}{2}$
G_2	14	3
F_4	52	9
E_6	78	16
E_7	133	27
E_8	248	36

Так как подалгебры полупросты, то форма Киллинга на них невырождена, а, следовательно, орбиты коприсоединенного представления диффеоморфны орбитам присоединенного, то индекс каждой из этих алгебр равен её рангу, то есть размерности картановской подалгебры: для алгебры с нижним индексом n он будет равен n.

Тогда число функций в полном коммутативном наборе должно быть равно:

$$A_n : \frac{n(n+2)+n}{2} = \frac{n(n+3)}{2} > \lfloor(\frac{n+1}{2})^2\rfloor$$

$$B_n : \frac{n(2n+1)+n}{2} = n(n+1) > \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

$$C_n : \frac{n(2n+1)+n}{2} = n(n+1) > \frac{n(n+1)}{2}$$

$$D_n : \frac{n(2n-1)+n}{2} = n^2 > \frac{n(n-1)}{2}$$

Аналогичные неравенства выполняются для $B_3, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$. Отсюда следует

Утверждение 2 *Для полупростых комплексных алгебр Ли не существует полных коммутативных линейных наборов.*

Введем определение, необходимое нам для дальнейших рассуждений:

Определение 4 ***Инвариантом коприсоединенного представления группы Ли*** *называется функция f,постоянная на орбитах коприсоединенного представления, т.е. функция f, для которой выполняется равенство: $f(\mathrm{Ad}_g^*(\xi)) = f(x)\ \forall \xi \in \mathfrak{g}, g \in \mathfrak{G}$.*

У полупростых алгебр количество инвариантов равно коразмерности орбиты общего положения, и, следовательно, орбиты разделяются этими инвариантами. Более того, инварианты будут полиномиальными функциями (их можно выбрать даже однородными, см [7]).

Поскольку ответ на вопрос о количестве инвариантов в общем случае дан для простых и полупростых алгебр, то возникает следующий вопрос: если невозможно построить полный линейный набор на алгебрах этих типов, то, может быть, функциональный набор, состоящий из инвариантов коприсоединенного представления, можно дополнить линейными функциями до полного коммутативного?

Утверждение 3 *Множество инвариантов полупростой алгебры можно дополнить до полного функционального набора только в случае алгебр вида $\bigoplus\limits_n A_1$.*

Доказательство.

Количество линейных коммутирующих функций, которые нужно добавить до полного коммутативнго набора, равно $\frac{\dim\mathfrak{G}+\mathrm{ind}\mathfrak{G}}{2}-\mathrm{ind}\mathfrak{G} = \frac{\dim\mathfrak{G}-\mathrm{ind}\mathfrak{G}}{2}$, и его нужно сравнить с максимальным количеством коммутирующих линейных функций. Проведем подсчеты для всех простых алгебр:

$$A_n : \frac{n(n+2)-n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \geq \lfloor (\frac{n+1}{2})^2 \rfloor$$

Равенство достигается при $n = 1$, поэтому дополнить можно для алгебр вида $\bigoplus\limits_n A_1$.

$$B_n : \frac{n(2n+1)-n}{2} = n^2 > \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

при $n \geq 4$

$$C_n : \frac{n(2n+1)-n}{2} = n^2 > \frac{n(n+1)}{2}$$

при $n \geq 2$

$$D_n : \frac{n(2n-1)-n}{2} = (n-1)^2 > \frac{n(n-1)}{2}$$

Из неравенств видно, что для всех остальных типов простых алгебр линейных функций не хватает. ∎

5 Свойства алгебр с полным коммутативным линейным набором

Несмотря на то, что требование наличия полного коммутативного линейного наборя является очень сильным, даже оно не может гарантировать "хороших"свойств алгебры. В частности, оно не дает дополнительной информации о геометрии орбит. Более того, как мы увидим далее, даже условие наличия в алгебре полного коммутативного идеала не упрощает её структуру в общем случае.

Замечание 4 *Даже в тех алгебрах Ли, где существует полный коммутативный набор, орбиты не обязательно являются подпространствами.*

Доказательство. Заметим, что если орбита является подпространством, то её можно отделить при помощи линейных функций. Тогда данные линейные функции будут постоянны на орбите. Следовательно, алгебра должна иметь центр размерности $n - \dim O(f)$, где f -элемент общего положения из $\mathfrak{g}^*$. Контрпримером к этому утверждению может служить алгебра Ли со следующим коммутатором:

0	0	0	0	e_1
0	0	0	0	ae_2
0	0	0	0	be_3
0	0	0	0	ce_4
$-e_1$	$-ae_2$	$-be_3$	$-c_e4$	0

Параметры удовлетворяют следующим соотношениям: $a, b, c, \in [-1, 1], abc \neq 0$. Полный коммутативный набор для данной алгебры состоит из следующих функций: y_1, y_2, y_3, y_4. Ранг матрицы равен размерности орбиты и равен 2. Но, как можно непосредственно проверить, центра эта алгебра не имеет.

■

Теперь предположим, что комммутативный набор в алгебре является также идеалом.

Для начала сделаем несколько общих замечаний.

Теорема 6 (Разложение Леви) *Каждая конечномерная действительная алгебра Ли представляется в виде полупрямой суммы (по представлению ρ) полупростой алгебры и разрешимого радикала.*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{ss} \oplus_\rho \mathrm{rad}\mathfrak{g}$$

Очевидно, что коммутативный идеал должен лежать в радикале, и матрица коммутаторов должна иметь следующий вид (предполагаем, что базис в идеале образуют векторы f_j, дополняющиеся до базиса радикала векторами

g_j):

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{g}_{ss} & a_{ij}^k f_k + b_{ij}^k g^k & c_{ij}^k g^k \\ \hline -(a_{ij}^k f_k + b_{ij}^k g^k) & d_{ij}^k g^k + m_{ij}^k f^k & e_{ij}^k g^k \\ \hline -c_{ij}^k g^k & -e_{ij}^k g^k & 0 \end{array}\right)$$

Для того, чтобы идеал имел нужную нам размерность, необходимо, чтобы подматрица, описывающая действие радикала и полупростой подалгебры на идеал, имела наибольший возможный ранг, т.е чтобы орбита элемента общего положения элемента из идеала при присоединенном представлении имела размерность, равную сумме размерности полупростой алгебры и радикала, профакторизованного по идеалу.

Пример 1

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(3)$ и её представление, состоящее из прямой суммы двух классических матричных представлений:

$$e_1 \to \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$e_2 \to \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$e_3 \to \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Элементарным подсчетом проверяется, что размерность орбиты элемента общего положения в $\mathbb{R}^6$ будет равна трем. Обозначим базис в $\mathbb{R}^6$ как $f_1, f_2, \ldots f_6$ и рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{so}(3) \oplus_\rho \mathbb{R}^6$ по этому представлению:

$$\begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 & 0 & f_3 & -f_2 & 0 & f_6 & f_5 \\ -e_3 & 0 & e_1 & -f_3 & 0 & f_1 & -f_6 & 0 & f_4 \\ e_2 & -e_1 & 0 & f_2 & -f_1 & 0 & f_5 & -f_4 & 0 \\ 0 & f_3 & -f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_3 & 0 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & -f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_6 & -f_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_6 & 0 & f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_5 & -f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен 6, поэтому полный коммутативный набор должен состоять из $9 - \frac{6}{2} = 6$ функций. Линейные функции $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ дают искомый линейный набор, являющийся, к тому же, идеалом.

Теперь приведем рассуждения в общем случае - и рассмотрим для начала более простую структуру -когда алгебра представляет из себя полупрямую сумму полупростой алгебры и линейного пространства. В этом случае матрица коммутаторов имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{g}_{ss} & a_{ij}^k f_k \\ \hline -(a_{ij}^k f_k) & 0 \end{array}\right)$$

Орбита элемента линейного пространства при присоединенном представлении полупростой алгебры должна иметь ту же размерность, что и полупростая группа (т.е. ту же размерность, что и полупростая алгебра). Ответ на вопрос о том, когда это возможно, даёт следующая теорема из [8]:

Теорема 7 (Винберг, Элашвили) *Пусть $\mathfrak{G}$ -полупростая группа Ли. Если для всех простых нормальных делителей группы выполнено условие*

$$\frac{\mathrm{tr} X^2}{\mathrm{tr}(\mathrm{ad} X^2)} > 1,$$

то размерность орбиты элемента общего положения максимальна.

Следствие для простых групп формулируется более простым образом:

Следствие 1 *Для неприводимой простой группы Ли $\mathfrak{G}$ следующие условия равносильны:*

- *Размерность пространства представления $n > \dim\mathfrak{G}$,*
- *Максимальная размерность орбиты элемента равна размерности группы.*

На основе этого формулируется

Теорема 8 *Для каждой полупростой алгебры Ли существует число n и представление в $\mathbb{R}^n$, что базис $\mathbb{R}^n$ будет образовывать полный коммутативный идеал в полученной алгебре. Более того, минимальная размерность такого пространства не будет превышать суммы размерности алгебры и количества простых алгебр в ней.*

Доказательство. Представим полупростую алгебру как сумму простых. Для каждой из простых алгебр существует линейное пространство и представление, для которого орбита элемента общего положения будет равна размерности самой алгебры. В качестве общего представления и пространства возьмем прямую сумму по всем простым алгебрам. Из того факта, что минимальная размерность, в которой мы умеем строить представление простой алгебры с максимальной размерностью орбиты, на единицу превышает размерность алгебры, получается второе утверждение. ■

Второй более простой случай представляет из себя разрешимую алгебру Ли с полным коммутативным идеалом. Условия, эквивалентные его наличию, были сформулированы Умсом в [9]:

Теорема 9 (Ooms) *Для разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следующие условия эквивалентны:*

- *Существует идеал размерности* $\frac{\mathrm{ind}\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}}{2}$
- *Существует цепочка подалгебр* $\mathfrak{g} = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m$, *где* $\dim L_m = \frac{\mathrm{ind}\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}}{2}$ *и* $\dim L_{i+1} = \dim L_i - 1$, $\mathrm{ind} L_{i+1} = \mathrm{ind} L_i + 1$.

Список литературы

[1] Короткевич А. А. Алгоритм построения распределения градиентов и полные наборы на алгебрах Ли малой размерности, дипломная работа, 2007

[2] Craig Seeley, 7-dimentional nilpotent Lie algebras, transactions of american mathematical society, Volume 335, Number 2, February 1993.

[3] Милованов М. В. Однородные пространства разрешимых групп Ли и вполне интегрируемые гамильтоновы системы, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Минск, 2015

[4] Трофимов В. В. Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений, изд. Факториал, 1995

[5] A.V.Bolsinov, Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture, https://arxiv.org/pdf/1206.3882.pdf

[6] Dietrich Burde, Manuel Ceballos,Abelian ideals of maximal dimension for solvable Lie algebras, https://arxiv.org/abs/0911.2995

[7] Alfons I. Ooms, The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven, Journal of Algebra 365 (2012) 83–113

[8] Е. М. Андреев, Э. Б. Винберг, А. Г. Элашви- ли, Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли, Функц. анализ и его прил., 1967, том 1, выпуск 4, 3–7

[9] Alexander G. Elashvili, Alfons I.Ooms, On commutative Polarizations,https://arxiv.org/abs/math/0302229