

Московский Государственный университет им М. В. Ломоносова

механико-математический факультет

кафедра дифференциальной геометрии и приложений

ДИПЛОМ

Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов
(Modeling of optimal networks by means of linkages).

Выполнила студентка 631 группы

Житная Марина

Научный руководитель: профессор

А. А. Тужилин

Москва 2017 г.

Аннотация

Основным результатом данной работы является описание построения шарнирного механизма, строящего кратчайшую сеть для множества из n точек на плоскости.

Введение

Настоящая работа посвящена моделированию оптимальных геометрических графов с помощью шарнирных механизмов.

Под шарнирными механизмами будем понимать конструкции, состоящие из твердых тел, связанных между собой так, что некоторые из них могут свободно вращаться вокруг некоторых общих точек. Шарнирные механизмы часто встречаются в повседневной жизни. К ним относятся многие предметы обихода, начиная с простых, таких как ножницы, дверные петли, настольная лампа, и заканчивая сложными конструкциями, составляющими части поездов, автомобилей или подвижных роботов. Самый близкий нам пример шарнирного механизма — это, пожалуй, скелет человека: твердые кости соединены между собой суставами, позволяя человеку двигаться [9], [11], [12], [13], [14]. В настоящей работе мы будем рассматривать частный случай шарнирных механизмов, выбирая в качестве твердых тел прямые стержни.

Основное внимание уделяется построению при помощи шарнирных механизмов кратчайшей сети для граничного множества из n точек евклидовой плоскости. Известно, что эта сеть будет деревом, которое помимо границы может содержать еще и дополнительные вершины, и степень любой из вершин не превосходит 3. В ходе работы были описаны конструкции элементарных механизмов, использованные для сборки основного пространственного механизма, который позволяет двигать вершины рассматриваемых сетей по плоскому диску так, что кратчайшие сети оказываются в заранее заданной плоскости. Граничные вершины исходного множества могут двигаться независимо друг от друга, и для каждого их расположения механизм реализует минимальное дерево Штейнера. Таким образом, построенный механизм реализует минимальные деревья Штейнера для всех классов подобия граничных вершин, т.е. фактически дает полное решение проблемы Штейнера в терминах шарнирных механизмов.

Отметим, что при рассмотрении проблемы Штейнера на других нормирован-

ным плоскостей структура кратчайшей сети может оказаться гораздо сложнее, чем в случае евклидовой плоскости, см., например, [16], [17], [18], [18], [19]. Кроме того, для нормированных плоскостей, отличных от евклидовой плоскости, автору пока не известно, существуют ли алгоритмы построения кратчайших сетей, аналогичные алгоритму Мелзака. Ю.В.Акашева в своей дипломной работе построила прямой ход алгоритма Мелзака для 3-нормированной плоскости. Однако при обратном ходе возникают трудности, связанные с тем, что пару точек на 3-нормированной плоскости соединяет, вообще говоря, бесконечно много кратчайших.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. А. Тужилина за постановку задачи, постоянное внимание к работе, критические замечания и ценные советы, а также профессора А. О. Иванова за наставничество и помощь.

Работа поддержана Программой Президента РФ поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-6399.2018.1, соглашение 075–02–2018–867.

1 Основные определения и предварительные результаты

В настоящей работе мы будем рассматривать простые конечные графы $G = (V, E)$, где V — множество вершин, а E — множество ребер [15].

Приведем основные понятия, необходимые для формулировки проблемы Штейнера, см. например [1], [2], [8]. *Границей ∂G графа $G = (V, E)$* будем называть некоторое подмножество в V , содержащее все вершины степени 1 и 2. Вершины, входящие в ∂G , называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины графа G — *внутренними* или *подвижными*. *Деревом Штейнера* называется каждое дерево (с границей), степени вершин которого не превосходят 3.

Пусть $\varphi: \partial G \mapsto \mathbb{R}^d$ — произвольное отображение. *Обобщенной сетью типа (G, φ)* назовем каждое отображение $\Gamma: V \mapsto \mathbb{R}^d$, ограничение которого на ∂G совпадает с φ . Ограничение отображения Γ на вершины и ребра графа G называются соответственно *вершинами* и *ребрами обобщенной сети Γ* . *Длиной ребра $\Gamma: vw \mapsto \mathbb{R}^d$* , соединяющего вершины $\Gamma: v \mapsto \mathbb{R}^d$ и $\Gamma: w \mapsto \mathbb{R}^d$, назовем расстояние $|\Gamma(v)\Gamma(w)|$ между точками $\Gamma(v)$ и $\Gamma(w)$ пространства \mathbb{R}^d , а *длиной $\ell(\Gamma)$ обобщенной сети Γ* — сумму длин ее ребер. Ребра нулевой длины называются *вырожденными*, все остальные

ребра — невырожденными, а сеть, не содержащая вырожденных ребер, — невырожденной. Рассматривая смежные ребра как отрезки в \mathbb{R}^d , мы можем определить углы между такими ребрами, положив их равными углам между соответствующими отрезками. Если граф G — связный, то обобщенную сеть Γ назовем просто *сетью*.

Рассмотрим всевозможные деревья Штейнера, множества вершин которых являются начальными отрезками натурального ряда, а числа от 1 до n — граничными вершинами. Два таких дерева назовем *эквивалентными*, если между ними существует изоморфизм, неподвижный на границе $\{1, \dots, n\}$. Выберем в каждом классе эквивалентности по одному (любому) элементу, и множество выбранных деревьев Штейнера обозначим через \mathcal{T}_n . Отметим, что множество \mathcal{T}_n конечно.

Для данного непустого конечного множества $M \subset \mathbb{R}^d$ и числа $n \geq \#M$ обозначим через $\mathcal{B}_n(M)$ семейство всевозможных сюръективных отображений $\varphi: \{1, \dots, n\} \mapsto M$. Для каждого $G \in \mathcal{T}_n$ и $\varphi \in \mathcal{B}_n(M)$ рассмотрим множество $[G, \varphi]$ сетей типа (G, φ) в пространстве \mathbb{R}^d . Так как каждая сеть из $[G, \varphi]$ однозначно задается положениями своих внутренних вершин, множество $[G, \varphi]$ естественным образом отождествляется с пространством \mathbb{R}^{dk} , где k — количество внутренних вершин дерева G . Это отождествление задает структуру линейного пространства на $[G, \varphi]$ и, тем самым, позволяет говорить о непрерывности, выпуклости и т.д. функций, определенных на $[G, \varphi]$.

На множестве $[G, \varphi]$ определен функционал длины $l: [G, \varphi] \mapsto \mathbb{R}$, сопоставляющий каждой сети $\Gamma \in [G, \varphi]$ ее длину $l(\Gamma)$. Так как он непрерывный, выпуклый и при стремлении вершин к бесконечности его значение стремится к бесконечности, а пространство \mathbb{R}^{dk} является ограниченно компактным, то функционал l принимает наименьшее значение $l_{G, \varphi}$, причем множество его минимумов — выпуклое компактное подмножество \mathbb{R}^{dk} , которое мы обозначим через $[G, \varphi]_{\min}$.

Далее, положим $\text{smt}(M) = \min\{l_{G, \varphi} : G \in \mathcal{T}_n, \varphi \in \mathcal{B}_n(M)\}$. Величина $\text{smt}(M)$ равна длине минимального дерева Штейнера, соединяющего $M \subset \mathbb{R}^d$, см. [8]. Каждая сеть Γ с границей из $\mathcal{B}_n(M)$, для которой $l(\Gamma) = \text{smt}(M)$, называется *минимальной сетью Штейнера* или *кратчайшей сетью*. Из сказанного выше мгновенно вытекает, что в \mathbb{R}^d минимальные сети Штейнера существуют для любых конечных подмножеств M . Кроме того, среди всех минимальных сетей Штейнера с данной с данной границей всегда имеются невырожденные сети, причем в них углы между любыми смежными ребрами не меньше 120° (назовем это *свойством 120°*). Отметим также, что сеть из $[G, \varphi]_{\min}$ может удовлетворять свойству 120° , но не быть при этом минимальным деревом Штейнера. Невырожденные сети из всевозможных $[G, \varphi]_{\min}$,

удовлетворяющие свойству 120° будем называть *локально минимальными* и обозначать через $\Gamma_{G,\varphi}$.

1.1 Алгоритм Мелзака

Будем называть дерево Штейнера *полным*, если оно не содержит граничных вершин степени больше 1. Каждый максимальный по включению подграф дерева Штейнера, который является полным деревом Штейнера, называется *полной компонентой дерева Штейнера*. Алгоритм Мелзака [2] проверяет для данного полного дерева Штейнера G и инъективной границы φ , будет ли для него существовать локально минимальное дерево $\Gamma_{G,\varphi}$ и, если да, то строит положение внутренних вершин дерева $\Gamma_{G,\varphi}$. Если граф G не является полным, то *результатом действия алгоритма Мелзака* будем называть результат его применения ко всем полным компонентам.

Пара $\{e_1, e_2\}$ смежных ребер, имеющих общую внутреннюю вершину S и выходящих из граничных вершин P_1 и P_2 полного дерева Штейнера G или соответствующей сети Γ , называется *усами*, а пара $\{P_1, P_2\}$ — *вершинами усов* $\{e_1, e_2\}$. Если в полном дереве Штейнера (соответствующей сети) больше двух вершин, то имеется по крайней мере двое усов. Классический алгоритм Мелзака состоит из двух частей: прямого и обратного ходов. Прямой ход последовательно перестраивает исходное дерево, выбирая произвольные усы, отрезая их, и относя общую вершину ребер усов к граничной вершине результирующего дерева. Также прямой ход перестраивает граничное множество, заменяя пару вершин, в которую должны приходиться усы, на третью вершину одного из двух правильных треугольников, построенных на этих вершинах. При этом общая вершина усов ставится в соответствии этой третьей вершине. Прямой ход останавливается, когда перестроенное дерево превращается в одноресное, и, значит, граничное отображение продолжено на все вершины исходного дерева, т.е. построена некоторая сеть Γ_1 . Обратный ход последовательно возвращает на место отрезанные усы, изменяя специальным образом отображение Γ_1 на общей вершине рассматриваемых усов [2]. При этом, во время обратного хода могут возникать ситуации, которые алгоритм Мелзака рассматривает как ошибочные и останавливается.

Мы модифицируем алгоритм Мелзака так, чтобы в случае ошибки он продолжал работу и в результате строил некоторое дерево с той же границей. Так как мы интересуемся кратчайшими деревьями, такая модификация допустима. Описание модификации алгоритма Мелзака удобно проделать на языке скобочных структур,

который, кроме всего прочего, будет полезен нам и в реализации кратчайших сетей с помощью шарнирных механизмов.

Итак, нам дано конечное множество $M \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из m точек, множество \mathcal{T}_n деревьев Штейнера, $n \geq m$, и некоторое отображение $\varphi \in \mathcal{B}_n(M)$. Выберем произвольное $G \in \mathcal{T}_n$ и определим для него скобочную структуру. Пусть F_1, \dots, F_k — полные компоненты дерева G . Ниже мы определим скобочные структуры для полных компонент, а скобочную структуру произвольного дерева Штейнера G положим равной объединению скобочных структур его полных компонент.

Пусть $G \in \mathcal{T}_n$ — полное дерево Штейнера. Построим по G последовательность G_0, G_1, \dots, G_{n-2} полных деревьев Штейнера таких, что граница дерева G_i состоит из $n - i$ вершин. Для этого положим $G_0 = G$, и если для $i < n - 2$ определено дерево G_i , то дерево G_{i+1} построим следующим образом. Выберем в дереве G_i произвольные усы, и пусть пара $\{u, v\}$ — вершины усов, а w — общая вершина усов. Дерево G_{i+1} получим из дерева G_i отрезанием выбранных усов, заменой элемента w на пару $\{u, v\}$, и отнесением вершины $\{u, v\}$ к граничным вершинам дерева G_{i+1} . Пусть $\{a, b\}$ — множество вершин дерева G_{n-2} . *Неориентированной скобочной структурой полного дерева G* назовем множество $\omega(G) = (\cup_{i=0}^{n-2} \partial G_i) \cup \{[a, b]\}$, а его подмножество $\partial G_0 = \partial G$ — *границей $\omega(G)$* , которую будем обозначать через $\partial\omega(G)$. Элемент $[a, b] \in \omega(G)$ назовем *реберным*, а все остальные элементы из $\omega(G)$ — *вершинными*. Как мы уже отмечали, если G — дерево Штейнера общего вида с полными компонентами F_1, \dots, F_k , то *неориентированной скобочной структурой дерева G* назовем множество $\omega(G) = \cup_{j=1}^k \omega(F_j)$. Определим *границу $\partial\omega(G)$* , положив $\partial\omega(G) = \cup_{j=1}^k \partial\omega(F_j)$. Множество всех вершинных элементов из $\omega(G)$ обозначим через $\omega_v(G)$, а множество всех реберных элементов из $\omega(G)$ — через $\omega_e(G)$.

По построению, существует естественное взаимнооднозначное соответствие между множеством вершин дерева G и множеством $\omega_v(G)$: напомним, что на каждом шаге построения неориентированной скобочной структуры мы фактически переименовывали очередную внутреннюю вершину дерева G на слово, составленное из фигурных скобок, запятых и некоторых граничных вершин. Полученная кодировка также может быть использована для восстановления структуры дерева G , а именно, два вершинных элемента x и y скобочной структуры $\omega(G)$ соединим ребром, если и только если или $[x, y] \in \omega(G)$, или $x \in y$, или $y \in x$. Легко видеть, что между деревом G и полученным графом имеется изоморфизм, неподвижный на ∂G . Отметим, что зная скобочную структуру, можно однозначно восстановить дерево G , но одному и тому

же G может соответствовать несколько неупорядочных скобочных структур ω , так как можно разными способами выбирать усы при построении последовательности G_i .

Таким образом, вместо деревьев $G \in \mathcal{T}_n$ можно рассматривать неориентированные скобочные структуры $\omega(G)$, выбрав для каждого G любую одну такую структуру. Множество таких неориентированных скобочных структур обозначим через \mathcal{W}_n .

Пример 1.1. На рис. 1 показан пример дерева Штейнера и соответствующей ему неориентированной скобочной структуры, а также соответствие всех реберных и вершинных элементов скобочной структуры ребрам и вершинам дерева.

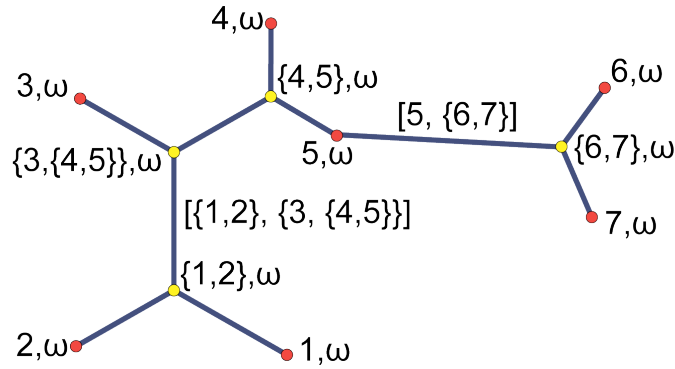


Рис. 1: $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, \{4, 5\}\}, [\{1, 2\}, \{3, \{4, 5\}\}], \{6, 7\}, [5, \{6, 7\}]\}$

Определим теперь *ориентированную скобочную структуру дерева Штейнера* $G \in \mathcal{T}_n$, соответствующую неориентированной скобочной структуре $\omega(G)$. Для этого заменим каждый вершинный элемент $\{u, v\} \in \omega(G)$ или на (u, v) , или на (v, u) , и полученную упорядоченную пару по-прежнему будем относить к вершинным элементам. Таким образом, данной неориентированной скобочной структуре соответствует, вообще говоря, много ориентированных скобочных структур. Пусть $\omega^+(G)$ — одна из них, $\omega_v^+(G)$ — множество ее вершинных элементов, $\omega_e^+(G)$ — множество ее реберных элементов, и $\partial\omega^+(G)$ — ее граница. Построим по этой скобочной структуре прямой ход алгоритма Мелзака следующим образом.

Для всех вершинных элементов $w \in \omega_v^+(G)$ введем характеристику $h(w)$, которую назовем *высотой элемента w* . Определим ее индуктивно. У всех элементов $1, \dots, n$ высота 0. Каждое w , отличное от $1, \dots, n$, имеет вид (w_1, w_2) , и мы положим $h(w) = \max\{h(w_1), h(w_2)\} + 1$. Для всех возможных k определим множества H_k , каждое из которых будет состоять из всех элементов высоты k . Таким образом, получим,

что $\omega^+(G) = \sqcup H_k \cup \omega_e^+(G)$. Зададим нумерацию на множестве $\omega^+(G)$. Отметим, что $H_0 = \{1, \dots, n\} = \partial\omega^+(G)$ занумеровано, и мы сохраним этот порядок. Далее будем произвольным образом нумеровать элементы из последовательных H_i , $i \geq 1$. Закончив нумеровать H_i , продолжим нумерацию на все реберные элементы. Пусть w_1, \dots, w_p — последовательные вершинные элементы в только что заданной нумерации, а w_{p+1}, \dots, w_{p+q} — оставшиеся реберные элементы.

Построим отображение F всех вершинных элементов множества $\omega^+(G)$ на плоскость. Ограничение F на $H_0 = \partial\omega^+(G) = \partial G$ положим равным φ . Пусть для первых $s \leq k$ элементов, включая H_0 , отображение F построено и $F(w_s) = P_s$. Определим F для w_{k+1} . Элемент w_{k+1} — это некоторая пара (w_i, w_j) , $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. Если $P_i = P_j$, то положим $F(w_{k+1}) = P_i$. В противном случае, построим на отрезке $[P_i, P_j]$ правильный треугольник $\triangle P_{i,j}P_iP_j$ так, чтобы базис $P_{i,j}P_i, P_{i,j}P_j$ был ориентирован положительно (относительно канонической ориентации плоскости \mathbb{R}^2), и положим $F(w_{k+1}) = P_{i,j}$. Полученное в результате отображение F полностью определяет прямой ход алгоритма Мелзака.

Опишем теперь обратный ход алгоритма Мелзака, соответствующий прямому ходу F ; цель обратного хода — переопределить отображение F . Для каждого $w_i \in \omega_v^+(G)$ положим $P_i = F(w_i)$. Согласно нумерации, введенной на множестве $\omega^+(G)$, начиная с последнего элемента будем двигаться в обратном порядке и проделывать следующее. Обозначим через w_k рассматриваемый элемент из $\omega^+(G)$.

Пусть $h(w_k) = 0$ и $k > 1$, тогда переходим к рассмотрению w_{k-1} .

Пусть w_k — реберный элемент вида $[w_i, w_j]$, $w_i, w_j \in \omega_v^+(G)$, тогда $k > 1$, и мы поступим так. Если $\max\{h(w_i), h(w_j)\} = 0$, то переходим к рассмотрению w_{k-1} . Иначе возьмем тот из w_i, w_j , у которого высота больше нуля. Пусть это w_i (если оба элемента имеют высоту больше нуля, то рассмотрим сначала один, а потом — другой).

Элемент w_i имеет вид (w_r, w_s) . Переопределим точку $F(w_i)$.

- (1) Если $P_r = P_s$, то, в силу определения отображения F , имеем $P_r = P_s = P_i = F(w_i)$, и мы значение отображения F на w_i менять не будем.
- (2) Если $P_r \neq P_s$, то P_r, P_s, P_i — вершины невырожденного правильного треугольника, и пусть C — описанная вокруг этого треугольника окружность. Имеется два варианта.

- (a) Если $P_i = P_j$, то в качестве $F(w_i)$ берем произвольную точку из C .
- (b) Если $P_i \neq P_j$, то однозначно определен луч ℓ , выходящий из P_i и проходящий через P_j . Если луч ℓ пересекает окружность C только по точке P_i , то по-прежнему полагаем $F(w_i) = P_i$. Иначе $\ell \cap C$ состоит из двух точек, одна из которых — точка P_i , а другую точку мы и возьмем в качестве $F(w_i)$.

Пусть w_k — вершинный элемент вида (w_i, w_j) , $w_i, w_j \in \omega_v^+(G)$. Поступим с ним так же, как и с реберным элементом $[w_i, w_j]$, заменив в описанных выше построениях точку P_j на точку P_k .

На рис. 2 проиллюстрированы различные способы переопределения точки $F(w_i)$.

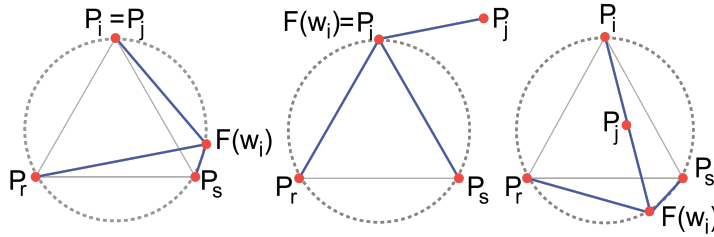


Рис. 2: Различные способы переопределения точки $F(w_i)$.

Перестроенное в результате обратного хода алгоритма Мелзака отображение $F = F(\omega^+(G), \varphi)$ задает некоторую сеть $F: \omega_v^+(G) \mapsto \mathbb{R}^2$ типа (G, φ) . Как было описано выше, при построении этой сети имеется неопределенность, поэтому, чтобы подчеркнуть сделанный выбор, мы вместо F будем писать $F_\alpha = F_\alpha(\omega^+(G), \varphi)$, где α пробегает некоторое множество индексов, зависящее от $\omega^+(G)$ и φ . Множество всех F_α при фиксированных $\omega^+(G)$ и φ обозначим через $[F_\alpha] = [F_\alpha(\omega^+(G), \varphi)]$. Отметим, что эта неопределенность не влияет на результат, так как если множество $[G, \varphi]$ содержит некоторую локально минимальную сеть, то для одной из ориентаций $\omega^+(G)$ произвольной неориентированной скобочной структуры $\omega(G)$ сеть F_α определена однозначно и совпадает с локально минимальной сетью $\Gamma_{G, \varphi}$: $[F_\alpha] = \{\Gamma_{G, \varphi}\}$. В частности, при подходящем выборе дерева $G \in \mathcal{T}_n$ и ориентированной скобочной структуры $\omega^+(G)$ соответствующая сеть $F_\alpha = \Gamma_{G, \varphi}$ будет кратчайшей.

Итак, для построения кратчайшей сети, соединяющей множество $M \subset \mathbb{R}^2$, можно поступить следующим образом. Фиксируем произвольное $\varphi \in \mathcal{B}_n(M)$. По каждой неориентированной скобочной структуре $\omega \in \mathcal{W}_n$ построим всевозможные ориентированные скобочные структуры ω^+ , и множество всех так полученных ω^+ обозначим

через \mathcal{W}_n^+ . Для каждой $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ и φ построим некоторую сеть $F_\alpha(\omega^+, \varphi)$ и вычислим ее длину, которую обозначим через $\ell_\alpha(\omega^+, \varphi)$. Остается выбрать ω^+ , для которого $\ell_\alpha(\omega^+, \varphi)$ — наименьшее возможное. Отметим, что таких ω^+ может быть много.

В дальнейшем мы используем ориентированные скобочные структуры для построения шарнирного механизма, строящего кратчайшей сети на множестве M .

1.2 Формализация шарнирных механизмов

Пусть $G = (V, E)$ — простой конечный граф, $\ell: E \mapsto \mathbb{R}$ — положительная функция, $W \subset V$ и $\psi: W \mapsto \mathbb{R}^d$. Набор $L = (G, \ell, \psi) = ((V, E), \ell, \psi)$ будем называть *шарнирным механизмом* в \mathbb{R}^d . При этом элементы множества V назовем *шарнирами*, элементы множества E — *стержнями*, шарниры из W — *граничными* или *неподвижными*, шарниры из $V \setminus W$ — *внутренними* или *подвижными*; множество W будем также обозначать через ∂L и называть *границей шарнирного механизма L* , а отображение ψ — *граничным отображением* механизма L . Про каждый граничный шарнир w также будем говорить, что он *закреплен в точке $\psi(w)$* . Значение функции ℓ на стержне e назовем *длиной стержня e* .

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Отображение $C: V \mapsto \mathbb{R}^d$, $C(v_i) = p_i$, назовем *согласованным с ψ* , если выполнено $C|_W = \psi$; *согласованным с ℓ* , если для любого ребра $v_i v_j \in E$ выполнено $\ell(v_i v_j) = |p_i p_j|$. Отображение C , одновременно согласованное с ℓ и ψ , будем называть *конфигурацией* или *реализацией шарнирного механизма $L = (G, \ell, \psi)$* , а образы шарниров при этом отображении — их *положениями*. Множество всех конфигураций механизма $L = (G, \ell, \psi)$ обозначим через \mathcal{C}_L и назовем *конфигурационным пространством* этого шарнирного механизма.

Важное замечание: для описания шарнирного механизма с непустым конфигурационным пространством достаточно описать произвольную его конфигурацию или алгоритм реализации этой конфигурации.

Пусть $\mathcal{A} \subset V$ — некоторое множество шарниров. Тогда семейство отображений $\mathcal{C}_L(\mathcal{A}) = \{C|_{\mathcal{A}} : C \in \mathcal{C}_L\}$ назовем *конфигурационным пространством множества шарниров \mathcal{A}* . Отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$ назовем *допустимым*, если $\varphi \in \mathcal{C}_L(\mathcal{A})$. Для каждого допустимого φ , положим $\mathcal{C}_L(\varphi) = \{C \in \mathcal{C}_L : C|_{\mathcal{A}} = \varphi\}$.

Для краткости на рисунках далее будем подписывать положение каждого шарнира названием самого шарнира, которому оно соответствует.

Напомним, что в данной работе мы рассматриваем только шарнирные механизмы, имеющие реализацию в \mathbb{R}^d . Опишем операцию скрепления двух механизмов. Рассмотрим механизм L_1 и L_2 , множества шарниров которых соответственно V_1 и V_2 . Предположим, что существуют $\mathcal{A}_1 \subset V_1$, $\mathcal{A}_2 \subset V_2$ и некоторая биекция $\nu: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ такие, что для некоторых конфигураций $C_1 \in \mathcal{C}_{L_1}$, $C_2 \in \mathcal{C}_{L_2}$ выполняется $C_1|_{\mathcal{A}_1} = C_2|_{\mathcal{A}_2} \circ \nu$. Биекция ν позволяет отождествить \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 , поэтому можно считать, что множества V_i , вместо \mathcal{A}_i , содержат одно и то же множество шарниров, которое мы обозначим через \mathcal{A} . Тогда *скреплением механизмов L_1 и L_2 по биекции ν* назовем шарнирный механизм, граф которого равен объединению графов механизмов L_i , а все остальные отображения являются ограничениями соответствующих отображений этих механизмов. Отметим, что конфигурационное пространство скрепления механизмов L_1 и L_2 не пусто. Кроме того, для удобства изложения вместо описания биекции ν будем говорить, какой шарнир $v \in \mathcal{A}_1$ с каким шарниром $\nu(v) \in \mathcal{A}_2$ мы скрепляем.

В дальнейшем мы будем строить сложные механизмы, последовательно прикрепляя к уже построенному механизму некоторые другие. При этом нам будет требоваться, чтобы прикрепляемый механизм L не ограничивал возможные положения в \mathbb{R}^d некоторого набора \mathcal{A} шарниров имеющегося механизма \bar{L} , к которому L прикрепляется. В случае, когда существует $r > 0$, для которого в каждой конфигурации механизма \bar{L} расстояния между положениями любых двух шарниров из семейства \mathcal{A} не превосходит r , этого можно добиться следующим образом. Мы будем требовать выполнения следующего условия: для каждого отображения $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$, при котором расстояния между f -образами любых двух шарниров не превосходят r , существует $C \in \mathcal{C}_L$ такое, что ограничение C на \mathcal{A} совпадает с f . Если теперь L — произвольный механизм, и \mathcal{A} — некоторое подмножество его шарниров, для которого при некотором $r > 0$ выполняется описанное выше условие на отображение f , то будем говорить, что *механизм L не ограничивает положения шарниров семейства \mathcal{A}* . При этом, во всех рассматриваемых нами случаях, если требуется увеличить r , то мы будем модифицировать механизм L , увеличивая длины всех стержней в одно и то же число раз, то есть умножая весовую функцию L на одно и то же число.

Нам также потребуется обобщение понятия “не ограничивает положения шарниров”. Во введенных выше обозначениях, пусть \mathcal{P} — некоторое свойство, задающее ряд ограничений на возможные положения шарниров $A \in \mathcal{A}$ механизма L (свойство \mathcal{P} может быть тождественным и не вносить никаких ограничений). Будем говорить, что механизм L *точно реализует свойство \mathcal{P}* , если при некотором $r > 0$, для каждо-

го отображения $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$, удовлетворяющего свойству \mathcal{P} и такого, что расстояния между f -образами любых двух шарниров не превосходят r , существует $C \in \mathcal{C}_L$ такое, что ограничение C на \mathcal{A} совпадает с f . Отметим, что если свойство \mathcal{P} тождественно, то точная реализация механизма L — это реализация, не ограничивающая положений шарниров семейства \mathcal{A} .

2 Классические шарнирные механизмы

В этом разделе будут описаны простейшие известные шарнирные механизмы.

Механизм 1 (Жесткие конструкции).

Будем называть *жесткими конструкциями* механизмы, у которых любые две конфигурации переводятся друг в друга движением объемлющего пространства. Примером могут служить механизмы, у которых все шарниры попарно соединены стержнями.

Жесткий прямоугольник — это механизм, у которого имеется четыре шарнира, которые попарно соединены стержнями и являющиеся вершинами прямоугольника (рис. 3).

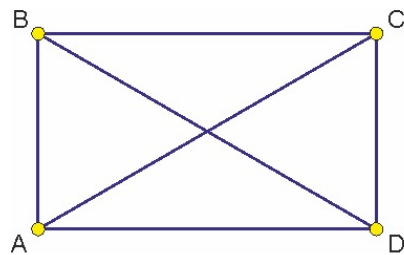


Рис. 3: Жесткий прямоугольник.

Жесткий треугольник — это механизм, реализованный как три шарнира, попарно соединенных стержнями.

Механизм 2 (Параллелограмм и антипараллелограмм, их укрепление [10]).

Дан механизм L , который является замкнутой четырехзвенной ломаной, вершины которой — шарниры A, B, C, D , а ребра — стержни, у которых длины нечетных ребер и длины четных ребер равны между собой. У такого механизма в любой его

конфигурации вершины образуют либо параллелограмм, либо *антипараллелограмм*, который получается из параллелограмма отражением одного из треугольников, на которые делит параллелограмм диагональ, относительно этой диагонали. Требуется сделать так, чтобы для любой конфигурации механизма положения точек A, B, C, D образовывали либо только параллелограмм (вырожденный или невырожденный), либо только антипараллелограмм (вырожденный или невырожденный). Чтобы этого добиться, шарнирный четырехугольник $ABCD$ необходимо укрепить.

Если к параллелограмму $ABCD$ добавить еще один стержень, совпадающий с его средней линией, то конфигурационное пространство точек A, B, C, D такого шарнирного механизма совпадет в точности с множеством конфигураций, отвечающих настоящим (возможно, вырожденным) параллелограммам (рис. 4).

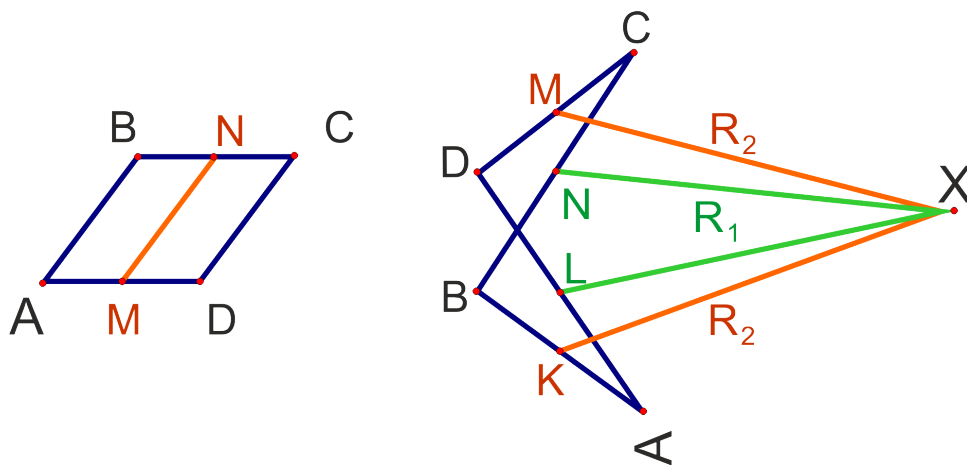


Рис. 4: Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Укрепить антипараллелограмм несколько сложнее. Чтобы это сделать, к серединам его сторон нужно прикрепить достаточно длинные стержни [7], как на рис. 4, и тогда будут реализованы только все те его конфигурации, которые являются антипараллелограммами.

Во всех последующих механизмах использованные параллелограммы и антипараллелограммы будут по умолчанию укреплены, если не сказано иного.

Механизм 3 (Реверсор Кемпе [6]). *Требуется построить механизм L , содержащий три стержня OA, OC и OZ с общим концом O , у которого, для любой конфигурации, OC — биссектриса угла $\angle AOZ$.*

Рассмотрим два подобных антипараллелограмма $OABC$ и $OCWZ$. Прикрепим их друг к другу, как показано на рис. 5. Из соображений подобия вытекает, что углы

$\angle COA$ и $\angle ZOC$ равны между собой. Если менять $\angle COA$, то отрезки OA и OZ будут образовывать угол в два раза больший. Описанный механизм называется *реверсором Кемпе*. Он позволяет удваивать нужный угол или делить его пополам, так как OC — всегда биссектриса угла $\angle AOZ$ (рис. 5). При движении реверсора возможно его “выворачивание”, то есть переход через вырожденные конфигурации (рис. 6), когда угол $\angle AOC$ принимает значения кратные π . Так как $\angle AOC$ — угол укрепленного антипараллелограмма, то он может принимать любые значения и соотношение между углами будет оставаться корректным.

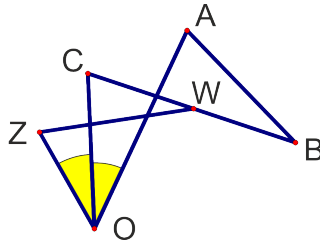


Рис. 5: Реверсор Кемпе.

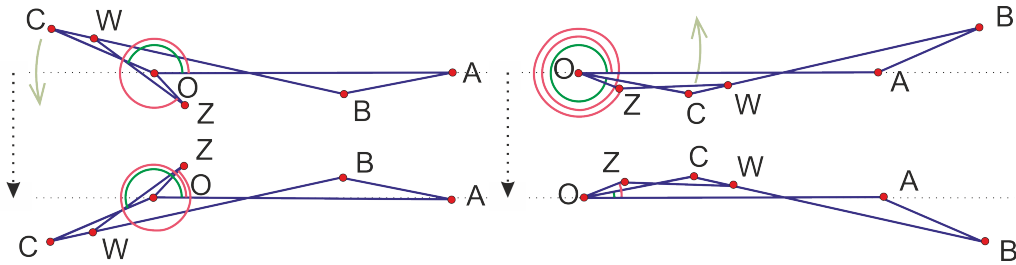


Рис. 6: Переход через вырожденные состояния реверсора Кемпе ($\angle AOZ = 2\angle AOC$).

Механизм 4 (Сумматор Кемпе [6]). *Даны четыре стержня OA , OB , OC и OZ , скрепленных в точке O . Требуется построить механизм L , у которого для любой конфигурации $P \in \mathcal{C}_L$ выполнено: $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOZ = \alpha + \beta$.*

Сначала при помощи реверсора Кемпе построим биссектрису OY угла $\angle BOC$. Тогда $\angle BOC = |\beta - \alpha|$, $\angle BOY = |\beta - \alpha|/2$, поэтому $\angle AOY = (\beta + \alpha)/2$ и, значит, удвоив $\angle AOY$, получим угол, равный $\alpha + \beta$ (рис. 7). Так как реверсор применим для любых углов, то и сумматор может складывать любые углы.

Механизм 5 (Классический и модифицированный инверсор Поселье). *Требуется построить механизм, переводящий движение по окружности в движение по прямой.*

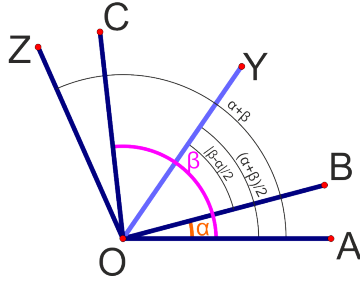


Рис. 7: Сумматор Кемпе.

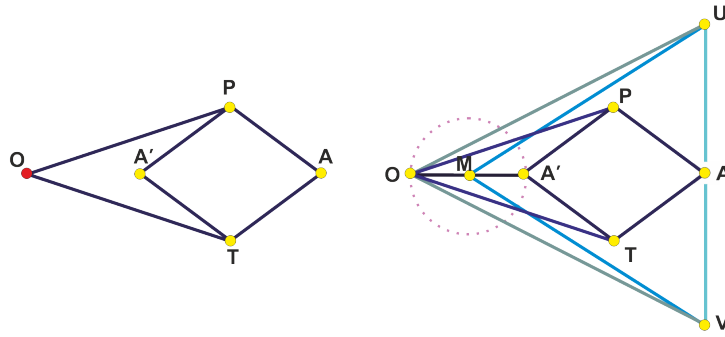


Рис. 8: Классический и модифицированный инверсоры Поселье.

Механизм L , реализация которого изображена на рис. 8 справа — *модифицированный инверсор Поселье*, $OP = PT$, $A'P = PA = AT = TA'$, $OM = MA'$, $OU = OV = OP + PA$, $MU = MV$. Шарниры O, M, U, V попарно соединены стержнями, поэтому часть механизма, содержащая только эти шарниры и стержни будет жесткой. В механизме L точка A' всегда находится на окружности с центром в M , а точка A — образ точки A' при инверсии относительно некоторой окружности, а значит, при движении точки A' по окружности, A будет двигаться по прямой UV , а именно, так как выполнено равенство $OU = OV = OP + PA$, конфигурационное пространство точки A при фиксированном положении точек U и V , будет отрезком UV .

Классический инверсор Поселье (рис. 8 слева) отличается от модифицированного тем, что в нем нет шарниров U, V, M и всех выходящих из них стержней. Шарниры U, V и M нужны для того, чтобы для каждого положения шарниров U, O, V конфигурационное пространство точки A' совпадало с дугой окружности, являющейся инверсией прямой UV .

2.1 Вспомогательные шарнирные механизмы

Кроме хорошо известных механизмов из предыдущего раздела нам понадобится еще ряд механизмов, которые будут описаны ниже.

Механизм 6 (Закрепление шарнира на стержне). *Дан стержень AB . Требуется зафиксировать на нем шарнир C на расстоянии a от A .*

Поместим шарнир C на стержне AB на расстоянии a от A и соединим его стержнями AC и BC с точками A и B .

Механизм 7 (Ограничение конфигурационного пространства t шарниров из \mathbb{R}^3 плоским диском). *Для данного $r > 0$, требуется построить шарнирный механизм L в \mathbb{R}^3 , содержащий множество шарниров $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, а также соединенные стержнем шарниры O и N , удовлетворяющий следующему условию: для каждого допустимого $\varphi: \{O, N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, множество $\{C|_{\mathcal{A}} : C \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ совпадает с семейством всех отображений из \mathcal{A} в 2-мерный диск $D \subset \mathbb{R}^3$ радиуса r с центром в $\varphi(O)$, перпендикулярный $\varphi(O)\varphi(N)$.*

Для каждого $i = 1, \dots, t$, обозначим через ONC^iD^i и $C^iD^iA^iB^i$ равные жесткие прямоугольники (если у разных прямоугольников шарниры обозначены одинаково, то в собираемом механизме они скреплены) (рис. 9).

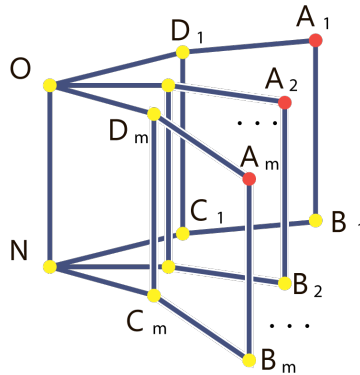


Рис. 9: Точки A_1, \dots, A_m могут двигаться независимо друг от друга внутри диска с центром в O , перпендикулярного ON .

Все последующие механизмы, если не уточняется иного, будут плоскими. Чтобы это оставалось верным для всех конфигураций, механизмы можно укрепить с помощью механизма 7.

Механизм 8 (Движение точек по прямой). Требуется построить шарнирный механизм L в \mathbb{R}^2 , содержащий множество шарниров $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, а также соединенные стержнем шарниры U и V , удовлетворяющий следующему условию: для каждого допустимого $\varphi: \{U, V\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, множество $\{C|_{\mathcal{A}} : C \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ совпадает с семейством всех отображений из \mathcal{A} в отрезок $[\varphi(U), \varphi(V)]$.

То есть требуется построить механизм, у которого в любой конфигурации шарниры множества \mathcal{A} лежат на одной одном отрезке, положение которого может меняться произвольным образом, но длина постоянна.

Пусть есть набор модифицированных инверсоров Поселье: $OUMVA'_iP_1A_iT_1$, $1 \leq i \leq m$, у которых соответственные стержни равны, и шарниры, обозначенные одинаковыми буквами, скреплены. Все инверсии, построенные таким механизмом будут относительно одной и той же окружности.

На рис. 10 изображен пример такого механизма для двух инверсоров.

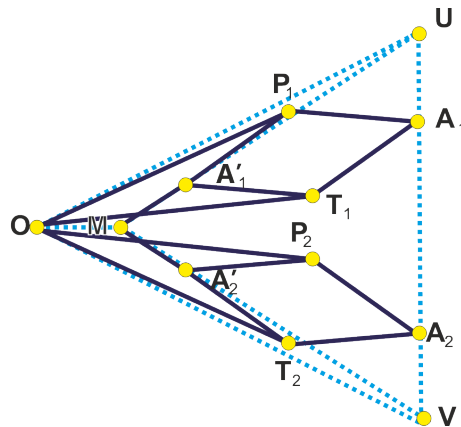


Рис. 10: Инверсия двух точек.

Все точки A_i — образы инверсии точек A'_i , принадлежащих одной окружности, значит, они все будут лежать на одной прямой.

Механизм 9 (Построение точки пересечения прямых). Требуется построить механизм L на плоскости \mathbb{R}^2 , содержащий шарниры A, B, C, D, O , не ограничивающий положения шарниров A, B, C, D , и такой, что для каждого $P \in \mathcal{C}_L$, при котором $P(A) \neq P(B)$, $P(C) \neq P(D)$, и прямые $P(A)P(B)$ и $P(C)P(D)$ пересекаются по одной точке, $P(O)$ совпадает с точкой пересечения этих прямых.

При помощи механизма 8 соединим шарниры A, B, O так, чтобы они были на

одной прямой. Аналогично, сделаем так, чтобы шарниры C, D, O оставались на одной прямой. Таким образом, для любой конфигурации P шарниров A, B, C, D , конфигурационное пространство точки O будет пересечением прямых $P(A)P(B)$ и $P(C)P(D)$, то есть — точкой, если отрезки не совпадают. Если же точки $P(A), P(B), P(C)$ и $P(D)$ лежат на одной прямой, то конфигурационное пространство точки O будет некоторым отрезком, лежащим на этой прямой.

Механизм 10 (Параллельный перенос отрезка непостоянной длины). *Требуется построить механизм L на плоскости \mathbb{R}^2 , содержащий шарниры A, A', B, B' , не ограничивающий положения шарниров A, A', B , и такой, что для каждого допустимого $\varphi: \{A, A', B\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, множество $\{P(B') \in \mathcal{C}_L\}$ состоит из одного элемента P , для которого $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi(A')P(B')}$.*

Рассмотрим механизм $AA_1A'C'C_1CB_1B'$, изображенный на рис. 11. Он состоит из четырех укрепленных параллелограммов, а все стержни имеют одинаковую длину a . В нем отрезок AB всегда равен и параллелен отрезку $A'B'$ потому, что $AC \parallel A'C', BC \parallel B'C', AC = A'C', BC = B'C'$, следовательно, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Для каждой конфигурации точки B конфигурационное пространство точки A будет замкнутым кругом радиуса $2a$ с центром в точке B , то есть можно задать любой вектор \overrightarrow{AB} длины не больше, чем $2a$. Для любой конфигурации точки A конфигурационное пространство точки A' — это круг радиуса $2a$ с центром в A . Положение точки A' задает вектор параллельного переноса. Значит, он тоже может быть любым, не превышающим по длине $2a$. При всех конфигурациях полученный механизм совершает параллельный перенос отрезка длины не больше $2a$ в любом направлении на любое расстояние не больше, чем $2a$ (рис. 11).

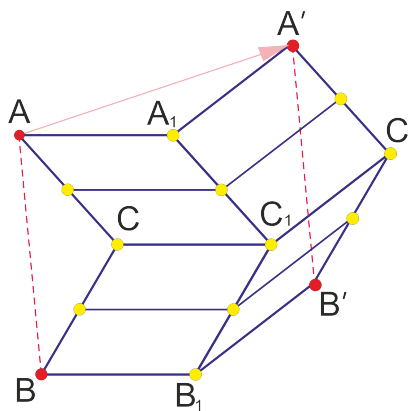


Рис. 11: Параллельный перенос отрезка произвольной длины.

Механизм 11 (Ограничение конфигурационного множества точки полуплоскостью, заданной граничной прямой и внешней точкой). *Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A_1, A_2, B, C , точно реализующий следующее свойство: для каждой конфигурации $P \in \mathcal{C}_L$, в которой $P(B) \neq P(C)$, точки $P(A_1)$ и $P(A_2)$ находятся в разных полуплоскостях относительно прямой $P(B)P(C)$.*

С помощью такого механизма можно ограничивать конфигурационное пространство точки A_2 частью полуплоскости, заданной прямой BC , которая ее ограничивает, и точкой A_1 , которая не содержится в этой полуплоскости.

Рассмотрим механизм 8,двигающий набор из 4 точек по прямой. Пусть это будут точки A_1, A_2, B, C . Заменяем в этом механизме стержень MA'_1 на шарнирный ромб $MX_1A'_1Y_1$, стороны которого равны половине длины MA'_1 (рис. 12). Далее, заменяем стержень MA'_2 на шарнирный параллелограмм $MX_2A'_2Y_2$ со сторонами a и b , причем $a - b = MA'_2$, $a + b < \sqrt{(OP_1)^2 - (A'_1P_1)^2}$ (рис. 12).

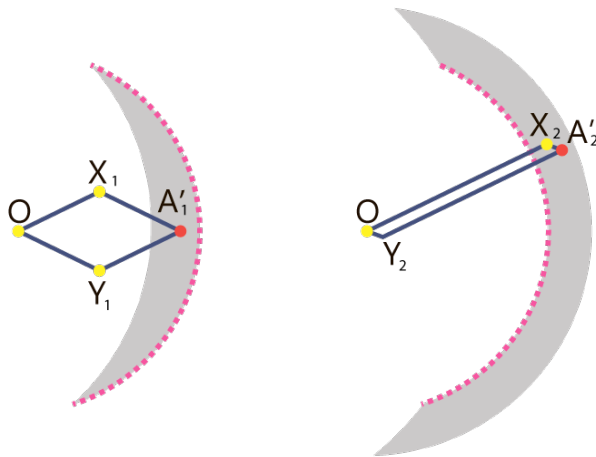


Рис. 12: Точки A'_1 и A'_2 .

В таком механизме для любого $P \in \mathcal{C}_L$ верно, что $P(A'_1)$ находится внутри окружности, которая при инверсии переходит в прямую $P(B)P(C)$, а $P(A'_2)$ — снаружи, а значит, точки $P(A_1)$ и $P(A_2)$ будут находиться в разных полуплоскостях относительно прямой $P(B)P(C)$.

Механизм 12 (Ограничение конфигурационного множества точки полуплоскостью, заданной граничной прямой и внутренней точкой). *Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A_1, A_2, B, C , точно реализующий следующее свойство: для каждой конфигурации $P \in \mathcal{C}_L$, в которой $P(B) \neq P(C)$, точки $P(A_1)$ и $P(A_2)$ находятся в одной полуплоскости относительно прямой $P(B)P(C)$.*

Возьмем жесткий прямоугольный треугольник MHK (механизм 1) с вершиной прямого угла H . Соединим шарниры B, C, M, H с шарнирами A_1, \dots, A_4 механизма 8. Таким образом, в любом положении шарниры B, C, M, H будут располагаться на одной прямой. Аналогично прикрепим механизм 8 к шарнирам H, A, K , чтобы они тоже всегда оставались на одной прямой. В полученном механизме для любого допустимого положения $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество положений $\{P(H), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ состоит из одного элемента, для которого верно $\varphi(A)\varphi(H) \perp \varphi(A)P(H)$.

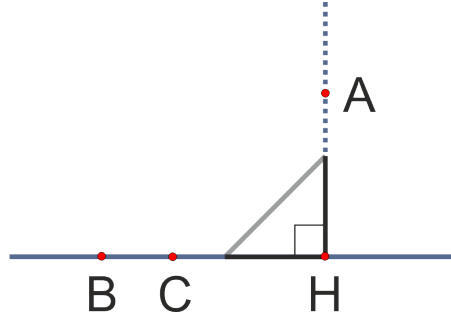


Рис. 14: Построение перпендикуляра из точки к прямой.

Механизм 15 (Ограничение множества положений точки C заданным лучом AB). Дано число $R > 0$. Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A, B, C, C' такой, что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, множество положений $\{P(C'), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ представляет собой отрезок длины R , принадлежащий лучу $\varphi(A)\varphi(B)$, один из концов которого равен $\varphi(A)$.

Соберем механизм, в котором точка C может лежать на пересечении прямой AB и полуплоскости, содержащей точку B , ограниченной прямой, перпендикулярной AB и содержащей точку A . При помощи механизма 8 сделаем так, чтобы точка C могла находиться только на прямой AB (соответственно соединим шарниры A, B, C' рассматриваемого механизма с шарнирами A_1, A_2, A_3 механизма 8). Далее, возьмем жесткий прямоугольный треугольник $\Delta U', V', B'$ с прямым углом V' . Скрепим шарниры A и V' . Затем соединим шарниры A, B, B' с шарнирами A_1, A_2, A_3 . Теперь в любом положении шарниры A, B и B' будут лежать на одной прямой. Прикрепим к имеющимся шарнирам U', V', C', B соответственно шарниры B, C, A_1, A_2 механизма 12 и получим, что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ точка $P(C')$ находится в нужном нам положении.

Механизм 16 (Поворот точки C вокруг A , при котором образ точки C попадет на заданный луч AB). Требуется построить механизм на плоскости, содержащий

шарниры A, B, C, C' такой, что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, множество положений $\{P(C'), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ состоит из одного элемента такого, что $P(C')$ принадлежит лучу $\varphi(A)\varphi(B)$ и находится на расстоянии $|\varphi(A)\varphi(C)|$ от точки $\varphi(A)$.

Реализуем идею того, что точка C' является пересечением окружности с центром в A радиуса AC , и луча AB . При помощи механизма 13 ограничим конфигурационное пространство точки C' окружностью с центром в A радиуса AC (соответственно соединим шарниры рассматриваемого механизма и механизма 13 следующим образом: A с O, C с C'). Затем при помощи механизма 15 сделаем так, чтобы эта точка также могла находиться только на луче AB (соответственно соединим шарниры A, B, C' рассматриваемого механизма с шарнирами A, B, C механизма 15).

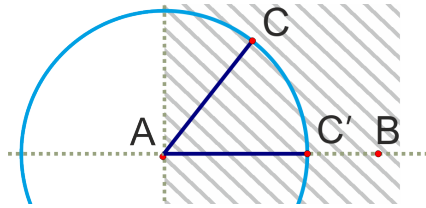


Рис. 15: Поворот точки C вокруг A , при котором образ C' точки C попадет на заданный луч AB .

Механизм 17 (Построение отрезка, равного по длине минимальному из двух данных). *Требуется построить механизм, содержащий шарниры M, N, K, L, P', H такой, что для каждого положения $C \in \mathcal{C}_L$ верно следующее: $|C(P')C(H)| = \min\{|C(M)C(N)|, |C(K)C(L)|\}$.*

Опишем основные шаги предлагаемого нами решения этой задачи.

- (1) Перенесем параллельно отрезок KL так, чтобы точка K совпала с N . Образ точки L обозначим L' .
- (2) Повернем перенесенный отрезок так, чтобы угол между отрезками стал равен $\pi/2$. Полученный отрезок обозначим NL'' .
- (3) Пусть NT — биссектриса $\angle MNL$. Построим точку P так, чтобы четырехугольник $MNL''P$ оказался прямоугольником. Далее, построим точку P' , которая будет совпадать с точкой P , если она лежит в угле $\angle TNL''$, иначе она будет образом отражения точки P относительно биссектрисы NT .

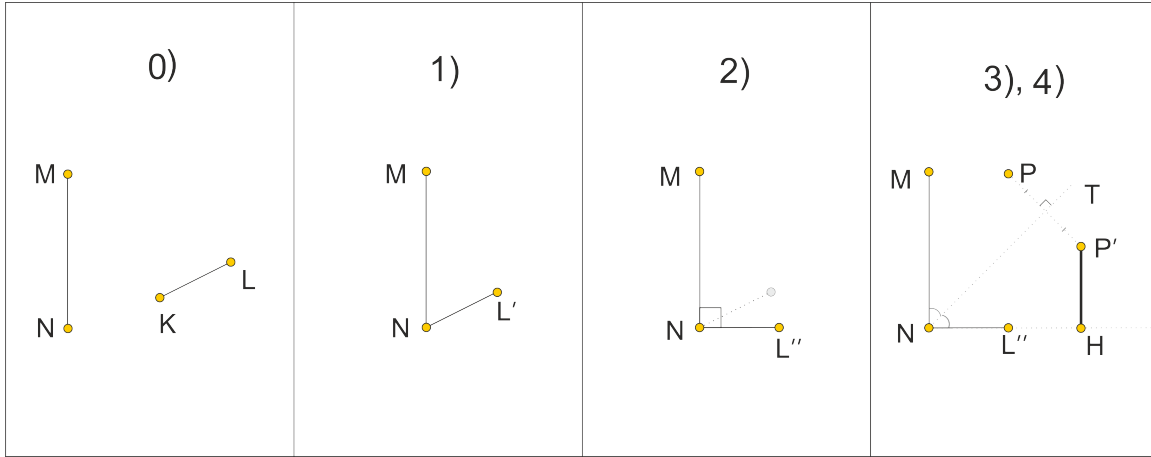


Рис. 16: План решения.

- (4) Опустим высоту $P'H$ на прямую NL'' . Эта высота и будет равна минимальному из отрезков.

Приведем теперь подробное описание построения минимального отрезка. Первый пункт плана выполним при помощи механизма 10 (соединяем A с K , B с L , N с A'). Для выполнения второго пункта возьмем жесткий равнобедренный прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ (механизм 1), у которого точка T — середина гипотенузы. Скреем вершину прямого угла C с точкой N . Далее, при помощи механизма 8 зафиксируем катет AC на прямой MN (соединим A с A_1 , M с A_2 , N с A_3). Тогда второй катет BC задаст луч, перпендикулярный MN . При помощи механизма 16 можно повернуть отрезок NL' так, чтобы он лег на этот луч (соединим N с A , L' с C , B с B , L'' с C'). Получившийся угол $\angle MNL''$ будет равен $\frac{\pi}{2}$. Точка P из пункта 3 является образом точки M при параллельном переносе на вектор NL (с помощью механизма 10 соединяем N с A , L'' с B , M с A' , P с B'). Прикрепим к P шарнирный ромб $EPFP'$. Отметим, что этот ромб должен быть неукрепленным, так как нам нужны будут конфигурации, представляющие собой ломаную, когда пара противоположных вершин ромба совпадает. Вершины E и F этого ромба при помощи механизма 8 поместим на биссектрису NT угла $\angle MNL$ (соединяем N с A_1 , T с A_2 , E с A_3 , F с A_4). Далее, ограничим конфигурационное пространство точки P' полуплоскостью, ограниченной прямой NT и содержащей точку L'' (при помощи механизм 12, соединив N с A , T с B , P' с A_1 , L'' с A_2). Точка P' будет находиться внутри угла MNL , и если она и точка M лежат в одной полуплоскости относительно прямой NT , то P' — ее образ при отражении относительно NT ; в противном случае, P совпадет с P' . Перпендикуляр из точки P' на прямую NL , построенный при помощи механизма 14,

даст точку H (соединим P' с A , N с B , L'' с C , H с H), а отрезок $P'H$ будет равен минимальному из двух исходных отрезков MN и KL .

Механизм 18 (Движение трех точек по плоскости с сохранением ориентации). На плоскости \mathbb{R}^2 даны три точки E_1, E_2, E_3 и число $R > 0$. Требуется построить шарнирный механизм L , содержащий шарниры A, B, C, K, M, N , с граничным множеством $\{A, B, C\}$ и граничным отображением $\psi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(A) = E_1$, $\psi(B) = E_2$, $\psi(C) = E_3$, точно реализующий следующее свойство. Шарниры K, M, N располагаются произвольным образом в круге радиуса R с центром в E_1 , но для каждого допустимого $\varphi: \{M, N, K\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором точки $\varphi(M), \varphi(N), \varphi(K)$ не лежат на одной прямой, множество всех $\{P(\{M, N, K\}), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ таково, что ориентации реперов $P(N)P(K)$, $P(N)P(M)$ и E_1E_2, E_1E_3 совпадают.

Вначале с помощью механизма 10 совершим параллельный перенос треугольника $\triangle ABC$, образ которого обозначим $\triangle A'B'C'$, так, чтобы вершина C' совпала с точкой M . Затем с помощью сумматора Кемпе прибавим к углу $\angle A'C'B'$ угол $\angle A'C'N$. Полученный угол обозначим $\angle NMK'$. Далее, соединим точки M, N, K, K' с помощью механизма 12 так, чтобы прямая MN ограничивала конфигурационное пространство точки K полуплоскостью, содержащей точку K' (M с A, N с B, K' с A_1, K с A_2). Таким образом, репер MN, NK будет всегда ориентирован так же, как и CA, CB (рис. 17).

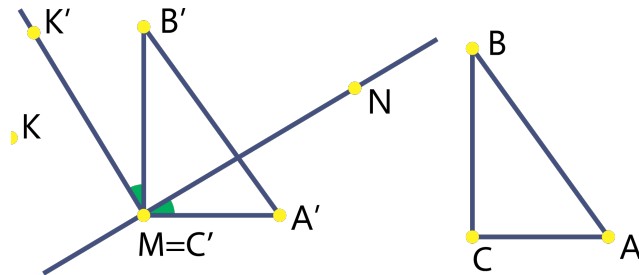


Рис. 17: Ориентация MN, MK совпадает с ориентацией CA, CB

Механизм 19 (Построение правильного треугольника с заданной стороной и ориентацией). На плоскости \mathbb{R}^2 даны три точки E_1, E_2, E_3 , $R > 0$. Требуется построить шарнирный механизм L , содержащий шарниры A, B, C, K, M, N , с граничным множеством $\{A, B, C\}$ и граничным отображением $\psi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(A) = E_1$, $\psi(B) = E_2$, $\psi(C) = E_3$, точно реализующий следующее свойство. Шарниры K, M, N

располагаются произвольным образом в круге радиуса R с центром в E_1 , но для каждого допустимого $\varphi: \{M, N, K\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, множество всех $\{P(\{M, N, K\}), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ таково, что ориентации реперов $P(N)P(K)$, $P(N)P(M)$ и E_1E_2 , E_1E_3 совпадают, а точки $\varphi(M)$, $\varphi(N)$, $\varphi(K)$ являются вершинами правильного треугольника.

Соединим точки A и B шарнирным ромбом $AHVK$. Прикрепим к точке B еще один ромб $BK'SH'$, причем длины его стержней должны быть такие же, как и у ромба $AHVK$. Далее, соединим попарно стержни BH , BH' и BK , BK' , так, чтобы получились жесткие треугольники с углами $\angle HBH' = \angle KBK' = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, ромб $AHVK$ равен ромбу $BK'SH'$. Значит, $AB = BC$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, и для любого положения точек A и B треугольник $\triangle ABC$ — правильный (рис. 18). Теперь рассмотрим механизм 18 и соединим его шарниры M, N, K с шарнирами A, B, C только что построенного механизма. Полученный механизм и будет решением поставленной задачи.

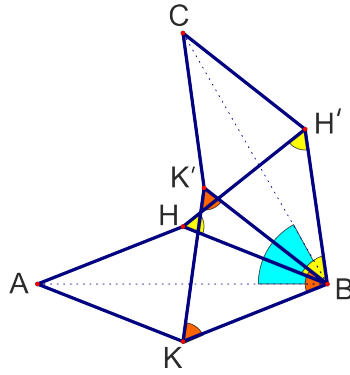


Рис. 18: Построение правильного треугольника с заданной стороной.

3 Реализация минимальных деревьев Штейнера

Предложение 3.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — некоторый круг, $n \in \mathbb{N}$ и Φ_n — множество всех отображений $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow D$. Тогда для каждой ориентированной скобочной структуры $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ существует шарнирный механизм $L = L(\omega^+) = (H_{\omega^+}, \ell_{\omega^+}, \psi)$, $H_{\omega^+} = (V, E)$, такой, что $\omega_v^+ \subset V$ и при всех $\varphi \in \Phi_n$ множество

$$\mathcal{C}_L(\omega_v^+, \varphi) := \{C \in \mathcal{C}_L(\omega_v^+) : C|_{\partial\omega_v^+} = \varphi\},$$

состоящее из всех конфигураций шарниров ω_v^+ , в которых ограничение на границу $\partial\omega_v^+$ совпадает с φ , равно $[F_\alpha(\omega^+, \varphi)]$ — множеству сетей, полученных в резуль-

тате применения алгоритма Мелзака к граничному отображению φ и скобочной структуре ω^+ .

Доказательство. Согласно описанию модифицированного алгоритма Мелзака, все элементы множества ω_v^+ пронумерованы. Пусть n — количество граничных вершин скобочной структуры ω_v^+ . Начнем сборку механизма L , в множество шарниров которого будем постепенно включать элементы из ω_v^+ . Для этого пошагово будем собирать механизмы L_k , получая каждый последующий из предыдущего. Начнем нумерацию механизмов с $k = n$. Возьмем n шарнирных ромбов с общей вершиной, закрепленной в центре диска D , длина стороны каждого из которых равна половине радиуса диска D . Вершины этих ромбов, противоположные общей вершине, сделаем элементами множества $\partial\omega_v^+$. Полученный механизм обозначим L_n . Пусть первые $p \leq k$ механизмов L_p построены, а первые $p \leq k$ элементов ω_p стали шарнирами. Опишем построение L_{k+1} . Рассмотрим элемент ω_{k+1} . Он представляет собой некоторую пару (w_i, w_j) , $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. С помощью механизма 19 соединим шарниры w_i и w_j механизма 19 так, чтобы для любой конфигурации $C_{k+1} \in \mathcal{C}_{L_{k+1}}$ точки $C(w_i)$ и $C(w_j)$ были вершинами правильного треугольника, третья вершина которого будет точкой $C(w_{k+1})$, причем базис $C(w_{k+1})C(w_i)$, $C(w_{k+1})C(w_j)$ ориентирован положительно относительно канонической ориентации плоскости \mathbb{R}^2 (соединяем ω_r с шарниром A механизма 19, ω_s с B , ω_j с C , шарниры A, B, C механизма 19 закрепим соответственно в точках E_1, E_2, E_3 , которые являются концами некоторого положительно ориентированного базиса E_1E_2, E_1E_3 , закрепленного на плоскости).

Продолжая таким образом, будем строить механизмы L_i , пока не получим механизм, содержащий в своем множестве шарниров все элементы ω_v^+ . Дальше будем продолжать построение механизмов L_i согласно обратному ходу алгоритма Мелзака. Начиная с последнего пронумерованного элемента множества ω^+ , будем двигаться в обратном порядке и проделывать следующее. Пусть известен механизм L_{m-1} . Опишем, как из него построить L_m . Обозначим через w_k рассматриваемый элемент из $\omega^+(G)$. Если $h(w_k) = 0$ и $k > 1$, то переходим к рассмотрению w_{k-1} .

Если w_k — реберный элемент вида $[w_i, w_j]$, $w_i, w_j \in \omega_v^+$, тогда $k > 1$, то мы поступим так. Если $\max\{h(w_i), h(w_j)\} = 0$, то переходим к рассмотрению w_{k-1} . Иначе возьмем тот из w_i, w_j , у которого высота больше нуля. Пусть это w_i (если оба элемента имеют высоту больше нуля, то рассмотрим сначала один, а потом — другой).

Элемент w_i имеет вид (w_r, w_s) . Опишем окружность вокруг треугольника $\Delta w_i w_r w_s$. Центр описанной окружности будем искать как точку пересечения высот

$w_i H_i, w_s H_s$. Для этого возьмем два механизма 14. Соединим сначала шарниры A, B, C, H одного из них с шарнирами w_i, w_r, w_s, H_i соответственно. А шарниры A, B, C, H другого — соответственно с шарнирами w_s, w_r, w_i, H_s . Затем добавим шарнир O и поместим его в точку пересечения прямых $w_i H_i$ и $w_s H_s$ (соединив шарниры w_i, H_i, w_s, H_s, O соответственно с шарнирами A, B, C, D, O механизма 9). Зная центр описанной окружности и положения вершин, с помощью механизма 13 построим саму окружность (соединим шарниры A, B, C, O механизма 13 с шарнирами w_i, O, w_s, O соответственно). Обозначим эту окружность через C . Далее будем строить шарнир S , который является пересечением окружности C и луча ℓ_1 , где луч ℓ_1 определен так, что его вершина — проекция центра описанной окружности на прямую $w_i w_j$, а направление выбрано так, что пересечение ℓ и ℓ_1 — луч.

В качестве точки, которая принадлежит этому пересечению и которая задает нужное направление, можно взять точку K , которая лежит на пересечении окружности с центром в w_i , радиус которой равен диаметру описанной вокруг $\Delta w_i w_r w_s$ окружности, и луча $w_i w_j$ (механизм 14 и 12), (рис. 19). С помощью механизма 10 построим точку D такую, что отрезок $w_i D$ равен диаметру окружности C . Для этого прикрепим шарниры A, B, A', B' механизма 10 к рассматриваемым шарнирам w_i, O, O, D . Затем соединим шарниры A, B, O, C механизма 13 соответственно с шарнирами w_i, D, w_i, K . Тем самым получили точку K , которая может двигаться по окружности с центром в w_i и радиусом, равным диаметру окружности C .

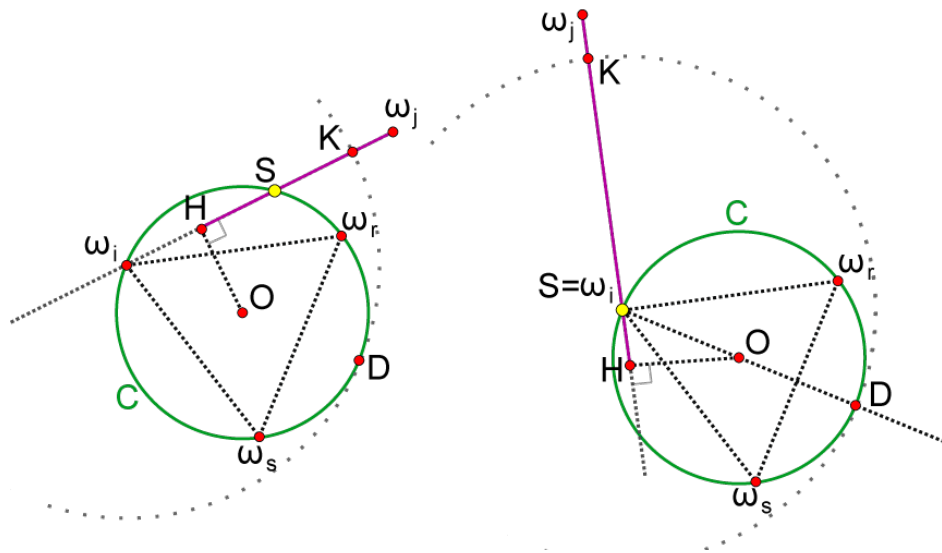


Рис. 19: Построение точки S .

Теперь найдем вершину H луча $\ell_1 = HK$. Для этого добавим шарнир H и

соединим имеющиеся шарниры w_i, w_j, O, H соответственно с шарнирами B, C, A, H механизма 14. Далее, добавим точку S и поместим ее на луч HK (механизм 15), и на окружность C (соединим шарниры A, B, C, O механизма 13 с имеющимися шарнирами w_i, O, S, O). Построенный таким образом шарнир S будет пересечением луча ℓ_1 и окружности C .

Если w_k — вершинный элемент вида (w_i, w_j) , $w_i, w_j \in \omega_v^+(G)$, то поступим с ним так же, как и с реберным элементом $[w_i, w_j]$, заменив в описанных выше построениях точку P_j на точку P_k . Теперь переименуем шарниры w_k и S , поменяв местами их названия. Полученный механизм обозначим L_m и перейдем к построению L_{m+1} . Закончим построение, когда таким образом будут реализованы все шаги обратного хода алгоритма Мелзака. Последний построенный механизм обозначим через L . Этот механизм будет содержать элементы скобочной структуры ω^+ , а их конфигурационное пространство будет совпадать с множеством сетей $[F_\alpha(\omega^+, \varphi)]$. \square

Предложение 3.2. *Дан плоский механизм $L_1(V_1, E_1, \ell_1, \psi_1)$, у которого выделено подмножество шарниров $V' \subset V_1$. Пусть V' — множество вершин некоторого графа $H = (V', E')$. Существует шарнирный механизм, который на заданном луче откладывает от его начала отрезок l_G , равный суммарной длине ребер графа G .*

Доказательство. Пусть заданный в условии луч определен точкой D , которая является его началом, и точкой L , которая лежит на прямой, содержащей луч, но не принадлежит этому лучу (рис. 20). Пронумеруем все ребра G . На выбранном луче будем последовательно откладывать отрезки $K_{j-1}K_j$, длина каждого из которых будет соответствовать длине ребра e_j . Положим $K_0 = D$ (рис. 20).

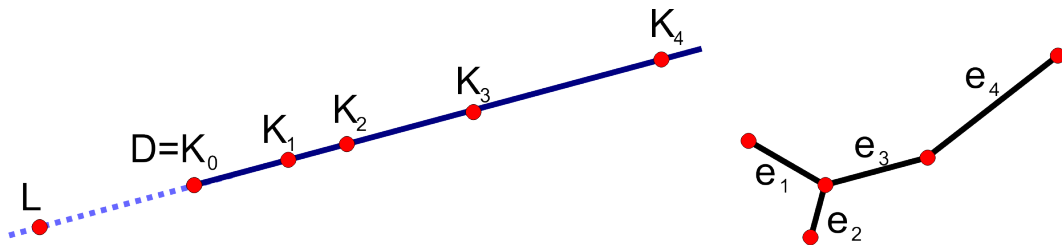


Рис. 20: Построение отрезка равного длине сети.

Опишем построение точки K_j , зная K_{j-1} (рис. 21). При помощи механизма 8 сделаем так, чтобы K_j оставалась на прямой LD . Затем, при помощи механизма 13 сделаем так, чтобы она лежала на окружности радиуса $|e_j|$ с центром в точке K_{j-1} , а также прикрепим к K_j механизм 11, чтобы она находилась только в полуплоскости,

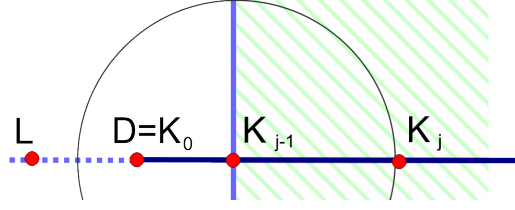


Рис. 21: Построение точки K_j .

ограниченной прямой, проходящей через точку K_{j-1} , перпендикулярной прямой LD и не содержащей точку L . Таким образом, $|K_{j-1}K_j| = |e_j|$, и точка K_j лежит на нужном луче. Если e_s — последнее ребро дерева G , то отрезок K_0K_s равен суммарной длине ребер графа G .

□

Предложение 3.3. Пусть x, y, z — стандартные декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , и $D' \subset \mathbb{R}^3$ — некоторый круг с центром в начале координат, лежащий в плоскости $z = 0$. Пусть G_1, \dots, G_n — произвольные графы, $V(G_i)$ — множество вершин графа G_i , и $V'(G_i)$ — “копия” множества $V(G_i)$, то есть равномощное с $V(G_i)$ множество, для которого задана биекция $\nu_i: V'(G_i) \rightarrow V(G_i)$. Тогда существует шарнирный механизм L в \mathbb{R}^3 , содержащий среди множества шарниров семейство $(\sqcup_{i=1}^n V'(G_i)) \sqcup (\sqcup_{i=1}^n V(G_i))$, такой, что для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ выполняется следующее.

- (1) При каждом $i = 1, \dots, n$ имеем $C(V(G_i)) \subset \{z = 0\}$, таким образом, ограничение Γ_i отображения C на $V(G_i)$ является обобщенной сетью на координатной плоскости $z = 0$, и определена длина этой сети $\ell_i = \ell(\Gamma)$. Положим $c = \min_i \ell_i$.
- (2) Ограничение отображения C на $V'(G_i)$ равно $(0, 0, \ell_i - c) + \Gamma_i \circ \nu_i$, т.е. C поднимает копии шарниров из множества $V'(G_i)$ на высоту $\ell_i - c$.

Более того, для любого семейства отображений $\Gamma'_i: V(G_i) \rightarrow D'$ существует $C \in \mathcal{C}_L$, для которого $\Gamma_i = \Gamma'_i$ при всех i .

Доказательство. Пусть X — шарнир, закрепленный на оси x , Y — шарнир, закрепленный на оси y . Рассмотрим шарнирные ромбы с общим концом O , закрепленным в начале координат, количество которых равно количеству элементов множества $\sqcup_i(V(G_i))$. Противоположные закрепленному концу вершины сделаем элементами

множества $\sqcup_i(V(G_i))$. Обозначим получившийся механизм L . Согласно предложению 3.2, к каждому из множеств $V(G_i)$ можно прикрепить механизм, который для любого возможного положения $C(V(G_i))$, $C \in \mathcal{C}_L$, при котором образы вершин $V(G_i)$ лежат внутри круга D , будет строить на луче OX отрезок $[O, L_i]$, равный длине обобщенной сети $C|_{(V(G_i))}$. Проведем то же самое для всех наборов вершин $V(G_i)$. Далее, с помощью механизма 17 построим отрезок $[O, L]$, длина которого равна длине минимального из всех $[O, L_i]$. Теперь возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник $\Delta F_0 T_0 P_0$, угол T_0 которого равен $2 \arctan \frac{1}{2}$, который закрепим в плоскости OXZ так, чтобы середина гипотенузы T'_0 лежала на оси OZ и имела положительную координату, а вершину T_0 скрепим с O . С помощью механизма 10 прикрепим к нему жесткий треугольник ΔFTP так, чтобы при любом расположении, ΔFTP получался параллельным переносом в плоскости OXZ из $\Delta F_0 T_0 P_0$. Затем сделаем так, чтобы шарниры F, T и O всегда оставались на одной прямой (с помощью механизма 8). Также соединим механизмом 8 шарниры T, P и L . Теперь треугольник ΔFTP всегда расположен в плоскости OXZ так, что его сторона FP параллельна оси OX , вершина T находится ниже FP , а стороны FT и TP содержат концы отрезка OL .

Теперь будем параллельно переносить отрезки OL_i так, чтобы их концы были на сторонах треугольника ΔFTP . Рассмотрим отрезок OL_i . Добавим шарниры O'_i и L'_i так, чтобы отрезок $O'_i L'_i$ получался параллельным переносом из отрезка OL (мех 10), и шарнир O'_i находился на луче TF , а L'_i — на луче TP (механизм 15). Обозначим через Z_i шарнир, являющийся пересечением прямых OZ и $O'_i L'_i$. Эта точка будет задавать вектор параллельного переноса OZ_i . Прикрепим ко всем шарнирам $V(G_i)$ механизм, строящий образ параллельного переноса этих шарниров на вектор OZ_i . Шарниры, являющиеся образами такого параллельного переноса, сделаем элементами множества $V'(G_i)$. Таким образом, для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ шарниров, множество $C(V'(G_i))$ будет множеством вершин, которые получаются параллельным переносом из $C(V(G_i))$ на вектор, параллельный оси z . Положения шарниров множеств $V(G_i)$ ограничиваются плоскостью OXY и длинами стержней шарнирного механизма, поэтому для любого круга D можно подобрать такие длины стержней механизма, чтобы условие теоремы было верно. \square

Теорема 3.4. Пусть x, y, z — стандартные декартовы координаты в \mathbb{R}^3 , и $D \subset \mathbb{R}^3$ — некоторый круг, лежащий в плоскости $z = 0$. Выберем произвольное $n \in \mathbb{N}$, и для каждого ω^+ из множества \mathcal{W}_n^+ ориентированных скобочных структур через $\bar{\omega}_v^+$ обозначим “копию” множества ω_v^+ , то есть равномощное с ω_v^+ множество, для

которого задана биекция $\nu: \bar{\omega}_v^+ \rightarrow \omega_v^+$. Тогда существует шарнирный механизм $L \in \mathbb{R}^3$, содержащий среди семейства шарниров дизъюнктивное объединение множеств ω_v^+ и $\bar{\omega}_v^+$ по всем $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$, такой, что для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ выполняется следующее.

- (1) При каждом $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ имеем $C(\omega_v^+) \subset \{z = 0\}$, таким образом, ограничение Γ_{ω^+} отображения C на ω_v^+ является сетью на координатной плоскости $z = 0$, и определена длина этой сети $\ell(\Gamma_{\omega^+})$. Положим $c = \min_{\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+} \ell(\Gamma_{\omega^+})$.
- (2) Для каждого $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ ограничение отображения C на множество $\{1, \dots, n\}$ — одно и то же отображение, обозначим его через φ .
- (3) При каждом $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ отображение Γ_{ω^+} — элемент множества сетей $F_\alpha(\omega^+, \varphi)$, полученных в результате применения алгоритма Мелзака, соответствующего ω^+ и границе φ .
- (4) Ограничение отображения C на $\bar{\omega}_v^+$ равно $(0, 0, \ell(\omega_v^+) - c) + \Gamma_{\omega^+} \circ \nu$, т.е. C поднимает копии шарниров из множества ω_v^+ на высоту $\ell(\Gamma_{\omega^+}) - c$.

Более того, для каждого $\varphi': \{1, \dots, n\} \rightarrow D$ существует конфигурация $C \in \mathcal{C}_L$ такая, что $\varphi = \varphi'$.

Доказательство. Рассмотрим множество ориентированных скобочных структур \mathcal{W}_n^+ . Граничное множество каждой из них — множество $\{1, \dots, n\}$. Согласно предложению 3.1, для каждой из $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ можно построить шарнирный механизм, содержащий в семействе шарниров множество $\{1, \dots, n\}$, и для любой их конфигурации φ в диске D строящий семейство сетей $F_\alpha(\omega^+, \varphi)$. Далее, к получившемуся множеству сетей по всевозможным ω^+ применим предложение 3.3 и получим, что в плоскости $z = 0$ будут построены те из них, которые имеют наименьшую длину. \square

Список литературы

- [1] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. CRC Press, 1994.
- [2] Melzak Z. A. On the problem of Steiner, Canad. Math. Bull., 1960.

- [3] Hwang F.K. A linear time algorithm for full steiner trees, *Operations Research Letters*, 1986.
- [4] Cauchy A.L. *Recherche sur les polyedres — premier memoire*, *Journal de l’Ecole Polytechnique*, 1813, N 9, 66-86.
- [5] Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. *Курс наглядной геометрии и топологии*. — URSS, Леланд Москва, 2014.
- [6] Kempe A.V. *How to draw a straight line: a lecture on linkages*. — Macmillan & Co., 1877.
- [7] А. Т. Фоменко. *Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире*. — Москва, МГУ, 1998.
- [8] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей*.— Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [9] <http://www.etudes.ru/ru/mov/>
- [10] Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. *Курс наглядной геометрии и топологии*. — URSS, Леланд Москва, 2014.
- [11] <http://jeanlouis.blanchard.pagesperso-orange.fr>
- [12] <http://tcheb.ru/ru>
- [13] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая*. http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130
- [14] Сосинский А.Б. *Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая*. http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus
- [15] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.:Наука, 1990.
- [16] Ильютко Д.П. *Локально минимальные сети в N -нормированных пространствах*. Матем. заметки, 2003, 74: 5, 656—668.
- [17] Ильютко Д.П. *Геометрия экстремальных сетей на λ -нормированных плоскостях*. Вестник МГУ, сер. 1. Матем. Мех., 2005, № 4, 52—54.

- [18] Ильютко Д.П. *Разветвленные экстремали функционала λ -нормированной длины*. Матем. сб., 2006, 197:5, 75–98.
- [19] Ильютко Д.П., Никонов И.М., *Экстремальные сети на λ -нормированной плоскости, где $\lambda = 3, 4, 6$* . Матем. сб., 2017, 208:4, 17–50.