Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Преобразование метрик, сохраняющие типы одномерных минимальных заполнений

Дипломная работа студента 603 группы Липатова Степана Юрьевича

Научный руководитель: профессор Тужилин Алексей Августинович

Москва, 2017.

Преобразование метрик, сохраняющие типы одномерных минимальных заполнений

С. Ю. Липатов

25 мая 2017 г.

Введение

Проблема Штейнера — это задача об оптимальном соединении конечного множества точек метрического пространства. По-видимому, первые формулировки этого типа возникли в трудах Ферма, поставившего вопрос о поиске такого расположения точки на плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин заданного треугольника наименьшая из возможных. В течении нескольких столетий был получен полный ответ, из которого ясно, что, соединяя три точки на плоскости, бывает выгодно добавить четвертую точку-развилку. Важность таких дополнительных точек прекрасно понимал Гаусс, обсуждавший в переписке с Шумахером задачу о том, как соединить Гамбург, Бремен, Ганновер и Брауншвейг кратчайшей системой дорог. В 1934 году Ярник и Кесслер сформулировали общую задачу, которая теперь известна как классическая проблема Штейнера. Фактически, их задача представляет собой обобщение задачи Ферма и Гаусса о кратчайшем соединении на случай произвольного конечного множества точек плоскости. Что касается самого Штейнера, то он занимался другим обобщением задачи Ферма: найти в пространстве такую точку, для которой сумма расстояний до заданных точек будет наименьшей возможной. Отметим, что недоразумение о приоритете возникло благодаря популярной книге Куранта и Роббинса "Что такое математика?", где задача Ферма была приписана Штейнеру, а задача Ярника и Кесслера была названа просто обобщением проблемы Штейнера.

Сетью в псевдометрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, d)$, *параметризованной* произвольным связным *графом* $G = (V, E)$, или *сетью типа* G, называется отображение $\Gamma : V \to X$ ([1]). *Вершинами* и *ребрами* сети Γ называются ограничения отображения Γ соответственно на вершины и ребра графа G. *Длиной ребра* $\Gamma : vw \to X$ назовем число $d(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а *длиной* $d(\Gamma)$ *сети* Γ — сумму длин всех ее ребер. *Границей* $\partial\Gamma$ *сети* Γ назовем ограничение отображения Γ на ∂G. Если $M \subset X$ — конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то будем говорить, что *сеть* Γ *соединяет множество* M. Вершины графов и сетей, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними.* Число $\mathrm{smt}(M) = \inf\{d(\Gamma) | \Gamma$ — сеть, соединяющая $M\}$ назовем длиной кратчайшей сети. Сеть, для которой $d(\Gamma) = \mathrm{smt}(M)$, называется *кратчайшей сетью* ([2]). Понятие минимального заполнения появилось в работах Громова в следующем виде: пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$, где M — замкнутое многообразие с функцией расстояния ρ на нём, а $\mathcal{W} = (W, d)$, где W — компактное многообразие с краем, равным M, таково, что d не уменьшает расстояния между точками из M, тогда $\mathcal{W}$ называется *заполнением* $\mathcal{M}$. Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объемов заполнений, а также описании тех пространств $\mathcal{W}$, называемых *минимальными заполнениями*, на которых эта нижняя грань достигается.

В контексте проблемы Штейнера естественно рассмотреть в качестве M конечное метрическое пространство. Тогда возможные заполнения — метрические пространства, имеющие структуру одномерных стратифицированных многообразий (которые можно рассматривать как реберно взвешенные графы с неотрицательными весовыми функциями). Графы отдельно от весовых функций будем называть *типами заполнений.* При этом будем рассматривать только такие типы, в которых вершинам степени 1 и 2 соответствуют точки метрического пространства M. Объяснения, почему можно ограничиться такими типами, будет дано ниже.

Ивановым и Тужилиным [1] было доказано, что преобразования типа $\rho \mapsto \lambda\rho + a$ для $a > \lambda a_\rho$, $\lambda > 0$, где a_ρ — некоторое число, зависящее от метрики ρ, сохраняют типы G минимальных заполнений метрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G. Число a может быть отрицательным; существует такое $a_\rho \le 0$, для которого $\lambda\rho + a$ — метрика при всех $a > \lambda a_\rho$, и не является метрикой при всех $a < \lambda a_\rho$ (при $a = \lambda a_\rho$ можем получить как метрику, так и псевдометрику).

Общая задача была сформулирована следующим образом: задан класс F метрических пространств и семейство преобразований T метрики. Нужно было описать семейство преобразований $T' \subset T$, которые переводят F в себя и сохраняют некоторые типы минимальных заполнений. Был рассмотрен случай,

- когда F — класс всех конечных метрических пространств, $T = \{(M, \rho) \to (M, f \circ \rho) : f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}\}$, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений четырехточечных метрических пространств и конечных невырожденных звёзд, и доказано, что $T' = \{(M, \rho) \to (M, \lambda\rho + a) \colon a > \lambda a_\rho\}$ (опубликовано в [3]);

- когда F — класс всех конечных метрических пространств, класс T состоит из отображений $\rho \to N\rho$, где матрицы N имеют вид 2.7 (сумма положительной диагональной матрицы A и матрицы с одинаковыми строками из неотрицательных элементов), а элементы T' сохраняют все минимальные заполнения типа невырожденных звезд, и доказано, что T' состоит из таких отображений $\rho \to N\rho$, где A — скалярна;

- когда F — класс всех конечных аддитивных метрических пространств, T — класс всех линейных отображений, задаваемых матрицами, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений, и доказано, что для четырёхточечных метрических пространств T' — множество преобразований, заданных скалярными матрицами;

- когда F — класс всех конечных ультраметрических пространств, T — класс всех линейных отображений, задаваемых матрицами, и доказано, что для трёхточечных пространств матрицы имеют вид $A = R(B + \lambda E)$, где B — матрица из одинаковых строк из положительных элементов, а R — перестановка точек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

  Кроме того, получены доказательства некоторых свойств конечных ультраметрических пространств и способ описания множества пространств с одинаковыми типами минимальных заполнений.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Тужилину А.А., а также профессору Иванову А.О. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1 Предварительные результаты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты. Подробности см. в [1].

Определение 1.1. *Псевдометрикой* на множестве M называют такую симметричную функцию $\rho : M^2 \to \mathbb{R}$, для которой $\rho(a, a) = 0$ при всех a и выполнены неравенства треугольника: $\rho(i, j) \le \rho(i, k) + \rho(k, j)$ для любых $i, j, k \in M$. Отметим, что из неравенства треугольника вытекает неотрицательность функции ρ, так как $0 = \rho(a, a) \le 2\rho(a, b)$. *Метрикой* на множестве M называют такую псевдометрику d, что для любых различных $a, b \in M$ выполнено $d(a, b) \neq 0$.

Пусть M — произвольное конечное множество и $G = (V, E)$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M, а M — *граница графа* G, если $M \subset V$. Границу графа G будем также обозначать через ∂G. Вершины графов и сетей, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*. Пусть теперь $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство (в отличие от метрики, расстояния между разными точками могут быть равны нулю), $G = (V, E)$ — связный граф, соединяющий M, и $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа, называемое обычно *весовой функцией* и порождающее *взвешенный граф* $\mathcal{G} = (G, \omega)$. *Весом* взвешенного графа $\mathcal{G}$ называется величина $\omega(G)$, равная сумме весов всех ребер этого графа. Функция ω задает на V псевдометрику d_ω, а именно, расстоянием между вершинами графа $\mathcal{G}$ назовем наименьший из весов путей, соединяющих эти вершины. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p, q) \le d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого *заполнения*. Число $\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства

$\mathcal{M}$ назовем *весом минимального заполнения*, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \mathrm{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением.*

Соглашение 1.2. Не будем рассматривать типы, в которых есть внутренние вершины степени 1 или 2: если есть заполнение с таким типом, то можно убрать вершины степени 2 с сохранением веса заполнения и убрать вершины степени 1 вместе с входящими в них рёбрами и при этом вес заполнения не увеличится. Поэтому всегда среди минимальных заполнений будут не содержащие внутренних вершин степени 1 или 2.

Конечное псевдометрическое пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$ называется *аддитивным*, если M можно соединить взвешенным деревом $\mathcal{G} = (G, \omega)$ для которого ρ совпадает с ограничением d_ω на M([1]). Дерево $\mathcal{G}$ в этом случае называется *порождающим.* Взвешенные графы и заполнения с положительными весами будем называть *невырожденными.*

Утверждение 1.3 ([1]). *У каждого аддитивного пространства единственным невырожденным минимальным заполнением является его невырожденное порождающее дерево.*

Утверждение 1.4 ([1]). *Пространство $\mathcal{M} = (M, \rho)$, минимальное заполнение $\mathcal{G} = (G, \omega)$ которого представляет собой звезду, в которой внутренняя вершина v соединена со всеми точками $p_i \in M$, $1 \le i \le n$, $n \ge 3$, аддитивно.*

Пусть $G = (V, E)$ — произвольное дерево. Пусть $v \in V$ — внутренняя вершина степени $(k+1) \ge 3$, смежная с k вершинами $w_1, \ldots, w_k$ из ∂G. Тогда множество вершин $\{w_1, \ldots, w_k\}$, а также множество ребер $\{vw_1, \ldots, vw_k\}$, называются *усами.* Число k назовём *степенью*, а v — *общей вершиной* этих усов.

Теорема 1.5 ([1]). *Преобразования типа $\rho \mapsto \lambda\rho + a$ для $a > \lambda a_\rho$ сохраняют типы G минимальных заполнений метрического пространства, точки которого соответствуют вершинам степени 1 графов G.*

Будем называть дерево *бинарным*, если каждая его вершина имеет степень 1 или 3, а граница состоит в точности из всех вершин степени 1.

Утверждение 1.6 ([1]). *Пусть $M = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, и ρ — произвольная псевдометрика на M. Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Тогда вес минимального заполнения $\mathcal{G} = (G, \omega)$ пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$ дается формулой*

$$\frac{1}{2}\big(\min\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\} + \max\{\rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23}\}\big).$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij} + \rho_{rs}$, то тип минимального заполнения — бинарное дерево, усы которого суть $\{p_i, p_j\}$ и $\{p_r, p_s\}$.

Утверждение 1.7 ([1]). *Критерием аддитивности пространства является правило четырех точек: для любых четырех точек p_i, p_j, p_k, p_l величины $\rho(p_i, p_j) + \rho(p_k, p_l)$, $\rho(p_i, p_k) + \rho(p_j, p_l)$, $\rho(p_i, p_l) + \rho(p_j, p_k)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника с основанием, не превосходящим боковой стороны.*

2 Основные результаты

2.1 Отображения вида $(M,\rho)\to(M,\ f\circ\rho)$

Рассмотрим случай, когда F — класс всех конечных метрических пространств, $T=\{(M,\rho)\to(M,\ f\circ\rho): f\colon\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}\}$, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений четырехточечных метрических пространств и конечных невырожденных звёзд.

Для любого $a\in\mathbb{R}$ положим $\mathbb{R}_{>a}=\{x\in\mathbb{R}|x>a\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $f\colon\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ — такая функция, что для каждого метрического пространства (M,ρ) функция $f\circ\rho$ по-прежнему является метрикой на M, и сохраняются невырожденные звезды и типы минимальных заполнений четырёхточечных пространств. Тогда существует такое C, что $f+2C$ линейна на $\mathbb{R}_{>0}$.*

Доказательство теоремы 2.1 основано на двух вспомогательных результатах — леммах 2.2 и 2.5.

Лемма 2.2. *Пусть $f\colon\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ — такая функция, что для каждого метрического пространства (M,ρ), невырожденный тип заполнения которого — звезда, функция $f\circ\rho$ по-прежнему является метрикой на M, и невырожденные типы всех минимальных заполнений у пространств (M,ρ) и $(M,\ f\circ\rho)$ одинаковы. Тогда существует такое C, что $f+2C$ аддитивна на $\mathbb{R}_{>0}$.*

Доказательство. Покажем, что существует такое C, что для любого $k\in\mathbb{N}, N=2^k$, любых $a,b\in\mathbb{R}_{>\frac{1}{N}}$ и $g=f+2C$ выполнено $g(a+b)=g(a)+g(b)$. Пусть $\mathcal{M}=(M,\rho)$, $M=\{p_i\}_{i=0}^7$, — метрическое пространство, минимальное заполнение которого $\mathcal{G}=(G,\omega)$ представляет собой звезду с внутренней вершиной v, соединенной со всеми точками p_i ребрами $e_i=vp_i$, причем $\omega(e_0)=\omega(e_1)=\omega(e_2)=\frac{1}{N}, \omega(e_3)=a, \omega(e_4)=b, \omega(e_5)=a-\frac{1}{N}, \omega(e_6)=b-\frac{1}{N}$, $\omega(e_7)=\frac{2}{N}$.

Так как $f\circ\rho$ — метрика на M, а некоторая звезда $\mathcal{G}_1=(G,\omega_1)$ — минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}_1=(M,f\circ\rho)$, то, в силу 1.4, для всех $i\neq j$ выполняется

$$f\big(\rho(p_i,p_j)\big)=f\big(\omega(e_i)+\omega(e_j)\big)=\omega_1(e_i)+\omega_1(e_j).$$

Найдем все $\omega_1(e_i)$. Имеем

$$\omega_1(e_0)=\frac{\omega_1(e_0)+\omega_1(e_1)+\omega_1(e_0)+\omega_1(e_2)-\omega_1(e_1)-\omega_1(e_2)}{2}=\\ \frac{f\big(\rho(p_0,p_1)\big)+f\big(\rho(p_0,p_2)\big)-f\big(\rho(p_1,p_2)\big)}{2}=\frac{f(\frac{2}{N})}{2},$$

а при $i\geq 1$, получаем

$$\omega_1(e_i)=f\big(\rho(p_0,p_i)\big)-\omega_1(e_0)=f\big(\omega(e_i)+\omega(e_0)\big)-\omega_1(e_0)=f\Big(\omega(e_i)+\frac{1}{N}\Big)-\frac{f(\frac{2}{N})}{2}.$$

Далее,

$$f\Big(a+\frac{1}{N}\Big) = f\big(\rho(p_5,p_7)\big) = \omega_1(e_5)+\omega_1(e_7) = f(a)+f\Big(\frac{3}{N}\Big)-f\Big(\frac{2}{N}\Big),$$

$$f\Big(b+\frac{1}{N}\Big) = f\big(\rho(p_6,p_7)\big) = \omega_1(e_6)+\omega_1(e_7) = f(b)+f\Big(\frac{3}{N}\Big)-f\Big(\frac{2}{N}\Big),$$

$$f(a+b) = f\big(\rho(p_3,p_4)\big) = \omega_1(e_3)+\omega_1(e_4) = f\Big(a+\frac{1}{N}\Big)+f\Big(b+\frac{1}{N}\Big)-f\Big(\frac{2}{N}\Big) = \\ f(a)+f(b)+2f\Big(\frac{3}{N}\Big)-3f\Big(\frac{2}{N}\Big) = f(a)+f(b)+x,$$

где $x := 2f(\frac{3}{N})-3f(\frac{2}{N})$. Покажем, что для любого $k\in\mathbb{N}$ верно $2f(\frac{6}{N})-3f(\frac{4}{N}) = 2f(\frac{3}{N})-3f(\frac{2}{N})$. Положим $a=b=\frac{3}{N}$ или $a=b=\frac{2}{N}$, тогда, используя последнюю формулу, получаем

$$f\Big(\frac{6}{N}\Big) = 2f\Big(\frac{3}{N}\Big)+x, f\Big(\frac{4}{N}\Big) = 2f\Big(\frac{2}{N}\Big)+x,$$

$$2f\Big(\frac{6}{N}\Big)-3f\Big(\frac{4}{N}\Big) = 4f\Big(\frac{3}{N}\Big)-6f\Big(\frac{2}{N}\Big)-x = x = 2f\Big(\frac{3}{N}\Big)-3f\Big(\frac{2}{N}\Big).$$

Индукцией по k найдём, что $x = 2f(3)-3f(2)$. Таким образом, для любого k число C можно положить равным $\frac{2f(3)-3f(2)}{2}$, поэтому оно не зависит от a и b, которые можно выбрать любыми в силу того, что для любых $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$ существует такое число $k\in\mathbb{N}, N=2^k$, что $a,b\in\mathbb{R}_{>\frac{1}{N}}$, и построить соответствующее $\mathcal{M}$. Отсюда вытекает, что функция $f+2C$ аддитивна на любом открытом луче $x>\frac{1}{N}$, а, следовательно, и на всём луче $x>0$. $\square$

Замечание 2.3. Если нет никаких дополнительных ограничений на аддитивную функцию, то существует бесконечно много нелинейных функций, которые удовлетворяют уравнению $f(a+b)=f(a)+f(b)$. Это было доказано в 1905 году Георгом Гамелем с использованием базиса Гамеля.

Лемма 2.4. *Функции f, для которых отображение $(M,\rho)\to(M,\, f\circ\rho)$ не меняет невырожденные типы минимальных заполнений четырёхточечных метрических пространств, монотонно возрастают.*

Доказательство. Покажем, что если $0<a<b$, то $f(a)<f(b)$. Возьмём множество $X=\{p_i\}_{i=1}^4$ и такую функцию $\rho: X\times X\to\mathbb{R}_{>0}$, что $\rho(p_1,p_2)=\rho(p_2,p_1)=\rho(p_3,p_4)=\rho(p_4,p_3)=a$, для любого $x\in X$ выполняется $\rho(x,x)=0$, а на остальных парах ρ принимает значение b. Очевидно, $\big(X,\rho\big)$ — метрическое пространство, заполнение которого, согласно утверждению 1.6, имеет усы $\{p_1,p_2\}$ и $\{p_3,p_4\}$, так как на соответствующих противоположных рёбрах достигается минимум суммы длин (он равен $2a$). После замены ρ на $f\circ\rho$ для не меняющей типы минимальных заполнений функции f усы останутся теми же, поэтому $2f(a)$ есть минимум суммы длин противоположных рёбер, т.е. $f(a)<f(b)$. $\square$

Лемма 2.5. *Если $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая аддитивная на $\mathbb{R}_{>0}$ функция, то g линейна на $\mathbb{R}_{>0}$.*

Замечание 2.6. Здесь и далее линейными функциями на $\mathbb{R}_{>0}$ называются ограничения линейных отображений $\mathbb{R}$ в себя, а не функции вида $f(x) = kx + b$.

Доказательство. Пусть g не линейна, тогда существуют такие $x_1, x_2 > 0$, что $\frac{g(x_1)}{x_1} = \alpha > \beta = \frac{g(x_2)}{x_2}$. Возьмём такое $\epsilon > 0$, что $\alpha x_1 > \beta(x_1 + \epsilon)$. Тогда найдётся $m \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{x_2}{m} < \epsilon$, и, следовательно, $\frac{x_2}{m} < x_1 + \epsilon$, поэтому существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что $x_1 < \frac{kx_2}{m} < x_1 + \epsilon$.

Но тогда, в силу аддитивности, $g(\frac{kx_2}{m}) = \beta\frac{kx_2}{m} < \beta(x_1+\epsilon) < \alpha x_1 = g(x_1)$, что противоречит монотонному возрастанию. □

Доказательство теоремы 2.1. По лемме 2.2, существует такое C, что $f + 2C$ аддитивна, по лемме 2.4, функция f монотонно возрастает, и, значит, $f+2C$ также монотонно возрастает, поэтому, по лемме 2.5, $f+2C$ — линейна. □

2.2 Линейные отображения

Пусть $M = \{p_1, \ldots, p_n\}$ и ρ — метрика на M. Положим $\rho_{ij} = \rho(p_i, p_j)$. Также через ρ обозначим вектор $(\rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{n-1,n})$, составленный из ненулевых ρ_{ij}. Тогда $\rho \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Соглашение 2.7. Пусть N — сумма положительной диагональной матрицы $A = \mathrm{diag}(\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots, \lambda_{n-1,n})$ и матрицы B с одинаковыми строками из неотрицательных элементов, а $C(\rho)$ — скалярное произведение строки матрицы B на вектор расстояний.

Замечание 2.8. Матрица N вида $A + B$ в обозначениях 2.7 задаёт такое отображение $\rho \mapsto \rho'$, что $\rho'_{ij} = \lambda_{ij}\rho_{ij} + C(\rho)$.

Рассмотрим случай, когда F — класс всех конечных метрических пространств, класс T состоит из отображений $\rho \to N\rho$, где матрицы N имеют вид 2.7, а элементы T' сохраняют все минимальные заполнения типа невырожденных звезд.

Лемма 2.9. *Матрица N в обозначениях 2.7 с $A = \lambda E$ задаёт преобразование метрики, сохраняющее метрики и невырожденные типы минимальных заполнений.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.8, преобразование имеет вид $\rho \mapsto \lambda\rho + C(\rho)$, поэтому оно по теореме 1.5 сохраняет метрики и невырожденные типы минимальных заполнений. □

Теорема 2.10. *Матрица N вида $A+B$ в обозначениях 2.7 сохраняет метрики и минимальные заполнения, типы которых — невырожденные звёзды, тогда и только тогда, когда A — скалярная матрица.*

Доказательство. Если A скалярна, то, по лемме 2.9, матрица N сохраняет метрики и невырожденные типы минимальных заполнений.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть A не скалярна. Покажем, что матрица N не всегда сохраняет метрики и типы минимальных заполнений, являющихся невырожденными звездами.

Предположим, что матрица N сохраняет метрики всегда. Так как A не скалярна, то найдутся a, b и c такие, что $\lambda_{ab} \neq \lambda_{ac}$. Пользуясь утверждением 1.3, построим метрическое пространство $M = \{1, \ldots, n\}$ с метрикой ρ так, чтобы тип его минимального заполнения был невырожденной звездой, в которой множество M — это все вершины степени 1, а тип минимального заполнения его образа не был звездой. Обозначим минимальное заполнение M через (G, ω), и пусть o — внутренняя вершина G. Положим $\lambda_i = \omega(oi)$, где i — граничная вершина. Так так G — звезда, имеем $\rho_{ij} = \lambda_i + \lambda_j$, где $\rho_{ij} = \rho(i,j)$. Отсюда вытекает, что $\rho_{ab}+\rho_{cd} = \rho_{ac}+\rho_{bd}$, откуда $\rho_{ac} = \rho_{ab}+\rho_{cd}-\rho_{bd}$.

Чтобы тип минимального заполнения образа M не был звездой, достаточно, чтобы $\rho'_{ab} + \rho'_{cd} \neq \rho'_{ac} + \rho'_{bd}$. Пользуясь замечанием 2.8, получаем $\lambda_{ab}\rho_{ab}+C(\rho)+\lambda_{cd}\rho_{cd}+C(\rho) \neq \lambda_{ac}\rho_{ac}+C(\rho)+\lambda_{bd}\rho_{bd}+C(\rho)$, откуда $\lambda_{ab}\rho_{ab}+\lambda_{cd}\rho_{cd} \neq \lambda_{ac}\rho_{ac}+\lambda_{bd}\rho_{bd}$, то есть $\lambda_{ab}\rho_{ab}+\lambda_{cd}\rho_{cd} \neq \lambda_{ac}(\rho_{ab}+\rho_{cd}-\rho_{bd})+\lambda_{bd}\rho_{bd}$. Приведя подобные слагаемые, получим

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{ab} - \lambda_{ac})\rho_{ab} &\neq (\lambda_{bd} - \lambda_{ac})\rho_{bd} - (\lambda_{cd} - \lambda_{ac})\rho_{cd} \\
&= (\lambda_{bd} - \lambda_{ac})(\lambda_b + \lambda_d) - (\lambda_{cd} - \lambda_{ac})(\lambda_c + \lambda_d) \\
&= (\lambda_{bd} - \lambda_{ac})\lambda_b + (\lambda_{ac} - \lambda_{cd})\lambda_c + (\lambda_{bd} - \lambda_{cd})\lambda_d.
\end{aligned}
$$

Возьмём $\lambda_a = \lambda_b = 1$ и будем выбирать λ_d и λ_c. Если $\lambda_{bd}-\lambda_{cd} = \lambda_{ac}-\lambda_{cd} = 0$, то в полученном неравенстве справа 0, а слева не 0 при любых λ_d и λ_c. Пусть теперь $\lambda_{ac} - \lambda_{cd} \neq 0$ или $\lambda_{bd} - \lambda_{cd} \neq 0$. В первом случае неравенство можно решить относительно λ_c при $\lambda_d = 1$, $\lambda_c \neq \frac{(\lambda_{ab}-\lambda_{ac})\rho_{ab}-(\lambda_{bd}-\lambda_{ac})\lambda_b-(\lambda_{bd}-\lambda_{cd})\lambda_d}{\lambda_{ac}-\lambda_{cd}}$ и взять положительное решение, например

$$
\lambda_c = \left| \frac{(\lambda_{ab} - \lambda_{ac})\rho_{ab} - (\lambda_{bd} - \lambda_{ac})\lambda_b - (\lambda_{bd} - \lambda_{cd})\lambda_d}{\lambda_{ac} - \lambda_{cd}} \right| + 1;
$$

во втором случае неравенство можно решить относительно λ_d при $\lambda_c = 1$ и взять положительное решение. Таким образом, для N с нескалярной A всегда можно построить такое метрическое пространство, что одно из его минимальных заполнений имеет тип невырожденной звезды, а у N-образа этого пространства минимальное заполнение звездой не является. $\square$

2.3 Аддитивные пространства

Рассмотрим случай, когда F — класс всех конечных аддитивных метрических пространств, T — класс всех линейных отображений, задаваемых матрицами, а элементы T' сохраняют все невырожденные типы минимальных заполнений.

Рассмотрим множество псевдометрик $K(n)$ в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Каждое условие неотрицательности и неравенство треугольника задаёт (замкнутое) полупространство, ограниченное гиперплоскостью, проходящий через начало координат O, поэтому $K(n)$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в O. Заметим, что метрикам соответствуют в точности все точки конуса $K(n)$, не лежащие на координатных гиперплоскостях. В частности, все внутренние точки этого конуса соответствуют метрикам.

Определение 2.11. *Объединением k-мерных граней* множества $X \subset \mathbb{R}^N$ назовём такое подмножество $E_k(X)$ в X, что для любой $x \in E_k(X)$ существует лежащий в X шар размерности k с центром в x, но не существует лежащего в X шара размерности $k+1$ с центром в x. Положим $E_1(X) = E(X)$ и назовём *объединением рёбер*. Легко видеть, что $E\big(K(n)\big)$ — объединение лучей с началом в нуле. Каждый из них будем называть *ребром*.

Лемма 2.12. *Пусть $x \in K(n)$. Тогда $x \in E\big(K(n)\big)$, если и только если любой ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, для которого существует такое $\delta > 0$, что для любого $\epsilon, -\delta < \epsilon < \delta$, выполнено $x + a\epsilon \in K(n)$, пропорционален (коллинеарен) x, то есть существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\lambda a = x$.*

Доказательство. Пусть $x \in E\big(K(n)\big)$, тогда если бы существовал такой неколлинеарный ненулевой вектор a, то, вместе с лучом $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ и отрезком $\{x + a\epsilon : -\delta < \epsilon < \delta\}$, конус $K(n)$ содержал бы их выпуклую оболочку в силу выпуклости $K(n)$. Эта оболочка содержит двумерный шар (круг) с центром в x, что противоречит $x \in E\big(K(n)\big)$.

Пусть $x \notin E\big(K(n)\big)$, тогда существует лежащий в $K(n)$ шар размерности $k > 1$ с центром в x. В качестве a можно взять любой неколлинеарный x вектор в этом шаре. □

Лемма 2.13. *Множество $K(n)$ — выпуклая комбинация множества $E(K(n))$.*

Доказательство. Пусть x_i — координаты в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Множество $W = K(n) \cap \{\sum x_i = 1\}$ — выпуклый многогранник, причем $K(n)$ — конус над W с вершиной O, так как $K(n)$ лежит в положительном ортанте, а каждый луч в этом ортанте пересекает $\{\sum x_i = 1\}$. Лучи из $E(K(n))$ — лучи с началом в O, проходящие через вершины W. Так как выпуклый многогранник — выпуклая комбинация множества своих вершин, то $K(n)$ — выпуклая комбинация множества $E(K(n))$ □

Лемма 2.14. *Для того, чтобы линейное отображение A переводило псевдометрику в псевдометрику, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A\Big(E\big(K(n)\big)\Big) \subset K(n).$$

Доказательство. Необходимость. Если существует $x \in E\big(K(n)\big)$ такой, что $A(x) \notin K(n)$, то это и есть та псевдометрика, которая перешла не в псевдометрику.

Достаточность. По лемме 2.13, любой вектор x конуса $K(n)$ может быть представлен выпуклой комбинацией вершин многогранника, умноженной на неотрицательное число, т.е. линейной комбинацией векторов рёбер с неотрицательными коэффициентами. При линейном отображении эта комбинация переходит в комбинацию образов рёбер с теми же коэффициентами, поэтому вектор v остается в конусе $K(n)$. □

Лемма 2.15. *Псевдометрики, в которых множество из n точек разбито на 2 непустых подмножества U и V так, что расстояния между точками из одного и того же подмножества равны 0, принадлежат $E\big(K(n)\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим такой $x \in E\big(K(n)\big)$ и ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, для которого существует такое $\delta > 0$, что для любого $\epsilon, -\delta < \epsilon < \delta$, выполнено $x + a\epsilon \in K(n)$. Заметим, что если $x_{ij} = 0$, то $a_{ij} = 0$, так как иначе при любом $\delta > 0$ для $\epsilon = -\frac{\delta}{2}\frac{a_{ij}}{|a_{ij}|}$ выполнено $-\delta < \epsilon < \delta$, но $x_{ij} + \epsilon a_{ij} < 0$ поэтому $x + a\epsilon \notin K(n)$. Так как вектор a — ненулевой, то существуют такие $i, j \in \{1 \ldots n\}$, что $a_{ij} = d \neq 0$. Из неравенств треугольника следует, что для любых $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ выполнено $x_{u_1 v_1} = x_{u_2 v_2}$ При переходе от x к $x + a\epsilon$ нулевые расстояния переходят в нулевые, то есть разбиение на 2 подмножества сохраняется, и все ненулевые расстояния остаются равными между собой. Так как из $x_{ij} = 0$ следует $a_{ij} = 0$, то и из $a_{ij} \neq 0$ следует $x_{ij} \neq 0$ и для любых $x_{kl} \neq 0$ выполнено $x_{kl} + a_{kl}\epsilon = x_{ij} + a_{ij}\epsilon$, потому что при переходе от x к $x + a\epsilon$ ненулевые расстояния остаются равными между собой. Так как $x_{ij} \neq 0$ и $x_{kl} \neq 0$, то $x_{ij} = x_{kl}$ и $a_{ij} = a_{kl} = d$. То есть для любых $i, j \in \{1 \ldots n\}$, если $x_{ij} = 0$, то $a_{ij} = 0$, а если $x_{ij} \neq 0$, то $a_{ij} = d$, поэтому x коллинеарен a. □

Соглашение 2.16. Обозначим через $\begin{smallmatrix} i_{1,1} \\ i_{1,2} \\ \cdots \\ i_{1,n_1} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} i_{2,1} \\ i_{2,2} \\ \cdots \\ i_{2,n_2} \end{smallmatrix} - \ldots - \begin{smallmatrix} i_{k,1} \\ i_{k,2} \\ \cdots \\ i_{k,n_k} \end{smallmatrix}$ множество n-точечных псевдометрических пространств, $n = n_1 + \cdots + n_k$, для которых существуют такие k последовательных точек на вещественной прямой, что отображение $i_{j,1}$, $i_{j,2}$, $\ldots$, i_{j,n_j} в j-ую точку прямой — изометрично.

Утверждение 2.17. *Матрица A, сохраняющая рёбра $\frac{n(n-1)}{2}$-мерного конуса, диагональна в координатах, направленных по любым $\frac{n(n-1)}{2}$ линейно независимым рёбрам конуса.*

Теорема 2.18. *При $n = 4$ линейное отображение A переводит аддитивные метрические пространства в аддитивные с тем же невырожденным типом минимального заполнения тогда и только тогда, когда A имеет вид $\rho \to \alpha\rho$.*

Доказательство. В обозначениях 2.16, множества 4-точечных псевдометрических пространств $1 - \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$, $2 - \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$, $3 - \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}$, $4 - \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$ являются рёбрами $K(4)$. Заметим, что множество аддитивных пространств, в невырожденных типах минимальных заполнений которых вершины a, b, c и d соединены последовательно, совпадает с $a - b - c - d$. Тогда A сохраняет

$\substack{1\\2} - \substack{3\\4}$, так как $\substack{1\\2} - \substack{3\\4} = 1-2-3-4 \cap 2-1-4-3$, аналогично A сохраняет $\substack{1\\3} - \substack{2\\4}$ и $\substack{1\\4} - \substack{2\\3}$. Также A сохраняет $1 - \substack{2\\3\\4}$, так как $1 - \substack{2\\3\\4} = 1-2-3-4 \cap 1-3-4-2$, аналогично A сохраняет $2 - \substack{1\\3\\4}$, $3 - \substack{1\\2\\4}$ и $4 - \substack{2\\3\\1}$. Таким образом, A сохраняет 7 рёбер $K(4)$, поэтому, в силу утверждения 2.17, матрица A диагональна в координатах, направленных по любым 6-ти линейно независимым рёбрам конуса, например всех, кроме $(1,1,1,0,0,0)$. Но так как этот вектор линейно независим от любых пяти из шести оставшихся, матрица A скалярна в этих координатах и потому имеет вид $\rho \to \alpha\rho$. □

2.4 Ультраметрические пространства

Рассмотрим случай, когда F — класс всех конечных ультраметрических пространств, T — класс всех линейных отображений, задаваемых матрицами.

Утверждение 2.19. *Ультраметрические пространства аддитивны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное подмножество из 4 точек. Из условия ультраметричности следует, что в любом треугольнике два наибольшие расстояния равны между собой, поэтому можно выбрать обозначения так, чтобы $\rho_{12} = \rho_{13} = a$ и $\rho_{23} = b$, $a \geq b$. Проверим условие 4 точек (1.7) для этого подмножества.

1) Пусть $\rho_{14} = c < a$, тогда $\rho_{24} = \rho_{34} = a$ и $\rho_{12} + \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{24} = 2a > b + c = \rho_{23} + \rho_{14}$

2) Пусть $\rho_{14} = a$, тогда в равнобедренном 234 все стороны не больше a. Возможно 3 случая:

- $\rho_{34} = \rho_{24} = c$, $a \geq c \geq b$, поэтому $\rho_{12} + \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{24} = a + c \geq a + b = \rho_{23} + \rho_{14}$,

- $\rho_{34} = c$, $\rho_{24} = b$, $a \geq b \geq c$, поэтому $\rho_{13} + \rho_{24} = \rho_{23} + \rho_{14} = a + b \geq a + c = \rho_{12} + \rho_{34}$,

- $\rho_{34} = b$, $\rho_{24} = c$, $a \geq b \geq c$, этот случай симметричен предыдущему, поэтому он разбирается точно так же.

3) Пусть $\rho_{14} = c > a$, тогда $\rho_{24} = \rho_{34} = c$ и $\rho_{12} + \rho_{34} = \rho_{13} + \rho_{24} = a + c \geq c + b = \rho_{23} + \rho_{14}$.

Условие 4 точек выполнено для любого подмножества, и, согласно утверждению 1.7, пространство аддитивно. □

Теорема 2.20. *Матрица взаимнооднозначного линейного отображения, переводящего любое ультраметрическое пространство из 3 точек в ультраметрическое, имеет вид $A = R(B + \lambda E)$, где B — матрица из одинаковых строк из положительных элементов, $\lambda \in \mathbb{R}$, а R перестановка точек $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$.*

Доказательство. Множество всех трёхточечных ультраметрических пространств является объединением частей плоскостей, состоящих из точек вида (a,a,b), (a,b,a) и (b,a,a), поэтому можно выбрать R так, чтобы $S = R^{-1}A$ переводило эти плоскости в себя. Так как $S = (s_{ij})$ переводит первую плоскость в себя, то для любого вектора $(a,b), a \geq b$, имеем $(a,b)(s_{11} + s_{12}, s_{13}) = (a,b)(s_{21}+s_{22}, s_{23})$, отсюда $s_{13} = s_{23} = z$, $s_{11}+s_{12} = s_{21}+s_{22} = c$. Рассматривая оставшиеся две плоскости, получаем

$$S = \begin{pmatrix} c-y & y & z \\ x & c-x & z \\ x & y & c-y-x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} + (c-x-y)E = B + \lambda E.$$

□

Соглашение 2.21. Под *метрическим деревом минимального заполнения* будем подразумевать метрический граф, отрезки которого взаимно однозначно соответствуют рёбрам дерева, имеют ту же длину, что и веса соответствующих рёбер, и приклеиваются к тем же вершинам.

Определение 2.22. *Центром метрического дерева* будем называть равноудалённую от граничных вершин точку.

Утверждение 2.23. *Метрическое дерево минимального заполнения конечного ультраметрического пространства* (M,ρ) *содержит единственный центр.*

Замечание 2.24. Пользуясь тем, что метрика аддитивного пространства порождается длинами рёбер минимального заполнения, будем считать ρ определённой на всём дереве.

Доказательство. Рассмотрим такие точки $r,s \in M$, расстояние между которыми не меньше, чем между любыми двумя точками из M. Положим $\rho(r,s) = a$ и покажем, что точка p, делящая путь rs (от r к s) пополам и есть искомый центр. Пусть t — произвольная отличная от r и s точка M, а x — общая точка путей rs, ts и rt. Тогда без ограничения общности $\rho_{st} = a \geq b = \rho_{rt}$, отсюда $\rho_{xs} = a - \frac{b}{2} \geq \frac{a}{2} = \rho_{ps}$, то есть p принадлежит пути xs, а, значит, и ts. Поэтому из того, что $\rho_{st} = a$ и $\rho_{ps} = \frac{a}{2}$, следует и $\rho_{pt} = \frac{a}{2}$, что и требовалось доказать.

Пусть есть ещё одна равноудалённая от граничных вершин точка $p_1 \neq p$. Тогда $p_1 \notin rs$ и $\rho_{p_1r} = \rho_{p_1s} > \frac{a}{2}$. Существует такая $t \in M$, что $p_1 \in rt$, иначе порождающее дерево без p_1 и всех содержащих её рёбер останется минимальным заполнением. Поэтому $\rho_{rt} = 2\rho_{p_1r} > a$, что противоречит выбору r и s. □

Утверждение 2.25. *Если в дереве аддитивного пространства* (M,ρ) *есть центр, то оно ультраметрично.*

Доказательство. Пусть p — центр, $u,v,w \in M$, $q = uv \cap vw \cap wu$ и $\rho_{pw} = R$ и $p' \in uv \cup vw \cup wu$ — конец кратчайшего пути от p до $uv \cup vw \cup wu$. Положим

$\rho_{pp'} = d$, $\rho_{p'q} = x$, тогда $\rho_{p'u} = \rho_{p'v} = \rho_{p'w} = R - d = r$. Без ограничения общности $p' \in uq$, поэтому $\rho_{vu} = \rho_{wu} = 2r$, $\rho_{vw} = 2r - 2x < 2r$, то есть выполнено условие ультраметричности. □

Пример 2.26. Рассмотрим произвольное 4-точечное ультраметрическое пространство с порождающим деревом с усами $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$, тогда $\rho_{13} + \rho_{24} = \rho_{14} + \rho_{23}$, и пусть λ_i — длина граничного ребра минимального заполнения, выходящего из вершины i, λ_5 — длина внутреннего ребра. Тогда, без учёта перестановок элементов пространства, его центр находится либо на выходящем из вершины 1 ребре, либо на внутреннем ребре. В первом случае $\lambda_3 = \lambda_4 = x$, $\lambda_5 = y$, $\lambda_2 = x + y$, $\lambda_1 = z$, поэтому $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = x + y + z$, $\rho_{23} = \rho_{24} = 2x + 2y$ и $\rho_{34} = 2x$, а во втором $\lambda_1 = \lambda_2 = x$, $\lambda_3 = \lambda_4 = y$, $\lambda_5 = z$ поэтому $\rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = x + y + z$, $\rho_{12} = 2x$ и $\rho_{34} = 2y$.

Утверждение 2.27. *Пусть задано бинарное дерево и центр на одном из его рёбер. Обозначим переменными длину каждого ребра и тех двух частей, на которые разбито ребро центром. Выпишем в систему уравнения, полученные из условия равенства расстояний до центра, выражения расстояний через длины рёбер и неравенства неотрицательности длин рёбер дерева и частей, на которые разбито ребро центром. Тогда множество векторов расстояний, удовлетворяющих системе, является в точности множеством всех ультраметрических пространств, тип минимального заполнения которых совпадает с заданным бинарным деревом и центр лежит на том же ребре, что и заданный.*

Замечание 2.28. Пространство, вектор расстояний которого выражается таким образом через длины рёбер порождающего дерева, аддитивно, поэтому и длины рёбер однозначно выражаются из этой системы через расстояния.

Доказательство. Если вектор расстояний удовлетворяет системе, то из нё следует, что метрическое пространство с таким вектором аддитивно, порождено заданным бинарным деревом и его центр на том же ребре, что и заданный. А если вектор расстояний метрического пространства таков, что оно аддитивно, порождено заданным бинарным деревом, и его центр лежит на том же ребре, что и заданный, то вектор расстояний удовлетворяет системе. □

Следствие 2.29. *Для каждого типа минимальных заполнений множество ультраметрических пространств такого типа равно объединению множеств порождаемых его деревом пространств по всем положениям центра.*

Список литературы

[1] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении.* Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, с. 65-118.

[2] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*. Ижевск, ИКИ, с. 1-424.

[3] Липатов С.Ю., *Функции, не меняющие типы минимальных заполнений*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2015, 42–45