

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Дипломная работа

Минимальные деревья Штейнера в
малых окрестностях точек римановых
многообразий

Выполнил: студент 6-го курса
Чикин Владимир,
научный руководитель:
профессор Тужилин А.А.

Москва, 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
1. Введение.....	3
2. Непрерывность расстояния и непрерывность длин кривых в случае произвольного метрического пространства.....	4
3. Непрерывность расстояния в случае гладкого риманова многообразия.....	8
4. Минимальные сети: основные определения и вспомогательные результаты	10
5. Типы минимальных деревьев Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий.....	13
6. Минимальные деревья Штейнера для правильных многоугольников на римановых многообразиях.....	16
Список литературы.....	26

§ 1. Введение

Впервые задача о поиске минимальной сети была поставлена Ферма до 1640 года. А именно, Ферма интересовал ответ на следующий вопрос: *как расположить на плоскости точку F так, чтобы сумма расстояний от нее до трех фиксированных точек A, B и C была наименьшей?* Общая задача о поиске связной кратчайшей сети, соединяющей данное конечное множество точек плоскости, была поставлена Ярником и Кесслером в 1934. В дальнейшем эта классическая задача получила название проблема Штейнера. Для некоторых множеств специального вида на плоскости минимальные деревья Штейнера известны. К примеру, как было показано Ярником и Кесслером [1], каждая кратчайшая сеть, соединяющая множество вершин правильного n -угольника, при $n > 13$ состоит из всех сторон этого n -угольника, за исключением любой одной. Кроме того, Ярник и Кесслер построили очевидные кратчайшие сети для случаев n , равного 3, 4 и 5. Лишь в 1987 Ду и Хванг [2] завершили описание кратчайших сетей, соединяющих вершины правильных многоугольников, доказав, что для $n \geq 6$ ответ такой же, как и для $n > 13$. Рубинштейном и Томасом [3] был получен результат, описывающий кратчайшие сети для данного набора точек на окружности, а именно: если M — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности радиуса r , и при этом не более одной стороны многоугольника M имеет строго большую чем r длину, то минимальное дерево Штейнера для множества M представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.

Конечное множество M точек плоскости называется *зигзагом*, если существует ломаная L , множество вершин которой совпадает с M , а звенья которой “поворачивают в разные стороны”. Последнее означает, что если фиксировать некоторую ориентацию ломаной L , и каждой паре последовательных векторов-звеньев ломаной L поставить в соответствие знак ориентированного угла от первого звена ко второму, то получится знакопеременная последовательность. Ду, Хванг и Венг [4] получили результаты, описывающие кратчайшие сети для зигзагов определенного типа. Под руководством Рубинштейна выполнен цикл работ [5, 6, 7], описывающих различные свойства кратчайших сетей, затыгивающих конечное множество M вершин стандартной квадратной решетки. Эти работы развивают результаты, полученные в [8] и [9], в первой из которых были исследованы кратчайшие сети, затыгивающие так называемые лестницы, т.е. все вершины с координатами (m, n) , где $1 \leq m \leq M$, $n = 1, 2$, а во второй — высказана гипотеза о том, как устроены кратчайшие сети для решетки, составленной из всех вершин вида (m, n) , где $1 \leq m \leq 2^k$ и $1 \leq n \leq 2^k$. Эта гипотеза была доказана в [6].

Естественным обобщением проблемы Штейнера является задача описания минимальных сетей на замкнутых двумерных многообразиях. На них возникает новый тип локально минимальных сетей — замкнутые сети, т.е. сети, все вершины которых имеют степень три и отсутствуют граничные точки. Для замкнутых локально минимальных сетей Ивановым и Тужилиным [10, 11] был получен ряд результатов. В работе Неррес [12] они были классифицированы на стандартной двумерной сфере. Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах была получена в работе Иванова, Птициной

и Тужилина [13]. Также Птичиной [14, 15] была получена классификация на плоских бутылках Клейна и равногранных тетраэдрах. Ивановым и Тужилиным [16, 11], а также Вдовиной и Селивановой [17] были приведены примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Примеры таких сетей на поверхностях многогранников приведены в работах Стрелковой [18, 19], Иванова и Тужилина [20].

В отличие от евклидова случая, на гладких римановых многообразиях минимальные деревья Штейнера для конкретных границ практически не известны. Наша цель — определить типы минимальных деревьев Штейнера, соединяющих вершины достаточно малой произвольной границы на римановом многообразии. В данной работе получен результат, описывающий бинарные типы минимальных деревьев Штейнера для произвольных малых границ на римановом многообразии. В дальнейшем мы определим правильный многоугольник на римановом многообразии, и опишем конкретные бинарные типы, реализующие минимальные деревья Штейнера для вершин достаточно малого правильного многоугольника на многообразии. Как следствие, показывается, что на любом полном двумерном гладком римановом многообразии для каждого $n \geq 7$ существует достаточно малая окрестность точки X_0 на ней такая, что для любого лежащего в ней правильного n -угольника с центром в X_0 минимальным деревом Штейнера является граница этого n -угольника без его наибольшей стороны.

Для доказательства основной теоремы в работе рассматриваются изменения метрик. В ходе работы было замечено, что из непрерывной зависимости изменения длин кривых при вариации метрики не вытекает непрерывность расстояния между точками в соответствующей внутренней метрике; построен соответствующий пример. Возник вопрос: что нужно потребовать для обеспечения непрерывности расстояния? В работе сформулировано некоторое условие (*), являющееся достаточным. Далее рассматривается непрерывное изменение римановой метрики на многообразии и показывается, что если многообразие является полным, то условие (*) выполнено, в следствие чего расстояние между любыми двумя точками меняется непрерывно. Затем, пользуясь этим выводом, мы докажем непрерывность длины минимального параметрического дерева заданного типа для заданной границы на римановом многообразии при непрерывном изменении римановой метрики. Этот результат является ключевым для доказательства основной теоремы.

§ 2. Непрерывность расстояния и непрерывность длин кривых в случае произвольного метрического пространства

Рассмотрим множество X и семейство метрик ρ_t на нем, $t \in [0, 1]$. Пусть все они определяют одну и ту же топологию, являются конечными и внутренними. Пусть при каждом $t \in [0, 1]$ метрическое пространство (X, ρ_t) линейно связно, и каждая кривая спрямляема или не спрямляема по отношению ко всем ρ_t одновременно. Пусть также для любой кривой γ , спрямляемой по отношению ко всем ρ_t , ее длина $l_t(\gamma)$ по отношению к метрике ρ_t непрерывно зависит от t .

Условие (*): пусть $F_{a,t}$ — множество кривых γ таких, что $l_t(\gamma) \leq a$. Тогда для любого $a > 0$, любого $t_0 \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех t , удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено соотношение $F_{a,t} \subset F_{(1+\varepsilon)a,t_0}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда для любых $A, B \in X$ функция $\rho_t(A, B)$ непрерывно зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что A и B не совпадают (случай $A = B$ тривиальный). Рассматриваемые метрики внутренние, следовательно $\rho_t(A, B) = \inf_{\gamma} l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым γ , соединяющим A и B . Докажем непрерывность $\rho_t(A, B)$ в некоторой точке $t_0 \in [0, 1]$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется соединяющая точки A и B кривая γ' , удовлетворяющая неравенству $|l_{t_0}(\gamma') - \rho_{t_0}(A, B)| < \varepsilon/2$. В свою очередь, из того, что длина $l_t(\gamma')$ этой кривой непрерывно зависит от t , следует существование $\delta > 0$ такого, что для всех t , удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено $|l_t(\gamma') - l_{t_0}(\gamma')| < \varepsilon/2$. В результате имеем:

$$\rho_t(A, B) = \inf_{\gamma} l_t(\gamma) \leq l_t(\gamma')$$

что означает полунепрерывность сверху.

Пусть полунепрерывности снизу нет, то есть существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_n\} \in [0, 1]$, сходящаяся к t_0 , такие, что $\rho_{t_n}(A, B) < \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность кривых $\{\gamma_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, соединяющих A и B , таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A, B) < \varepsilon/2$, а, следовательно, $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon/2 = q$. Последнее неравенство означает, что $\gamma_n \in F_{q,t_n}$. Согласно условию (*), для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4q}$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех t' , удовлетворяющих неравенству $|t' - t_0| < \delta_1$, выполнено $F_{q,t'} \subset F_{(1+\varepsilon_1)q,t_0} = F_{\rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/4,t_0}$. Осталось заметить, что существует натуральное число m такое, что $|t_m - t_0| < \delta_1$, то есть $\gamma_m \in F_{q,t_m} \subset F_{\rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/4,t_0}$, откуда вытекает выполнение неравенства $l_{t_0}(\gamma_m) \leq \rho_{t_0}(A, B) - \varepsilon/4$ — противоречие с определением внутренней метрики: $\rho_{t_0}(A, B) = \inf_{\gamma} l_{t_0}(\gamma)$. Полунепрерывность снизу доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (*) не вытекает из остальных условий. Более того, если все условия, кроме условия (*) выполнены, то расстояние может быть разрывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем пример множества X и семейства метрик ρ_t на нем, для которых выполнены все условия, кроме (*). Рассмотрим двумерную сферу и две диаметрально противоположные точки A и B на ней. Выделим на ней счетное количество половин больших окружностей — дуг, соединяющих A и B , и обозначим их γ_k , $k \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \gamma_k$, а длина непрерывной кривой γ' , осуществляющей гомеоморфизм с образом, лежащей целиком на некоторой дуге γ_k , в метрике ρ_t равна $l_t(\gamma') = (2 + \cos(tk)) \frac{\alpha}{\pi}$, где α — величина угла, под которым видна γ' из центра сферы (ясно, что $l_t(\gamma_k) = 2 + \cos(tk)$) (рис. 1).

Таким образом, при каждом $t_0 \in [0, 1]$ мы получаем конечную внутреннюю метрику на X : $\rho_t(C, D) = \inf_{\gamma} l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым γ , соединяющим C и D , лежащим в X (заметим, что в этой метрике

длины кривых в точности такие, какими мы их определили изначально). При этом, длины кривых непрерывно зависят от t .

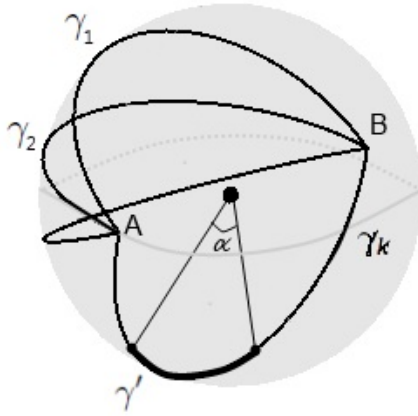


Рис. 1. Пример: невыполнение условия (*) при наличии остальных условий.

Рассмотрим $a = 2$, $\varepsilon = 1/4$, $t_0 = 0$. Тогда в любой δ -окрестности t_0 найдется $t_\delta = \pi/m$ (при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$) такое, что в метрике ρ_{t_δ} длина кривой γ_m равна $l_{t_\delta}(\gamma_m) = 2 + \cos(t_\delta m) = 1 \leq 2 = a$, в то время как в метрике ρ_{t_0} ее длина равна $l_{t_0}(\gamma_m) = 2 + \cos(t_0 m) = 3 > 5/2 = (1 + \varepsilon)a$. Это означает, что $\gamma_m \in F_{a,t_\delta}$, но $\gamma_m \notin F_{(1+\varepsilon)a,t_0}$, то есть существуют сколь угодно близкие к t_0 числа t_δ такие, что $F_{a,t_\delta} \not\subset F_{(1+\varepsilon)a,t_0}$ — условие (*) не выполнено.

Покажем, что расстояние $\rho_t(A, B)$ между точками A и B разрывно по t в нуле. Действительно, $\rho_0(A, B) = 3$, так как $l_0(\gamma_k) = 3$ для любого натурального k , но для каждого $t \in (0, 1]$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\cos(tk) < 0$, а значит $\rho_t(A, B) \leq l_t(\gamma_k) = 2 + \cos(tk) < 2$.

Теперь рассмотрим множество X и семейство метрик ρ_t на нем такое, что расстояние $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками A и B непрерывно зависит от параметра $t \in [0, 1]$. Проанализируем необходимость ограничений на метрики.

Замечание 2. 1) При разных t метрики ρ_t могут определять различные топологии.

2) Данное отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ может быть непрерывным при одних t и разрывным при других.

3) Метрика ρ_t может быть внутренней при одних t и не быть при других.

4) Метрическое пространство (X, ρ_t) может быть линейно связным при одних t и не быть таковым при других.

Пример. Пусть X — плоскость, ρ_0 — евклидова метрика на ней, $\rho_1(A, B) = 1$ для любых неравных $A, B \in X$, а $\rho_t = t\rho_1 + (1 - t)\rho_0$. Ясно, что ρ_t — метрика, и $\rho_t(A, B)$ между любыми двумя точками A и B непрерывно зависит от параметра t . Однако, метрическая топология, порожденная ρ_1 , дискретна,

а порожденная ρ_0 — нет. Функция $\gamma: [a, b] \rightarrow X$, непрерывно (относительно метрики ρ_0) отображающая отрезок $[a, b]$ в некоторый отрезок плоскости, не является непрерывной относительно метрики ρ_1 : в этой метрике одноточечное множество открыто, но его прообраз открытым не является. Ясно, что метрическое пространство (X, ρ_0) — линейно связное со внутренней метрикой. Но метрика ρ_1 не является внутренней, а метрическое пространство (X, ρ_1) — линейно связным, так как относительно метрики ρ_1 не существует кривых в X , соединяющих различные точки.

Пусть $(X, \|\cdot\|_t)$ — конечномерное нормированное пространство при любом $t \in [0, 1]$, а норма $\|x\|_t$ любого элемента $x \in X$ непрерывно зависит от t . Расстояние между элементами определяется как норма их разности: $\rho_t(A, B) = \|A - B\|_t$. Ясно, что все метрики ρ_t задают одну топологию. В этом случае длины кривых непрерывно зависят от t .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ — кривая. Тогда ее длина конечна или бесконечна одновременно по отношению ко всем метрикам семейства. Более того, если длина $l_t(\gamma)$ кривой γ относительно метрики ρ_t конечна, то эта длина непрерывно зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим единичную сферу S_0 в метрике ρ_{t_0} . Она компактна, так как пространство X — конечномерное. Рассмотрим функцию, определенную на $(X \setminus 0) \times [0, 1]$:

$$f(x, t) = \frac{\|x\|_t}{\|x\|_{t_0}}.$$

Она непрерывна на компакте $S_0 \times [0, 1]$, а, значит, принимает на нем наименьшее и наибольшее значения. Пусть $m = \min\{f(x, t) \mid x \in S_0, t \in [0, 1]\}$ и $M = \max\{f(x, t) \mid x \in S_0, t \in [0, 1]\}$. Таким образом, для $x \in S_0$ и $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство $m\|x\|_{t_0} \leq \|x\|_t \leq M\|x\|_{t_0}$. Положительная однородность распространяет это неравенство на все пространство. Так как длина кривой γ есть точная верхняя грань длин вписанных в нее ломаных, а длина ломаной есть сумма расстояний, то для длины кривой γ выполнено соответствующее неравенство: $ml_{t_0}(\gamma) \leq l_t(\gamma) \leq Ml_{t_0}(\gamma)$. Из этого следует, что длина кривой γ конечна или бесконечна одновременно по отношению ко всем метрикам семейства.

Из равномерной непрерывности функции $f(x, t)$ на компакте $S_0 \times [0, 1]$ следует, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого при всех t , удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено $|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$ для любых $x \in S_0$. Учитывая то, что $f(x, t_0) = 1$, получаем соотношение $|f(x, t) - 1| \leq \varepsilon$, то есть

$$(1 - \varepsilon)\|x\|_{t_0} \leq \|x\|_t \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_{t_0}.$$

Из положительной однородности следует, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ данное неравенство выполнено при $x \in X$ и $|t - t_0| < \delta$. Таким образом, для длины кривой γ выполнено неравенство $(1 - \varepsilon)l_{t_0}(\gamma) \leq l_t(\gamma) \leq (1 + \varepsilon)l_{t_0}(\gamma)$, или $|l_{t_0}(\gamma) - l_t(\gamma)| \leq \varepsilon l_{t_0}(\gamma)$, из которого вытекает непрерывность функции $l_t(\gamma)$ в случае ее конечности.

§ 3. Непрерывность расстояния в случае гладкого риманова многообразия

Пусть дано n -мерное связное гладкое риманово многообразие M_n с метрикой ds_t^2 , непрерывно зависящей от параметра $t \in [0, 1]$. Подразумевается, что ds_t^2 — риманова метрика при каждом $t \in [0, 1]$, и в каждой точке $x \in M_n$ компоненты метрического тензора $g_{ij}^t(x)$ в каждом локальных координатах непрерывно зависят от t . Для любой пары точек $A, B \in M_n$ расстояние $\rho_t(A, B)$ между ними в метрике ds_t^2 определяется как точная нижняя грань длин $l_t(\gamma)$, посчитанных относительно метрики ds_t^2 , кусочно-гладких кривых γ , соединяющих A и B . Заметим, что все метрики ρ_t определяют одну и ту же топологию, являются конечными и внутренними.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow M_n$ — кусочно-гладкая кривая. Тогда $l_t(\gamma)$ является непрерывной функцией параметра t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение кривой γ на последовательные кривые γ_i , образы которых лежат в некоторых картах. Пусть кривая γ_k лежит в карте с координатами (u^1, \dots, u^n) . Длина кривой $\gamma_k(s) = (u^1(s), \dots, u^n(s))$ в метрике ds_t^2 равна

$$l_t(\gamma_k) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}^t(u^1(s), \dots, u^n(s)) \dot{u}^i(s) \dot{u}^j(s)} ds.$$

В силу непрерывности функций $g_{i,j}^t$, подынтегральное выражение, а, следовательно, и значение определенного интеграла, непрерывно зависит от t . Таким образом, длина $l_t(\gamma_k)$ кривой γ_k непрерывно зависит от t . Непрерывность длины $l_t(\gamma)$ кривой γ вытекает из аддитивности функционала длины.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если M_n — компактно, то условие (*) выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|\xi\|_t$ — норма вектора ξ , принадлежащего касательному расслоению T_M к многообразию M_n , относительно метрики ds_t^2 . В локальных координатах (u^1, \dots, u^n) , определенных в некоторой карте, эта норма записывается следующим образом:

$$\|\xi\|_t = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}^t(u^1, \dots, u^n) \xi^i \xi^j},$$

где $x = (u^1, \dots, u^n)$ — точка приложения вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, а, значит, она непрерывно зависит от x , ξ и t (так как $g_{i,j}^t$ непрерывны по t). Зафиксируем t_0 и рассмотрим функцию, определенную на $(T_M \setminus T_0) \times [0, 1]$, где T_0 — нулевое сечение T_M :

$$f(\xi, t) = \frac{\|\xi\|_{t_0}}{\|\xi\|_t}.$$

Она непрерывна, а, значит, равномерно непрерывна на компакте $S_M \times [0, 1]$, где S_M — сферизация касательного расслоения в метрике $ds_{t_0}^2$. Таким образом, для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех t , удовлетворяющих неравенству

$|t - t_0| < \delta$, выполнено $|f(\xi, t) - f(\xi, t_0)| < \varepsilon$ при любых $\xi \in S_M$. Учитывая то, что $f(\xi, t_0) = 1$, получаем соотношение $|f(\xi, t) - 1| < \varepsilon$, то есть

$$1 - \varepsilon < \frac{\|\xi\|_{t_0}}{\|\xi\|_t} < 1 + \varepsilon.$$

Далее, из того, что $f(\lambda\xi, t) = f(\xi, t)$ при $\lambda \neq 0$, следует, что для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех t , удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено

$$1 - \varepsilon < \frac{\|\xi\|_{t_0}}{\|\xi\|_t} < 1 + \varepsilon$$

при $\xi \in T_M \setminus T_0$.

Пусть при некотором t таком, что $|t - t_0| < \delta$, кривая $\gamma(s) : [0, 1] \rightarrow M_n$ лежит в $F_{a,t}$, то есть

$$l_t(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(s)\|_t ds \leq a.$$

Рассмотрим ее длину в метрике $ds_{t_0}^2$:

$$l_{t_0}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(s)\|_{t_0} ds \leq \int_0^1 (1 + \varepsilon) \|\dot{\gamma}(s)\|_t ds \leq (1 + \varepsilon)a,$$

так как нормы $\|\dot{\gamma}(s)\|_{t_0}$ и $\|\dot{\gamma}(s)\|_t$ равны или не равны нулю одновременно, и, следовательно, $\|\dot{\gamma}(s)\|_{t_0} \leq (1 + \varepsilon)\|\dot{\gamma}(s)\|_t$ при любом $s \in [0, 1]$. Это в точности означает, что $\gamma \in F_{(1+\varepsilon)a, t_0}$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M_n — компактно, $A, B \in M_n$. Тогда расстояние $\rho_t(A, B)$ непрерывно зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все условия теоремы 1 были непосредственно проверены.

Следствие 1 может быть распространено на римановы многообразия более общего вида, если потребовать, чтобы каждый замкнутый шар был компактным (такие многообразия называются ограниченно компактными). Отметим, что ограниченная компактность риманова многообразия равносильна условию его полноты. Идея доказательства непрерывности расстояния в этом случае проста — мы рассмотрим достаточно большой компактный шар, содержащий точки A и B , и сведем к случаю компактного многообразия. Для этого нам понадобится показать, что при малом изменении метрики рассматриваемый шар остается достаточно большим. Прделаем это аккуратно с помощью условия (*).

ТЕОРЕМА 3. Если (M_n, ρ_t) — полное метрическое пространство при любом $t \in [0, 1]$, то для любых точек $A, B \in M_n$ расстояние $\rho_t(A, B)$ непрерывно зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем непрерывность $\rho_t(A, B)$ в некоторой точке $t_0 \in [0, 1]$. В силу связности многообразия, существует кусочно-гладкая кривая

$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M_n$ такая, что $\gamma_1(0) = A, \gamma_1(1) = B$. Функция $l_t(\gamma_1)$ непрерывна по переменной t на отрезке $[0, 1]$, в следствие чего величина $m = \max_{t \in [0, 1]} l_t(\gamma_1)$ конечна. Рассмотрим замкнутый шар $K = \{x \in M_n \mid \rho_{t_0}(A, x) \leq m + 1\}$, который является компактом, так как M_n — полное. Заметим, что образ кривой γ_1 полностью лежит в K . Пусть γ — кривая, соединяющая A и B , образ которой не лежит полностью в K . Рассмотрим точку D , принадлежащую образу кривой γ , но не лежащую в K : $l_{t_0}(\gamma) > \rho_{t_0}(A, D) > m + 1$. Таким образом, точная нижняя грань длин всех кривых, соединяющих A и B , в метрике $ds_{t_0}^2$ совпадает с точной нижней гранью длин кривых, соединяющих A и B , образы которых лежат в K , в этой метрике, так как не превосходит m .

Рассмотрим множество кривых L , образы которых лежат в K , один конец которых совпадает с A , а другой лежит на границе ∂K . Если $\gamma \in L$, и P — ее конец, лежащий на ∂K , то $l_{t_0}(\gamma) \geq \rho_{t_0}(A, P) = m + 1$. Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ выполнено $l_t(\gamma) > m$ для любой кривой $\gamma \in L$. Предположим, что это не так, то есть существует последовательность $\{\gamma_n\}$, сходящаяся к t_0 при $n \rightarrow \infty$, и последовательность кривых γ_n из L такие, что $l_{t_n}(\gamma_n) \leq m$, то есть $\gamma_n \in F_{m, t_n}$. При этом $\gamma_n \notin F_{m+1/2, t_0}$, так как $l_{t_0}(\gamma_n) \geq m + 1$, из чего вытекает, что $F_{m, t_n} \not\subset F_{m+1/2, t_0}$. Мы получили, что условие (*) не выполнено — противоречие компактности K .

Рассмотрим кривую $\gamma : [a, b] \rightarrow M_n$, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$, образ которой не лежит в K . Пусть $s_0 = \inf\{s \mid s \in [a, b], \gamma(s) \notin K\}$. Ограничение кривой γ на отрезок $[a, s_0]$ — это кривая из L , а, следовательно, $l_t(\gamma|_{[a, s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. Из этого следует, что $l_t(\gamma) > l_t(\gamma|_{[a, s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. Таким образом, так как точная нижняя грань длин всех кривых, соединяющих A и B , в метрике ds_t^2 не превосходит m , то она совпадает с точной нижней гранью длин кривых, соединяющих A и B , образы которых лежат в K , в той же метрике ds_t^2 при $|t - t_0| < \delta$. Определим $\rho_t^K(A, B) = \inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кусочно-гладким кривым γ , соединяющим A и B , образы которых лежат в K . Из доказанного ранее следует, что $\rho_t^K(A, B)$ непрерывно по t , так как K — компакт. При этом мы показали, что $\rho_t^K(A, B) = \rho_t(A, B)$ при $|t - t_0| < \delta$, а, значит, $\rho_t(A, B)$ непрерывно в точке t_0 .

§ 4. Минимальные сети: основные определения и вспомогательные результаты

Границей графа будем называть некоторое выделенное множество его вершин. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые графы связные и имеют границы, иногда пустые. *Бинарным деревом* будем называть дерево с границей, вершины которого имеют степени 1 и 3, а граница совпадает с множеством вершин степени 1. Будем рассматривать всевозможные бинарные деревья $G_i = (Z, E_i)$ с одним и тем же множеством вершин $Z = \{1, 2, \dots, 2n - 2\}$, $M = \{1, 2, \dots, n\} \subset Z$ — множество граничных вершин (степени 1) каждого из рассматриваемых деревьев. Пусть (X, ρ_t) — метрическое пространство при каждом $t \in [0, 1]$, $\varphi : M \rightarrow X$ — фиксированное граничное отображение, а $\{v_1, \dots, v_n\} \subset X, v_i = \varphi(i), i = 1, \dots, n$, — его образ. *Сетью* Γ типа G_i с границей φ будем называть пару $(G_i, f : Z \rightarrow X)$ такую, что $f|_M = \varphi$ (*min*

— это бинарное дерево с данным множеством вершин). Для сети Γ полагаем $s_i = f(n + i), i = 1, \dots, n - 2$, — положения ее внутренних вершин. Заметим, что множество типов конечно — обозначим их G_1, G_2, \dots, G_m . Будем называть сеть $\Gamma = (G_i, f)$ реализацией бинарного дерева G_i . Определим длину $\rho_t(\Gamma)$ сети $\Gamma = (G_i, f)$ в метрике ρ_t : $\rho_t(\Gamma) = \sum_{vw \in E} \rho_t(f(v), f(w))$ — сумма расстояний между образами смежных вершин. Заметим, что длина $\rho_t(\Gamma)$ сети Γ является функцией от образов вершин, параметра $t \in [0, 1]$, и типа G_i : $\rho_t(\Gamma) = l(t, v_1, \dots, v_n, s_1, \dots, s_{n-2}, G_i)$ (для удобства изложения, мы отождествим вершины графа G и их образы при реализации). Перепишем величину $l(t, v_1, \dots, v_n, s_1, \dots, s_{n-2}, G)$ в виде $l(t, V, S, G)$, где $S = (s_1, \dots, s_{n-2}), V = (v_1, \dots, v_n)$. Пусть $l_t^{\min}(V, G) = \inf_{S \in X^{n-2}} l(t, V, S, G)$ — точная нижняя грань длин таких сетей относительно метрики ρ_t . Там, где граничные вершины будем считать фиксированными, величину $l_t^{\min}(V, G)$ будем записывать в виде $l_t^{\min}(G)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть X и Y — метрические пространства, Y — компактно, а $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда функции $g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$ и $h(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$ — непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $g(x)$ разрывна в точке x^* . Рассмотрим последовательность $x_i \in X, i \in \mathbb{N}, x_i \rightarrow x^*$ при $i \rightarrow \infty$, такую, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $|g(x_i) - g(x^*)| > \varepsilon$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Далее, в силу компактности Y , рассмотрим точку $y^* \in Y$ и последовательность $y_i \in Y, i \in \mathbb{N}$, такие, что $g(x^*) = f(x^*, y^*)$ и $g(x_i) = f(x_i, y_i)$, и в последовательности $y_i, i \in \mathbb{N}$, выделим сходящуюся к некоторой точке y' подпоследовательность (без ограничения общности, будем считать, что $y_i \rightarrow y'$ при $i \rightarrow \infty$). Таким образом, $|f(x^*, y') - f(x^*, y^*)| \geq \varepsilon$, а в силу того, что $g(x^*) = f(x^*, y^*)$, имеем $f(x^*, y') \geq f(x^*, y^*) + \varepsilon$, следовательно, при $i > I_1$ для некоторого $I_1 \in \mathbb{N}$ выполнено $f(x_i, y_i) > f(x^*, y^*) + \varepsilon/2$. При этом, при $i > I_2$ для некоторого $I_2 \in \mathbb{N}$ выполнено $f(x_i, y^*) < f(x^*, y^*) + \varepsilon/2$. В итоге, при $i > \max(I_1, I_2)$ выполняется $f(x_i, y^*) < f(x_i, y_i)$, что противоречит выбору y_i . Таким образом, $g(x)$ — непрерывная функция. Аналогично показывается непрерывность $h(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть ρ_t — непрерывное семейство метрик на X (для любых $x, y \in X$ функция $\rho_t(x, y)$ непрерывна по $t \in [0, 1]$). Пусть при всех t пространство (X, ρ_t) ограничено компактно. Тогда длина каждой минимальной параметрической сети $l_t^{\min}(V, G)$ непрерывно зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что $l(t, V, S, G)$ непрерывна по переменным V, S и по переменной t . При этом $l_t^{\min}(V, G) = \inf_{S \in X^{n-2}} l(t, V, S, G)$, и данная точная нижняя грань достигается в силу того, что X — ограничено компактно при всех $t \in [0, 1]$. Искомый результат следует из утверждения 3.

В дальнейшем будем рассматривать гладкое связное полное риманово многообразие M_k размерности k . Рассмотрим однопараметрическое непрерывное по t семейство ds_t^2 римановых метрик на $M_k, t \in [0, 1]$, такое, что при любом t рассматриваемое метрическое пространство является полным. Через $\rho_t(A, B)$ будем обозначать расстояние между точками $A, B \in M_k$ относительно метрики ds_t^2 . Из предыдущих результатов (утверждения 1 и теоремы 3) следует,

что длина $l_t(\gamma)$ любой кусочно-гладкой спрямляемой кривой γ и расстояние $\rho_t(A, B)$ зависят от t непрерывно. Таким образом, из предыдущей теоремы вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Величина $l_t^{\min}(V, G)$ непрерывно зависит от t в случае полного риманова многообразия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $l_c(t, S, G)$ — длина реализации графа G относительно метрики $c^2 \cdot ds_t^2$, $c > 0$. Обозначим $l_{c,t}^{\min}(G) = \inf_{S \in M_k^{n-2}} l_c(t, S, G)$. Тогда $l_{c,t}^{\min}(G) = c \cdot l_t^{\min}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\gamma(t): [a, b] \rightarrow M_k$ — кусочно-гладкая кривая, а $l_{c,t}(\gamma)$ — ее длина относительно метрики $c^2 \cdot ds_t^2$, то

$$l_{c,t}(\gamma) = \int_a^b c |\dot{\gamma}(t)|_{ds_t^2} dt = c \cdot l_t(\gamma).$$

При этом, расстояние между точками — это точная нижняя грань длин кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки, а длина реализации графа — это сумма расстояний между определенными вершинами, откуда следует, что $l_c(t, S, G) = c \cdot l(t, S, G)$. Таким образом,

$$l_{c,t}^{\min}(G) = \inf_{S \in M_k^{n-2}} l_c(t, S, G) = \inf_{S \in M_k^{n-2}} c \cdot l(t, S, G) = c \cdot l_t^{\min}(G),$$

Из чего следует требуемое равенство $l_{c,t}^{\min}(G) = c \cdot l_t^{\min}(G)$.

Обозначим через $d_t(D)$ диаметр подмножества $D \subset M_k$ относительно метрики ds_t^2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если D — компакт, то величина $d_t(D)$ непрерывно зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $d_t(D) = \sup_{x, y \in D} \{\rho_t(x, y)\}$. При этом, $\rho_t(x, y)$ непрерывна по совокупности своих переменных. В силу компактности D требуемое вытекает из утверждения 3.

Таким образом, корректно определяется величина $d_{max}(D) = \max_{t \in [0, 1]} d_t(D)$, которую будем называть *максимальным диаметром* компакта D .

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $D \subset M_k$, D — компакт. Тогда для фиксированных $t, t_0 \in [0, 1]$ существует $C > 0$ такое, что для любых точек $x, y \in D$ выполнено $\rho_t(x, y) < C \rho_{t_0}(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что метрики ρ_{t_0} и ρ_t задают одну и ту же топологию. Это значит, что биективное отображение метрических пространств $f: (D, \rho_{t_0}) \rightarrow (D, \rho_t)$, переводящее все точки в себя, является непрерывным. Действительно, прообраз открытого относительно ρ_t множества U открыт относительно ρ_{t_0} , так как совпадает с U . Поскольку D — компакт, то отображение f является C -липпшицевым для некоторой константы C , то есть $\rho_t(x, y) < C \rho_{t_0}(x, y)$ для любых точек $x, y \in D$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $D \subset M_k$, D — компакт, $X \in D$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ существует компакт D_0 , содержащий точку X и лежащий в D , такой, что $d_{\max}(D_0) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t_0 \in [0, 1]$. В соответствии с утверждением 6 для некоторого $t \in [0, 1]$ найдется $C > 0$ такое, что $\rho_t(x, y) < C\rho_{t_0}(x, y)$ для любых точек $x, y \in D$. Пусть B_r — компактный шар радиуса r с центром в точке X относительно метрики ρ_{t_0} , лежащий в D . Заметим, что $d_t(B_r) \leq C d_{t_0}(B_r)$, следовательно, выбрав r таким, чтобы $d_{t_0}(B_r) < \frac{\varepsilon}{2C}$, получим, что $d_t(B_r) < \varepsilon$. Таким образом, для каждого $t' \in [0, 1]$ существует компакт $D_{t'}$, содержащий точку X и лежащий в D , для которого выполнено $d_{t'}(D_{t'}) < \varepsilon$. Следовательно, в силу непрерывности $d_t(D_{t'})$ по переменной t , у каждого t' существует окрестность $U(t') \subset [0, 1]$ такая, что при $t \in U(t')$ выполнено $d_t(D_{t'}) < \varepsilon$. В силу компактности отрезка $[0, 1]$ выделим его конечное покрытие этими окрестностями U_1, \dots, U_l . Пересечение соответствующих этим окрестностям компактов D_1, \dots, D_l является компактом, содержащим точку X . Назовем его D_0 . Каждое t принадлежит некоторой окрестности U_i из конечного покрытия отрезка, а, значит, $d_t(D_0) \leq d_t(D_i) < \varepsilon$. Следовательно, для любого $t \in [0, 1]$ диаметр $d_t(D_0) < \varepsilon$, из чего следует, что $d_{\max}(D_0) < \varepsilon$.

§ 5. Типы минимальных деревьев Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий

Пусть $O \in M_k$ и x^1, \dots, x^k — локальные координаты в некоторой окрестности W точки O , такие, что $O = (0, \dots, 0)$, и в этих координатах множество W — звездно, т.е. для любой точки $(x_*^1, x_*^2, \dots, x_*^k) \in W$ и для любого $C \in [0, 1]$ точка $(C x_*^1, C x_*^2, \dots, C x_*^k)$ корректно определена и лежит в W . Пусть метрика многообразия ds_1^2 , заданная на карте W , в данных координатах задается матрицей $g_{ij}^1(x^1, x^2, \dots, x^k)$. Пусть также в карте W заданы n граничных точек.

Рассмотрим произвольный компактный шар D относительно метрики ds_1^2 с центром в O , содержащийся в W . Пусть S — его граница, которая, в свою очередь, тоже является компактом. Для компакта D' , содержащегося в D , рассмотрим величину $L(D') = \inf\{d_t(x, y) \mid x \in D', y \in S, t \in [0, 1]\}$. Заметим, что если $D_1 \subset D_2$, то $L(D_1) \geq L(D_2)$. Рассмотрим некоторый компакт D' , для которого $L(D') > 0$. Из утверждения 7 следует, что существует компакт D_0 , вложенный в D' , такой, что $(n-1)d_{\max}(D_0) < L(D') \leq L(D_0)$. Пусть данные n граничных точек лежат в D_0 .

Заметим, что длина любого минимального остовного дерева, соединяющего данную границу, относительно любой метрики семейства ds_t^2 , $t \in [0, 1]$ не превосходит $(n-1)d_{\max}(D_0)$, при этом длина любой сети, соединяющей данную границу и выходящей за пределы D , больше $L(D_0)$. Таким образом, кратчайшие сети, соединяющего данную границу, содержатся среди сетей, лежащих полностью в D . Это заключение позволяет в дальнейшем перейти к рассмотрению сетей, полностью лежащих в карте W , и провести доказательство теоремы 5 в координатах этой карты.

Рассмотрим на W евклидову метрику. Ясно, что для евклидовой метрики при преобразовании подобия границы типы минимальных деревьев Штейнера не меняются. Пусть минимальные деревья Штейнера для данной границы в евклидовой метрике известны, а G_1, \dots, G_p — их типы (их может быть несколько). *Операцией сжатия в C раз* назовем изменение данной границы, точки которой имели координаты $(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k), i = 1, \dots, n$, на границу, точки которой имеют координаты $(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k)/C, i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 5. *Существует окрестность U точки O такая, что для каждого граничного множества из n точек, содержащегося в U , найдется $C_0 > 0$ такое, что для этого граничного множества, сжатого в C раз при каждом $C > C_0$, типы минимальных деревьев Штейнера относительно метрики ds_1^2 принадлежат множеству $\{G_1, \dots, G_p\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть окрестность U совпадает с внутренностью построенного выше компакта D_0 . Рассмотрим непрерывную по t гомотопию метрики

$$g_{ij}^t(x^1, x^2, \dots, x^k) = g_{ij}^1(tx^1, tx^2, \dots, tx^k), t \in [0, 1]. \quad (5.1)$$

При $t = 1$ — это исходная метрика ds_1^2 . Метрика $g_{ij}^0(x^1, x^2, \dots, x^k)$ задается постоянной матрицей Q_0 , равной матрице метрики многообразия в точке O . Матрица Q_0 — положительно определенная, симметрическая, невырожденная, а, значит, метрика $g_{ij}^0(x^1, x^2, \dots, x^k)$ — евклидова. Таким образом, в рассматриваемой метрике, при $t = 0$, G_1, \dots, G_p — типы минимальных деревьев Штейнера для данной границы. В результате, для данной границы выполнено

$$l_0^{\min}(G_1) = l_0^{\min}(G_2) = \dots = l_0^{\min}(G_p) < l_0^{\min}(G'),$$

для любого типа G' , отличного от G_1, \dots, G_p .

Так как функция $l_t^{\min}(G)$ непрерывна по t , то существует $t_0 > 0$ такое, что при $t < t_0$, при каждом $i = 1, \dots, p$, и каждом бинарном типе $G' \notin \{G_i\}_{i=1}^p$ выполняется $l_t^{\min}(G_i) < l_t^{\min}(G')$, так как таких бинарных типов — конечное количество.

Положим $C_0 = 1/t_0$. Покажем, что при $C > C_0$ для данной границы, сжатой в C раз, выполнено утверждение теоремы. Положим $t = 1/C$ и заметим, что $t = 1/C < 1/C_0 = t_0$.

Пусть $(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k), i = 1, \dots, n$, — координаты точек исходной границы. Ясно, что $(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k)/C, i = 1, \dots, n$, — координаты точек сжатой границы. Введем новые координаты $(u^1, u^2, \dots, u^k) : u^j = C x^j, j = 1, \dots, k$.

Заметим, что в новой системе координаты точек сжатой границы равны $(u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^k) = (C \cdot x_i^1, C \cdot x_i^2, \dots, C \cdot x_i^k)/C = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k)$, а метрика ds_1^2 в новых координатах примет вид

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \sum_{i,j=1}^k g_{ij}^1(x) dx^i dx^j = t^2 \sum_{i,j=1}^k g_{ij}^1(tu) du^i du^j = \\ &= t^2 \sum_{i,j=1}^k g_{ij}^t(u) du^i du^j = t^2 ds_t^2. \end{aligned}$$

то есть совпадает с метрикой $t^2 \cdot ds_t^2$. Итак, в новой системе координат мы имеем границу с исходными координатами и метрику $t^2 \cdot ds_t^2$ при $t < t_0$. Как было отмечено ранее, для этой границы при таких t выполнено

$$l_t^{\min}(G_i) < l_t^{\min}(G'), i = 1, \dots, p, \text{ тогда при } a > 0$$

$$a \cdot l_t^{\min}(G_i) < a \cdot l_t^{\min}(G'), i = 1, \dots, p, \text{ что равносильно}$$

$$l_{a,t}^{\min}(G_i) < l_{a,t}^{\min}(G'), i = 1, \dots, p, \text{ при } a > 0, \text{ в частности, при } a = t.$$

Из этого следует, что в старой системе координат для сжатой границы и метрики ds_1^2 выполнено

$$l_1^{\min}(G_i) < l_1^{\min}(G'), i = 1, \dots, p,$$

так как это — одно и то же соотношение, записанное в разных системах координат. Значит, при $C > C_0$ для данной границы, сжатой в C раз, типы минимальных деревьев Штейнера принадлежат множеству $\{G_1, \dots, G_p\}$.

Пусть ds_0^2 — евклидова метрика в карте W , а F — семейство граничных множеств, лежащих в карте W , полученных из фиксированной n -точечной границы B_0 всевозможными вращениями вокруг точки $O = (0, \dots, 0)$ и гомотетиями с центром в O в координатах x^1, \dots, x^k , относительно метрики ds_0^2 (все границы из F “подобны” относительно евклидовой метрики).

ТЕОРЕМА 6. *Существует такая окрестность U точки O , что для любой границы $B \subset U, B \in F$, множество типов кратчайших (в метрике многообразия) деревьев, соединяющих B , содержится среди типов кратчайших (в евклидовой метрике) деревьев, соединяющих множество $B \in F$ в евклидовой метрике.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомотопию метрики 5.1. Пусть $D \subset W$ — замкнутый шар с центром в нуле относительно метрики ds_0^2 , а $F_0 \subset F$ — семейство граничных множеств в W , полученных из границы B_0 всевозможными вращениями вокруг точки O относительно метрики ds_0^2 . Пусть Ω — множество типов кратчайших деревьев, соединяющих B_0 в метрике ds_0^2 . Можем считать, что $B_0 \in D^n$ (а, значит, и $B \in D^n$ для любого $B \in F_0$). Таким образом, в силу равномерной непрерывности функции $l_t^{\min}(V, G)$ на компакте $[0, 1] \times D^n$, для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $|t| < \delta_0$ выполнено неравенство $|l_t^{\min}(V, G) - l_0^{\min}(V, G)| < \varepsilon$ для любого типа G и любой границы $V = B, B \in F_0$ (так как бинарных типов G — конечное количество). Заметим, что Ω — множество типов кратчайших деревьев (в евклидовой метрике), соединяющих границу B для любой $B \in F$, а длины минимальных параметрических сетей одного и того же типа (в евклидовой метрике) для всех границ $B \in F_0$ равны. Пусть $\varepsilon_0 = \min_{G \in \Omega, G' \notin \Omega} |l_0^{\min}(B^0, G') - l_0^{\min}(B^0, G)|$. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_0/3$, тогда для соответствующего $\delta > 0$ при $|t| < \delta$ получим, что в метрике ds_t^2 для любой границы $B \in F_0$, множество типов кратчайших деревьев, соединяющих B , содержится в Ω . Тогда, согласно теореме 5, для каждой границы $B \in F_0$, сжатой в C раз при $C > C_0 = 1/\delta$, типы минимальных деревьев Штейнера (относительно метрики ds_1^2) принадлежат множеству Ω . Это и означает существование окрестности

U точки O такой, что для любой границы $B \subset U, B \in F$, множество типов кратчайших деревьев, соединяющих B , содержится среди типов кратчайших деревьев, соединяющих множество $B \in F$ в евклидовой метрике.

§ 6. Минимальные деревья Штейнера для правильных многоугольников на римановых многообразиях

Рассмотрим касательное пространство к многообразию M_k в точке O и выберем в нем двумерную плоскость Π . Определим множество вершин правильного n -угольника с центром в O на многообразии M_k как образ множества вершин правильного n -угольника с центром в O , лежащего в плоскости Π , при экспоненциальном отображении (таким образом, мы определяем правильный многоугольник на многообразии лишь в некоторой окрестности точки O ; экспоненциальное отображение позволяет рассматривать в этой окрестности евклидову метрику). *Радиусом* правильного многоугольника на многообразии будем называть расстояние от любой его вершины до его центра.

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — вершины правильного многоугольника на многообразии, O — его центр. Рассмотрим сеть, соединяющую A_1, A_2, \dots, A_n , тип которой — бинарное дерево с множеством вершин $\{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_{n-2}\}$ (B_i — внутренние вершины сети) и множеством ребер $\{(B_i, B_{i+1}), i = 1, \dots, n-3, (B_j, A_{j+1}), j = 1, \dots, n-2, (B_1, A_1), (B_{n-2}, A_n)\}$. Обозначим этот тип через G_1 (рис. 2). Заметим, что граница многоугольника без стороны A_1A_n — сеть бинарного типа G_1 (некоторые ребра вырождены). Тогда кратчайшее дерево в классе сетей бинарного типа G_1 является минимальным деревом Штейнера относительно евклидовой метрики. В случаях $n = 3, 4, 5$ это проверяется непосредственно. Случай $n \geq 6$ вытекает из следующей теоремы.

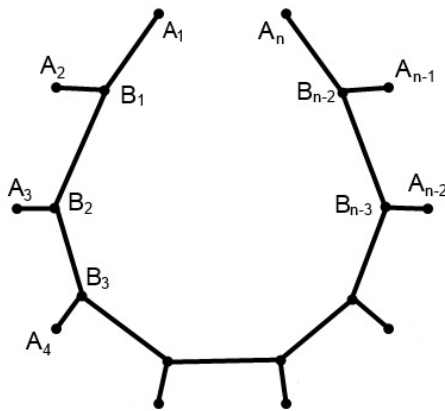


Рис. 2. Граф G_1 .

ТЕОРЕМА 7. (*Jarnik, Kössler [1], Du, Hwang, Weng [2]*) При $n \geq 6$ минимальным деревом Штейнера для вершин правильного n -угольника на евклидовой плоскости является его граница без любой стороны.

Заметим, что при $n \geq 6$ существует еще $n - 1$ бинарное дерево, изоморфное G_1 (обозначим их G_2, \dots, G_n), такое, что граница многоугольника без стороны $A_i A_{i+1}$ есть кратчайшее дерево в классе сетей бинарного типа G_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$, относительно евклидовой метрики (при $n = 3$ тип, реализующий минимальное дерево Штейнера, единственный; при $n = 4$ их два; при $n = 5$ их 5, но в этих случаях минимальные деревья Штейнера не являются границами без стороны). Обозначим через Ω_n множество типов, реализующих минимальные деревья Штейнера для вершин правильного n -угольника в евклидовой метрике ($\Omega_n = \{G_1, \dots, G_n\}$). Из теорем 6 и 7 получается следующий вывод.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для данного n существует $r_0 > 0$ такое, что для вершин любого правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ на римановом многообразии M_k типы минимальных деревьев Штейнера принадлежат множеству Ω_n .

В дальнейшем будем рассматривать двумерное полное гладкое риманово многообразие M_2 . Мы покажем, что при $n \geq 7$ для каждой точки $O \in M_2$ существует $r_0 > 0$ такое, что кратчайшей сетью, соединяющей вершины любого правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ является граница правильного n -угольника без наибольшей его стороны. Расстояние между точками $A, B \in M_2$ будем обозначать $\rho(A, B)$. Будем говорить, что множество V точек многообразия *выпукло*, если каждая пара его точек содержится в V вместе с любой кратчайшей кривой, соединяющей эти точки. *Выпуклой оболочкой* $\text{conv } V$ множества V будем называть наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее V .

В первую очередь, заметим, что для каждой точки $X \in M_2$ существует $r_X > 0$ такое, что при $r < r_X$ окрестность $U(X, r) = \{Y \in M_2 \mid \rho(X, Y) < r\}$ гомеоморфна \mathbb{R}^2 и является выпуклой, причем любые две точки $A, B \in U(X, r)$ соединены единственной геодезической, лежащей в $U(X, r)$, и ее длина равна $\rho(A, B)$. Данный результат можно найти в [21; § 3, теорема 3.6]. Эту геодезическую будем называть отрезком, соединяющим A и B . Для каждой точки $X \in M_2$ будем обозначать $U(X) = U(X, r)$ при некотором $0 < r < r_X$.

Рассмотрим замкнутую кривую γ без самопересечений, образ которой находится в $U(X)$. По теореме Жордана, кривая γ делит $U(X)$ на две области. Областью, ограниченной кривой γ , будем называть ту из них, что не прилегает к $\partial U(X)$. *Многоугольником* в $U(X)$ будем называть замыкание области, ограниченной некоторой кусочно-геодезической замкнутой кривой без самопересечений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть γ — замкнутая кривая без самопересечений в $U(X)$, и в области, ограниченной кривой γ , лежит выпуклый многоугольник T_0 (его вершины и стороны могут принадлежать образу кривой γ). Тогда периметр многоугольника T_0 не превосходит длины кривой γ , причем равенство достигается лишь тогда, когда граница многоугольника совпадает с образом этой кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При обходе вдоль границы многоугольника T_0 назовем его вершины A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 3). Продолжим отрезок $A_1 A_2$ за вершину

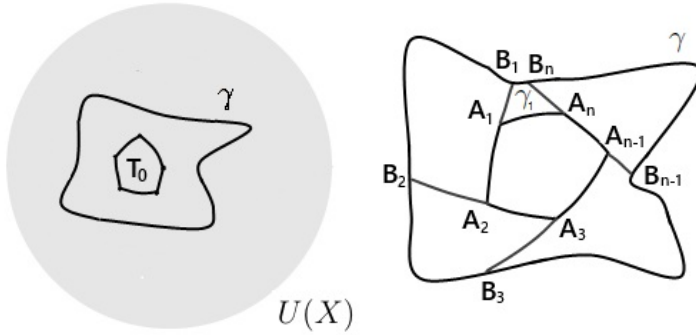


Рис. 3. Периметр T_0 не больше длины кривой γ .

A_1 , а отрезок $A_{n-1}A_n$ за вершину A_n . В силу выпуклости T_0 , рассматриваемые продолжения либо пересекутся друг с другом (в этом случае мы получим выпуклый многоугольник с $n - 1$ вершиной, периметр которого больше периметра T_0 , так как сторона A_1A_n многоугольника T_0 — кратчайшая; сделаем с ним то же самое), либо каждое пересечет кривую γ . Первое пересечение продолжения отрезка A_1A_2 с кривой γ назовем B_1 , а первое пересечение продолжения отрезка $A_{n-1}A_n$ с кривой γ назовем B_n . Точки B_1 и B_n делят кривую γ на две части. Ту часть, которая в объединении с отрезками $B_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}B_n$ является замкнутой кривой (без самопересечений), ограничивающей область, в которой содержится T_0 , назовем γ_1 (вырожденный случай — B_1 совпадает с B_n , и γ_1 вырождается в точку). Фигуру, границей которой является эта замкнутая кривая, а T_0 лежит внутри нее, назовем T_1 . Длина границы T_1 не меньше периметра T_0 , так как сторона A_1A_n многоугольника T_0 — кратчайшая, причем равенство достигается лишь тогда, когда кривая γ_1 совпадает со стороной A_1A_n многоугольника T_0 . Далее, продолжим отрезок A_2A_3 за вершину A_2 до первого пересечения с кривой γ , которое назовем B_2 . Аналогично, рассмотрим фигуру T_2 , содержащую фигуру T_1 , граница которой отличается от границы T_1 тем, что отрезок A_2B_1 заменен на объединение отрезка A_2B_2 и соответствующей части кривой γ , соединяющей B_1 и B_2 . Длина границы T_2 не меньше длины границы T_1 , так как отрезок A_2B_1 , принадлежащий ∂T_1 , является кратчайшей. Продолжая этот процесс, на $n - 1$ шаге мы рассмотрим фигуру T_{n-1} , граница которой — объединение части кривой γ и отрезка $B_{n-1}B_n$ (длина этой границы не меньше длин границ фигур T_k при $k < n - 1$). Так как этот отрезок — кратчайшая, то длина всей кривой γ не меньше длины границы T_{n-1} . Таким образом, мы показали, что длина кривой γ не меньше периметра T_0 , и равенство достигается лишь тогда, когда граница многоугольника T_0 совпадает с образом этой кривой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть V — конечное множество точек в $U(X)$. Тогда выпуклая оболочка $\text{conv } V$ этого множества является выпуклым многоугольником (возможно, вырожденным).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай, в котором все точки множества V лежат на одной геодезической, является тривиальным. Пусть все точки множества V не лежат на одной геодезической. Рассмотрим интервал геодезической, концы которого лежат на $\partial U(X)$. Он делит $U(X)$ на две области. Объединение одной области с этим интервалом геодезической будем называть *полуокрестностью*. Заметим, что полуокрестность является выпуклой. Отрезок, соединяющий пару точек из V , будем называть *граничным*, если он не проходит через другие точки множества V , и все точки множества V лежат в одной из двух полуокрестностей, образованных геодезической, являющейся продолжением этого отрезка.

Заметим, что каждая точка множества V либо не является концом никакого граничного отрезка, либо является концом ровно двух граничных отрезков. Действительно, пусть AB — граничный отрезок, $A, B \in V$. Рассмотрим некоторую точку $C \in V$. Если отрезок AC не является граничным, то в полуокрестности, образованной продолжением этого отрезка, и не содержащей точку B , лежит некоторая точка C_1 множества V . Перейдем к ее рассмотрению и сделаем ту же процедуру. Заметим, что в полуокрестности, образованной продолжением отрезка AC_1 , и содержащей точку B , лежит точка C . Так как множество V конечно, через конечное количество шагов мы придем к рассмотрению некоторой точки C_0 такой, что отрезок AC_0 является граничным, $B \neq C_0$. При этом ясно, что точка A не может являться концом трех граничных отрезков. Действительно, в таком случае продолжение одного из них разделяло бы различные концы двух других.

Рассмотрим граничный отрезок A_0A_1 и полуокрестность Q_0 , образованную продолжением этого отрезка, содержащую все точки множества V . Пусть A_1A_2 — второй граничный отрезок, концом которого является точка A_1 . Добавим к отрезку A_0A_1 отрезок A_1A_2 , и назовем γ_1 кусочно-геодезическую кривую, образом которой является их объединение. Пересечение Q_0 и полуокрестности, образованной продолжением отрезка A_1A_2 , содержащей все точки множества V , назовем Q_1 . Продолжая данную процедуру, на некотором шаге мы получим замкнутую кусочно-геодезическую кривую γ_k без самопересечений, и множество Q_k , являющееся выпуклым как пересечение выпуклых полуокрестностей. При этом Q_k является замыканием области, ограниченной γ_k . Таким образом, Q_k является выпуклым многоугольником с границей γ_k , вершины которого — некоторые точки множества V , и все точки из V содержатся в Q_k . Из этого следует, что $\text{conv } V \subseteq Q_k$. При этом, образ γ_k лежит в $\text{conv } V$, так как является объединением отрезков, соединяющих точки из V . Любая внутренняя точка $F \in Q_k$ также лежит в $\text{conv } V$, так как лежит на некотором отрезке, концы которого лежат на γ_k . Таким образом, $Q_k \subseteq \text{conv } V$. Это означает, что Q_k совпадает с $\text{conv } V$.

ТЕОРЕМА 8. Для фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и точки $X \in M_2$ существует ее окрестность $U_0(X)$ такая, что для любого множества из n точек V , содержащегося в $U_0(X)$, кратчайшая сеть, соединяющая V , лежит в выпуклой оболочке $\text{conv } V$ множества V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим окрестность $U(X)$, используемую в утверждении 8. Обозначим ее радиус через r . Рассмотрим также окрестность

$U_0(X, r_0) = \{Y \in M_2 \mid \rho(X, Y) < r_0\}$ при некотором r_0 , удовлетворяющем неравенству $(2n - 3)r_0 < r$. Для любого множества V , состоящего из n точек и содержащегося в $U_0(X)$, длина любого минимального остовного дерева, соединяющего V , не превосходит $2(n - 1)r_0$, следовательно, по определению r_0 , она меньше, чем $r - r_0$. Таким образом, длина любого минимального остовного дерева, соединяющего V , строго меньше, чем длина любой сети, соединяющей V , образ которой не содержится полностью в $U(X)$, так как эта длина больше или равна $r - r_0$. Из этого следует, что образ кратчайшей сети, соединяющей любое n -точечное множество V , содержащееся в $U_0(X)$, полностью лежит в $U(X)$. В дальнейшем будем рассматривать только сети, образы которых лежат в $U(X)$.

В соответствии с утверждением 9 выпуклая оболочка $\text{conv } V$ множества V является выпуклым многоугольником, обозначим его через M . Пусть H — сеть типа дерева, соединяющая множество V , не лежащая в M , ребра которой — отрезки. Покажем, что существует более короткая сеть. Для удобства изложения будем отождествлять сеть и ее образ на многообразии.

Пусть H целиком содержится в $U(X)$. Пусть Q — вершина сети H , не лежащая в M . Множество всех точек первого входа в M путей из Q к вершинам V по ребрам сети H обозначим E . Из Q выходит не менее двух ребер сети H , а, значит, существуют две различные вершины множества V такие, что пути до них от вершины Q содержат эти ребра соответственно, следовательно, множество E содержит хотя бы две точки. Пусть $K, N \in E$. Кривую, которая соединяет точки K и N и лежит в сети H (такая кривая единственна, так как тип сети — дерево), назовем γ . Заметим, что эта кривая полностью не лежит в M . Точки K и N разбивают границу M на две ломаных. Ту из них, что в объединении с кривой γ дает замкнутую кривую, не разделяющую внутренность M и границу $\partial U(X)$, назовем γ_0 . Будем говорить, что кривая γ_0 , лежащая на ∂M , соответствует паре $K, N \in E$ (рис. 4).

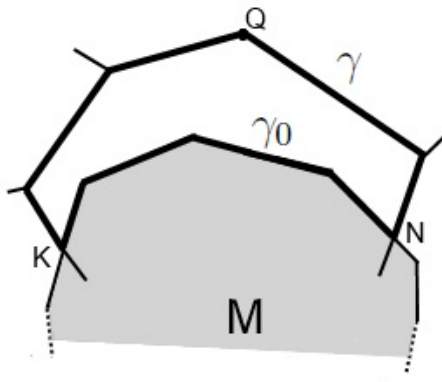


Рис. 4. кривая γ_0 , соответствующая паре $K, N \in E$.

Рассмотрим точку $K \in E$. Пусть она лежит на ребре AB многоугольника M и не совпадает с B . Пересечение малой окрестности точки K , не содержащей других точек из E , с отрезком KB назовем l . Пусть E_1 — множество точек $N_i \in E$ таких, что кривые, лежащие на ∂M и соответствующие парам K, N_i , содержат отрезок l , а $E_2 = E \setminus E_1$. Для любых двух кривых, соответствующих парам K, N_i и K, N_j при $N_i, N_j \in E_1$, образ одной из них содержит в себе образ другой. Аналогичное верно для E_2 . Таким образом, в силу конечности E , выберем в E_1 точку N_1 такую, что образ кривой, соответствующей паре K, N_1 , содержит в себе образы кривых, соответствующих всем парам K, N_i при $N_i \in E_1$. Выберем точку $N_2 \in E_2$ с аналогичным свойством. Если E_1 пусто, то вместо N_1 выберем K , причем $K \neq N_2$, так как E содержит хотя бы две точки. Таким образом, образ кривой, соответствующей паре $N_1, N_2 \in E$, содержит в себе образ соответствующей кривой для любой другой пары точек из E . Будем считать, что K и N , рассмотренные ранее — и есть пара точек $N_1, N_2 \in E$.

Заметим, что у каждого пути от точки Q до некоторой точки множества V по сети H точка первого входа в M лежит на γ_0 , так как лежит на некоторой соответствующей кривой, образ которой содержится в образе γ_0 . Таким образом, в сети H участок γ с выходящими из него путями до γ_0 можно заменить на кривую γ_0 , и получится более короткая сеть. Действительно, в области, ограниченной кривой $\gamma \cup KN$, лежит выпуклый многоугольник с границей $\gamma_0 \cup KN$. Согласно утверждению 8, его периметр меньше длины кривой $\gamma \cup KN$ (она лежит в $U(X)$). Это означает, что длина γ больше длины γ_0 . Таким образом, после описанной выше замены действительно получится более короткая сеть, и эта сеть соединяет вершины V .

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть многообразие M_2 гомеоморфно \mathbb{R}^2 , любые две точки $A, B \in M_2$ соединены единственной геодезической, длина которой равна $\rho(A, B)$, а V — конечное множество точек из M_2 . Тогда кратчайшая сеть, соединяющая V , лежит в выпуклой оболочке $\text{conv } V$ множества V .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Примером таких многообразий являются евклидова плоскость и плоскость Лобачевского.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть конечное множество точек двумерной сферы V содержится в открытой полусфере S . Тогда кратчайшая сеть, соединяющая V , лежит в выпуклой оболочке $\text{conv } V$ множества V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полусфера S является шаровой окрестностью некоторой точки X , и может быть рассмотрена в качестве $U(X)$. Достаточно показать, что образ кратчайшей сети, соединяющей V , полностью лежит в S .

Пусть сеть H , соединяющая V , не лежит целиком в S . Часть этой сети, лежащую в дополнении S , заменим на ее отражение относительно ∂S , в результате чего получим сеть H_1 той же длины, лежащую в замыкании S . При этом, все вершины сети H_1 , лежащие на ∂S — либо вершины степени 2 (соединив двух соседей каждой такой вершины сферическим отрезком, и убрав эти вершины и выходящие из нее ребра, мы перейдем к не более длинной сети без

вершин степени 2 на ∂S), либо вершины степени 3, причем среди ребер, выходящих из такой вершины, найдется пара ребер, угол между которыми меньше $\frac{2\pi}{3}$, а это значит, что эту сеть можно сделать короче.

Для доказательства следующего результата воспользуемся теоремой, доказанной Александровым.

ТЕОРЕМА 9. (Александров [22]) *Если кривизна риманова многообразия R_m размерности m не больше k , то углы треугольника в R_m не больше соответствующих углов треугольника с теми же длинами сторон в плоскости постоянной кривизны k .*

Положим $C_l(X) = \{Y \in M_2 \mid \rho(X, Y) = l\}$. Ясно, что при достаточно малых $l > 0$ множество $C_l(X)$ является образом замкнутой кривой без самопересечений. В таком случае будем называть $C_l(X)$ *окружностью с центром в X и радиусом l* , а $D_l(X) = \{Y \in M_2 \mid \rho(X, Y) \leq l\}$ — *кругом с центром в X и радиусом l* . Кривизну многообразия в точке $Y \in M_2$ будем обозначать $K(Y)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Пусть $X \in M_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $l_X > 0$ такое, что при любом $l < l_X$ для любых двух точек $A, B \in C_l(X)$ углы $\angle XAB$ и $\angle XBA$ треугольника AXB отличаются от $\frac{\pi - \angle AXB}{2}$ меньше, чем на ε .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую шаровую окрестность $\tilde{U}(X)$ точки X , в которой кривизна ограничена: $|K(Y)| < K_0$ при некотором $K_0 > 0$ для любой точки $Y \in M_2$. Ясно, что существует l_0 такое, что при любом $l < l_0$ выполнено $D_l(X) \subset \tilde{U}(X)$.

Рассмотрим две точки $A, B \in C_l(X)$. Вершины треугольника с теми же длинами сторон, что и у треугольника AXB , но лежащего в плоскости постоянной кривизны K_0 (на сфере кривизны K_0 , которую будем обозначать через S_{K_0}), назовем X_1, A_1 и B_1 соответственно. Треугольник AXB лежит в $\tilde{U}(X)$, значит, по теореме Александрова, его углы не больше соответствующих углов треугольника $X_1A_1B_1$. При этом, углы $\angle A_1$ и $\angle B_1$ треугольника $X_1A_1B_1$ равны, так как это — равнобедренный треугольник на сфере.

Далее, для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем положительное число $l_X < l_0$ так, чтобы при любом $l < l_X$ площадь S круга $D_l(X)$ и площадь S_1 круга радиуса l на S_{K_0} были меньше $\frac{\varepsilon}{2K_0}$. По теореме Гаусса-Бонне, для треугольников AXB и $X_1A_1B_1$ выполнены следующие соотношения:

$$\pi + \int_{\triangle XAB} K d\sigma = \angle X + \angle A + \angle B,$$

$$\pi + \int_{\triangle X_1A_1B_1} K_0 d\sigma_1 = \angle X_1 + \angle A_1 + \angle B_1,$$

где $d\sigma$ и $d\sigma_1$ — формы площади на $\tilde{U}(X)$ и S_{K_0} соответственно.

В силу выбора l_X , имеем:

$$\left| \int_{\triangle XAB} K d\sigma \right| \leq \int_{\triangle XAB} |K| d\sigma < K_0 S < \varepsilon/2, \text{ и, аналогично, } \left| \int_{\triangle X_1A_1B_1} K_0 d\sigma_1 \right| < \varepsilon/2.$$

Таким образом, $|\pi - \angle X - \angle A - \angle B| < \varepsilon/2$ и $|\pi - \angle X_1 - \angle A_1 - \angle B_1| < \varepsilon/2$. Это означает, что сумма $\angle X + \angle A + \angle B$ отличается от суммы $\angle X_1 + \angle A_1 + \angle B_1$ не более, чем на ε . Учитывая тот факт, что $\angle X_1 \geq \angle X$, $\angle A_1 \geq \angle A$, $\angle B_1 \geq \angle B$ и $\angle A_1 = \angle B_1$, получим, что углы $\angle A$ и $\angle B$ отличаются друг от друга не более, чем на ε . Это означает, что углы $\angle A$ и $\angle B$ отличаются от величины $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ не более, чем на $\varepsilon/2$. В свою очередь, величина $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ отличается от $\frac{\pi - \angle X}{2}$ на величину $\frac{1}{2} \int_{\triangle XAB} K d\sigma$, абсолютное значение которой, как нам известно, меньше $\varepsilon/4$. Таким образом, углы $\angle A$ и $\angle B$ треугольника AXB отличаются от $\frac{\pi - \angle AXB}{2}$ меньше, чем на ε . Что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $X \in M_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r' > 0$ такое, что при $n \geq 3$ и любом $r < r'$ все углы любого правильного n -угольника с центром в X и радиусом r отличаются от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 10, для фиксированного ε выберем $r' > 0$ так, чтобы при любом $r < r'$ для любых двух точек $A, B \in C_r(X)$ углы $\angle XAB$ и $\angle XBA$ треугольника AXB отличались от $\frac{\pi - \angle AXB}{2}$ меньше, чем на $\varepsilon/2$.

Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — вершины правильного многоугольника с центром в X и радиусом $r < r'$, $n \geq 3$. Углы $\angle A_1XA_2$ и $\angle A_2XA_3$ равны $\frac{2\pi}{n}$ по определению правильного многоугольника. Таким образом, углы $\angle A_1A_2X$ и $\angle XA_2A_3$ отличаются от $\frac{(n-2)\pi}{2n}$ меньше, чем на $\varepsilon/2$, следовательно, угол $\angle A_1A_2A_3$ отличается от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на ε . Аналогично, каждый угол данного правильного многоугольника отличается от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на ε .

ТЕОРЕМА 10. Для точки $O \in M_2$ и данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$ на полном римановом многообразии M_2 минимальным деревом Штейнера является граница этого n -угольника без его наибольшей стороны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии со следствием 3 и теоремой 8, существует $r_1 > 0$ такое, что для вершин правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_1$ минимальные деревья Штейнера, соединяющие их, лежат в выпуклой оболочке этих вершин, а их типы принадлежат множеству Ω_n . При этом, в соответствии со следствием 6, существует $r_2 > 0$ такое, что все углы любого правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_2$ отличаются от $\frac{(n-2)\pi}{n}$ меньше, чем на $\frac{1}{42}\pi$. Заметим, что при $n \geq 7$ выполнено $\frac{(n-2)\pi}{n} \geq \frac{5}{7}\pi$, и, значит, величина каждого угла правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_2$ больше $\frac{5}{7}\pi - \frac{1}{42}\pi = \frac{29}{42}\pi > \frac{2}{3}\pi$. Таким образом, граница такого многоугольника без любой стороны — действительно локально-минимальная сеть. В результате, достаточно показать, что существует $r_0 < \min\{r_1, r_2\}$ такое, что не существует минимальных параметрических деревьев бинарных типов из Ω_n , соединяющих вершины правильного n -угольника с центром в O и радиусом $r < r_0$, отличных от границ этого многоугольника без соответствующих сторон.

Пусть, как и ранее, A_1, A_2, \dots, A_n — вершины правильного многоугольника с центром в O , r — его радиус, $r < \min\{r_1, r_2\}$. Для определенности, рассмотрим тип $G_1 \in \Omega_n$. Рассматриваемый правильный n -угольник обозначим

через M , а сеть, совпадающую с границей M без стороны A_1A_n , через H_0 . Рассмотрим локально-минимальную сеть H типа G_1 , соединяющую вершины M . Ее внутренние вершины, как и ранее, обозначим через B_1, B_2, \dots, B_{n-2} . Пусть внутренние вершины сети H лежат в многоугольнике M (рис. 5), т.е. в выпуклой оболочке его вершин (лишь в этом случае сеть H может оказаться кратчайшей). Покажем, что при достаточно малом радиусе эта сеть обязательно совпадает с H_0 (других локально-минимальных сетей типа G_1 нет).

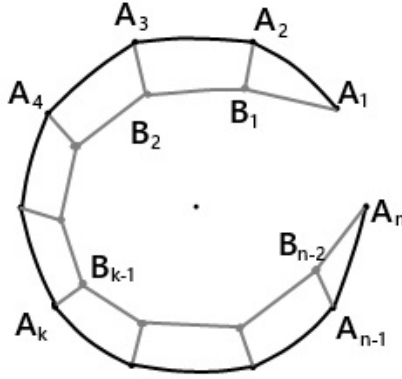


Рис. 5. Сеть типа G_1 , соединяющая вершины правильного многоугольника.

Многоугольник $A_1B_1B_2 \dots B_{n-3}B_{n-2}A_n$ обозначим через T . Вершину A_i многоугольника M будем называть соответствующей вершине B_{i-1} многоугольника T при $i = 2, \dots, n-1$, вершине A_1 при $i = 1$ и A_n при $i = n$. Если вершина B_i не совпадает с точкой A_{i+1} , то угол многоугольника T при вершине B_i равен $\frac{2\pi}{3}$, так как H — локально-минимальная сеть, и, следовательно, меньше угла многоугольника M при вершине A_{i+1} , так как его углы больше $\frac{2\pi}{3}$. Если вершина B_i совпадает с точкой A_{i+1} , то угол многоугольника T при вершине B_i не больше угла M при вершине A_{i+1} , так как все внутренние вершины сети H лежат либо во внутренней, либо на границе M . Если сеть H отличается от H_0 , то некоторая вершина B_k не совпадает с точкой A_{k+1} .

Как известно, кривизна полного многообразия в каждом круге ограничена. Таким образом, существует $K_0 > 0$ такое, что $|K(X)| < K_0$ для $X \in D_{r_2}(X)$. По теореме Гаусса-Бонне, для многоугольников M и T выполнены следующие соотношения:

$$(n-2)\pi + \int_M K d\sigma = \sum_{i=1}^n \angle A_i,$$

$$(n-2)\pi + \int_T K d\sigma = \sum_{i=1}^{n-2} \angle B_i + \angle B_1A_1A_n + \angle B_{n-2}A_nA_1,$$

где $d\sigma$ — форма площади на M_2 .

Вычтем из первого выражения второе (многоугольник T лежит внутри многоугольника M), и получим:

$$\int_{M \setminus T} K d\sigma = \left(\sum_{i=1}^n \angle A_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-2} \angle B_i + \angle B_1 A_1 A_n + \angle B_{n-2} A_n A_1 \right).$$

Заметим, что правая часть есть сумма разностей соответствующих углов многоугольников M и T соответственно. Все эти разности неотрицательные, а так как все углы многоугольника M больше $\frac{29}{42} \pi$, то разность угла многоугольника M при вершине A_{k+1} и угла при соответствующей вершине B_k многоугольника T больше величины $\frac{29}{42} \pi - \frac{2}{3} \pi = \frac{1}{42} \pi$. Таким образом,

$$\int_{M \setminus T} K d\sigma > \frac{1}{42} \pi.$$

При этом ясно, что

$$K_0 S_M > \int_{M \setminus T} K d\sigma,$$

где S_M — площадь многоугольника M . Остается заметить, что при радиусе $r < r_0$ при некотором r_0 площадь S_M многоугольника M меньше $\frac{1}{42 K_0} \pi$, а, значит, при $r < r_0$ единственной локально-минимальной сетью типа G_1 является H_0 , так как все внутренние вершины B_i должны совпадать с соответствующими вершинами A_{i+1} . Это означает, что H_0 — это минимальное параметрическое дерево типа G_1 , и других минимальных параметрических деревьев нет. Что и требовалось.

Пусть M_k — риманово многообразие постоянной кривизны. Рассмотрим шаровую окрестность U точки O . Любое ортогональное преобразование касательного пространства к M_k в этой точке определяет преобразование окрестности U , сохраняющее метрику многообразия (а, значит, и метрику 5.1 при любом $t \in [0, 1]$). В частности, преобразования окрестности U , переводящие множество вершин правильного многоугольника с центром в O в себя, соответствующие вращению в плоскости Π , являются изометриями. Это означает, что на многообразиях постоянной кривизны все углы и все стороны правильного многоугольника равны между собой. Такими изометриями можно перевести минимальное параметрическое дерево любого типа из Ω_n в минимальное параметрическое дерево любого другого типа из Ω_n . При этом, два правильных многоугольника одного радиуса переводятся друг в друга с помощью изометрий, в результате чего последующие оценки не зависят от точки O многообразия. Для того, чтобы оценка радиуса была независима от точки, требуется, чтобы для некоторого r' в каждой точке многообразия корректно определялись правильные n -угольники радиусов меньше r' с центрами в этих точках. Для этого рассмотрим многообразия постоянной кривизны, радиус инъективности r_i которых положителен. Таким образом, для любой точки многообразия шаровая окрестность с центром в этой точке и радиусом $r < r_i$ диффеоморфна соответствующей шаровой окрестности начала координат касательного пространства

в этой точке того же радиуса (диффеоморфизм задается экспоненциальным отображением). Отсюда вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для данного n существует $r_0 > 0$ такое, что для вершин любого правильного n -угольника и радиусом $r < r_0$ на полном римановом многообразии постоянной кривизны M_k с положительным радиусом инъективности множество типов минимальных деревьев Штейнера совпадает с Ω_n .

Таким образом, из следствия 7 и теоремы 10 вытекают следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 8. Для данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n -угольника радиуса $r < r_0$ на двумерной сфере минимальным деревом Штейнера является граница этого n -угольника без любой ее стороны.

СЛЕДСТВИЕ 9. Для данного $n \geq 7$ существует такое $r_0 > 0$, что для вершин любого правильного n -угольника радиуса $r < r_0$ на плоскости Лобачевского минимальным деревом Штейнера является граница этого n -угольника без любой ее стороны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На плоскости Лобачевского при $n < 7$ граница правильного n -угольника без какой-либо стороны не является локально-минимальной сетью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского равна $\pi - s$, где s — его площадь, значит, сумма углов n -угольника равна $(n - 2)\pi - S$, где S — площадь этого n -угольника. Так как углы правильного n -угольника равны между собой, то при $n < 7$ они всегда меньше $\frac{2\pi}{3}$.

Тем не менее, на плоскости Лобачевского при $n < 7$ минимальные параметрические деревья в классах сетей бинарных типов из Ω_n являются кратчайшими при достаточно малом радиусе многоугольника. В силу полноты плоскости Лобачевского, точная нижняя грань функции длины сети достигается. Таким образом, минимальными деревьями Штейнера являются сети типов из Ω_n , внутренние ребра которых не вырождаются, так как в противном случае сеть содержит вершины степени большей 3. Некоторые граничные ребра этих сетей могут быть вырождены.

Список литературы

- [1] V. Jarník, Kössler, "O minimálních grafech obsahujících n daných bodu", Т. 63, PěstováníMat. (Essen), Cas, 1934, 223–235.
- [2] D.Z. Du, F.K. Hwang, J.F. Weng, "Steiner Minimal Trees for Regular Polygons", Springer Verlag, New York, 1987.
- [3] J.H. Rubinstein, A.D. Thomas, "Graham's problem on shortest networks for points on a circle", 7, Algorithmica, 1992, 193–218.
- [4] D.Z. Du, F.K. Hwang, J.F. Weng, "Steiner Minimal Trees for points on a zig-zag lines", v. 95, № 4, Trans. Amer. Math. Soc., 1985, 149–156.
- [5] M. Brazil, J. Cole, J.H. Rubinstein, A.D. Thomas, J.F. Weng, N.C. Wormald, "Full minimal Steiner trees on lattice sets", J. Comb. Theory Series A. 78, 1997, 51–91.

- [6] M. Brazil, J. Cole, J.H. Rubinstein, A.D. Thomas, J.F. Weng, N.C. Wormald, "Minimal Steiner trees for $2^k \times 2^k$ square lattices", *J. Comb. Theory Series A*, 73, 1996, 91–110.
- [7] M. Brazil, J. Cole, J.H. Rubinstein, A.D. Thomas, J.F. Weng, N.C. Wormald, "Minimal Steiner trees for rectangular arrays of lattice points", Research Report N 24, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia, 1995.
- [8] F.R.K. Chung, R.L. Graham, "Steiner trees for ladders", v. 2, *Ann. Disc. Math*, 1978, 173–200.
- [9] F.R.K. Chung, M. Gardner, R.L. Graham, "Steiner trees on a checkerboard", v. 62, *Math. Magazine*, 1989, 83–96.
- [10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, "Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Платона", **47:2(284)**, *УМН.*, 1992, 53–115.
- [11] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, "Теория экстремальных сетей", Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.
- [12] A. Heppes, "Isogonal spherisches Netze", v. 7, *Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math.*, 1964, 41–48.
- [13] А. О. Иванов, И. В. Птицына, А. А. Тужилин, "Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах", *Матем. сб.*, **183:12** (1992), 3–44.
- [14] И.В. Птицына, "Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна", *Вестник МГУ*, 1995, № 5, 15–22.
- [15] И.В. Птицына, "Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах", *Матем. сб.*, **Т. 185:5** (1994), 11–138.
- [16] А.О. Ivanov, А.А. Tuzhilin, "Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations", CRC Press, 1994.
- [17] А.А. Вдовина, Е.Н. Селиванова, "Локально минимальные сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны", *Матем. сб.*, 1997, № 6, 15–17.
- [18] Н.П. Стрелкова, "Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров", *Матем. сб.*, **Т. 202:1** (2011), 141–160.
- [19] Н.П. Стрелкова, "Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников", *Модел. и анализ информ. систем*, **Т. 20:5** (2013), 117–147.
- [20] А.О. Ivanov, А.А. Tuzhilin, "The Steiner problem and its generalizations", BocaRaton, Ann Arbor, London, Tokyo: CRC Press, 1994.
- [21] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, "Основы дифференциальной геометрии", Т. 1, Наука, М., 1981.
- [22] A. Alexandroff., "Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie", № 1, *Acad. Wiss. Forsch. Math.*, 1957, 33–85.