

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

«ПОГРУЖЕНИЕ ГРАФОВ В ПРОЕКТИВНУЮ ПЛОСКОСТЬ»

Курсовая работа  
студента 4 курса  
М.А. Ивашковского

Научный руководитель  
Доцент, кандидат физ.-мат. наук Е.А. Кудрявцева

Москва, 2016 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Известные результаты. Определения . . . . .	2
1.2	Постановка задачи . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Классификация погружений графов в проективную плоскость</b>	<b>6</b>
2.1	Граф $G$ состоит из одной петли . . . . .	6
2.1.1	Формулировка результата . . . . .	6
2.1.2	Доказательство теоремы 4 . . . . .	7
2.2	Граф $G$ состоит из двух петель . . . . .	9
2.2.1	Вспомогательные утверждения и необходимые определения . . . . .	10
2.2.2	Формулировка результата . . . . .	11
2.2.3	Доказательство теоремы 5 . . . . .	11
	<b>Список литературы</b>	<b>13</b>

## Аннотация

В работе исследуются погружения графов в проективную плоскость. Проводится классификация погружений с точностью до регулярной гомотопности. Построен полный инвариант погружений с точностью до регулярной гомотопности. Описываются классы эквивалентности.

Immersion of graphs to the projective plane are studied. A classification of immersions up to regular homotopy is given. A complete invariant of immersions up to regular homotopy is constructed. Equivalence classes are described.

# 1 Введение

## 1.1 Известные результаты. Определения

**Определение 1.** Две замкнутые регулярные кривые  $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \rightarrow M$  на поверхности  $M$  назовем *регулярно гомотопными* и пишем  $\gamma_0 \stackrel{reg}{\sim} \gamma_1$ , если существует регулярная гомотопия  $\{\gamma_t\}_{t \in [0;1]}$  с  $\gamma_t|_{t=0} = \gamma_0$  и  $\gamma_t|_{t=1} = \gamma_1$ .

**Теорема 1** (Уитни [1]). Если  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} : S^1 \rightarrow S^1$  и число вращения Уитни кривой  $\gamma$  определяется формулой  $\omega(\gamma) := \deg \Gamma$ , то

$$\gamma_0 \stackrel{reg}{\sim} \gamma_1 \Leftrightarrow \omega(\gamma_0) = \omega(\gamma_1).$$

**Теорема 2** (Рейдемейстер [2]). Регулярные кривые  $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \rightarrow M$  на поверхности  $M$  гомотопны (обозначение  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ) тогда и только тогда, когда существует гомотопия, разлагающаяся в последовательность движений Рейдемейстера 1, 2 и 3 типов.

Движения Рейдемейстера существуют ровно трёх типов (рис. 1).

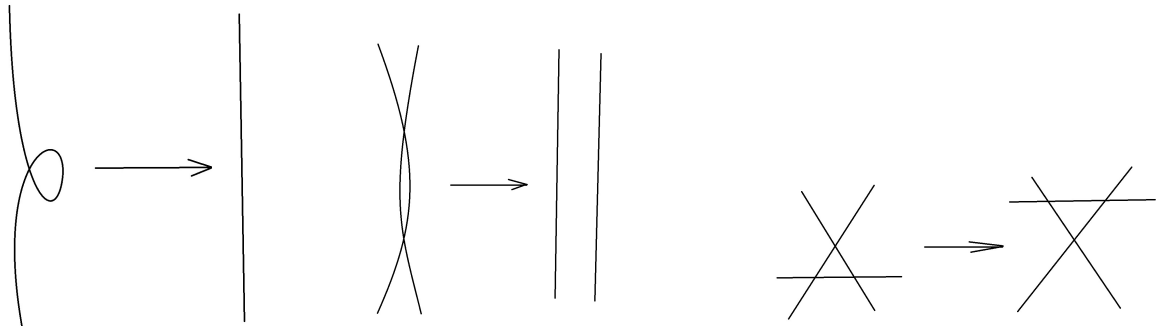


Рис. 1: Движения Рейдемейстера типов 1, 2 и 3

**Следствие 1.** Если регулярные кривые  $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \rightarrow M$  на поверхности  $M$  гомотопны (т.е.  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ), то  $\gamma_0 \stackrel{reg}{\sim} \tilde{\gamma}_1$  для некоторой регулярной кривой  $\tilde{\gamma}_1$ , получающейся из кривой  $\gamma_1$  прибавлением некоторого количества маленьких петель (завитков).

*Доказательство.* По теореме 2 Рейдемейстера, ввиду гомотопности кривых, существует последовательность движений Рейдемейстера, приводящая кривую  $\gamma_0$  к кривой  $\gamma_1$ . Выполним эту последовательность движений со следующей модификацией: каждый раз, когда предполагается совершить движение Рейдемейстера типа 1 (рождение или уничтожение завитка), мы вместо его выполнения будем оставлять на малом участке кривой маленький завиток (который будет сохраняться, жестко двигаясь по поверхности вместе с этим участком кривой, в течение всей последующей регулярной гомотопии).

Более подробно: если движение Рейдемейстера типа 1 состоит в *уничтожении* завитка, то вместо его уничтожения мы сохраним его (в течение всей последующей регулярной гомотопии) в виде маленького завитка. А если движение Рейдемейстера типа 1 состоит в *рождении* завитка, то мы непосредственно перед выполнением этого движения породим (как на рис. 2) регулярной гомотопией пару близлежащих завитков противоположных знаков, и один из них (нужного знака) используем в качестве рожденного завитка при движении Рейдемейстера, а другой завиток сохраним (в течение всей последующей регулярной гомотопии) в виде маленького завитка на данном участке кривой.

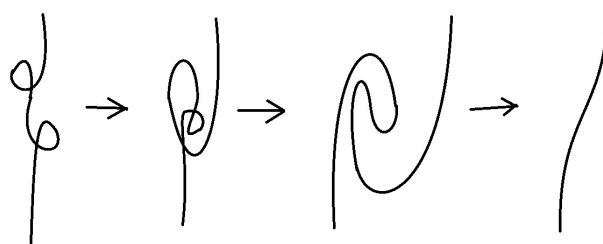


Рис. 2: Взаимное уничтожение пары маленьких петель

В результате мы получим регулярную гомотопию, приводящую кривую  $\gamma_0$  к некоторой кривой  $\tilde{\gamma}_1$  искомого вида, т.е. получающейся из  $\gamma_1$  добавлением нескольких завитков.  $\square$

**Определение 2.** Обозначим  $\gamma^{or} := (\gamma, or.)$ , где  $\gamma : G \rightarrow M$ ,  $or.$  — локальная ориентация  $T_{\gamma(v)}M$ ,  $v$  — вершина, где сходятся петли графа  $G$ .

**Определение 3.**  $\gamma_0^{or} \stackrel{reg}{\sim} \gamma_1^{or}$ , если они гомотопны в обычном смысле при помощи регулярной гомотопии  $\gamma_t$ , и кроме того  $\gamma_t$  — погружение (т.е. локально является регулярным вложением).

**Теорема 3** (Пермяков [3]). Пусть  $M$  — компактная поверхность, отличная от  $\mathbb{R}P^2$ . Пусть  $G$  — связный граф,  $v$  — некоторая вершина,  $T$  — остовное дерево, и ребра вне  $T$  не являются петлями и соединяют листья дерева  $T$ . Пусть  $X$  — векторное поле на  $M$  без нулей в случае, когда  $M$  — тор, бутылка Клейна или поверхность с краем, и с единственным нулем  $x \in M$  в остальных случаях,  $f_1, f_2 : G \rightarrow M$  два регулярных погружения, образы которых не содержат  $x$ . Пусть заданы локальные ориентации  $O_1, O_2$  в точках  $f_1(v), f_2(v)$ . Пусть  $\tilde{f}_1 : G \rightarrow M$  — произвольное регулярное отображение, регулярно гомотопное  $f_1$ , для которого  $\tilde{f}_1|_T \equiv f_2|_T$ , локальная ориентация в точке  $\tilde{f}_1(v) = f_2(v)$ , перенесенная с гомотопией из  $O_1$ , совпадает с  $O_2$ , и  $\tilde{f}_1$  гомотопно  $f_2$  относительно точки  $v$ . Тогда существует регулярная гомотопия, преобразующая  $f_1$  в  $f_2$  и  $O_1$  в  $O_2$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Существует гомотопия, преобразующая отображение  $f_1$  в  $f_2$  и локальную ориентацию  $O_1$  в  $O_2$ .
2. В каждой вершине циклические порядки выходящих из нее ребер при отображениях  $f_1$  и  $f_2$  совпадают относительно локальных ориентаций, перенесенных из  $O_1$  и  $O_2$  вдоль дерева  $T$ .
3. Для каждого простого опорного цикла  $C_i$  сохраняющего ориентацию выполняется  $d\omega_X(f_1|_{C_i}, O_1, f_2|_{C_i}, O_2) = 0$ .

4. Число  $d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2'|_{C_i}(w_i))$  одинаково и четно для всех простых опорных циклов  $C_i$ , меняющих ориентацию, где  $w_i$  ближайшая к  $v$  по дереву  $T$  точки цикла  $C_i$ , а локальная ориентация  $O_{2,i}$  в точке  $f_2(w_i)$  перенесена из  $O_2$  вдоль дерева  $T$ .

Подробнее про определения, используемые в теореме 3, и ее доказательство можно найти в [3].

Как пример, приведем результат классификации погружений графа для случая кривых на сфере.

**Утверждение 1** (для  $M = S^2$ ).  $\forall$  погружение  $\gamma : S^1 \rightarrow S^2$  регулярно гомотопно либо кривой без петель, либо кривой с одной петлёй. Обозначим первую как  $\gamma_{(0)}$ , а вторую как  $\gamma_{(1)}$ .

**Определение 4** (число самопересечения замкнутой регулярной кривой  $\gamma$  на ориентируемом многообразии  $M$ ). Пусть в точке  $\gamma(0)$  фиксирована ориентация  $T_{\gamma(0)}M$ . Пусть есть точка самопересечения  $A$  кривой  $\gamma$ ,  $A = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , причем  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ . Перенесем ориентацию вдоль кривой  $\gamma|_{[0,t_1]}$  в точку  $A$ . Возьмем репер  $(\dot{\gamma}(t_1), \dot{\gamma}(t_2))$  и сравним его ориентацию с перенесенной ориентацией. В зависимости от согласованности припишем точке  $A$  знак  $+1$  или  $-1$ . Просуммировав эти числа по всем точкам самопересечения, получим число самопересечения кривой  $\gamma$ , обозначим его через  $I\gamma \in \mathbb{Z}$ .

**Следствие 2.** В случае ориентируемого многообразия,  $\gamma_0 \stackrel{reg}{\sim} \gamma_1 \Rightarrow I\gamma_0 = I\gamma_1$ , где  $I$  — это число самопересечения кривой. В частности, кривые  $\gamma_{(0)}$  и  $\gamma_{(1)}$  из утверждения 1 не регулярно гомотопны друг другу.

*Доказательство.* Это следует из “регулярного аналога” теоремы 2 Рейдемейстера: число самопересечения кривой сохраняется при втором и третьем движениях Рейдемейстера, а потому и при любой регулярной гомотопии.  $\square$

## 1.2 Постановка задачи

Пусть дан граф  $G$  с выделенной на нем точкой  $v$  — вершиной. Пусть также граф представляет собой объединение петель  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассматривается погружение  $\gamma$  графа  $G$  в проективную плоскость  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{R}P^2$ . Требуется произвести классификацию всех возможных погружений с точностью до регулярной гомотопности.

## 2 Классификация погружений графов в проективную плоскость

### 2.1 Граф $G$ состоит из одной петли

Рассмотрим случай, когда граф  $G$  состоит из одной петли и имеет вид как на рис. 3.

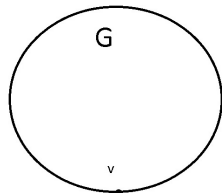


Рис. 3: Граф  $G$ , образованный одной петлей

#### 2.1.1 Формулировка результата

**Теорема 4.** Если  $\gamma_1, \gamma_2 : G = S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  — два регулярных погружения, то

$$\boxed{\gamma_1 \stackrel{reg}{\sim} \gamma_2 \Leftrightarrow Inv(\gamma_1) = Inv(\gamma_2)}$$

где

$$Inv_0(\gamma) := [\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\},$$

$$Inv_1(\gamma) := I\gamma \text{ mod } 2 \in \{0, 1\},$$

$$Inv = (Inv_0, Inv_1).$$

### 2.1.2 Доказательство теоремы 4

Пусть  $\gamma : G = S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ . Возникают два подслучая — когда  $\gamma_1$  стягиваемая, и когда  $\gamma_1$  — нестягиваемая кривая на  $\mathbb{R}P^2$ . Известный факт, что условие стягиваемости кривой  $\gamma$  на  $\mathbb{R}P^2$  равносильно тому, что  $\gamma$  сохраняет ориентацию.

**Лемма 1.** *Если  $\gamma_1$  — стягиваемая, то для нее верно утверждение теоремы 4.*

*Доказательство.* По предположению кривая  $\gamma_1$  сохраняет ориентацию и стягиваемая. Тут  $[\gamma_1] = 0$ , что означает ее стягиваемость. Проективная плоскость состоит из диска  $U$  и приклеенной к нему ленты Мёбиуса  $\mu$ . В данном случае мы покажем (см. ниже), что  $\gamma_1 \stackrel{reg}{\sim} \gamma_{(0)}$  или  $\gamma_1 \stackrel{reg}{\sim} \gamma_{(1)}$ , где  $\gamma_{(0)}$  — это кривая без петель в  $U$ , а  $\gamma_{(1)}$  — это кривая с одной петлей в  $U$ .

Ввиду стягиваемости, кривая  $\gamma_1$  регулярно гомотопна некоторой кривой  $\gamma$ , которая находится внутри диска  $U$ . Введем движение, которое будем называть “протаскиванием через бесконечность”. Для этого перейдем к накрытию проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  сферой  $S^2$  и перенесем некоторую дугу  $\gamma|_\delta$  как показано на рис. 4.

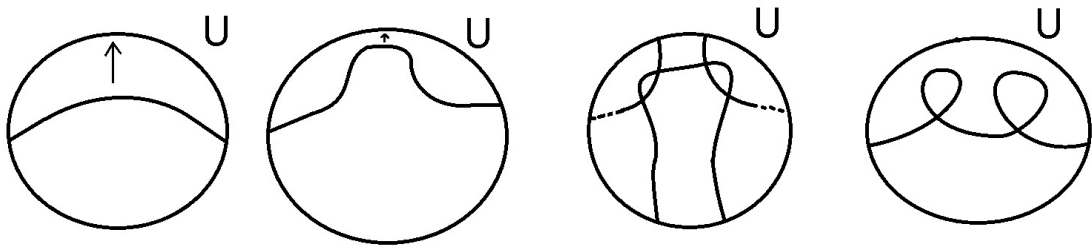


Рис. 4: “Протаскивание через бесконечность”



**Утверждение 2** (“протаскивание через бесконечность”). Если  $\gamma|_\delta$  - простая дуга,  $\delta \subset G = S^1$ ,  $\delta \cap v = \emptyset$ , то существует регулярная гомотопия  $f$ , неподвижная вне дуги  $\delta$  и преобразующая  $\gamma|_\delta$  в  $\gamma|_\delta +$  две петли одного знака.

*Доказательство.* Обозначим  $f|_\delta := F$ . В силу свойств накрытий существует поднятие  $\tilde{F}$  кривой  $F$  такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & & S^2 \\ & \nearrow \tilde{F} & \downarrow \\ \delta & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}P^2. \end{array}$$

Утверждение доказано. □

Таким образом, мы можем менять индекс самопересечения  $\omega(\gamma)$  в диске  $U \subset \mathbb{R}P^2$  на двойку. В результате мы получим новую кривую  $\tilde{\gamma}$  в диске  $U$ , регулярно гомотопную кривой  $\gamma$  и имеющую индекс самопересечения либо 0, либо 1. В свою очередь, такая кривая  $\tilde{\gamma}$  по первому следствию 1 из теоремы Рейдемейстера регулярно гомотопна в диске  $U$  окружности с некоторым числом завитков. Но сумма знаков завитков равна 0 или 1 (по второму следствию 2 из теоремы Рейдемейстера), а любую пару соседних завитков с противоположными знаками можно взаимно уничтожить регулярной гомотопией в диске  $U$ , изображенной на рис. 2. Поэтому кривая  $\tilde{\gamma}$  регулярно гомотопна в  $U$  либо кривой  $\gamma_{(0)}$ , либо  $\gamma_{(1)}$ .

Осталось показать, что  $\gamma_{(0)}$  не регулярно гомотопно с  $\gamma_{(1)}$ . Это следует из второго следствия 2 из теоремы Рейдемейстера (четность числа самопересечения кривой инвариантна при регулярной гомотопии).

Лемма 1 доказана. □

**Лемма 2.** Если  $\gamma_1$  — нестягиваемая, то для нее верно утверждение теоремы 4.

*Доказательство.* Рассмотрим вторую ситуацию, когда  $\gamma_1$  — нестягиваемая (т.е. меняющая ориентацию). В данном случае кривая  $\gamma_1$  пересекает ленту Мёбиуса. Кривая  $\gamma_1$  по следствию 1 из теоремы Рейдемейстера регулярно гомотопна некоторой кривой  $\gamma$ , пересечение которой с листом Мёбиуса является простой дугой, а пересечение с диском  $U$  имеет вид простой дуги с некоторым числом маленьких петель (рис. 5).

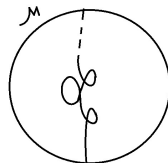


Рис. 5: Пересечение нестягиваемой кривой  $\gamma$  с диском  $U$

Любую пару соседних петель, имеющих один знак, взаимно уничтожим регулярной гомотопией, обратной к “протаскиванию через бесконечность” (утверждение 2). Петли же с разными знаками взаимно уничтожаются регулярной гомотопией, изображенной на рис. 2. То есть в данном случае получаем, что всякая нестягиваемая кривая  $\gamma$  регулярно гомотопна либо  $\gamma_{(0)}$ , либо  $\gamma_{(1)}$ , что и завершает доказательство леммы.  $\square$

Теорема 4 доказана.

## 2.2 Граф $G$ состоит из двух петель

Рассмотрим случай, когда граф  $G$  состоит из двух петель и имеет вид как на рис. 6, т.е. является букетом двух окружностей.

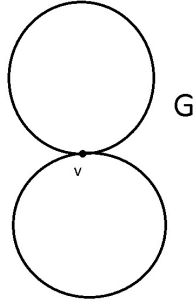


Рис. 6: Граф  $G$ , состоящий из двух петель

### 2.2.1 Вспомогательные утверждения и необходимые определения

Введем циклический порядок полурёбер в вершине  $v' = \gamma(v)$  (там, где сходятся все петли графа  $G' = \gamma(G)$ ) относительно ориентации  $or$ .

**Определение 5.** Обозначим  $\gamma|_{e_1} = e'_1$  и  $\gamma|_{e_2} = e'_2$ . Из вершины  $v'$  графа  $G'$  выходят полурёбра  $e'_1, e'_2$  и в неё входят полурёбра  $(e'_1)^{-1}, (e'_2)^{-1}$ . Выберем обход вершины  $v'$ , согласованный с фиксированной ориентацией (напомним, что рассматривается  $\gamma^{or}$ ). Будем выписывать полурёбра  $e'_i, (e'_i)^{-1}$  в порядке их появления во время обхода. Соответствующий набор из  $e_i, e_i^{-1}$  (т.е. соответствующее слово в алфавите  $e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}$ ) с точностью до циклического сдвига назовём *циклическим порядком полурёбер в вершине* (относительно ориентации  $or$ ).

**Утверждение 3.** Пусть на  $\mathbb{R}P^2$  точки  $x$  и  $x_0$  соединены двумя различными кривыми  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$ , и петля  $e'$  содержит точку  $x$ . Тогда  $[\gamma^{-1} \cdot e' \cdot \gamma] = [\tilde{\gamma}^{-1} \cdot e' \cdot \tilde{\gamma}] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$  и  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^2, x)$  (см. рис. 7).

*Доказательство.*  $\gamma^{-1} \cdot e' \cdot \gamma \sim \underbrace{\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma}}_{\delta} \cdot (\tilde{\gamma}^{-1} \cdot e' \cdot \tilde{\gamma}) \cdot \underbrace{\tilde{\gamma}^{-1} \cdot \gamma}_{\delta^{-1}} \sim \tilde{\gamma}^{-1} \cdot e' \cdot \tilde{\gamma}$ , так как для  $\forall y, \delta \in \pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$  в силу коммутативности  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$ , верно, что  $\delta y \delta^{-1} = y$ . □

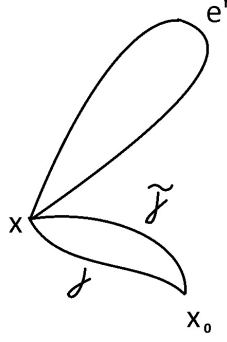


Рис. 7: Независимость фундаментальной группы  $\mathbb{R}P^2$  от базисной точки

В силу утверждения 3 фундаментальная группа проективной плоскости не зависит от выбора базисной точки. Поэтому будем опускать базисную точку в обозначении фундаментальной группы.

## 2.2.2 Формулировка результата

**Теорема 5.** Если  $\gamma_1, \gamma_2 : G \rightarrow \mathbb{R}P^2$  — два регулярных погружения, то

$$\boxed{\gamma_1^{or} \stackrel{reg}{\sim} \gamma_2^{or} \Leftrightarrow Inv(\gamma_1^{or}) = Inv(\gamma_2^{or})},$$

где

$$Inv_0(\gamma^{or}) = ([\gamma|_{e_1}], [\gamma|_{e_2}]) \in (\pi_1(\mathbb{R}P^2))^2 \simeq \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2,$$

$$Inv_{1,i}(\gamma^{or}) = I(\gamma|_{e_i}) \bmod 2 \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},$$

$$Inv_1(\gamma^{or}) = (Inv_{1,1}(\gamma^{or}), Inv_{1,2}(\gamma^{or})) \in \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2,$$

$$Inv_2(\gamma^{or}) = (\text{циклический порядок полуребер}),$$

$$Inv(\gamma^{or}) = (Inv_0(\gamma^{or}), Inv_1(\gamma^{or}), Inv_2(\gamma^{or})).$$

## 2.2.3 Доказательство теоремы 5

Возникают три возможных ситуации. Первая — когда обе петли  $e'_1$  и  $e'_2$  стягиваемы. Вторая — когда одна из них стягиваема, а вторая — нет. И третья, когда обе петли  $e'_1$  и  $e'_2$  нестягиваемы.

**Лемма 3.** Если  $\gamma_1^{or} \stackrel{reg}{\sim} \gamma_2^{or}$ , то  $Inv(\gamma_1^{or}) = Inv(\gamma_2^{or})$ .

**Лемма 4.** Если  $Inv(\gamma_1^{or}) = Inv(\gamma_2^{or})$ , то  $\gamma_1^{or} \stackrel{reg}{\sim} \gamma_2^{or}$ .

*Доказательство леммы 3.* Если два погружения  $\gamma_1^{or}$  и  $\gamma_2^{or}$  регулярно гомотопны, то две петли  $\gamma_1|_{e_i}$  и  $\gamma_2|_{e_i}$  регулярно гомотопны  $\Rightarrow$  гомотопны, а значит они либо обе стягиваемы, либо обе не стягиваемы.

Для замкнутой регулярной кривой индекс самопересечения  $mod 2$  при регулярной гомотопии меняться не будет, согласно второму следствию 2 из теоремы Рейдемейстера.

Если погружения  $\gamma_1^{or}$  и  $\gamma_2^{or}$  регулярно гомотопны, то они локально регулярно гомотопны в некоторой окрестности вершины  $v$ . Значит, циклический порядок относительно ориентации меняться не будет.

Таким образом доказано, что если  $\gamma_1^{or}$  и  $\gamma_2^{or}$  регулярно гомотопны, то значения введенного инварианта на них совпадают.  $\square$

*Доказательство леммы 4.* Теперь проведем доказательство в обратную сторону. То есть, если значения инварианта на погружениях  $\gamma_1^{or}$  и  $\gamma_2^{or}$  графа  $G$  в  $\mathbb{R}P^2$  совпадают, то эти погружения регулярно гомотопны.

Предположим для определенности, что верна первая из трех описанных выше ситуаций, т.е. погружение  $\gamma_1$  стягиваемо (в остальных двух случаях рассуждения аналогичны).

Совместим точки  $\gamma_1(v) = v'_1$  и  $\gamma_2(v) = v'_2$  так, чтобы совпали локальные ориентации  $or$ . в этих точках для  $\gamma_1^{or}$  и  $\gamma_2^{or}$ . Из-за стягиваемости погружения  $\gamma_1$  существует последовательность движений Рейдемейстера типов 2 и 3, деформирующих данное  $\gamma_1^{or}$  к  $\tilde{\gamma}_1^{or} \subset U \subset \mathbb{R}P^2$ , в процессе которых сохраняется циклический порядок в вершине, где  $U$  — некоторая окрестность вершины  $v'_1$  графа  $G'_1$ . Аналогично существует последовательность движений и для  $\gamma_2$  такая, что  $\tilde{\gamma}_2 \subset U$ . Кроме того, так как циклический порядок для погружений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  один и тот же, то сами эти погружения можно совместить в малой окрестности  $V \subset U$

точки  $v' = v'_1 = v'_2$ . С помощью регулярных гомотопий можно поменять число самопересечения каждой из  $e'_1$  и  $e'_2$  на 2 или  $-2$  прибавлением или вычитанием двух петель с положительным знаком самопересечения, работая с каждой из  $e'_1$  и  $e'_2$  по отдельности как в случае, когда граф  $G$  состоял из 1 петли (“протаскивание через бесконечность”). При этом циклический порядок нарушаться не будет, если окрестность  $V$  не будет затрагиваться. Получаем, что погружение  $\tilde{\gamma}_1$  совпадает в  $V$  с  $\tilde{\gamma}_2$ , и имеет такой же индекс самопересечения на каждой из своих петель  $e'_1$  и  $e'_2$ , как и на соответствующих петлях у  $\tilde{\gamma}_2$ . Отсюда следует, что погружения  $\gamma_1^{or}$  и  $\gamma_2^{or}$  регулярно гомотопны.  $\square$

Теорема 5 доказана.

## Список литературы

- [1] H. Whitney, “On regular closed curves in the plane”, *Compositio Math.*, 1937, №4, 276–286.
- [2] K. Reidemeister, “Elementare Begründung der Knotentheorie”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **5** (1926), 24–32.
- [3] Д. А. Пермяков, “Регулярная гомотопность погружений графов в поверхности”, *Матем. сб.*, **207**:6 (2016), 93–112; D. A. Permyakov, “Regular homotopy for immersions of graphs into surfaces”, *Sb. Math.*, **207**:6 (2016), 854–872.

Maxim A. Ivashkovskii

frank1581@yandex.ru

Moscow State University, Mathematics and Mechanics Department