МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

«Геометрические свойства натуральных механических систем на поверхностях вращения»

Курсовая работа
Студента 3 курса
С.А. Подлипаева

Научный руководитель:
Доцент, кандидат физ.-мат. наук Е.А. Кудрявцева

Москва, 2015 г.

Геометрические свойства натуральных механических систем на поверхностях вращения

7 мая 2015 г.

Аннотация

В работе исследуются движения частицы в потенциальных полях разной природы по риманову многообразию. Приведены примеры функций Лагранжа для некоторых случаев. Получен гамильтониан в случае движения заряженной частицы в электромагнитном поле по риманову многообразию, в том числе в рамках специальной теории относительности (СТО). Доказана эквивалентность 2х определений движения заряженной частицы по риманову многообразию в электромагнитном поле, в том числе в рамках СТО. Найдены замены координат, сводящие гамильтониан в случае движения заряженной частицы в электромагнитном поле по поверхности вращения к аналогичному гамильтониану с одной нулевой компонентой магнитного векторного потенциала, в том числе в рамках СТО. Получено (совместно с Е.А. Кудрявцевой) необходимое и достаточное условие того, что медленные движения заряженной частицы в магнитном поле по поверхности вращения удовлетворяют условию Бертрана, т.е. являются периодичными.

1 Определение поверхности вращения

Определение 1.1. Пусть $\gamma(r) = (f(r), g(r)), r \in [0, L]$ — гладкая регулярная кривая (с натуральной параметризацией). Предположим, что $f(r) > 0$ при $r \in (0, L)$, $f(0) = f(L) = 0$. Тогда *поверхностью вращения* назовем поверхность, задаваемую уравнениями

$$x(r, \varphi) = f(r)\cos(\varphi),$$

$$y(r, \varphi) = f(r)\sin(\varphi),$$

$$z(r, \varphi) = z(r) = g(r).$$

Тогда эта поверхность диффеоморфна $(0, L) \times S^1$ и на ней индуцируется риманова метрика

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2.$$

2 Лагранжиан в СТО

В релятивистской механике импульс частицы массы m в $\mathbb{R}^n$ определяется как $p_i = \dfrac{m\dot{q}_i}{\sqrt{1-\beta}}$, где $\beta = \dfrac{|\dot{q}|^2}{c^2}$, $c > 0$ — скорость света. Сила определяется как $F_i = \dfrac{dp_i}{dt}$ (см., например, [2, гл.7, §6]).

Тогда лагранжиан $L(q, \dot{q}, t)$ для движения релятивистской частицы в $\mathbb{R}^n$ в поле с *потенциалом* $V = V(q)$, зависящем от координаты q, но не от $\dot{q}$, можно получить из 3х групп уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \qquad \frac{dp_i}{dt} = F_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Так как $p_i = \dfrac{m\dot{q}_i}{\sqrt{1-\beta}}$, то $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{m\dot{q}_i}{\sqrt{1-\beta}}) = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i} = F_i$. Таким образом, $L = -mc^2\sqrt{1-\beta} - V (= T - V)$ с точностью до аддитивной константы.

Для движения заряженной частицы в *электромагнитном поле* по риманову n-мерному ориентированному многообразию (Q^n, G) лагранжиан L будет иметь вид

$$L = T - U,$$

где U — *обобщенный потенциал* (или потенциал, зависящий от скорости и координаты). В случае электромагнитного поля

$$U = e\phi - eA \cdot \dot{q},$$

где $\phi = \phi(q)$ — гладкая функция на Q, называемая *электрическим потенциалом*, $A = (A_i(q))$ — ковекторное поле на Q, называемое *магнитным векторным потенциалом*, e — заряд частицы. И тогда L имеет вид

$$L = -mc(c^2 - \dot{q} \cdot \dot{q})^{\frac{1}{2}} - e\phi + eA \cdot \dot{q}. \tag{2}$$

Система уравнений Лагранжа (1) с лагранжианом (2) является обобщением *натуральной механической системы* (см. замечание 4.4).

Несколько частных случаев:
1) Для движения релятивистской частицы под действием постоянной силы лагранжиан L приобретает вид

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta} - maq_1.$$

2) Для одномерного гармонического осциллятора релятивистский лагранжиан L имеет вид

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta} - \tfrac{1}{2}kq^2.$$

3) Для движения релятивистской заряженной частицы в постоянном магнитном поле в $\mathbb{R}^3$, когда $\phi = 0, A = \frac{1}{2}B \times q$, лагранжиан L принимает вид

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta} + \frac{e}{2}(B \times q) \cdot \dot{q}.$$

Для лагранжиана (2) *электрическое поле* $E := d\phi \in \Omega^1(Q)$ и *магнитное поле* $B := dA \in \Omega^2(Q)$ должны удовлетворять (в случае изотропной и однородной среды без дисперсии) системе *уравнений Максвелла*:

$$dE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \quad dB = 0, \quad *d*E = 4\pi\rho, \quad *d*B = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

где $* : \Omega^k(Q) \to \Omega^{n-k}(Q)$ — оператор Ходжа, отвечающий римановой метрике G и ориентации на Q, $\rho \in C^\infty(Q)$ — плотность электрического заряда и $j \in \Omega^1(Q)$ — плотность электрического тока на Q. В случае *стационарного* (т.е. не зависящего от времени) электромагнитного поля первые два уравнения Максвелла суть $dE = 0$ и $dB = 0$ и выполнены автоматически, так как $d^2 = 0$, а два других уравнения суть $*d*E = 4\pi\rho$ и $*d*B = \dfrac{4\pi}{c}j$ и их правые части могут быть любыми (и, в частности, не обязаны быть равными 0) при подходящих распределениях зарядов и токов на Q.

3 Преобразование Лежандра квадратичной формы

Лемма 3.1. *Пусть T — невырожденная, квадратичная по $\dot{q}$ форма на многообразии Q. Тогда преобразование Лежандра $\widetilde{T}$ функции T — тоже квадратичная форма, совпадающая с T при отождествлении TQ и T^*Q при помощи изоморфизма, отвечающего (псевдо-) римановой метрике $2T$ на Q.*

Доказательство. Пусть $T(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, где $(a_{ij}) = (a_{ij}(q))$ — риманова или псевдо-риманова метрика в локальных координатах (q^i) на Q. Пусть $crit_{\dot{q}}F(p, q, \dot{q})$ — критические значения F по аргументу $\dot{q}$. Тогда преобразование Лежандра (см., например, [1, §14]) функции $T(\dot{q}, q)$ по аргументу $\dot{q}$ есть

$$\widetilde{T}(p, q) = F(p, q, \dot{q}(p)) = crit_{\dot{q}}F(p, q, \dot{q}), \qquad F(p, q, \dot{q}) = p \cdot \dot{q} - T(\dot{q}, q),$$

$$\frac{\partial(p_i\dot{q}^i - T(\dot{q}, q))}{\partial\dot{q}^i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_i = \sum a_{ij}\dot{q}^j.$$

Так как матрица (a_{ij}) невырождена, то

$$\dot{q}^j = \sum_i a'^{ij} p_i,$$

где (a'^{ij}) — обратная матрица. И тогда

$$\widetilde{T}(p) = \sum_{ij} a'^{ij} p_i p_j - \frac{1}{2}\sum_{ij} a'^{ij} p_i p_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} a'^{ij} p_i p_j.$$

□

4 Переход от лагранжиана к гамильтониану в электромагнитном поле в СТО

Согласно §2, для движения релятивистской заряженной частицы по n-мерному риманову многообразию (Q^n, G) в электромагнитном поле лагранжиан имеет вид (2), т.е.

$$L = -mc(c^2 - \dot{q} \cdot \dot{q})^{\frac{1}{2}} - e\phi + eA \cdot \dot{q}.$$

Убедимся, что верна формула для гамильтониана из [3].

Лемма 4.1. *Гамильтониан в случае* $\mathbb{R}^n$ *с евклидовой метрикой имеет вид* $H(p,q,t) = e\phi + c(|p-eA|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Пусть $crit_{\dot{q}}F(p,q,\dot{q},t)$ — критическое значение функции $F(p,q,\dot{q},t)$ по переменной $\dot{q}$. По определению, гамильтониан H равен

$$H(p,q,t) = crit_{\dot{q}}F(p,q,\dot{q},t),$$

где

$$F(p,q,\dot{q},t) = p \cdot \dot{q} - L(\dot{q},q,t)$$

(см., например, [1, §§14–15]). Используем обобщенное преобразование Лежандра, т.е. ищем не $\max_{\dot{q}}$, а $crit_{\dot{q}}$. Тогда

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{m\dot{q}_k c}{(c^2 - \dot{q}\cdot\dot{q})^{\frac{1}{2}}} + eA_k,$$

$$\gamma := \frac{c}{(c^2 - \dot{q}\cdot\dot{q})^{\frac{1}{2}}},$$

$$p_k = m\gamma\dot{q}_k + eA_k.$$

И тогда

$$|p-eA|^2 = m^2c^2\frac{|\dot{q}|^2}{c^2 - |\dot{q}|^2}$$

$\Rightarrow |p-eA|^2 = m^2c^2(-1 + \dfrac{c^2}{c^2-|\dot{q}|^2})$. Из этого выходит, что

$$|\dot{q}|^2 = c^2(1 - \frac{m^2c^2}{|p-eA|^2 + m^2c^2})$$

и

$$\gamma = \frac{(|p-eA|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}}{mc} =: \frac{c_1}{mc},$$

$$p_k = (|p-eA|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}\dot{q}_k\frac{1}{c} + eA_k, \qquad \dot{q}_k = \frac{p_k - eA_k}{c_1}c.$$

Получаем

$$H(p,q,t) = \Sigma p_k\dot{q}_k - L(p,q,t) = \frac{\Sigma p_k p_k - eA_k p_k}{c_1}c + mc(c^2 - c^2(1 - \frac{m^2c^2}{|p-eA|^2 + m^2c^2}))^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ e\phi - \frac{eAp + e^2A^2}{c_1}c = \frac{p^2 - 2eAp + e^2A^2}{c_1}c + e\phi + mc^2(\frac{m^2c^2}{|p-eA|^2 + m^2c^2})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{|p-eA|^2}{c_1} c + e\phi + mc^2 \left(\frac{m^2c^2}{|p-eA|^2+m^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = e\phi + c\frac{|p-eA|^2+m^2c^2}{(|p-eA|^2+m^2c^2)^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= e\phi + c(|p-eA|^2+m^2c^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

Лемма 4.2. *Гамильтониан в случае конфигурационного многообразия* Q^n *с римановой метрикой* G *имеет вид* $H(p,q,t) = e\phi + c(|p-eA|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}$*, где длина* $|p|$ *ковектора понимается в смысле метрики* G *при отождествлении* TQ *и* T^*Q *при помощи изоморфизма, отвечающего римановой метрике* G.

Доказательство. По определению гамильтониан H равен

$$H(p,q,t) = crit_{\dot{q}} F(p,q,\dot{q},t),$$

где

$$F(p,q,\dot{q},t) = p\cdot\dot{q} - L(\dot{q},q,t).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial F(p,q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Имеем

$$\sum_{i,j} \frac{\partial (g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j)}{\partial \dot{q}^k} = 2\sum_i g_{ik}\dot{q}^i.$$

Тогда получается, что $p_k - eA_k = \frac{1}{2}mc\frac{2\sum\limits_i g_{ik}\dot{q}^i}{(c^2-|\dot{q}|^2)^{\frac{1}{2}}} = mc\frac{\sum\limits_i g_{ik}\dot{q}^i}{(c^2-|\dot{q}|^2)^{\frac{1}{2}}}$. Поэтому столбец $\dot{q}$ выражается через столбец $p-eA$ и обратную матрицу метрики как

$$\dot{q} = G^{-1}\frac{p-eA}{mc}(c^2-|\dot{q}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим $|p-eA|$:

$$|p-eA|^2 = (p-eA)^T(g_{ij})^{-1}(p-eA) = (p_i-eA_i)^T(g'^{ij})(p_j-eA_j) = m^2c^2\frac{|\dot{q}|^2}{c^2-|\dot{q}|^2}.$$

Далее выражаем $|\dot{q}|^2$ как в предыдущей лемме и посчитаем новый гамильтониан H

$$H(p,q,t) = p_i\dot{q}^i - L(p,q,t) = p_i(g'^{ij})(p_j-eA_j)\frac{1}{m\gamma} - L(p,q,t) = \frac{p_i(g'^{ij})(p_j-eA_j)}{m\gamma} -$$

$$\frac{eA_i(g'^{ij})(p_j - eA_j)}{m\gamma} + e\phi + mc(c^2 - c^2(1 - \frac{m^2c^2}{|p - eA|^2 + m^2c^2}))^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{|p - eA|^2}{m\gamma} + e\phi + mc(c^2 - c^2(1 - \frac{m^2c^2}{|p - eA|^2 + m^2c^2}))^{\frac{1}{2}} = e\phi + c(|p - eA|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}.$$ □

Пример 4.3. Для движения релятивистской заряженной частицы по поверхности вращения с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ функция Гамильтона H принимает вид

$$H(p, q, t) = e\phi + c\left((p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^2(r)} + m^2c^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если при этом функции ϕ, A_r, A_φ зависят от r, но не от φ, t, то функции H, p_φ являются первыми интегралами.

Замечание 4.4. Разложим H и L в ряды по степеням c:

$$H - e\phi = c\sqrt{|p - eA|^2 + m^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{|p - eA|^2}{m^2c^2}}$$

$$= mc^2(1 + \frac{|p - eA|^2}{2m^2c^2} + \dots) = mc^2 + \frac{|p - eA|^2}{2m} + O(\frac{1}{c^2}) \qquad \text{при } c \gg 1.$$

Тогда классический (нерелятивистский) гамильтониан $\widetilde{H}$ получится в пределе

$$H - mc^2 = e\phi + \frac{|p - eA|^2}{2m} + O(\frac{1}{c^2}) \to e\phi + \frac{|p - eA|^2}{2m} =: \widetilde{H} \text{ при } c \to \infty.$$

Аналогично

$$L = -mc(c^2 - \dot{q}\cdot\dot{q})^{\frac{1}{2}} - e\phi + eA\dot{q} = -mc^2 + \frac{m|\dot{q}|^2}{2} - e\phi + eA\dot{q} + O(\frac{1}{c^2}) \quad \text{при } c \gg 1,$$

$$L + mc^2 \to \frac{m|\dot{q}|^2}{2} - e\phi + eA\dot{q} =: \widetilde{L} \qquad \text{при } c \to \infty.$$

Напомним, что система уравнений Лагранжа для лагранжиана $\widetilde{L}$ при $A \equiv 0$ называется *натуральной механической системой* (а при $A \equiv 0$ и $\phi \equiv 0$ — *геодезическим потоком*) на римановом многообразии (Q^n, G). Значит, изучаемая в настоящей работе динамическая система с лагранжианом вида L или $\widetilde{L}$ с произвольным магнитным векторным потенциалом A является обобщением натуральной механической системы. Эту более общую систему можно назвать (релятивистской или классической, соответственно) “магнитной натуральной механической системой”, а в случае $\varphi \equiv 0$ — “магнитным геодезическим потоком”.

5 Два эквивалентных определения движения заряженной частицы по риманову многообразию в электромагнитном поле

Далее считаем, что $Q = Q^n$ — n-мерное многообразие.

Из §2 и леммы 4.2 получаем следующее определение.

Определение 5.1. Движение релятивистской заряженной частицы по риманову многообразию (Q, G) в электромагнитном поле $(d\phi, dA)$ ($\phi \in C^\infty(Q), A \in \Omega^1(Q)$) описывается гамильтоновой системой

$$(M, \omega, H) = (T^*Q, dp \wedge dq, H = e\phi + c(|p - eA|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}). \tag{3}$$

Введем еще одно (более общее) определение.

Определение 5.2. Движение релятивистской заряженной частицы по риманову многообразию (Q, G) в электромагнитном поле $(d\phi, B)$ ($\phi \in C^\infty(Q), B \in \Omega^2(Q)$) описывается гамильтоновой системой

$$(M, \widetilde{\omega}, \widetilde{H}) = (T^*Q, d\widetilde{p} \wedge dq + e\pi^*B, \widetilde{H} = e\phi + c(|\widetilde{p}|^2 + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}), \tag{4}$$

где $\pi : T^*Q \to Q$ — проекция.

Лемма 5.3. *Предположим, что 1-форма A и 2-форма B в определениях 5.1 и 5.2 связаны соотношением $B = dA$. Тогда гамильтоновы системы (3) и (4) из этих определений эквивалентны и переходят друг в друга заменой $\widetilde{p} = p - eA$.*

Доказательство. В локальных координатах (q^i) на Q имеем

$$A = A_i(q)dq^i, \qquad \widetilde{p}_i = p_i - eA_i(q),$$

$$\omega = dp\wedge dq = d(\widetilde{p}_i+eA_i)\wedge dq^i = d\widetilde{p}_i\wedge dq^i+edA_i(q)\wedge dq^i = d\widetilde{p}_i\wedge dq^i+edA = h^*\widetilde{\omega}.$$

Построим диффеоморфизм

$$h : T^*Q \to T^*Q, \qquad h(q, p) = (q, \widetilde{p} = p - eA).$$

Тогда

$$h^*\widetilde{\omega} = \omega, \qquad h^*\widetilde{H} = H.$$

Таким образом, при $B = dA$ системы (3) и (4) эквивалентны. □

Замечание 5.4. В случае определения 5.2 импульсы и скорости связаны соотношением $\widetilde{p}_k = mc\dfrac{\sum\limits_i g_{ik}(q)\dot{q}^i}{(c^2-|\dot{q}|^2)^{\frac{1}{2}}}$ (см. доказательство леммы 4.2 и лемму 5.3), т.е. стандартным соотношением в СТО при отсутствии магнитного поля. Заметим, что 2-форма B в определении 5.2 не обязана быть точной, поэтому определение 5.2 является обобщением определения 5.1.

Следствие 5.5. Пусть в примере 4.3 векторный потенциал магнитного поля имеет вид $A = A_r(r)dr + A_\varphi d\varphi$, где функция $A_r = A_r(r)$ зависит только от r, но не от φ. Тогда замена координат

$$h : T^*Q \to T^*Q, \qquad h(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (\widehat{p}_r, p_\varphi, r, \varphi),$$

где $Q = (0, L) \times S^1$, $\widehat{p}_r = p_r - eA_r(r)$, является канонической и преобразует систему в аналогичную систему с $A_r \equiv 0$, т.е. с гамильтонианом

$$\widehat{H} = e\phi + c\left(\widehat{p}_r^2 + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^2(r)} + m^2c^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. По лемме 5.3 при замене $\widetilde{p}_r = p_r - eA_r(r), \widetilde{p}_\varphi = p_\varphi - eA_\varphi$ гамильтонова система (3) с гамильтонианом из примера 4.3 и $\omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi$ преобразуется в систему (4), где $Q = (0, L) \times S^1$, $\widetilde{\omega} = d\widetilde{p}_r \wedge dr + d\widetilde{p}_\varphi \wedge d\varphi + ed(A_r(r)dr + A_\varphi d\varphi) = d\widetilde{p}_r \wedge dr + d\widetilde{p}_\varphi \wedge d\varphi + edA_\varphi \wedge d\varphi$, $\widetilde{H} = e\phi + c(\widetilde{p}_r^2 + \dfrac{\widetilde{p}_\varphi^2}{f^2(r)} + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}$. Применяя лемму 5.3 еще раз, получаем, что при замене

$$\widetilde{p}_r = \widehat{p}_r, \qquad \widetilde{p}_\varphi = \widehat{p}_\varphi - eA_\varphi(r)$$

система преобразуется в систему $(T^*Q, \widehat{\omega}, \widehat{H})$, где $\widehat{\omega} = d\widehat{p}_r \wedge dr + d\widehat{p}_\varphi \wedge d\varphi$, $\widehat{H} = e\phi + c(\widehat{p}_r^2 + \dfrac{(\widehat{p}_\varphi - eA_\varphi(r))^2}{f^2(r)} + m^2c^2)^{\frac{1}{2}}$.

Полученная замена $h : (p_r, p_\varphi, r, \varphi) \mapsto (\widehat{p}_r, p_\varphi, r, \varphi)$ является канонической: $h^*\widehat{\omega} = \omega - edA_r(r) \wedge dr = \omega$. $\square$

6 Медленные движения заряженной частицы по поверхности вращения в магнитном и слабом электрическом полях

Изучим движение классической (т.е. нерелятивистской) заряженной частицы в электромагнитном поле по поверхности вращения при условии, что электромагнитное поле $(d\phi, dA)$ центрально (т.е. зависит только от r, но не от φ) и стационарно, а магнитное поле dA не имеет нулей. Из следствия 5.5 и замечания 4.4 получаем, что движение описывается гамильтоновой системой на T^*Q, где $Q = (0, L) \times S^1$, с гамильтонианом и симплектической структурой

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{(p_\varphi - a(r))^2}{2f^2(r)} + e\phi(r), \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi,$$

где $a(r) := eA_\varphi(r)$. Замена переменных $(r, \varphi) \to (a = a(r), \varphi)$ на Q регулярна, так как магнитное поле $dA = a'(r)dr \wedge d\varphi$ не имеет нулей по предположению.

Получаем поверхность вращения $Q \simeq (a_0, a_1) \times S^1$ с римановой метрикой $ds^2 = \dfrac{da^2}{R(a)} + \dfrac{d\varphi^2}{F(a)}$, где $R(a) > 0, F(a) > 0$. Гамильтониан и симплектическая структура суть

$$H = R(a)\frac{p_a^2}{2} + F(a)\frac{(p_\varphi - a)^2}{2} + V(a), \quad \omega = dp_a \wedge da + dp_\varphi \wedge d\varphi, \tag{5}$$

где $R(a) = \left(\dfrac{da}{dr}\right)^2$, $F(a) = \dfrac{1}{f^2(r)}$, $V(a) = e\phi(r)$. Уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = F(a)(p_\varphi - a), \\ \dot{p}_a = -\dfrac{\partial H}{\partial a} = -R'(a)\dfrac{p_a^2}{2} - F'(a)\dfrac{(p_\varphi - a)^2}{2} + F(a)(p_\varphi - a) - V'(a), \\ \dot{a} = \dfrac{\partial H}{\partial p_a} = R(a)p_a. \end{cases} \tag{6}$$

Сделаем замену, называемую *преобразованием ведущего центра* [4, §3],

$$h(p_a, p_\varphi, a, \varphi) = (p_a, p_\varphi, \bar{a}, \bar{\varphi}), \qquad \bar{a} = a - p_\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi - p_a.$$

Эта замена будет канонической: $h^*\bar\omega = \omega - dp_a \wedge dp_\varphi - dp_\varphi \wedge dp_a = \omega$.

Сделаем *масштабную замену* $(p_a, p_\varphi, \bar a, \bar\varphi) \to (\bar p_{a,\varepsilon}, p_\varphi, \bar{\bar a}_\varepsilon, \bar\varphi)$ по формуле

$$(p_a, p_\varphi, \bar a, \bar\varphi) = h_\varepsilon(\bar p_{a,\varepsilon}, p_\varphi, \bar{\bar a}_\varepsilon, \bar\varphi), \qquad \bar p_{a,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} p_a, \quad \bar{\bar a}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\bar a,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Тогда

$$H = \bar H_\varepsilon = \varepsilon^2 \left(R(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \frac{\bar p_{a,\varepsilon}^2}{2} + F(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \frac{\bar{\bar a}_\varepsilon^2}{2} \right) + V(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon),$$

$$\omega = \bar\omega_\varepsilon = \varepsilon^2 d\bar p_{a,\varepsilon} \wedge d\bar{\bar a}_\varepsilon + dp_\varphi \wedge d\bar\varphi.$$

Запишем уравнения Гамильтона в новых переменных $(\bar p_{a,\varepsilon}, p_\varphi, \bar{\bar a}_\varepsilon, \bar\varphi)$:

$$\begin{cases} \dot p_\varphi = -\dfrac{\partial \bar H_\varepsilon}{\partial \varphi} = 0, \\ \dot{\bar\varphi} = \dfrac{\partial \bar H_\varepsilon}{\partial p_\varphi} = \varepsilon^2 \left(R'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \dfrac{\bar p_{a,\varepsilon}^2}{2} + F'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \dfrac{\bar{\bar a}_\varepsilon^2}{2} \right) + V'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) =: \varepsilon^2 \dot{\widehat{\varphi}}, \\ \dot{\bar p}_{a,\varepsilon} = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \bar H_\varepsilon}{\partial \bar{\bar a}_\varepsilon} = -\varepsilon R'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \dfrac{\bar p_{a,\varepsilon}^2}{2} - \varepsilon F'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \dfrac{\bar{\bar a}_\varepsilon^2}{2} - \\ \qquad\qquad - F(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \bar{\bar a}_\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} V'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon), \\ \dot{\bar{\bar a}}_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \bar H_\varepsilon}{\partial \bar p_{a,\varepsilon}} = R(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) \bar p_{a,\varepsilon}. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание 6.1. Рассмотрим *положения равновесия* и *круговые орбиты*, т.е. фазовые траектории $\gamma \subset T^*Q$, на которых $a \equiv \mathrm{const}$. Ввиду уравнений (6) имеем $p_a \equiv 0$, $V'(a) + F'(a)\dfrac{(p_\varphi - a)^2}{2} + F(a)(a - p_\varphi) = 0$. Из последнего равенства получаем, что $p_\varphi \equiv a + \dfrac{F(a) \pm \sqrt{F^2(a) - 2V'(a)F'(a)}}{F'(a)}$. В новых координатах при $\varepsilon > 0$ получаем $\bar p_{a,\varepsilon} \equiv 0$, $\dfrac{1}{\varepsilon} V'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon) + \varepsilon F'(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon)\dfrac{\bar{\bar a}_\varepsilon^2}{2} + F(p_\varphi + \varepsilon \bar{\bar a}_\varepsilon)\bar{\bar a}_\varepsilon = 0$.

Пусть далее электрическое поле dV зависит от малого параметра ε и ε^2-мало (например, $V \equiv 0$), точнее

$$V = \varepsilon^2 \widehat V_\varepsilon \tag{8}$$

для некоторого гладкого семейства функций $\widehat{V}_\varepsilon = \widehat{V}_\varepsilon(a)$ с малым параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \ll 1$. Тогда новые переменные являются *медленно-быстрыми* для системы (7), где переменные $(p_\varphi, \bar{\varphi})$ медленные, а $(\bar{p}_{a,\varepsilon}, \bar{\bar{a}}_\varepsilon)$ быстрые. При $\varepsilon \to 0$ система (7) стремится к корректно определенной *предельной системе* — семейству гармонических осцилляторов в каждом слое, т.е. семейству гамильтоновых систем

$$\left(T^*_{(p_\varphi,\bar{\varphi})}Q,\ d\bar{p}_{a,0} \wedge d\bar{\bar{a}}_0,\ R(p_\varphi)\frac{\bar{p}_{a,0}^2}{2} + F(p_\varphi)\frac{\bar{\bar{a}}_0^2}{2}\right) \tag{9}$$

с параметрами $p_\varphi \in (a_0, a_1)$, $\bar{\varphi} \in S^1$, где $\dot{p}_\varphi = \dot{\bar{\varphi}} = 0$. При обратной замене $h^{-1} \circ h_0$ все решения предельной системы переходят в положение равновесия $h^{-1}(0, p_\varphi, 0, \bar{\varphi}) = (0, p_\varphi, p_\varphi, \bar{\varphi})$ "невозмущенной" системы (6) с $V \equiv 0$, т.е. в решение из замечания 6.1, отвечающее знаку минус и потенциалу $V \equiv 0$.

Таким образом, решениям системы (7) отвечают *медленные* (т.е. близкие к положениям равновесия) движения, задаваемые системой (6) с (5) и (8). Заметим, что предельная система имеет вид $\dot{p}_\varphi = \dot{\bar{\varphi}} = 0$, $\dot{\bar{p}}_{a,0} = -F(p_\varphi)\bar{\bar{a}}_0$, $\dot{\bar{\bar{a}}}_0 = R(p_\varphi)\bar{p}_{a,0}$. Поэтому все ее решения, отличные от положений равновесия $\bar{\bar{a}}_0 = \bar{p}_{a,0} = 0$, удовлетворяют уравнению $\ddot{\bar{\bar{a}}}_0 = -R(p_\varphi)F(p_\varphi)\bar{\bar{a}}_0$, а значит, задают гармонические колебания с угловой частотой $\sqrt{R(K)F(K)}$ и минимальным положительным периодом

$$T(K) = \frac{2\pi}{\sqrt{R(K)F(K)}}, \tag{10}$$

где $K \in (a_0, a_1)$ — уровень первого интеграла p_φ на данном решении.

7 Аналог теоремы Бертрана для медленных движений заряженной частицы по поверхности вращения в магнитном поле

Изучим аналог *задачи Бертрана* (см., например, [5]) для *медленных* (т.е. близких к положениям равновесия) движений заряженной частицы в рассматриваемом электромагнитном поле (см. §6, (8), (6) или (7)).

Теорема 7.1. *Пусть магнитное поле $dA = da \wedge d\varphi$ на поверхности вращения не имеет нулей, т.е. движение задается системой (6) с (5).*

Предположим, что электрический потенциал V зависит от малого параметра ε как в (8). Предположим, что выполнено условие типа Бертрана: все решения ("возмущенной") системы с $0 < |\varepsilon| \ll 1$, начальные условия которых $O(\varepsilon)$-близки к положениям равновесия $(0, p_\varphi, p_\varphi, \bar\varphi)$ ("невозмущенной") системы с $\varepsilon = 0$, являются периодическими. Тогда:

(а) $RF = \mathrm{const}$ *(а значит, магнитное поле $dA = da \wedge d\varphi$* однородно, *т.е. пропорционально форме площади $d\sigma = \dfrac{da \wedge d\varphi}{\sqrt{R(a)F(a)}}$) и $\widehat{V}_0 = \mathrm{const}$;*

(б) *все решения возмущенной системы имеют периоды, $O(\varepsilon)$-близкие к минимальному положительному периоду (10) решений предельной системы (9), не являющихся положениями равновесия;*

(в) *если $RF \equiv \lambda^2 = \mathrm{const}$ (т.е. магнитное поле однородно) и $V \equiv 0$ (т.е. электрическое поле нулевое), то скалярная кривизна $\mathrm{Scal} = \dfrac{\lambda^2}{F^3}(F''F - 2(F')^2) = -\left(\dfrac{\lambda^2}{F}\right)'' = -R''$ данной поверхности постоянна.*

Доказательство. Шаг 1. Фиксируем вещественные числа $\varepsilon \neq 0$, K, и рассмотрим *эффективный потенциал*

$$U_{\varepsilon,K} = U_{\varepsilon,K}(a) := F(a)\frac{(K-a)^2}{2} + V(a)$$

системы (5) при $V = \varepsilon^2 \widehat{V}_\varepsilon$. В новых координатах имеем

$$\frac{1}{\varepsilon^2}U_{\varepsilon,K} = F(K + \varepsilon\bar{\bar{a}}_\varepsilon)\frac{\bar{\bar{a}}_\varepsilon^2}{2} + \widehat{V}_\varepsilon(K + \varepsilon\bar{\bar{a}}_\varepsilon) =: \widehat{U}_{\varepsilon,K}(\bar{\bar{a}}_\varepsilon). \tag{11}$$

Для уровней $E = \varepsilon^2\widehat{E}, K$ первых интегралов H, p_φ имеем $R(K+\varepsilon\bar{\bar{a}}_\varepsilon)\bar{p}_{a,\varepsilon}^2 = 2\widehat{E} - 2\widehat{U}_{\varepsilon,K}(\bar{\bar{a}}_\varepsilon) \geq 0$, поэтому при любых K, $\bar{\bar{a}}_\varepsilon \in (\dfrac{a_0 - K}{\varepsilon}, \dfrac{a_1 - K}{\varepsilon})$ и $\widehat{E} \geq \widehat{U}_{\varepsilon,K}(\bar{\bar{a}}_\varepsilon)$ значение $\bar{p}_{a,\varepsilon}$ выражается через $\varepsilon, \widehat{E}, K$ и $\bar{\bar{a}}_\varepsilon$ формулой

$$\bar{p}_{a,\varepsilon} = \pm\sqrt{\frac{2\widehat{E} - 2\widehat{U}_{\varepsilon,K}(\bar{\bar{a}}_\varepsilon)}{R(K + \varepsilon\bar{\bar{a}}_\varepsilon)}}. \tag{12}$$

Фиксируем любые вещественные числа $K \in (a_0, a_1)$ и $\bar{\bar{a}}_0 \in \mathbb{R}$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\widehat{U}_{0,K}(\bar{\bar{a}}_0) = F(K)\frac{\bar{\bar{a}}_0^2}{2} + \widehat{V}_0(K), \quad \bar{p}_{a,0} = \pm\sqrt{\frac{2\widehat{E} - 2\widehat{V}_0(K) - F(K)\bar{\bar{a}}_0^2}{R(K)}} \tag{13}$$

при достаточно большом $\widehat{E}$. Заметим, что числитель подкоренного выражения в (13) имеет два простых корня $\bar{\bar{a}}_{\pm}(0,\widehat{E},K)=\pm\dfrac{2\widehat{E}-2\widehat{V}_0(K)}{F(K)}$, а знаменатель всюду положителен.

Поэтому (в силу теоремы о неявной функции) при любом достаточно малом возмущении $|\varepsilon|\ll 1$ числитель подкоренного выражения в (12) тоже имеет два простых корня, $O(\varepsilon)$-близких к указанным корням и обозначаемых через $\bar{\bar{a}}_{\pm}(\varepsilon,\widehat{E},K)$. Отсюда получаем (см., например, [5, §4, предложение 2]), что при $|\varepsilon|\ll 1$ существует единственное (с точностью до сдвигов времени $t\mapsto t+t_0$) решение

$$\gamma_{\varepsilon;\widehat{E},K}(t)=(\bar{p}_{A,\varepsilon,\widehat{E},K}(t),K,\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t),\bar{\varphi}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)),\quad t\in\mathbb{R},$$

системы (7) на рассматриваемых уровнях $E=\varepsilon^2\widehat{E},K$ первых интегралов H,p_φ, на котором координата $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ принимает хотя бы одно значение из отрезка $[\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K),\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)]$, причем $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(\mathbb{R}^1)$ совпадает с этим отрезком. На соответствующей орбите $\{(\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t),\bar{\varphi}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t))\mid t\in\mathbb{R}\}\subset Q$ рассмотрим точки (называемые *перицентрами* и *апоцентрами* данного решения), "широты" которых $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ являются (левым и правым соответственно) концами этого отрезка. Хорошо известно (см., например, [5, §4, предложение 3]), что функция широты $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ периодична и задает колебания между своими минимумом и максимумом, причем полупериод равен времени $T(\varepsilon,\widehat{E},K)/2=t_+-t_-$ движения между соседними перицентром и апоцентром, где $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t_-)=\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)$, $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t_+)=\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)$.

Шаг 2. Как выше, фиксируем числа $K\in(a_0,a_1)$, $\bar{\bar{a}}_0\in\mathbb{R}$ и $\widehat{E}>\widehat{V}_0(K)+F(K)\dfrac{\bar{\bar{a}}_0^2}{2}$. Следуя [5], найдем минимальный положительный период $T(\varepsilon,\widehat{E},K)$ функции широты $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ при $|\varepsilon|\ll 1$:

$$T(\varepsilon,\widehat{E},K)=2\int_{\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)}\frac{d\bar{\bar{a}}_\varepsilon}{\dot{\bar{\bar{a}}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}}.$$

С учетом (7), (12) и (11) получаем

$$T(\varepsilon,\widehat{E},K)=2\int_{\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)}\frac{du}{\sqrt{R(K+\varepsilon u)}\sqrt{2\widehat{E}-2\widehat{U}_{\varepsilon,K}(u)}}$$

$$= 2\int_{\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)} \frac{du}{\sqrt{R(K+\varepsilon u)}\sqrt{2\widehat{E}-2\widehat{V}_\varepsilon(K+\varepsilon u)-F(K+\varepsilon u)u^2}}.$$

В частности, $T(0,\widehat{E},K) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{R(K)F(K)}} = T(K)$, см. (10).

Шаг 3. Рассмотрим вещественное число $\Phi(\varepsilon,\widehat{E},K) = \varepsilon^2\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K) := \bar{\varphi}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t_+) - \bar{\varphi}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t_-)$, т.е. разность долгот между соседними перицентром и апоцентром решения $\gamma_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$.

Следуя [5], для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \ll 1$, имеем

$$\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K) = 2\int_{\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)} \frac{\dot{\hat{\varphi}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}\, d\bar{\bar{a}}_\varepsilon}{\dot{\bar{\bar{a}}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}}.$$

С учетом (7), (12) и (11) получаем

$$\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K) = 2\int_{\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)} \frac{R'(K+\varepsilon u)\dfrac{\widehat{E}-\widehat{U}_{\varepsilon,K}(u)}{R(K+\varepsilon u)} + F'(K+\varepsilon u)\dfrac{u^2}{2} + \widehat{V}_\varepsilon'(K+\varepsilon u)}{\sqrt{R(K+\varepsilon u)}\sqrt{2\widehat{E}-2\widehat{U}_{\varepsilon,K}(u)}}\,du$$

$$= \sqrt{2}\int_{\bar{\bar{a}}_-(\varepsilon,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(\varepsilon,\widehat{E},K)} \left(\frac{R'(K+\varepsilon u)\sqrt{\widehat{E}-\widehat{V}_\varepsilon(K+\varepsilon u)-F(K+\varepsilon u)\dfrac{u^2}{2}}}{R(K+\varepsilon u)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{F'(K+\varepsilon u)\dfrac{u^2}{2} + \widehat{V}_\varepsilon'(K+\varepsilon u)}{\sqrt{R(K+\varepsilon u)}\sqrt{\widehat{E}-\widehat{V}_\varepsilon(K+\varepsilon u)-F(K+\varepsilon u)\dfrac{u^2}{2}}} \right) du.$$

Пусть теперь $0 < |\varepsilon| \ll 1$, т.е. $\varepsilon \neq 0$. В силу предположения, решение $\gamma_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ из шага 1 периодично. Поэтому его минимальный положительный период кратен минимальному положительному периоду $T(\varepsilon,\widehat{E},K)$ функции широты $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$, т.е. имеет вид $kT(\varepsilon,\widehat{E},K)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Значит, приращение $k\Phi(\varepsilon,\widehat{E},K) = k\varepsilon^2\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K)$ функции долготы $\bar{\varphi}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ за время $kT(\varepsilon,\widehat{E},K)$ кратно 2π, т.е. имеет вид $k\varepsilon^2\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K) = 2\pi\ell$. Итак, число $\dfrac{\varepsilon^2}{2\pi}\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K) = \frac{\ell}{k}$ рационально при любых $\varepsilon, \widehat{E}, K$ таких, что $|\varepsilon| > 0$ достаточно мало и $\widehat{E}$ достаточно велико.

Так как функция $\varepsilon^2\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K)$ непрерывна (ввиду того, что $\bar{\bar{a}}_\pm(\varepsilon,\widehat{E},K)$ — простые корни уравнения $\widehat{U}_{\varepsilon,K}(\bar{\bar{a}}_\varepsilon)=\widehat{E}$ согласно шагу 1) и принимает значения в дискретном множестве $\pi\mathbb{Q}$, то она постоянна. Так как ее предел при $\varepsilon\to 0$ равен 0, она тождественно равна 0.

Так как $\Phi(\varepsilon,\widehat{E},K)\equiv 0$, то функция долготы $\bar{\varphi}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ является $T(\varepsilon,\widehat{E},K)$-периодичной, как и функция широты $\bar{\bar{a}}_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$. Поэтому решение $\gamma_{\varepsilon,\widehat{E},K}(t)$ тоже $T(\varepsilon,\widehat{E},K)$-периодично. Из шага 2 получаем, что $T(\varepsilon,\widehat{E},K)-T(K)=T(\varepsilon,\widehat{E},K)-T(0,\widehat{E},K)=O(\varepsilon)$, поэтому п.(б) доказан.

Шаг 4. Докажем п.(а). Так как по доказанному $\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K)=0$ при $0<|\varepsilon|\ll 1$ (см. шаг 3), то $\widehat{\Phi}(0,\widehat{E},K)=\lim_{\varepsilon\to0}\widehat{\Phi}(\varepsilon,\widehat{E},K)=0$. С другой стороны, с учетом формул из шага 3 нетрудно вычислить

$$\widehat{\Phi}(0,\widehat{E},K)=2\int_{\bar{\bar{a}}_-(0,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(0,\widehat{E},K)}\frac{\dot{\bar{\varphi}}_{0,\widehat{E},K}\,d\bar{\bar{a}}_0}{\dot{\bar{\bar{a}}}_{0,\widehat{E},K}}$$

$$=\sqrt{2}\int_{\bar{\bar{a}}_-(0,\widehat{E},K)}^{\bar{\bar{a}}_+(0,\widehat{E},K)}\left(\frac{R'(K)}{R(K)^{3/2}}\sqrt{\widehat{E}-\widehat{V}_0(K)-F(K)\frac{u^2}{2}}+\frac{F'(K)\frac{u^2}{2}+\widehat{V}_0'(K)}{\sqrt{R(K)}\sqrt{\widehat{E}-\widehat{V}_0(K)-F(K)\frac{u^2}{2}}}\right)du$$

$$=\pi\left(\widehat{E}-\widehat{V}_0(K)\right)\frac{R'(K)F(K)+R(K)F'(K)}{(R(K)F(K))^{\frac32}}+\frac{2\pi\widehat{V}_0'(K)}{\sqrt{R(K)F(K)}}$$

$$=-2\pi\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\widehat{E}-\widehat{V}_0(K)}{\sqrt{R(K)F(K)}}\right).$$

В силу последней формулы и доказанного равенства $\widehat{\Phi}(0,\widehat{E},K)\equiv 0$ для любых $K\in(a_0,a_1)$ и $\widehat{E}\gg 1$ получаем, что функция $\dfrac{\widehat{E}-\widehat{V}_0(K)}{\sqrt{R(K)F(K)}}$ зависит только от $\widehat{E}$, но не от K. Поэтому ее частная производная по $\widehat{E}$ тоже не зависит от K, откуда $RF=\mathrm{const}$ (т.е. магнитное поле dA однородно) и $\widehat{V}_0=\mathrm{const}$.

Шаг 5. Докажем п.(в). Следуя [5, §4, доказательство предложения 4], разложим величину $\Phi(E,K)$ в степенной ряд по малому параметру $h>0$ и приравняем коэффициенты при младших степенях h^0,h^2,h^4 к нулю, где функции $E=E(c,h)$ и $K=K(c,h)$ определяются условиями $a_-(E,K)=c-h$, $a_+(E,K)=c+h$. В действительности, коэфициенты при h^0 и h^2 равны 0 в силу шагов 3 и 4 соответственно.

Более подробно: с учетом (6) и $RF \equiv \lambda = \mathrm{const}$ (по шагу 4) имеем

$$\Phi(E,K) = 2\int_{a_-(E,K)}^{a_+(E,K)} \frac{\dot\varphi}{\dot a} da$$
$$= 2\int_{a_-(E,K)}^{a_+(E,K)} \frac{F(a)(K-a)}{\sqrt{R(a)}\sqrt{2E-2V(a)-F(a)(K-a)^2}} da$$
$$= 2\int_{a_-(E,K)}^{a_+(E,K)} \frac{F^{\frac{3}{2}}(a)(K-a)}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2E-F(a)(K-a)^2}} da.$$

Поэтому при замене $a = c + ht, a_- = c - h, a_+ = c + h, da = hdt$ получим

$$-\frac{\sqrt{\lambda}}{2F(c)}\,\Phi(E(c,h),K(c,h))$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{th}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{(1-2t^2)(\widehat F_1 + \widehat F_2 th)}{2\sqrt{1-t^2}}h^2 + \frac{3\widehat F_1^3 - 6\widehat F_1\widehat F_2 + 4\widehat F_3(1+t^2-2t^4)}{8\sqrt{1-t^2}}h^4 + \bar{\bar{o}}(h^4)\right) dt$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(3\widehat F_1^3 - 6\widehat F_1\widehat F_2 + 4\widehat F_3(1+1/2-3/4)\right) h^4 + \bar{\bar{o}}(h^4)$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(3\widehat F_1^3 - 6\widehat F_1\widehat F_2 + 3\widehat F_3\right) h^4 + \bar{\bar{o}}(h^4),$$

где $\widehat F_i := \dfrac{F_i(c)}{F(c)}$, а $F_i(c)$ — коэффициенты в разложении функции $F = F(a)$ в ряд Тейлора в точке c. Так как по шагу 3 имеем $\Phi(E,K) \equiv 0$, то должно выполняться условие

$$F^2F''' + 6F'^3 - 6FF'F'' \equiv 0. \tag{14}$$

Покажем, что условие (14) равносильно постоянству скалярной кривизны. Скалярная кривизна многообразия вращения с римановой метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ равна $\mathrm{Scal} = -2\dfrac{f''(r)}{f(r)}$, см. [5, §1.2, замечание 4]. С учетом замены $a = a(r)$, $\dfrac{da}{dr} = \lambda f(r) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{F(a)}}$, получаем

$$\mathrm{Scal} = \frac{\lambda^2}{F^3(a)}(F''(a)F(a) - 2F'(a)^2) = -\left(\frac{\lambda^2}{F(a)}\right)''.$$

Легко проверяется, что условие $\mathrm{Scal}' \equiv 0$ равносильно условию (14). $\square$

Если $V \equiv 0$ и $dA = \lambda d\sigma$ (где $d\sigma$ — форма площади, $\lambda = \lambda(a, \varphi)$ — гладкая функция, не обязательно постоянная), то решения $\gamma(t) = (a(t), \varphi(t))$ системы уравнений Лагранжа с уровнем энергии $E > 0$ — это в точности гладкие параметризованные кривые $\gamma = \gamma(t)$ со скоростью $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2E}$ и ковариантным ускорением $\lambda(\gamma(t))\sqrt{2E}$. Поэтому $\gamma(s/\sqrt{2E})$ — это натурально параметризованные кривые (с натуральным параметром s) с геодезической кривизной $\dfrac{\lambda(\gamma(s/\sqrt{2E}))}{\sqrt{2E}}$. Поэтому теорема 7.1 обратима, т.е. из выполнения условий (в) теоремы 7.1 следует выполнение условия типа Бертрана для медленных движений.

Список литературы

[1] В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. М., Наука, 1989.

[2] H. Goldstein, Classical Mechanics, Second Edition, Addison-Wesley (1980).

[3] B.W. Montague, Basic Hamiltonian Mechanics / B.W. Montague – CERN Yellow Report, 1995. 14 p.

[4] А.И. Нейштадт, Усреднение, адиабатические инварианты и периодические траектории движения в многомерном магнитном поле / Рукопись, 1998. 14 с.

[5] О.А. Загрядский, Е.А. Кудрявцева, Д.А. Федосеев, Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения // Матем. сб. **203**:8 (2011), 39–78.