МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

«Геометрические свойства геодезических потоков на поверхностях вращения»

Курсовая работа
студента 3 курса
М.А. Ивашковского

Научный руководитель
Доцент, кандидат физ.-мат. наук Е.А. Кудрявцева

Москва, 2015 г.

Содержание

Аннотация

В работе выводится гамильтонова система, описывающая движение заряженной частицы в $\mathbb{R}^n$ в поле гладкого электромагнитного потенциала (теорема 2.1). Подход обобщается на произвольные римановы многобразия (теорема 3.1), в том числе на поверхности вращения (теоремы 1.1, 2.2, 3.2). Рассматриваются релятивистский и классический (как предел релятивистского, §4) случаи движения. Исследуется дуализм между подходом Лагранжа и подходом Гамильтона. Построены канонические замены координат, упрощающие уравнения движения (утверждения 1.1, 2.1 и пример 3.1).

1 Необходимые определения и теоретические знания

1.1 Постановка задачи

1.1.1 Некоторые замечания

Введем обозначения

$$\boxed{\tilde{L} = L + mc^2, \qquad \tilde{L}_0 = \lim_{c\to+\infty} \tilde{L},}$$

$$\boxed{\tilde{H} = H - mc^2, \qquad \tilde{H}_0 = \lim_{c\to+\infty} \tilde{H}.}$$

1.1.2 Определения лагранжиана и гамильтониана

Пусть Q — гладкое многообразие с локальными координатами $\left(q^i\right)$.

Определение 1.1. *Лагранжиан* — гладкая функция $L : TQ \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall q \in Q$ отображение $\dot{q} \in T_qQ \mapsto \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) := \left(p_i\right) \in T_q^*Q$ является биективным и, кроме того, матрица Гессе $\left\|\frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right\| = \|A_{ij}(q,\dot{q})\|$ положительно определена.

Примеры 1.1. В классической механике лагранжиан равен $\tilde{L_0} = T_0 - U$, где T_0 — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, $T_0 = \frac{m}{2}|\dot{q}|^2$, где $|\dot{q}|$ — длина вектора в смысле римановой метрики на Q.

Релятивистский лагранжиан равен $L = -mc[c^2 - |\dot{q}|^2]^{1/2} - U$.

Обобщенный потенциал $U = U(q, \dot{q})$ в случае движения заряженной частицы по Q равен разности электрического $e\phi(q)$ и магнитного $e\langle A(q), \dot{q}\rangle = eA_i(q)\dot{q}^i$ потенциалов, где $A = A_i(q)dq^i$ — 1-форма на Q, e — заряд частицы.

Определение 1.2. *Гамильтониан* — это гладкая функция $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, получающаяся при преобразовании Лежандра лагранжиана.

Определение 1.3. *Преобразование Лежандра* для заданной функции $F(x)$ — это построение функции $F^*(p)$, двойственной ей по Юнгу. *Преобразованием Лежандра* функции f, заданной на подмножестве M векторного пространства V, называется функция f^*, определенная на подмножестве M^* сопряжённого пространства V^* по формуле

$$f^*(p) = \sup_{x \in M}(\langle p, x\rangle - f(x)), \qquad p \in M^*,$$

где $\langle p, x\rangle$ — значение линейного функционала p на векторе x, $M^* = \left\{p : \sup_{x \in M}(\langle p, x\rangle - f(x)) < \infty\right\}$.

Определение 1.4. Пусть дана симплектическая форма $\omega = dp \wedge dq = \sum_i dp_i \wedge dq^i$. Тогда замена координат $h : (p, q) \to (\tilde{p}, \tilde{q})$ называется *канонической*, если $h^*(\omega) = \omega$.

1.2 Классический лагранжиан для движения заряженной частицы в центральном электромагнитном поле на поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$

Определение 1.5. *Поверхностью вращения* называют поверхность в $\mathbb{R}^3$, образованную вращением некоторой лежащей в плоскости П регулярной кривой γ вокруг прямолинейной оси, лежащей в плоскости П. Кривую γ называют *меридианом* (или *профильной кривой*) поверхности вращения.

Теорема 1.1. *Классический лагранжиан для движения заряженной частицы в электромагнитном поле на поверхности вращения в* $\mathbb{R}^3$ *выглядит так:*

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L}_0(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = -e\phi(r, \varphi) + eA_r(r, \varphi)\dot{r} + eA_\varphi(r, \varphi)\dot{\varphi} + \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{f^2(r)}{2}\dot{\varphi}^2,$$

где $\phi = \phi(r,\varphi)$ *— электрический потенциал,* $A_r dr + A_\varphi d\varphi$ *— магнитный потенциал (см. пример 1.1),* $A_r = A_r(r,\varphi)$*,* $A_\varphi = A_\varphi(r,\varphi)$*,* $r \in (0;L)$*,* $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Пусть $\gamma(r) = \Big(f(r), g(r)\Big)$ — натуральная параметризация кривой, задающей поверхность вращения, т.е. $|\dot\gamma(r)| = 1$.

Введем параметризацию поверхности вращения:

$$\begin{cases} x(r,\varphi) = f(r)\cos\varphi, \\ y(r,\varphi) = f(r)\sin\varphi, \\ z(r,\varphi) = g(r). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \partial_r = \begin{pmatrix} f'\cos\varphi \\ f'\sin\varphi \\ g' \end{pmatrix}; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} = \partial_\varphi = \begin{pmatrix} -f'\sin\varphi \\ f'\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$|\partial_r|^2 = (f')^2(r) + (g')^2(r) = 1, \qquad |\partial_\varphi|^2 = f^2(r).$$

Поэтому риманова метрика на поверхности вращения имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2, \qquad f(r) > 0.$$

Значит, кинетическая энергия равна

$$T = \frac{\dot r^2}{2} + \frac{f^2(r)\dot\varphi^2}{2}.$$

Подставим в выражение для классического лагранжиана из примера 1.1. Получим, что

$$\boxed{\tilde L_0 = -e\phi(r,\varphi) + eA_r(r,\varphi)\dot r + eA_\varphi(r,\varphi)\dot\varphi + \frac{\dot r^2}{2} + \frac{f^2(r)}{2}\dot\varphi^2.}$$

$\square$

Замечание 1.1. Большее количество примеров построения лагранжианов можно найти в [2; Гл.7, §§8, 9].

Утверждение 1.1. *Если обобщенный потенциал* $U(q,\dot q) = e\phi(q) - eA_i(q)\dot q^i$ *на поверхности вращения не зависит от угловой переменной* φ *(т.е. электро-магнитное поле является центральным), т.е.* $\phi = \phi(r)$ *и* $A = (A_r(r), A_\varphi(r))$, *и* $A = A_r(r)dr + A_\varphi(r)d\varphi$, *то уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле (для лагранжиана* $\tilde L_0$ *из теоремы 1.1) не изменятся, если одну из компонент в выражении для* A *(а именно, радиальную компоненту* $A_r(r)$*) заменить на нулевую.*

Доказательство. Рассмотрим два различных лагранжиана и докажем, что соответствующие уравнения Лагранжа для них совпадают. Отсюда будет следовать, что и решения будут одинаковы. Рассмотрим

$$L = \frac{\dot r^2}{2} + \frac{f^2(r)}{2}\dot\varphi^2 + eA_r(r)\dot r + eA_\varphi(r)\dot\varphi - e\phi(r),$$

$$\hat L = \frac{\dot r^2}{2} + \frac{f^2(r)}{2}\dot\varphi^2 + eA_\varphi(r)\dot\varphi - e\phi(r).$$

Нетрудно посчитать, что уравнения Лагранжа для L выглядят как

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}; \end{cases} \iff \begin{cases} f(r)f'(r)\dot\varphi^2 + eA'_\varphi(r)\dot\varphi - e\phi'(r) + eA'_r(r)\dot r = \ddot r + eA'_r(r)\dot r, \\ 0 = \Big[f^2(r)\dot\varphi + eA_\varphi(r)\Big]'_t, \end{cases}$$

и для $\hat L$

$$\begin{cases} f(r)f'(r)\dot\varphi^2(r)\dot\varphi + eA'_\varphi(r)\dot\varphi - e\phi'(r) = \ddot r, \\ 0 = \Big[f^2(r)\dot\varphi + eA_\varphi(r)\Big]'_t. \end{cases}$$

Видно, что после сокращения обоих частей первого уравнения из первой системы на $eA'_r(r)\dot r$ обе системы приобретают одинаковый вид. □

1.3 Преобразование векторов и ковекторов при замене координат $(x) \to (x')$

Определение 1.6. Пусть задано отображение $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m), u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n), i = 1, \ldots, m,$ имеющее в некоторой точке

x все частные производные первого порядка. Матрица J, составленная из частных производных этих функций в точке x, называется *матрицей Якоби* данной системы функций,

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial u^1}{\partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^n}(x) \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial u^2}{\partial x^n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial u^m}{\partial x^2}(x) & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть (x^i) — локальные координаты на гладком n-мерном многообразии Q. Рассмотрим криволинейную замену координат $(x) \to (x') = \mathbf{u}(x)$.

Утверждение 1.2. *При замене координат $(x) \to (x')$ координаты векторов преобразуются через матрицу Якоби J замены (т.е. $(a')^{i'} = \frac{\partial (x')^{i'}}{\partial x^i} a^i$), а координаты ковекторов преобразуются через матрицу $(J^{-1})^T$ (т.е. $l'_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial (x')^{i'}} l_i$).*

Доказательство. Пусть дана замена координат $(x) \to (x^{'})$, т.е. некоторое отображение $x' = \mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ставящее в соответствие координатам $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \leftrightarrow ((x')^1, (x')^2, \ldots, (x')^n)$. из леммы 3.1. Тогда для любой гладкой функции $f = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial (x')^j} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^i}.$$

Но пространство всех дифференцирований в точке $x \in Q$ с базисом $\frac{\partial}{\partial x^i}$ есть касательное пространство в точке x к нашему многообразию. Обозначим $\frac{\partial}{\partial x^i}$ как ∂_i и $\frac{\partial}{\partial (x')^i}$ как ∂'_i.

Далее воспользуемся инвариантностью вектора как геометрического объекта и его записью в различных координатных системах:

$$a^k \partial_k = (a')^{i'} \partial'_{i'},$$

$$a^k \frac{\partial (x')^{i'}}{\partial x^k} \partial'_{i'} = (a')^{i'} \partial'_{i'},$$

откуда

$$a^k \frac{\partial (x')^{i'}}{\partial x^k} = (a')^{i'}, \tag{1}$$

т.е.

$$(a')^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial (x')^i}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix},$$

и для столбцов $\begin{pmatrix} a^{'} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ верно, что:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a^{'} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}},$$

где J — матрица Якоби отображения x'. Получили закон преобразования векторов.

Рассмотрим пространство линейных функционалов над касательным пространством векторов и воспользуемся инвариантностью значения функционала на векторе при замене координат.

До замены координат

$$l(a) = l(a^k \partial_k) = a^k l(\partial_k) = a^k l_k.$$

Но с другой стороны, после замены, с учетом (1), имеем

$$l'(a') = l'((a')^{i'} \partial^{'}_{i'}) = (a')^{i'} l'(\partial^{'}_{i'}) = (a')^{i'} l'_{i'} = a^k \frac{\partial (x')^{i'}}{\partial x^k} l'_{i'}.$$

Отсюда, с учетом равенства $l(a) = l'(a')$, получаем, что

$$l_k = \frac{\partial (x')^{i'}}{\partial x^k} l_{i'}, \qquad l'_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial (x')^{i'}} l_k,$$

и для столбцов $\begin{pmatrix} l' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} l \end{pmatrix}$ верно, что:

$$\boxed{\begin{pmatrix} l' \end{pmatrix} = (J^{-1})^T \begin{pmatrix} l \end{pmatrix}.}$$

□

1.4 Лемма о преобразовании Лежандра лагранжиана в случае движения свободной частицы

Лемма 1.1 (классический лагранжиан свободной частицы)**.** *Если форма* $\frac{ds^2}{2} = \tilde{L}_0(q, \dot{q})$ *квадратична по* $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)$, *то её преобразование Ле-*

жандра совпадает с ней самой при отождествлении $\dot{q} \leftrightarrow p$ изоморфизмом $TQ \equiv T^*Q$, отвечающим метрике $2\tilde{L}_0 = ds^2$.

Эта лемма является частным случаем более общего результата и будет доказана позднее в разделе 4.

1.5 Пример. Поведение классических лагранжиана и гамильтониана при полярной замене координат

Рассмотрим преобразование импульсов на примере полярной замены:

$$p = p_r dr + p_\varphi d\varphi = p_x dx + p_y dy = p_x dr\frac{\partial x}{\partial r} + p_x d\varphi\frac{\partial x}{\partial \varphi} + p_y dr\frac{\partial y}{\partial r} + p_y d\varphi\frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Отсюда получаем матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

и закон преобразования импульсов

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}.$$

Посчитаем $\tilde{A}$. При полярной замене координат $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что

$$p_x = (\cos\varphi)p_r - \frac{\sin\varphi}{r}p_\varphi,$$

$$p_y = (\sin\varphi)p_r + \frac{\cos\varphi}{r}p_\varphi.$$

Запомним эти выражения.

Известно, что

$$dx = d\Big(r\cos\varphi\Big) = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,$$

$$dy = d\Big(r\sin\varphi\Big) = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi,$$

откуда
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2.$$
Соответствующий классический лагранжиан до замены и после замены равен:
$$\tilde{L}_0 = T - V = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - V(x,y) = \frac{\dot{r}^2}{2} + r^2\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(x(r,\varphi), y(r,\varphi)).$$

Из леммы 1.1 получаем, что соответствующий классический гамильтониан до замены равен
$$\tilde{H}_0 = T + V = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x,y).$$
Используем выражения для p_x и p_y через p_r и p_φ, посчитаем соответствующий гамильтониан после замены:
$$\tilde{H}_0 = T + V = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + V(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

1.6 Поведение лагранжиана и гамильтониана при замене координат на конфигурационном многообразии (общий случай)

Определение 1.7. При замене локальных координат $(q) \to (\hat{q})$ на многообразии Q положим $L(q,\dot{q}) = L\Big(q(\hat{q}), (\frac{\partial q^i(\hat{q})}{\partial \hat{q}^{i'}}\dot{\hat{q}}^{i'})\Big) =: \hat{L}(\hat{q},\dot{\hat{q}})$ и $H(q,p) = H\Big(q(\hat{q}), (\frac{\partial \hat{q}^{i'}(\hat{q})}{\partial q^i}\hat{p}_{i'})\Big) =: \hat{H}(\hat{q},\hat{p})$.

Это определение корректно в силу утверждения 1.2.

2 Получение релятивистского гамильтониана для движения заряженной частицы в электромагнитном поле

Согласно примеру 1.1 или формуле [1; формула (21)] релятивистский лагранжиан для движения заряженной частицы в электромагнитном поле равен $L(q,v) = -mc[c^2 - v\cdot v]^{1/2} - e\phi(q) + e\langle A(q), v\rangle$.

Проверим вывод формулы [1; формула (22)] для гамильтониана из [1; формула (21)] при помощи преобразования Лежандра в случае евклидовой метрики (подробнее про преобразование Лежандра см. в [3; Глава 3, §14]).

Теорема 2.1. *Если лагранжиан равен* $L(q,v) = -mc[c^2 - v\cdot v]^{1/2} - e\phi(q) + e\langle A(q), v\rangle$*, то его преобразование Лежандра совпадает с* $H(q,p) = c\Big(m^2c^2 + \sum_k (p_k - eA_k(q))^2\Big)^{1/2} + e\phi(q)$*. Здесь* $v\cdot v = \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2$.

Доказательство. По условию

$$L = -mc[c^2 - v\cdot v]^{1/2} - e\phi(q) + e\langle A(q), v\rangle.$$

Тогда преобразование Лежандра
$H = \sum_k p_k \dot q^k - L = \sum_k p_k \dot q^k + mc[c^2 - v\cdot v]^{1/2} + e\phi - e\langle A, v\rangle =$
$= \sum_k p_k \dot q^k + mc^2 \left[1 - \frac{\sum_k \dot q_k^2}{c^2}\right]^{1/2} + e\phi - e\sum_k A_k \dot q^k.$

Известно, что $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q^k}$ по определению 1.3. Отсюда, продифференцировав по $\dot q^k$, получаем $\forall k$:

$$p_k + mc^2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\left[1 - \frac{\sum_i (\dot q^i)^2}{c^2}\right]^{1/2}}\left(-\frac{1}{c^2}\cdot 2\dot q^k\right)\right) - eA_k = 0.$$

Далее положим $\beta = \frac{|v|}{c}$, $\gamma := (1-\beta^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v\cdot v}{c^2}}}$, получаем, что $\forall k$:

$$p_k - m\gamma \dot q^k - eA_k = 0 \Rightarrow \boxed{\dot q^k = \frac{p_k - eA_k}{m\gamma}.}$$

Найдем γ в новых координатах:
$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\sum_k (\dot q^k)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_k (p_k - eA_k)^2}{m^2\gamma^2c^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{\sum_k (p_k - eA_k)^2}{m^2\gamma^2c^2}$
$\Rightarrow 1 = \gamma^2 - \frac{\sum_k (p_k - eA_k)^2}{m^2c^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \sqrt{1 + \frac{\sum_k (p_k - eA_k)^2}{m^2c^2}}.}$$

Подставим получившееся в выражение для $\dot q^k$ и гамильтониана:

$$1)\qquad \dot q^k = \frac{p_k - eA_k}{m\sqrt{1 + \frac{\sum_i (p_i - eA_i)^2}{m^2c^2}}} = \frac{c(p_k - eA_k)}{\sqrt{m^2c^2 + \sum_i (p_i - eA_i)^2}};$$

2) $H = \sum\limits_k p_k \frac{c(p_k - eA_k)}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_i (p_i - eA_i)^2}} + mc^2 \left[1 - \frac{\sum\limits_i c^2(p_i - eA_i)^2}{c^2(m^2c^2 + \sum\limits_i (p_i - eA_i)^2)}\right]^{1/2} + e\phi - e\sum\limits_k A_k \frac{c(p_k - eA_k)}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_i (p_i - eA_i)^2}} = \sum\limits_k \frac{c(p_k - eA_k)^2}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_i (p_i - eA_i)^2}} + mc^2 \frac{1}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2}} \Big[m^2c^2 + \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2 - \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2\Big]^{1/2} + e\phi = \sum\limits_k \frac{c(p_k - eA_k)^2}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2}} + \frac{m^2c^3}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2}} + e\phi = \frac{c\Big(\sum\limits_k (p_k - eA_k)^2 + m^2c^2\Big)}{\sqrt{m^2c^2 + \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2}} + e\phi = c\Big(m^2c^2 + \sum\limits_k (p_k - eA_k)^2\Big)^{1/2} + e\phi.$

В итоге

$$\boxed{H = c\Big(m^2c^2 + \sum_k (p_k - eA_k)^2\Big)^{1/2} + e\phi.}$$

$\square$

Согласно теореме 1.1, на поверхности вращения классический лагранжиан для движения частицы в электромагнитном поле принимает вид $\hat{L} = -e\phi(r,\varphi) + eA_r(r,\varphi)\dot{r} + eA_\varphi(r,\varphi)\dot{\varphi} + \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{f^2(r)\dot{\varphi}^2}{2}$.

Теорема 2.2. *Если лагранжиан на поверхности вращения равен* $\tilde{L}_0(q,v) = -e\phi(r,\varphi) + e\langle A(r,\varphi), v\rangle + \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{f^2(r)\dot{\varphi}^2}{2}$, *то его преобразование Лежандра совпадает с* $\tilde{H}_0 = \frac{(p_r - eA_r)^2}{2} + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{2f^2(r)} + e\phi(r,\varphi)$.

Доказательство. По условию

$$\tilde{L}_0 = -e\phi + e\langle A, v\rangle + \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{f^2(r)\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Тогда $\tilde{H}_0 = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + e\phi - eA_r\dot{r} - eA_\varphi\dot{\varphi} - \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{f^2(r)}{2}\dot{\varphi}^2$. Дифференцирование по $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ даст систему:

$$\begin{cases} p_r - eA_r - \dot{r} = 0, \\ p_\varphi - eA_\varphi - f^2(r)\dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Откуда мы находим, что

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - eA_\varphi}{f^2(r)},}$$

$$\boxed{\dot{r} = p_r - eA_r.}$$

Подставим это в выражение для гамильтониана:
$\tilde{H}_0 = (p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^2(r)} + e\phi - \frac{(p_r - eA_r)^2}{2} - \frac{f^2(r)}{2}\frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^4(r)} = \frac{(p_r - eA_r)^2}{2} + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{2f^2(r)} + e\phi$.

Итого:

$$\boxed{\tilde{H}_0 = \frac{(p_r - eA_r)^2}{2} + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{2f^2(r)} + e\phi(r, \varphi).}$$

□

Утверждение 2.1. *Если $A = (A_r(r), A_\varphi(r))$, т.е. магнитное поле является центральным, то существует такая каноническая замена координат, что одна из компонент A_r и A_φ в гамильтониане $\tilde{H}_0$ в теореме 2.2 занулится.*

Доказательство. Введем замену координат $h : (r, \varphi, p_r, p_\varphi) \mapsto (\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{p}_r, \tilde{p}_\varphi)$ по правилу

$$\begin{cases} \tilde{p}_r = p_r - eA_r(r), \\ \tilde{r} = r, \\ \tilde{\varphi} = \varphi, \\ \tilde{p}_\varphi = p_\varphi. \end{cases}$$

Тогда $h^*(\omega) = dp_\varphi \wedge d\varphi + d\tilde{p}_r \wedge dr = dp_\varphi \wedge d\varphi + dp_r \wedge dr - d\Big(eA_r(r)\Big) \wedge dr = \omega - eA_r'(r)dr \wedge dr = \omega - 0 = \omega$. Таким образом, при данной замене h симплектическая форма не изменилась, а следовательно уравнения движения перешли в уравнения движения с новым гамильтонианом. Но гамильтониан стал равен

$$\tilde{H}_0 = \frac{\tilde{p}_r^2}{2} + U_{p_\varphi}(r),$$

где $U_{p_\varphi}(r) = \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{2f^2(r)} + e\phi$ — это эффективный потенциал. □

3 Получение гамильтониана в случае произвольной римановой метрики

3.1 Несколько свойств преобразования Лежандра функций на TQ

Рассмотрим несколько частных случаев лагранжиана из примера 1.1.

Лемма 3.1 (магнитное поле)**.** *Если функция Лагранжа имеет вид* $\tilde{L}(q,\dot q) = \frac{ds^2}{2} + e\langle A(q), \dot q\rangle$*, где* $ds^2 = \sum a_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j$ *— риманова метрика (необязательно евклидова) и* $\langle A(q), \dot q\rangle = \sum A_i(q)\dot q^i$*, то её преобразование Лежандра совпадает с её квадратичной частью* $\tilde{H}_0(q,p) = \frac{ds^2}{2}$ *при отождествлении* $\dot q \leftrightarrow p$ *аффинным изоморфизмом* $p_k = \tilde a_{ik}(q)\dot q^i + eA_k(q)$, $k = 1,\dots,n$*. Последний изоморфизм есть композиция изоморфизма* $TQ \overset{\cong}{\to} T^*Q$*, отвечающего метрике* ds^2*, и сдвига на ковекторное поле* $eA(q)$*. При этом матрица* $\{\tilde a^{ij}\}$ *— обратная к матрице* $\{a_{ij}\}$*.*

Лемма 3.2 (СТО)**.** *Если функция Лагранжа имеет вид* $L(q,\dot q) = -mc\Big[c^2 - \underbrace{\sum a_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j}_{ds^2}\Big]^{1/2}$*, то её преобразование Лежандра совпадает с* $H(q,p) = c\Big[m^2c^2 + \sum \tilde a^{ij}(q)p_ip_j\Big]^{1/2}$ *при отождествлении* $\dot q \leftrightarrow p$ *изоморфизмом* $TQ \cong T^*Q$*, отвечающим метрике* ds^2*. При этом матрица* $\{\tilde a^{ij}\}$ *— обратная к матрице* $\{a_{ij}\}$*.*

Лемма 3.3 (СТО+магнитное поле)**.** *Если функция Лагранжа имеет вид* $L(q,\dot q) = -mc\Big[c^2 - \underbrace{\sum a_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j}_{ds^2}\Big]^{1/2} + e\sum A_i(q)\dot q^i$*, то её преобразование Лежандра совпадает с* $H(q,p) = c\Big[m^2c^2 + \sum \tilde a^{ij}(q)(p_i - eA_i)(p_j - eA_j(q))\Big]^{1/2}$ *при отождествлении* $\dot q \leftrightarrow p$ *аффинным изоморфизмом из леммы 3.1.*

Следующая теорема является обобщением теорем 2.1 и 2.2 на случай произвольной (необязательно евклидовой) римановой метрики.

Теорема 3.1. *Если функция Лагранжа имеет вид* $L(q,\dot q) = -mc\Big[c^2 - \underbrace{\sum a_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j}_{ds^2}\Big]^{1/2} + e\sum A_i(q)\dot q^i - e\phi(q)$, *то её преобразование Лежандра совпадает с* $H(q,p) = c\Big[m^2c^2 + \sum \tilde a^{ij}(q)(p_i - eA_i(q))(p_j - eA_j(q))\Big]^{1/2} + e\phi(q)$ *при отождествлении* $\dot q \leftrightarrow p$ *аффинным изоморфизмом из леммы 3.1.*

3.2 Доказательство теоремы 3.1 и лемм 1.1, 3.1—3.3

Проведём доказательство теоремы 3.1 для произвольной метрики с матрицей $R = R(q)$, $q \in Q$.

По условию $L(q,v) = -mc[c^2 - v\cdot v]^{1/2} - e\phi + e\langle A(q), v\rangle$. Запишем преобразование Лежандра:

$$H = \sum p_i \dot q^i + mc\left[c^2 - \begin{pmatrix}\dot q^1 & \dot q^2 & \dots & \dot q^n\end{pmatrix} R \begin{pmatrix}\dot q^1\\ \dot q^2\\ \vdots \\ \dot q^n\end{pmatrix}\right]^{1/2} + e\phi - e\sum_i A_i \dot q^i.$$

Возьмем производную по $\dot q^k$. Тогда для $\forall k$ имеем

$$p_k + \frac{mc^2}{2}\gamma\left(\frac{-2}{c^2}\sum_i \dot q^i R_{ik}\right) - eA_k = 0,$$

где $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v\cdot v}{c^2}}}$. Отсюда

$$p_k - eA_k = m\gamma R_k \begin{pmatrix}\dot q^1\\ \dot q^2\\ \vdots \\ \dot q^n\end{pmatrix},$$

где R_k — k-ая строчка матрицы R.

Тогда для столбцов $(p - eA)$ и $\begin{pmatrix}\dot q\end{pmatrix}$ верно

$$(p - eA) = m\gamma R(\dot q).$$

Отсюда получаем, что

$$(\dot q) = \frac{1}{m\gamma}R^{-1}(p - eA).$$

Выразим γ:

$$\gamma = \left[1 - \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix}\dot q^1 & \dot q^2 & \dots & \dot q^n\end{pmatrix} R \begin{pmatrix}\dot q^1\\ \dot q^2\\ \vdots \\ \dot q^n\end{pmatrix}\right]^{-1/2}.$$

Далее мы воспользуемся выражением для вектор-столбца $\Big(\dot{q}\Big)$:
$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2-\frac{1}{m^2\gamma^2}\Big((p_1-eA_1)\quad(p_2-eA_2)\quad\dots\quad(p_n-eA_n)\Big)(R^{-1})^T R R^{-1}\begin{pmatrix}p_1-eA_1\\ p_2-eA_2\\ \vdots\\ p_n-eA_n\end{pmatrix}}.$$
Проведя упрощения, и перевернув дробь, мы получаем, что
$$1=\gamma^2-\frac{1}{c^2m^2}(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA),$$
$$\gamma=\sqrt{1+\frac{1}{c^2m^2}(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}.$$
Таким образом, конечное выражение для вектора-столбца $\Big(\dot{q}\Big)$:
$$\Big(\dot{q}\Big)=\frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}R^{-1}(p-eA).$$
Подставим это все в выражение для H:
$$H = (p-eA)^T\frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}R^{-1}(p-eA)+e\phi+mc\Big[c^2-\frac{c^2}{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}(p-eA)^T(R^T)^{-1}RR^{-1}(p-eA)\Big]^{1/2}$$
$$=\frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}(p-eA)^TR^{-1}(p-eA)+e\phi+\frac{mc^2}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}\Big[m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)-(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)\Big]^{1/2}$$
$$=\frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}(p-eA)^TR^{-1}(p-eA)+e\phi+\frac{m^2c^3}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}$$
$$=\frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)}}\Big[m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)\Big]+e\phi$$
$$=c\Big[m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)\Big]^{1/2}+e\phi.$$
В итоге:
$$\boxed{H=c\Big[m^2c^2+(p-eA)^T(R^{-1})^T(p-eA)\Big]^{1/2}+e\phi.}$$
Здесь мы использовали то, что $(R^T)^{-1}=(R)^{-1}=(R^{-1})^T$ в силу симметричности метрики. □

Доказательство лемм 1.1 и 3.1—3.3. Леммы 1.1 и 3.2 являются частными случаями лемм 3.1 и 3.3 при отсутствии магнитного поля, т.е. при $A=0$. Осталось вывести лемму 3.1 из леммы 3.3 (являющейся частным случаем теоремы 3.1). Из леммы 3.3 получаем, что для любого значения параметра $c > 0$ преобразование Лежандра функции $\tilde{L} = L + mc^2$, описывающей движение релятивистской заряженной частицы в магнитном поле, равно $\tilde{H} = H - mc^2$. Но функции $\tilde{L}$ и $\tilde{H}$ гладко зависят от параметра $\varepsilon = 1/c$ в окрестности значения $\varepsilon = 0$. Полагая $\varepsilon = 0$, получаем, что преобразование Лежандра функции $\tilde{L}_0 = \tilde{L}|_{\varepsilon=0}$ равно $\tilde{H}_0 = \tilde{H}|_{\varepsilon=0}$ (подробнее см. в §4). То есть, преобразование Лежандра функции Лагранжа $\tilde{L}_0$ из леммы 3.1, описывающей движение классической заряженной частицы в магнитном поле, совпадает с функцией $\tilde{H}_0$ из леммы 3.1. Лемма 3.1 доказана. □

3.3 Каноническая замена, после которой параметры c, m, e равны 1 (в формуле для гамильтониана из теоремы 3.1)

По теореме 3.1 мы имеем гамильтониан в релятивистском случае с присутствием электромагнитного поля:

$$H = c\Big[m^2c^2 + (p - eA)^2\Big]^{1/2} + e\phi.$$

Здесь $(p - eA)^2$ подразумевается как скалярное произведение ковектора на самомого себя; c, m, e — параметры задачи.

Определение 3.1. Замена $h : (p, q, H, t) \to (\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{H}, \tilde{t})$ называется *канонической* в общем случае, если $h^*\Big(\Omega\Big) = \lambda\Omega$, где $\Omega = \omega - dH \wedge dt = dp \wedge dq - dH \wedge dt$ и $\lambda = \text{const} \in \mathbb{R} \neq 0$.

Пример 3.1. Пусть $\frac{p}{mc} = \tilde{p}$, $\frac{e\phi}{mc^2} = \tilde{\phi}$, $\frac{eA}{mc} = \tilde{A}$, $ct = \tilde{t}$,

$$\tilde{H} = \frac{H}{mc^2} = \Big(1 + (\tilde{p} - \tilde{A})^2\Big)^{1/2} + \tilde{\phi}.$$

Рассмотрим замену $h : (p, q, H, t) \to (\tilde{p}, q, \tilde{H}, \tilde{t})$. Тогда $h^*\Big(\Omega\Big) = d\tilde{p} \wedge dq - d\tilde{H} \wedge dt = \frac{1}{mc}(dp \wedge dq - dH \wedge dt)$, т.е. замена h является канонической, т.е. переводит уравнения движения в уравнения движения с гамильтонианом $\tilde{H}$.

3.4 Релятивистский гамильтониан на поверхности вращения (частный случай теоремы 3.1)

Рассмотрим частный случай теоремы 3.1. Возьмем метрику вращения и найдем релятивистский гамильтониан, соответствующий ей. Пусть есть метрика

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(r) \end{pmatrix}.$$

Тогда

Теорема 3.2. *Релятивистский гамильтониан для движения заряженной частицы в электромагнитном поле по поверхности вращения выглядит так:*

$$H = e\phi + c\Big(m^2c^2 + \langle p - eA, p - eA\rangle\Big)^{1/2},$$

где скалярное произведение происходит с помощью метрики, заданной матрицей G^{-1} (как в лемме 3.3 и теореме 3.1).

Доказательство. Согласно примеру 1.1, лагранжиан равен

$$L = -mc[c^2 - \langle v, v\rangle]^{1/2} - e\phi + e\langle A, v\rangle.$$

Преобразование Лежандра для лагранжиана в данном случае:

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + e\phi - eA_r\dot{r} - eA_\varphi\dot{\varphi} + mc^2\Big[1 - \frac{\dot{r}^2 + f^2(r)\dot{\varphi}^2}{c^2}\Big]^{1/2}.$$

Дифференцируем по $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ и получаем:

$$1) \qquad p_r - eA_r = m\dot{r}\gamma \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r - eA_r}{m\gamma},$$

$$2) \qquad p_\varphi - eA_\varphi = m\dot{\varphi}\gamma f^2(r) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - eA_\varphi}{m\gamma f^2(r)}.$$

Но

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + f^2(r)\dot{\varphi}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\Big(\frac{(p_r - eA_r)^2}{m^2\gamma^2} + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{m^2\gamma^2 f^2(r)}\Big)}}.$$

Возведя обе части в квадрат и перевернув дроби, получаем, что

$$1 = \gamma^2 - \frac{f^2(r)(p_r - eA_r)^2 + (p_\varphi - eA_\varphi)^2}{m^2c^2f^2(r)}.$$

И в итоге

$$\gamma = \frac{1}{mc}\sqrt{m^2c^2 + (p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}.$$

Тогда выражение для гамильтониана примет вид:

$$H = \frac{c(p_r - eA_r)}{\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}} + \frac{c(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^2(r)\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}} + e\phi + mc^2\Bigg[1 - \frac{(p_r-eA_r)^2}{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}} - \frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}\Bigg]^{1/2}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}}\langle(p - eA),(p - eA)\rangle + e\phi + \frac{mc^2}{\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}}\Bigg[m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)} - (p_r-eA_r)^2 - \frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}\Bigg]^{1/2}$$

$$= e\phi + \frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}}\langle(p - eA, p - eA)\rangle + \frac{m^2c^3}{\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}}$$

$$= e\phi + \frac{c}{\sqrt{m^2c^2+(p_r-eA_r)^2+\frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}}(m^2c^2 + (p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)})$$

$$= e\phi + c\sqrt{m^2c^2 + (p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\varphi-eA_\varphi)^2}{f^2(r)}}.$$

Итого

$$\boxed{H = e\phi + c\Big(m^2c^2 + (p_r - eA_r)^2 + \frac{(p_\varphi - eA_\varphi)^2}{f^2(r)}\Big)^{1/2}.}$$

(Мы использовали, что скалярное произведение для импульсов подразумевается с новой метрикой, равной G^{-1}.) □

4 Переход от релятивистского случая к классическому для движения заряженной частицы в электромагнитном поле

Возьмем формулу для релятивистского лагранжиана в случае движения заряженной частицы в электромагнитном поле из примера 1.1. Выполним разложение в степенной ряд по степеням c. Тогда:

$$L(q,v) = -mc\Big[c^2 - v\cdot v\Big]^{1/2} - e\phi + e\langle A, v\rangle = -mc^2\Big[1 - \frac{v\cdot v}{c^2}\Big]^{1/2} - e\phi + e\langle A, v\rangle = -mc^2\Big[1 - \frac{1}{2}\frac{v\cdot v}{c^2} - \frac{1}{8}(\frac{v\cdot v}{c^2})^2 - \frac{1}{16}(\frac{v\cdot v}{c^2})^3 - \ldots\Big] - e\phi + e\langle A, v\rangle = -mc^2 + \frac{1}{2}mv\cdot v + \frac{1}{8}m\frac{(v\cdot v)^2}{c^2} + \frac{1}{16}m\frac{(v\cdot v)^3}{c^4} - \ldots - e\phi + e\langle A, v\rangle = -mc^2 + \frac{1}{2}mv\cdot v - e\phi + e\langle A, v\rangle + O(\frac{1}{c^2})$$

при $c \gg |v|$. В итоге классический лагранжиан выглядит как:

$$\boxed{\tilde{L}_0 = \lim_{c\to\infty}(L + mc^2) = \frac{1}{2}mv \cdot v - e\phi + eAv.}$$

Возьмем формулу из теоремы 3.1 для релятивистского гамильтониана в случае движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Выполним разложение в степенной ряд по степеням c. Тогда:
$H = e\phi + c\Big[(p - eA)^2 + m^2c^2\Big]^{1/2} = e\phi + mc^2\Big[1 + \frac{(p-eA)^2}{m^2c^2}\Big]^{1/2} = e\phi + mc^2\Big[1 + \frac{1}{2}\frac{(p-eA)^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{(p-eA)^2}{m^4c^4} + \dots\Big] = e\phi + mc^2 + \frac{(p-eA)^2}{2m} + O(\frac{1}{c^2})$ при $c \gg 1$. Таким образом, классический гамильтониан равен

$$\boxed{\tilde{H}_0 = \lim_{c\to\infty}(H - mc^2) = e\phi + \frac{(p - eA)^2}{2m}.}$$

Список используемой литературы

[1] Montague, B.W. Basic Hamiltonian mechanics/B.W. Montague. -CERN Yellow Report, 1995. -14 c.
[2] Goldstein, H. Classical Mechanics/H. Goldstein. -Second Edition. -Addison-Wesley, 1980. -673 c.
[3] Арнольд, В.И. Математические методы классической механики/В.И. Арнольд. -Москва: Наука, 1989. - 473 с.