Московский Государственный Университет
Механико-математический факультет

Минимальные деревья Штейнера в пространстве метрических компактов.

Дипломная работа студентки 503 группы
Николаевой Надежды Константиновны

Научный руководитель: д.ф.–м.н., профессор Тужилин А. А.

Москва, 2015 год

1 Введение

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) с метрикой Громова–Хаусдорфа. Известен ряд свойств пространства $\mathfrak{M}$, например, что оно — линейно связное, полное, сепарабельное, но не ограниченно компактное. Тужилин А.А. поставил задачу об исследовании существования минимальных деревьев Штейнера (кратчайших деревьев) в пространстве метрических компактов. В процессе исследования данной задачи возник другой вопрос: является ли метрика Громова–Хаусдорфа строго внутренней? Мы покажем, что ответ — положительный. Кроме того, мы докажем, что для границ, состоящих только из конечных метрических пространств, всегда существует кратчайшее дерево, причем такое, у которого дополнительные вершины (точки Штейнера) также являются конечными метрическими пространствами.

Проблема Штейнера изучается уже давно, изначально она была поставлена для точек евклидовой плоскости, где ее можно наглядно интерпретировать как задачу проектирования системы дорог, соединяющей некоторое число городов так, чтобы затраты на строительство были наименьшими (при условии, что затраты на постройку дороги пропорциональны ее длине). В пространстве метрических компактов с метрикой Громова–Хаусдорфа построение пространства, минимизирующего суммарное расстояние до заданных пространств, можно также наглядно представлять как построение “среднего” изображения, наиболее похожего на ряд имеющиеся, заданных заранее изображений.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Тужилину А.А., а также профессору Иванову А.О. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2 Основные определения и предварительные результаты

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в [1] – [3].

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждых $x \in X$ и непустого $A \subset X$ определим $|xA|$ как точную нижнюю грань расстояний $|xa|$ по всем $a \in A$; для непустых A, $B \subset X$ определим $d(B, A)$ как точную верхнюю грань расстояний $|bA|$ по всем $b \in B$; наконец, для тех же A и B положим $d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$. Число $d_H(A, B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа*. Хорошо известно, что на множестве всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства X функция d_H является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *Громова–Хаусдорфа между* X *и* Y называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z)

пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно, что на множестве $\mathfrak{M}$ всех компактных метрических пространств функция d_{GH} является метрикой.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Если $\pi_X : X \times Y \to X$ и $\pi_Y : X \times Y \to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \subset \mathcal{P}(X, Y)$.

Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Иными словами, для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, находящийся с x в отношении R и, обратно, для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$, находящийся с y в отношении R. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — метрические пространства, тогда для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ определено его *искажение* $\operatorname{dis} \sigma$:

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup\Big\{ \big| |xx'| - |yy'| \big| : (x, y) \in \sigma,\ (x', y') \in \sigma \Big\}.$$

Если $f : X \to Y$ — отображение, то его *искажением* $\operatorname{dis} f$ назовем искажение графика отображения f.

Следующий результат хорошо известен.

Предложение 2.1. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\big\{ \operatorname{dis} R \mid R \in \mathcal{R}(X, Y) \big\}.$$

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X, Y)$ конечно, поэтому существует $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, для которого $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \operatorname{dis} R$. Каждое такое отношение R назовем *оптимальным.*

Нам понадобится еще несколько вспомогательных результатов.

Предложение 2.2. *Пусть X, Y — компактные метрические пространства, тогда верно следующее неравенство*

$$|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y| \le d_{GH}(X, Y) \le \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}.$$

Предложение 2.3. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, Y — непустое подмножество X, а S — некоторая ε-сеть в X. Тогда в Y существует (2ε)-сеть, мощность которой не превосходит мощности множества S.*

Пусть $M \subset \mathfrak{M}$ — некоторое семейство метрических компактов. Будем говорить, что M *равномерно вполне ограничено*, если выполняются следующие два условия:

(1) существует число $D \geq 0$ такое, что для любого $X \in M$ имеет место $\operatorname{diam} X \leq D$ (диаметры пространств из M равномерно ограничены);

(2) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что каждое $X \in M$ содержит некоторую ε-сеть, состоящую не более чем из $N(\varepsilon)$ точек (количества элементов ε-сетей равномерно ограничены).

Предложение 2.4. *Семейство $M \subset \mathfrak{M}$ — предкомпактно, если и только если оно — равномерно вполне ограничено.*

Обозначим $\mathfrak{M}_D^N \subset \mathfrak{M}$ все метрические пространства (точнее, их классы изометрии), состоящие не более чем из N точек и с диаметром, не превосходящем D.

Предложение 2.5. *Пространство $\mathfrak{M}_D^N$ — компактно.*

Предложение 2.6. *Если K — компактное пространство, то K^f, где $f \in \mathbb{N}$, — тоже компактное пространство.*

Также напомним что такое графы в метрическом пространстве X. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф с множеством вершин $V \subset X$ и множеством ребер E. *Длиной ребра $uv \in E$* назовем величину, равную расстоянию между вершинами, которые соединяет это ребро. Сумму длин всех ребер графа G назовем *длиной графа G* и обозначим через $|G|$.

Пусть M — конечное подмножество X. Будем говорить, что связный граф G *соединяет множество M*, если $M \subset V$. Обозначим через $\mathcal{G}(M)$ множество всех (связных) графов в пространстве X, соединяющих M. Для графа $G = (V, E) \in \mathcal{G}(M)$ его *границей* будем называть множество M; элементы из M назовем *граничными вершинами графа G*, а элементы из $S = V \setminus M$ — *внутренними вершинами графа G*. Будем говорить, что графы G_1, $G_2 \in \mathcal{G}(M)$ *имеют один тип*, если между ними существует изоморфизм, тождественный на их общей границе M.

Точную нижнюю грань длин всех графов $G \in \mathcal{G}(M)$ назовем *длиной кратчайшего дерева* и будем обозначать через $\operatorname{smt}(M)$. Каждый граф $G \in \mathcal{G}(M)$, длина которого равна $\operatorname{smt}(M)$, является деревом и называется *кратчайшим деревом* или *минимальным деревом Штейнера* с границей M. Множество таких деревьев обозначим через $\operatorname{SMT}(M)$.

Замечание 2.7. Пусть $G = (V, E)$ — кратчайшее дерево с границей M. Тогда G не содержит внутренних вершин степени 1, так как иначе дерево G можно укоротить, не меняя его границу, выбросив инцидентное такой вершине ребро.

Предположим теперь, что G содержит внутреннюю вершину v степени 2. Обозначим через $e_1 = vv_1$ и $e_2 = vv_2$ ребра дерева G, инцидентные v. Перестроим G, выкинув v из V и заменив e_1 и e_2 на ребро $e = v_1v_2$. Тогда G также является кратчайшим деревом. Продолжая эту процедуру до тех пор, пока в получившемся дереве не останется ни одной подвижной вершины степени 2, мы получим кратчайшее дерево. Тем самым, для описания кратчайших деревьев достаточно рассматривать лишь те деревья, которые не имеют подвижных вершин степени 2.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что граница M включает все вершины степени 1 *и* 2, *а* $\mathrm{SMT}(M)$ *состоит из всех кратчайших деревьев, не имеющих подвижных вершин степени* 2.

При таких ограничениях, внутренние вершины каждого кратчайшего дерева называются *точками Штейнера.*

Обозначим через $\mathcal{T}(M)$ подмножество в $\mathcal{G}(M)$, состоящее из деревьев, у которых степени внутренних вершин не меньше 3.

Предложение 2.8. *Число типов деревьев из $\mathcal{T}(M)$ конечно.*

Предложение 2.9. *Имеем*

$$\mathrm{smt}(M)=\inf\bigl\{|G|:G\in\mathcal{T}(M)\bigr\}\ \textit{и}\ \mathrm{SMT}(M)\subset\mathcal{T}(M).$$

3 Метрика пространства метрических компактов строго внутренняя.

Пусть X и Y — два конечных метрических пространства, и R — оптимальное соответствие между ними. Тогда, по определению, $d_{GH}(X,Y)=\frac12\operatorname{dis}R$.

Определим на R функцию расстояния так. Выберем произвольное $0\le\alpha\le1$ и пусть $\beta=1-\alpha$. Положим

$$\bigl|(x,y)(x',y')\bigr|_\alpha=\alpha|xx'|+\beta|yy'|.$$

Очевидно, полученная функция положительно определена и симметрична. Проверим неравенство треугольника. Имеем

$$\begin{aligned}\bigl|(x,y)(x',y')\bigr|_\alpha+\bigl|(x',y')(x'',y'')\bigr|_\alpha&=\alpha|xx'|+\beta|yy'|+\alpha|x'x''|+\beta|y'y''|\ge\\&\ge\alpha|xx''|+\beta|yy''|=\bigl|(x,y)(x'',y'')\bigr|_\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом, $|\cdot|_\alpha$ является метрикой на R при каждом $0<\alpha<1$, а при $\alpha=0,\,1$ — псевдометрикой.

Обозначим через $R_x\subset X\times R$ и $R_y\subset R\times Y$ соответствия, определенные так:

$$R_x=\Bigl\{\bigl(x,(x,y)\bigr):x\in X,\,(x,y)\in R\Bigr\},\quad R_y=\Bigl\{\bigl((x,y),y\bigr):(x,y)\in R,\,y\in Y\Bigr\}.$$

Вычислим искажения этих соответствий. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}R_x=\max\Bigl\{\Bigl||xx'|-\alpha|xx'|-\beta|yy'|\Bigr|:x,\,x'\in X,\ (x,y),\,(x',y')\in R\Bigr\}=\\=\beta\max\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|:(x,y),\,(x',y')\in R\Bigr\}=\beta\operatorname{dis}R\end{aligned}$$

(аналогично, $\operatorname{dis} R_y = \alpha \operatorname{dis} R$).

Следовательно, $d_{GH}(X,R) \le \beta\, d_{GH}(X,Y)$ и $d_{GH}(R,Y) \le \alpha\, d_{GH}(X,Y)$. Но в силу неравенства треугольника $d_{GH}(X,R) + d_{GH}(R,Y) \le d_{GH}(X,Y)$, откуда $d_{GH}(X,R) = \beta\, d_{GH}(X,Y)$, а $d_{GH}(R,Y) = \alpha\, d_{GH}(X,Y)$, т.е. $R_\alpha := \big(R, |\cdot|_\alpha\big)$ лежит между X и Y. В частности, при $\alpha = 1/2$ пространство R_α является серединой между X и Y.

Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 3.1. *У любых двух конечных метрических пространств существует середина в* $\mathfrak{M}$.

Середину между конечными пространствами, построенную описанным выше способом, назовем *канонической серединой, построенной по оптимальному соответствию* R, и будем обозначать той же буквой R.

Рассмотрим отображение $\Gamma\colon [0,1] \to \mathfrak{M}$ такое, что

$$\Gamma_\alpha = \begin{cases} X, & \alpha = 0, \\ R_\alpha, & \alpha \in (0,1), \\ Y, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Покажем, что Γ — непрерывное отображение. Для этого достаточно проверить, что это отображение — изометрическое вложение отрезка, т.е. для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ выполняется $d_{GH}(\Gamma_{\alpha_1}, \Gamma_{\alpha_2}) = |\alpha_1 - \alpha_2|\, d_{GH}(X,Y)$.

Действительно, как ранее было замечено, для любого $\alpha \in (0,1)$ выполняется

$$d_{GH}(\Gamma_0, \Gamma_\alpha) = d_{GH}(X, R_\alpha) = \alpha\, d_{GH}(X,Y)$$

и

$$d_{GH}(\Gamma_1, \Gamma_\alpha) = d_{GH}(Y, R_\alpha) = (1-\alpha)\, d_{GH}(X,Y).$$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ таких, что $\alpha_1 \le \alpha_2$, рассмотрим тождественное соответствие R_{α_1,α_2} между R_{α_1} и R_{α_2}, тогда

$$\begin{gathered} \operatorname{dis} R_{\alpha_1,\alpha_2} = \\ \max\Big\{ \Big| \alpha_1|xx'| + (1-\alpha_1)|yy'| - \alpha_2|xx'| - (1-\alpha_2)|yy'| \Big| : (x,y), (x',y') \in R \Big\} = \\ = (\alpha_2 - \alpha_1) \max\Big\{ \big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),\ (x',y') \in R \Big\} = (\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{dis} R. \end{gathered}$$

Получаем

$$\begin{aligned} & d_{GH}(\Gamma_{\alpha_1}, \Gamma_{\alpha_2}) = \\ & \qquad = d_{GH}(R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}) \le (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{1}{2} \operatorname{dis} R = (\alpha_2 - \alpha_1)\, d_{GH}(X,Y). \end{aligned}$$

В силу обобщенного неравенства треугольника, имеем

$$\begin{aligned} & d_{GH}(\Gamma_{\alpha_1}, \Gamma_{\alpha_2}) = \\ & \qquad = d_{GH}(R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}) \ge d_{GH}(X,Y) - d_{GH}(X, R_{\alpha_1}) - d_{GH}(R_{\alpha_2}, Y) = \\ & \qquad\qquad = \big(1 - \alpha_1 - (1-\alpha_2)\big)\frac{1}{2} \operatorname{dis} R = (\alpha_2 - \alpha_1)\, d_{GH}(X,Y), \end{aligned}$$

таким образом, и в этом случае $d_{GH}(\Gamma_{\alpha_1}, \Gamma_{\alpha_2}) = |\alpha_1 - \alpha_2|\, d_{GH}(X, Y)$.

Тем самым, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Отображение Γ есть кратчайшая кривая, соединяющая X и Y.*

Пусть теперь X и Y — произвольные метрические компакты. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через X_n и Y_n некоторые конечные $1/n$-сети в X и Y соответственно, и пусть R_n — каноническая середина между X_n и Y_n. Покажем, что множество $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ — предкомпактно. Так как $X_n \to X$ и $Y_n \to Y$, то, по критерию предкомпактности Громова (предложение 2.4), существует $D \in \mathbb{R}$ такое, что $\operatorname{diam} X_n \le D$ и $\operatorname{diam} Y_n \le D$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а также для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что во всех X_n и Y_n существуют ε-сети X'_n и Y'_n, состоящие не более чем из $N(\varepsilon)$ точек каждая.

Определим на $X_n \times Y_n$ расстояние по тому же принципу, что и на R_n, а именно, положим

$$\big|(x, y), (x', y')\big| = \frac{1}{2}\big(|xx'| + |yy'|\big).$$

Ясно, что ограничение этого расстояния на R_n совпадает с расстоянием, заданным на R_n выше. Кроме того, $\operatorname{diam} R_n \le \operatorname{diam}(X_n \times Y_n) \le D$, так что множество $\{R_n\}$ равномерно ограничено. Наконец, $X'_n \times Y'_n$ является ε-сетью для $X_n \times Y_n$, состоящей не более чем из $N(\varepsilon)^2$ точек. Но тогда, в силу предложения 2.3, в R_n имеется (2ε)-сеть, состоящая не более чем из $N(\varepsilon)^2$ точек. Таким образом, выполняются условия критерия Громова предкомпактности, откуда и вытекает предкомпактность множества $\{R_n\}$.

Без ограничения общности, будем считать, что последовательность R_n сходится в $\mathfrak{M}$ к некоторому R. Из непрерывности функции расстояния вытекает, что R — середина между X и Y. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Предложение 3.3. *У любых двух компактный метрических пространств существует середина в $\mathfrak{M}$.*

Хорошо известно, что $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство, а в полном метрическом пространстве существование середин равносильно тому, что метрика является строго внутренней. Тем самым, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Метрика пространства $\mathfrak{M}$ всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, является строго внутренней.*

4 Кратчайшие деревья в пространстве метрических компактов с границей, состоящей из конечных метрических пространств.

В настоящем разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $M = \{m_1, \ldots, m_p\} \subset \mathfrak{M}$ — некоторое множество конечных метрических пространств. Тогда в $\mathfrak{M}$ существует кратчайшее дерево Штейнера с границей M, причем все точки Штейнера этого дерева — также конечные метрические пространства.*

Доказательство. Положим $r = \mathrm{smt}(M)$ и покажем, что существует $G \in \mathcal{T}(M)$, для которого $|G| = r$ и у которого все точки Штейнера — конечные метрические пространства.

По предложению 2.9, для любого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать дерево $G_n = (V_n, E_n) \in \mathcal{T}(M)$ такое, что $|G_n| \le r + \frac{1}{n}$. Более того, имеет место следующий результат.

Лемма 4.1. *Пусть D — максимальный диаметр пространств из M. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ диаметры пространств из V_n не превосходят $\widehat{D} = D + r + 1$.*

Доказательство. По определению, диаметр каждого $m \in M$ не превосходит D, а, значит, и $\widehat{D}$, поэтому для таких m предложение доказано.

Положим $S_n = V_n \setminus M$. Нам осталось доказать предложение для $s \in S_n$. Пусть $m \in M$, тогда, в силу неравенства треугольника, имеем

$$d_{GH}(s, m) \le |G_n| \le r + \frac{1}{n} \le r + 1.$$

По предложению 2.2, имеем

$$d_{GH}(s, m) \ge |\operatorname{diam} s - \operatorname{diam} m|.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$|\operatorname{diam} s - \operatorname{diam} m| \le r + 1,$$

поэтому $\operatorname{diam} s \le \operatorname{diam} m + r + 1 \le D + r + 1$. □

По предложению 2.8, в последовательности G_n существует подпоследовательность, состоящая из деревьев одного типа. Переходя, если необходимо, к такой подпоследовательности, без ограничения общности будем считать, что все деревья G_n имеют один и тот же тип. Обозначим через f число вершин, а через g — число ребер деревьев G_n, и пусть $S_n = \{s_n^1, \ldots, s_n^{f-p}\}$ — множество внутренних вершин дерева G_n. Мы предполагаем, что s_n^i при разных n соответствуют друг другу при изоморфизмах графов G_n, тождественных на M (эти изоморфизмы существуют в силу того, что графы G_n имеют один и тот же тип).

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $uv \in E_n$ существует такое соответствие $R^n_{uv} \in \mathcal{R}(u,v)$, что $d_{GH}(u,v) \geq \frac{1}{2}\operatorname{dis} R^n_{uv} - \frac{1}{n}$. Выберем произвольное $m \in M$ и произвольную точку $x_m \in m$. Рассмотрим ребро $mv \in E_n$. По определению соответствия существует $x_v \in v$ такая, что $(x_m, x_v) \in R^n_{m,v}$. Пусть точка $x_{v'} \in v'$ уже выбрана, тогда для каждого ранее не рассмотренного ребра $v'v'' \in E_n$ существует точка $x_{v''} \in v''$ такая, что $(x_{v'}, x_{v''}) \in R^n_{v',v''}$. Выбирая точки x_w до тех пор, пока не исчерпаем все множество вершин дерева G_n, мы получим множество $\{x_w\}_{w \in V_n}$, которое назовем *сечением дерева* G_n, *выпущенным из* $x \in m$.

Из каждой точки x каждого множества $m \in M$ выпустим одно произвольное сечение дерева G_n. Заметим, что если N — максимальное число точек в пространствах из M, то количество построенных сечений не превосходит $N' = p\,N$.

Пусть $\hat{s}^i_n \subset s^i_n$ — множество всех лежащих в s^i_n узлов построенных сечений. Ясно, что число точек в метрическом пространстве $\hat{s}^i_n$ не больше N'. В силу леммы 4.1, имеем $\operatorname{diam} s^i_n \leq \widehat{D}$, поэтому также $\operatorname{diam} \hat{s}^i_n \leq \widehat{D}$. Следовательно, $\hat{s}^i_n \in \mathfrak{M}^{N'}_{\widehat{D}}$. Обозначим через $\widehat{G}_n = (\widehat{V}_n, \widehat{E}_n)$ граф, полученный из G_n заменой внутренних вершин s^i_n на $\hat{s}^i_n$. Тогда

$$\widehat{V}_n = M \bigcup \{\hat{s}^1_n, \ldots, \hat{s}^{f-p}_n\}.$$

Покажем, что $|\widehat{G}_n| \to \operatorname{smt}(M)$ при $n \to \infty$. Легко видеть, что для каждого ребра uv графа G_n и соответствующего ребра $\hat{u}\hat{v}$ графа $\widehat{G}_n$ ограничение соответствия R^n_{uv} на $\hat{u} \times \hat{v}$ также является соответствием, которое мы обозначим через $\widehat{R}^n_{\hat{u}\hat{v}}$. Так как $\widehat{R}^n_{\hat{u}\hat{v}} \subset R^n_{uv}$, имеем $\operatorname{dis} \widehat{R}^n_{\hat{u}\hat{v}} \leq \operatorname{dis} R^n_{uv}$.

Через построенные соответствия оцениваются длины ребер $\hat{u}\hat{v}$:

$$d_{GH}(\hat{u}, \hat{v}) \leq \frac{1}{2}\operatorname{dis} \widehat{R}^n_{\hat{u}\hat{v}} \leq \frac{1}{2}\operatorname{dis} R^n_{uv} \leq d_{GH}(u,v) + \frac{1}{n}.$$

Просуммировав неравенство по всем ребрам графа $\widehat{G}_n$, получим

$$r \leq |\widehat{G}_n| \leq |G_n| + \frac{g}{n} \leq r + \frac{(g+1)}{n},$$

поэтому $|\widehat{G}_n| \to \operatorname{smt}(M)$ при $n \to \infty$.

Упорядочим точки из $\widehat{V}_n$, например $\widehat{V}_n = (m_1, \ldots, m_p, \hat{s}^1_n, \ldots, \hat{s}^{f-p}_n)$, тогда $\widehat{V}_n \in \left(\mathfrak{M}^{N'}_{\widehat{D}}\right)^f$. В силу предложений 2.5 и 2.6, пространство $\left(\mathfrak{M}^{pN'}_{\widehat{D}}\right)^f$ компактно, поэтому из последовательности V_n можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $V \in \left(\mathfrak{M}^{N'}_{\widehat{D}}\right)^f$. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность V_n сходится к V.

Пусть $G = (V, E)$ — дерево, полученное из деревьев $\widehat{G}_n$ заменой их вершин $\hat{v}^i_n \in \widehat{V}_n$ на пределы $v^i = \lim_{n\to\infty} \hat{v}^i_n$ (напомним, что все деревья $\widehat{G}_n$ имеют один и тот же тип). Тогда $|G| = \lim_{n\to\infty} |\widehat{G}_n| = \operatorname{smt}(M)$, поэтому G — кратчайшее дерево на M. Так как $V \in \mathfrak{M}^{N'}_{\widehat{D}}$, то все точки Штейнера дерева G — конечные метрические пространства. Теорема полностью доказана. $\square$

Список литературы

[1] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Элементы метрической геометрии и геометрической теории графов* спецкурс 2014-2015 http://dfgm.math.msu.su/courses.php?comments=19.

[3] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.