Бигамильтонова структура и особенности отображения момента волчка Лагранжа

Тужилин М. А.

17 ноября 2013 г.

1 Введение.

В статье продемонстрирован новый подход к задаче о поиске особенностей отображения момента для волчка Лагранжа. Результаты, полученные классическим способом, находятся с помощью бигамильтоновой структуры, что помогает существенно упростить их доказательство. Приводится простой и удобный способ нахождения особых точек и определения их типа.

2 История вопроса.

Рассмотрим специальный случай вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Потребуем, чтобы два из трех моментов инерции совпадали и чтобы неподвижная точка лежала на оси динамической симметрии. Тело, обладающее такими свойствами называется волчком Лагранжа. Это классический пример интегрируемой системы. Явную формулу того, как описывается положение такого тела в пространстве получил Якоби [1]. Решения уравнений движения в терминах эллиптических функций были описаны в [4]. Бифуркационная диаграмма описана в [6]. В статье [3] приведены согласованные скобки для случая волчка Лагранжа.

3 Предварительные сведения и теоремы.

Пусть $e(e)$ - группа движения трехмерного пространства, тогда на $e(3)^*$ можно ввести такие координаты $J = (J_1,\, J_2,\, J_3)$ и $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ и скобку Ли-Пуассона, что в этих координатах скобка будет иметь вид скобка Ли-Пуассона имеет вид

$$\{J_i,\, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \qquad \{J_i,\, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \qquad \{x_i,\, x_j\} = 0. \tag{1}$$

Назовем эту скобку P. Она имеет две функции Казимира

$$C_1 = \|x\| = \sum_{k=1}^{3} x_k^2, \qquad C_2 = \langle x,\, J\rangle = \sum_{k=1}^{3} x_k J_k.$$

Зафиксируем симплектический лист $e(3)^*$

$$O_{\alpha\beta}: \qquad \{x, J : C_1 = \alpha^2,\, C_2 = \beta\},$$

получится четырехмерное симплектическое многообразие, на котором будем изучать отображение момента.

Для волчка Лагранжа известно два классических интеграла движения

$$H_1 = J_3, \qquad H_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + ax_3, \qquad a \in \mathbb{R},$$

где H_2 — гамильтониан. Векторное поле PdH_2 можно переписать в виде $(P + \lambda P')dH_\lambda$, где $H_\lambda = (1 - \frac{\lambda}{2})(H_2 - a\lambda H_1) + C_2$, а согласованная с P скобка имеет следующий вид (см. [2, 3])

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом получаем пучок скобок $P_\lambda = P + \lambda P'$. Эта скобка при фиксированном λ имеет две функции Казимира

$$H^1(\lambda) = C_1, \qquad H^2(\lambda) = a\lambda^2 H_1 - \lambda H_2 + 2C_2.$$

Теорема 1 (о ранге скобки пучка)**.**
Рассмотрим на $e(3)^*$ скобку P_λ, порожденную скобками (1) и (2), при фиксированном $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, тогда

$$\operatorname{rank}(P_\lambda) < 4 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 &= \lambda J_1 \\ x_2 &= \lambda J_2 \\ x_3 &= \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases} \end{array} \right. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала докажем в обратную сторону. Пусть выполнены соотношения справа от следствия. Тогда легко видеть, что из соотношений на x и J сразу вытекает, что $\operatorname{rank}(P_\lambda) < 4$.

Теперь докажем в прямую сторону. Рассматриваемая скобка будет иметь вид

$$P_\lambda = P + \lambda P' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x_3 & -\lambda x_2 & 0 & x_3 & -x_2 \\ -\lambda x_3 & 0 & \lambda x_1 & -x_3 & 0 & x_1 \\ \lambda x_2 & -\lambda x_1 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & J_3 - \lambda\frac{a}{2} & -J_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 & -J_3 + \lambda\frac{a}{2} & 0 & J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Если $\operatorname{rank}(P_\lambda) < 4$, то из того, что кососимметрическая матрица имеет всегда четный ранг, следует, что он либо 2, либо 0. Если же $\operatorname{rank}(P_\lambda) = 0$, то легко видеть, что выполнены соотношения (3). Пусть теперь $\operatorname{rank}(P_\lambda) = 2$, тогда есть два столбца матрицы, через которые выражаются все остальные. Назовем их *главными столбцами*.

Пусть $\lambda \neq 0$ и $x_1 \neq 0$. Главное соображение состоит в том, что столбцы матрицы P_λ разбиваются на пары, в каждой из которых один столбец пропорционален другому. Докажем это.

Обозначим столбцы матрицы P_λ как $S_1, S_2 \dots S_6$. Разобьем их на три группы: $\{S_1,\, S_4\}$, $\{S_2,\, S_5\}$, $\{S_3,\, S_6\}$.

Утверждение 2. *Главные столбцы матрицы P_λ принадлежат разным группам.*

Доказательство. Действительно, если они из одной группы, то они должны быть из первой группы, так как иначе есть столбец, у которого на месте, где у главных столбцов стоит 0, есть x_1 с каким-то коэффициентом, отличным от нуля. Этот столбец выражается через выбранные два, следовательно $x_1 = 0$, что противоречит предположению. Тогда из тех же соображений выводим, что $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, следовательно, первый столбец является нулевым, а значит, $\mathrm{rank}(P_\lambda) < 2$, противоречие. □

Осталось доказать, что столбец, принадлежащий той же группе, что и главный, получается из него домножением на λ или $\frac{1}{\lambda}$. Заметим, что из этого сразу же будет вытекать утверждение теоремы.

Рассмотрим случаи:

(1) Главные столбцы: из первой группы и любой другой.

Без ограничения общности, пусть эти столбцы будут S_1 и S_5. Тогда рассмотрим столбец S_2. Он равен линейной комбинациии S_1 и S_5. В столбце S_1 первая координата равна 0, а вторая — x_3 с ненулевым коэффициентом, поэтому либо $x_3 = 0$, либо $S_2 = \lambda S_5$. Если $x_3 = 0$, то первые и вторые координаты столбцов S_1 и S_5 равны нулю, а значит, по тем же соображениям $x_1 = 0$, противоречие. Следовательно, $S_2 = \lambda S_5$, аналогично $S_1 = \lambda S_4$.

(2) Главные столбцы оказались из групп два и три.

Так как $x_1 \neq 0$, то, применяя похожие рассуждения для третьей строки, получаем, что $S_2 = \lambda S_5$, а для второй $S_3 = \lambda S_6$.

□

Теперь посмотрим на полученные результаты более внимательно. В случае, когда вектор x равен 0, обе функции Казимира C_1 и C_2 обращаются в 0. Такие точки являются элементами множества Bad [5], для которого бигамильтонов подход не применяется. Также для данного случая нет какой бы то ни было физической интерпретации.

Разделим полученные условия на случаи, когда для соответствующих точек $(x,\, J)$ существует единственное значение λ, для которого ранг P_λ падает, когда существует два действительных значения λ, а когда два комплексных. Во всех этих трех случаях точки будут иметь разные особенности отображения момента. Таким образом, получаем

Следствие 3.

$$\begin{array}{c}\mathrm{rank}(P_\lambda),\ \textit{заданной}\\ \textit{формулой}\ (4)\\ \textit{падает}\end{array} \iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x_1 = \lambda J_1 \\ x_2 = \lambda J_2 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \end{cases} & \textbf{\textit{(5)}}\ \textit{при}\ \lambda \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \\ J_3^2 - 2ax_3 \geq 0 \end{cases} & \textbf{\textit{(6)}}\ \textit{при}\ \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0 \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \\ J_3^2 - 2ax_3 < 0 \end{cases} & \textbf{\textit{(7)}}\ \textit{при}\ \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{C} \end{array}\right.$$

Это следствие дает представление о множестве особых точек нашей системы. Точки, перечисленные в *следствии 3* - это в точности множество особых точек отображения момента (см. [7]). Осталось привести классификацию их типов особенностей.

4 Основная теорема.

Теорема 4 (Классификация особенностей отображения момента для волчка Лагранжа)**.**

Пусть P_λ - пучок скобок, заданный соотношениями (1) *и* (2)*. H_λ - гамильтониан, равный соответственно $(1-\frac{\lambda}{2})(H_2 - a\lambda H_1) + C_2$, где $H_1 = J_3$, $H_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + ax_3$, $C_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3$. Тогда особыми точками отображения момента являются точки, перечисленные в* **(5)**, **(6)**, **(7)***, причем*

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{(5)}} & \textbf{\textit{имеют эллиптический тип}} \\ \textbf{\textit{(6)}} & \textbf{\textit{имеют тип центр-центр}} \quad , \\ \textbf{\textit{(7)}} & \textbf{\textit{имеют тип фокус-фокус}} \end{array}$$

при условии, что $J_3^2 - 2ax_3 \neq 0$.

Доказательство.

(1) Зафиксируем точку x_0 из случая ***(5)***. Для такой точки построим связанную с ней алгебру $\mathfrak{g}_\lambda(x_0)$ (см. [5]). В дальнейшем будем опускать x_0, оставив только $\mathfrak{g}_\lambda$. Она будет состоять из элементов $\xi, \eta \in \mathrm{Ker}(P_\lambda(x_0))$ с коммутатором $[\xi, \eta] = \mathrm{d}\{f, g\}_\lambda$, где f и g – некоторые функции, такие что $\mathrm{d}f(x_0) = \xi$, $\mathrm{d}g(x_0) = \eta$. Тогда если взять в качестве f и g линейные функции, то коммутатор $[\xi, \eta]$ равнен $\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \xi_i \eta_j$, где суммирование ведется по повторяющимся индексам.

Выберем базис на $\mathfrak{g}_\lambda$:

$$\mathrm{Ker}(P_\lambda(x_0)) = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ -\lambda\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ -\lambda\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ -\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^0\\ x_2^0\\ x_3^0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где (x_1^0, x_2^0, x_3^0) – первые три координаты точки x_0. Обозначим эти порождающие векторы соответственно a, b, c и d. Для того, чтобы определить тип особой точки, надо понять, какой алгебре изоморфна данная. Для этого посчитаем их коммутаторы. Нетрудно проверить, что

$$[a,b] = -\lambda c, \quad [a,c] = \lambda b, \quad [b,c] = -\lambda a, \quad [d,\mathfrak{g}_\lambda] = 0.$$

Сделаем замену: $x = \frac{b+c}{\lambda\sqrt{2}}$, $y = \frac{b-c}{\lambda\sqrt{2}}$, $z = \frac{a}{\lambda}$, получим коммутатор

$$[x,y] = z, \quad [y,z] = x, \quad [z,x] = y.$$

То есть эта алгебра $\mathfrak{g}_\lambda$ изоморфна $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Чтобы узнать, что за тип особенности будет в этом случае, возьмем сумму $k_e(\lambda)$ по всем $\lambda \in \Lambda(x_0) \bigcap \bar{\mathbb{R}}$ (см. [5]). В нашем случае есть только одно λ, следовательно, k_e равно 1. Следовательно, эта особенность эллиптического типа.

(2) Теперь рассмотрим случай ***(6)***. Как и в первом случае, построим аналогичным образом алгебру $\mathfrak{g}_\lambda$, только уже для точки x_0 из второго случая. В этой алгебре скобка Пуассона примет вид:

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x_3 & 0 & 0 & x_3 & 0\\ -\lambda x_3 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x_3 & 0 & 0 & J_3 + \lambda\frac{a}{2} & 0\\ -x_3 & 0 & 0 & -J_3 + \lambda\frac{a}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Базисные векторы:

$$\mathrm{Ker}(P_\lambda(x_0)) = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ -\lambda\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ -\lambda\\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Обозначим их соответственно a, b', c и d. Их коммутаторы:

$$[a,\mathfrak{g}_\lambda] = 0, \quad [b',c] = -d, \quad [b',d] = c, \quad ,[c,d] = \lambda\, a - \lambda^2 b'.$$

Сделаем замену $b = a - \lambda\, b'$, тогда получим:

$$[b,c] = -\lambda\, d, \quad [b,d] = -\lambda\, c, \quad ,[c,d] = \lambda\, b.$$

Избавившись от коэффициента, получаем алгебру $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$:

$$[x,y]=z,\quad [y,z]=x,\quad [z,x]=y.$$

Тогда, возьмем сумму $k_e(\lambda)$ по всем $\lambda\in\Lambda(x_0)\bigcap\bar{\mathbb{R}}$ (см. [5]). В нашем случае сумма будет по λ_1 и λ_2, где $\lambda_{1,2}=\frac{J_3\pm\sqrt{J_3^2-2ax_3}}{a}$, следовательно, k_e равно 2. Следовательно, эта особенность типа центр-центр.

(3) Случай ***(7)*** разбирается аналогично случаю ***(6)***, только для $\lambda\in\mathbb{C}$. Для него аналогичным образом получается алгебра $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$. Следовательно, есть только один элемент $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ в разложении алгебры $\mathfrak{g}_\lambda$, а значит, k_h равно 1. Следовательно, особенность типа фокус-фокус.

$\square$

Замечание 5. *В случае, когда $J_3^2-2ax_3=0$ получаются точки*

$$\begin{cases}x_1=x_2=J_1=J_2=0\\ x_3=\frac{J_3^2}{2a}\end{cases},\ \text{при } \lambda=\frac{J_3}{a}\in\mathbb{R}.$$

Причем они ***имеют вырожденный тип****.*

Список литературы

[1] C. Jacobi, *Fragments sur la rotation d'un corps tirés des manuscripts de Jacobi et communiqués par E. Lotner*, Gesammelte Werke, Bd 2, 425-514, Chelsea, 1969.

[2] L. Gavrilov, A. Zhivkov, *The complex geometry of Lagrange top*, L' Enseign. Math., 1998, v. 44, p. 133-170.

[3] T. Ratiu, *Euler-Poisson equations on Lie algebras and the N-dimensinal heavy rigid body*, Am. J. Math., 1982, v. 104, p. 409-448.

[4] F. Klein, A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, 1965. Reprint of the 18971910 edition.

[5] A. Bolsinov, A. Izosimov, *Singularities of bihamilton systems*, Loughborough, Dept. of Math. Sciences, LE 11 3 TU, UK

[6] A.Bolsinov, A. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems*, vol. 2, p. 206-210

[7] A. Bolsinov, *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, 38(1):69-90, 1992