

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Дифференциальной геометрии и приложений
Кафедра Теоретической механики и мехатроники

Сечкин Георгий Михайлович

Курсовая работа на тему:

**Бифуркационная диаграмма
в задаче о движении неоднородного
динамически симметричного эллипсоида вращения
на гладкой плоскости.**

Научные руководители:

д. ф. - м. н., профессор

Карапетян Александр Владиленович

академик РАН, профессор

Фоменко Анатолий Тимофеевич

Содержание

1	Введение	2
1.1	История вопроса	2
1.2	Постановка задачи	2
1.3	Содержание работы	2
2	Топологический анализ	3
2.1	Введение	3
2.2	Системы уравнений и первые интегралы	3
2.3	Построение бифуркационной диаграммы	5
2.4	Бифуркационная диаграмма	8
2.5	Теорема 3.	11
3	Инварианты Фоменко для случая произвольного s	13
4	Инварианты Фоменко-Цишанга	15
4.1	Инварианты для случая $s = 0$	15
4.2	Инварианты для случая произвольного s	18
5	Известные случаи эквивалентности	23
6	Выводы	25
7	Программа дальнейших исследований	25

1 Введение

1.1 История вопроса

Задача о движении тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости - это одна из классических задач механики. Она в определенном смысле представляет собой обобщение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Естественным образом возникает вопрос об исследовании возможных интегрируемых случаев. Известно, что в этой задаче существуют аналоги случаев Эйлера и Лагранжа.

На сегодняшний день известно много случаев интегрируемости: Ковалевская-Яхья, случай Ковалевской в двойном поле сил и другие. Разработан богатый аппарат исследования геометрии и топологии таких систем, создана теория топологической классификации случаев интегрируемости с двумя степенями свободы.

На основе этой теории удалось обнаружить пары систем, считавшиеся до этого различными, однако, оказавшимися топологически (лиувиллево) эквивалентными. Среди работ, использующих теорию классификации интегрируемых систем, находится работа Ивочкина [2].

1.2 Постановка задачи

В данной работе мы рассмотрим эллипсоид вращения, движущийся по гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести. Распределение масс таково, что тело обладает осью динамической симметрии, которая совпадает с осью геометрической симметрии, причем центр масс лежит на этой оси (аналог волчка Лагранжа) на расстоянии s от центра тела.

1.3 Содержание работы

В тексте представлен разбор и восстановление некоторых доказательств диссертационной работы М.Ю Ивочкина [2], а также их обобщение на случай произвольного параметра s .

По бифуркационным диаграммам, полученным в работе [2], построены молекулы, то есть инвариант грубой лиувиллевой эквивалентности см. Болсинов, Фоменко [1].

В разбираемой работе вопрос об определении лиувиллела типа этого семейства систем ($s=0$ и для произвольного s) решен не был. В настоящем исследовании мы вычисляем инвариант Фоменко-Цишанга (меченая молекула) для $s=0$.

2 Топологический анализ

2.1 Введение

В этой части мы рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела вращения, движущегося по гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести. Имеются различные аналогии между этой задачей и задачей о движении твердого тела с неподвижной точкой. В частности, в обеих задачах при любых значениях параметров системы уравнения движения обладают тремя не независимыми интегралами, и, таким образом, для интегрируемости уравнений движения требуется еще один независимый интеграл, наличие которого определяется условиями на параметры системы.

Однако, в отличие от задачи о теле с неподвижной точкой, где геометрическая форма тела не существенна, в задаче о движении тела по плоскости необходимо учитывать вид поверхности тела. Обычно на форму поверхности накладывается условие выпуклости и условие, что касание поверхности с плоскостью происходит в одной точке.

На данный момент, в задачах о движении тел по гладкой плоскости существование дополнительного интеграла доказано для двух случаев:

- 1) когда тело является неоднородным шаром, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, а моменты инерции произвольны,
- 2) для динамически симметричного тела вращения [6].

В первом случае задача аналогична задаче о волчке Эйлера. В данной работе рассматривается второй случай: в качестве поверхности берется динамически симметричный эллипсоид вращения, при этом уравнения движения, фактически, сходны с уравнениями движения для волчка Лагранжа.

Следуя оригинальной работе Ивочкина, мы все же сделаем ряд замен в системе уравнений, описывающей движение тела, которые на наш взгляд позволят упростить дальнейший анализ. Эквивалентность замен будет доказана.

Также в этой части мы дадим некоторые комментарии, которые, по мнению автора, дополняют доказательства из второй главы работы [2].

2.2 Системы уравнений и первые интегралы

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы: тремя координатами задается положение некоторой его точки, например центра масс, в неподвижной системе координат и еще три необходимы для определения ориентации главных осей. Подробнее про число степеней свободы

см. [7, 8]

В рассматриваемом нами случае имеется одна голономная связь: высота центра масс над плоскостью определяется ориентацией центральных главных осей. Таким образом, число степеней свободы понижается до пяти.

Рассмотрим неподвижную систему координат O_{xyz} , связанную с гладкой плоскостью, и $S_{e_1e_2e_3}$ - главные центральные оси. Введем некоторые обозначения:

$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$ - скорость центра масс в системе O_{xyz} ,

$\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - вектор угловой скорости в осях $S_{e_1e_2e_3}$,

$\bar{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ - единичный вектор восходящей нормали в $S_{e_1e_2e_3}$,

(b_1, b_1, b_3) - главные полуоси эллипсоида, m - масса тела,

$\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_1, A_3)$ - диагональный тензор инерции, $\bar{r}(\bar{\gamma})$ - радиус-вектор из центра масс в точку касания с плоскостью, $\bar{N} = N\bar{\gamma}$.

Из второго закона Ньютона следует $m\dot{\bar{v}} = \bar{N} - mg\bar{\gamma}$. Спроецируем это уравнение на оси O_x и O_y , получим $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$, значит, существует инерциальная система координат с началом в центре масс, движущаяся вдоль O_{xy} . А проекция на O_z дает нам $v_z = \dot{z}$ и $m\dot{v}_z = N - mg \Rightarrow N = m(\dot{v}_z + g)$, подставляя значение N в закон сохранения кинетического момента относительно точки S и учитывая постоянство единичного орта $\bar{\gamma}$, имеем:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\bar{\omega}} + [\bar{\omega}; \mathbf{A}\bar{\omega}] = [\bar{r}; m(\dot{v}_z + g)\bar{\gamma}], \\ \dot{\bar{\gamma}} + [\bar{\omega}; \bar{\gamma}] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Полученные уравнения, называются уравнениями Эйлера-Пуассона.

Система, записанная в координатах $(\bar{\omega}; \bar{\gamma})$, обладает рядом первых интегралов:

1) $\Gamma = \gamma^2$ - геометрический интеграл, выражает постоянство суммы квадратов проекций единичного вектора.

2) $G = (\mathbf{A}\bar{\omega}, \bar{\gamma})$ - "интеграл площадей проекция кинетического момента на вертикальную ось связана с инвариантностью вращений тела относительно вертикали.

3) $E = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\bar{\omega}; \bar{\omega}) + U$ - интеграл энергии, где U - потенциал.

Запишем уравнение в форме Эйлера используя $\dot{f} = \{f; H\}$, где H - гамильтониан на $e(\mathfrak{S})^*$. Тогда в системе координат (\mathbf{S}, \mathbf{R}) имеем

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \dot{R}_i = \{R_i, H\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{S}} = \left(\frac{\partial H}{\partial S_1}, \frac{\partial H}{\partial S_2}, \frac{\partial H}{\partial S_3} \right), \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{R}} = \left(\frac{\partial H}{\partial R_1}, \frac{\partial H}{\partial R_2}, \frac{\partial H}{\partial R_3} \right) \quad (3)$$

Тогда из (1) следуют уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{S}} = [\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{S}}; \mathbf{S}] + [\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{R}}; \mathbf{R}], \\ \dot{\mathbf{R}} = [\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{R}}; \mathbf{R}] \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что отображение $\varphi : \mathbf{R}^6(\omega, \gamma) \rightarrow \mathbf{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ заданное формулами

$$\begin{cases} S_i = -A_i \omega_i, \\ R_i = \gamma_i \end{cases} \quad (5)$$

устанавливает изоморфизм (1) и (4) с гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2A_1} S_1^2 + \frac{1}{2A_2} S_2^2 + \frac{1}{2A_3} S_3^2 + U, \quad (6)$$

$$U = mg(\sqrt{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)R_3^2} + sR_3) \text{ при данном}$$

изоморфизме интегралы γ и G переходят в

$$\Gamma = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \text{ и } G = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3,$$

а интеграл энергии в гамильтониан.

Данные интегралы естественны для задачи о движении твердого тела, они получаются без ограничений на форму и динамику рассматриваемого объекта. Однако, для полной интегрируемости нам недостает одного независимого интеграла, который в данной постановке существует $K = S_3$ - интеграл Лагранжа.

2.3 Построение бифуркационной диаграммы

Отображение момента переводит касательное расслоение к сфере Пуассона на плоскость $F = H \times K : TS^2 \rightarrow \mathbf{R}^2(h; k)$. Образ

критического множества есть бифуркационная диаграмма Σ отображения F . По теореме Сарда Σ имеет меру нуль на плоскости, а по теореме о неявной функции над каждой связной компонентой $\mathbf{R}^2 \setminus \Sigma$ отображение момента является расслоением. Если все слои слоения компактны, то тип интегральных многообразий может измениться лишь при переходе через Σ . В этих связных компонентах интегральные многообразия, как известно из теоремы Лиувилля, представляют собой объединение двумерных торов, как всякое связное, ориентируемое, компактное двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек (т.к. особые точки лежат на особых слоях первых интегралов). Найдем критические точки этого отображения (мы проделаем это лишь для гамильтониана с фиксированной потенциальной энергией, общий анализ есть в [1, 14]).

Рассмотрим $P_{k,g}^3 = \{K = k, G = g, \Gamma = 1\}$ - неособая при $k \neq \pm g$ и $M_{1,g}^4 = \{\Gamma = 1, G = g\}$. Точка $x_0 \in M_{1,g}^4$ критическая для $H|_{P^3}$, если существуют такие μ_1, μ_2, μ_3 , что выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \text{grad}H = \mu_1 \text{grad}\Gamma + \mu_2 \text{grad}G + \mu_3 \text{grad}K, \\ K = k, G = g, \Gamma = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Для простоты вычислений обезразмерим эллипсоид инерции $A_1=1, A_3=A$. Распишем (7) по координатам:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{1 - R_3^2} \text{cost}, R_2 = \sqrt{1 - R_3^2} \text{sint}, \\ S_1 &= \frac{g-kR_3}{\sqrt{1-R_3^2}} \text{cost}, S_2 = \frac{g-kR_3}{\sqrt{1-R_3^2}} \text{sint}, S_3 = k \end{aligned}$$

Параметры при этом получаются такие:

$$\mu_1 = -\frac{(g-kR_3)^2}{2(1-R_3^2)^2}, \mu_2 = \frac{g-kR_3}{1-R_3^2}, \mu_3 = \frac{k}{A_3} - \frac{R_3(g-kR_3)}{1-R_3^2}.$$

R_3 вычисляется из соотношения $U' + \frac{(g-kR_3)(gR_3-k)}{(1-R_3^2)^2} = 0$, где производная берется по R_3 . Так как $\Gamma = 1$, то $|R_3| < 1$.

При фиксированном R_3 уравнения (7) задают одну критическую окружность функции $H|_{P^3}$, проинтегрируем выражение для R_3 :

$\frac{(g-kR_3)^2}{2(1-R_3^2)} + \frac{k^2}{2} + U = W(R_3), W(R_3) \in [-1; 1]$ тем самым получим значение ограничения гамильтониана на критической окружности. И в силу обозначений условие получается в более компактном виде

$$W'(R_3) = 0.$$

Функцию W называют приведенным (эффективным) потенциалом.

Рассмотрим матрицу $G_\mu = G_H - \mu_1 G_\Gamma - \mu_2 G_G - \mu_3 G_K$, где G_f - гессиан функции f , ограничимся на пространство ортогональное к градиентам трех интегралов Γ, G, K имеем:

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 & -\mu_2 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & -2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & -2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & U'' - 2\mu_1 \end{pmatrix}$$

В критических точках градиенты Γ, G, K тогда записываются так:

$$\text{grad}\Gamma = (0, 0, 0, 2X \cos t, 2X \sin t, 2R_3),$$

$$\text{grad}G = (X \cos t, X \sin t, R_3, \frac{g-kR_3}{X} \cos t, \frac{g-kR_3}{X} \sin t, k),$$

$$\text{grad}K = (0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Где $X = \sqrt{1 - R_3^2}$. Так как мы рассматриваем пространство ортогональное градиентам интегралов, то выберем в нем базис:

$$e_1 = (\sin t, -\cos t, 0, 0, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 0, 0, \sin t, -\cos t, 0),$$

$$e_3 = \left(\frac{g-kR_3}{X} \cos t, \frac{g-kR_3}{X} \sin t, 0, R_3 \cos t, R_3 \sin t, -X\right)$$

Значения G_λ на (e_i, e_j) записанны в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{kR_3-g}{X} & 0 \\ \frac{kR_3-g}{X} & \left(\frac{kR_3-g}{X}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & XW''(R_3) \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения, т.к. матрица блочно диагонального типа, то $\lambda_1 = XW''(R_3)$, в силу линейной зависимости первой и второй

строк матрицы $\lambda_2 = 0$, наконец $\lambda_3 = 1 + \left(\frac{kR_3-g}{X}\right)^2$.

Подставим выражение для X имеем:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - R_3^2}W''(R_3), \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1 + \left(\frac{kR_3-g}{\sqrt{1-R_3^2}}\right)^2.$$

Третье собственное значение всегда положительно, равенство второго нулю говорит о вырождении гессиана функции $H|_{P^3}$ вдоль касательных к критической окружности, а знак первого собственного числа такой же, как и знак второй производной приведенного потенциала. Следовательно, у $H|_{P^3}$ критические окружности или седловые или минимальные. Седловым соответствуют локальные максимумы функции $W''(R_3)$, а минимаксным - минимумы, это следует из того, что при каждом R_3 определяемым уравнением $W'(R_3) = 0$ система (7) задает одну критическую окружность.

В работе Андрея Александровича Ошемкова [14] рассмотрен случай $V'' \geq 0$, для него характерным является то, что $W'' > 0$ следовательно у W ровно один локальный минимум и не имеет ни одного локального максимума. Т.е. $\forall k \neq \pm g$ $H|_{P^3}$ имеет одну минимальную критическую окружность. Следовательно на плоскости образа отображения момента прямые вида $k = const$ пересекают бифуркационную диаграмму ровно в одной точке, прообразом этой прямой является поверхность P^3 .

2.4 Бифуркационная диаграмма

Бифуркационная диаграмма была получена М.Ю. Ивочкиным [2]

Сделаем небольшое отступление для пояснения важности бифуркационной диаграммы для задач механики.

Диаграмма на рис. 1 снабжена стрелками с указанием типа бифуркации (атома) на дугах диаграммы. Эта информация весьма важная. Как известно из общих теорем [1] атом **A** является устойчивым, а седловой атом **B** - неустойчивым. Значит, рассмотрев изоэнергетический уровень мы можем точно определить сколько будет устойчивых положений равновесия и сколько неустойчивых. Также рассматривая эволюцию бифуркационной диаграммы (в формулировке теоремы она указана стрелками) мы можем проследить, как меняется число положений равновесия и их характер.

Например, если ось вращения тела перпендикулярна плоскости и центр масс находится ниже центра кривизны, то такое положение должно быть устойчивым. Согласно сделанным предположениям малая полуось эллипсоида имеет длину 1, а большая b . Значит, радиус кривизны в точке максимально удаленной от центра $\rho = \frac{1^2}{b}$, высота центра масс в описываемом случае $b - s$, таким образом случай $b - s < \rho$ отвечает

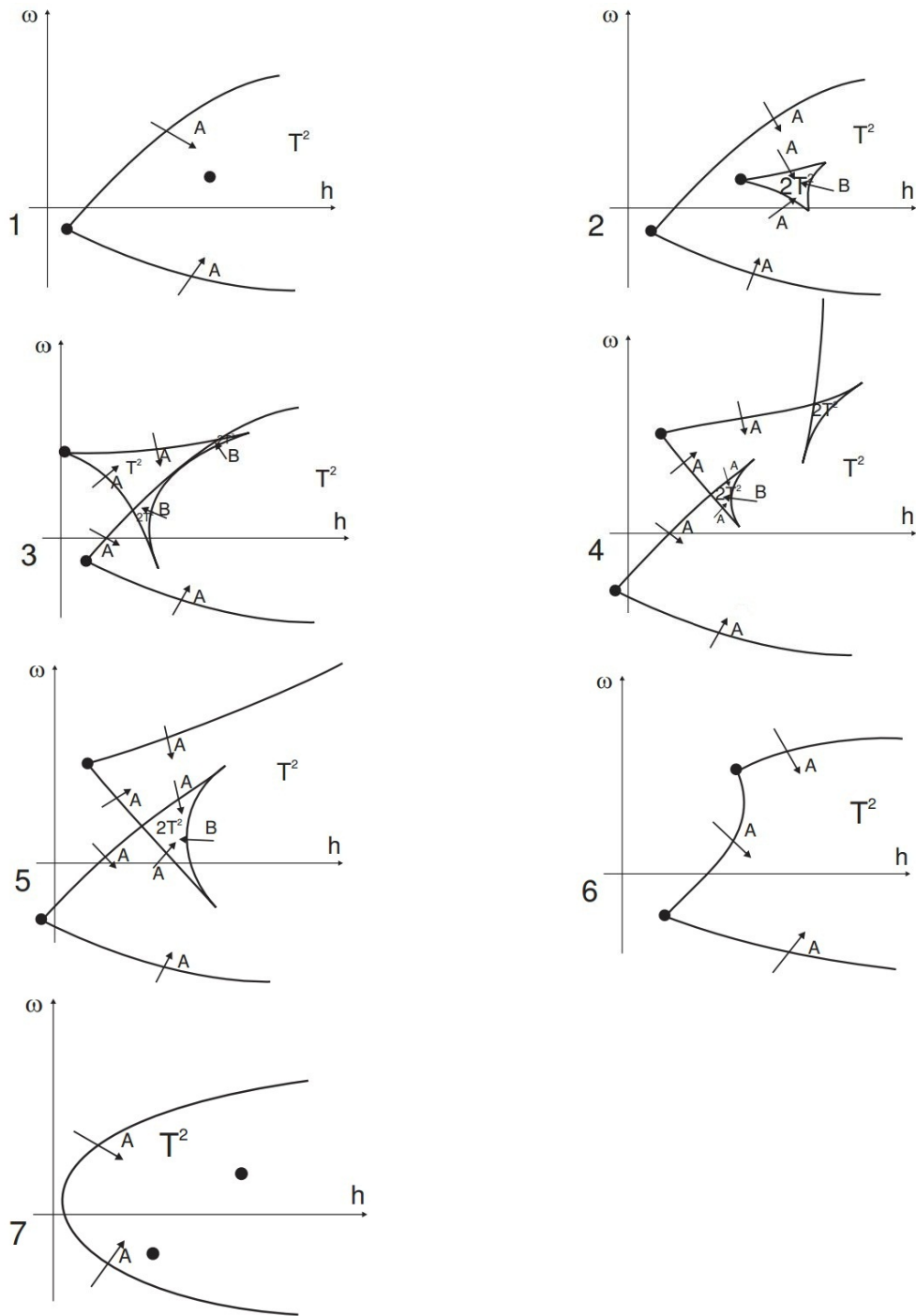


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма для случая $s \neq 0$

устойчивому положению равновесия, т.е. $s > b - \frac{1}{b} = \frac{c}{\sqrt{(c+1)}}$. Такому движению отвечает эволюция $1 \rightarrow 6$, как можно заметить ни в одной из этих диаграмм нет седлового атома **B**, т.е. нет неустойчивых положений равновесия, что соответствует экспериментальным данным.

Как было отмечено в книге Болсинова, Фоменко [1] (том 2, стр.238, теорема 5.4):

Изолированная особая точка бифуркационной диаграммы для случая гамильтониана Лагранжа (в тех случаях, когда она имеется, т.е. при $g^2 < 4$) отвечает единственной особенности типа фокус-фокус в $M_{1,g}^4$, координаты этой особой точки $(0, 0, g, 0, 0, 1)$. Её круговая молекула имеет матрицу монодромии $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. При этом, ее тип следует из невырожденности особенности. На особом слое отображения момента лежит ровно одна критическая точка. А т.к. у нас всего две критические точки соответствующие $\pm g$, но они лежат на разных уровнях интеграла $K = S_3 = \pm g$. Однако если $g = \pm 2$, то изолированная точка попадает на границу бифуркационной диаграммы и становится вырожденной, а когда $|g| > 2$ точка меняет свой тип с фокус-фокус на центр-центр.

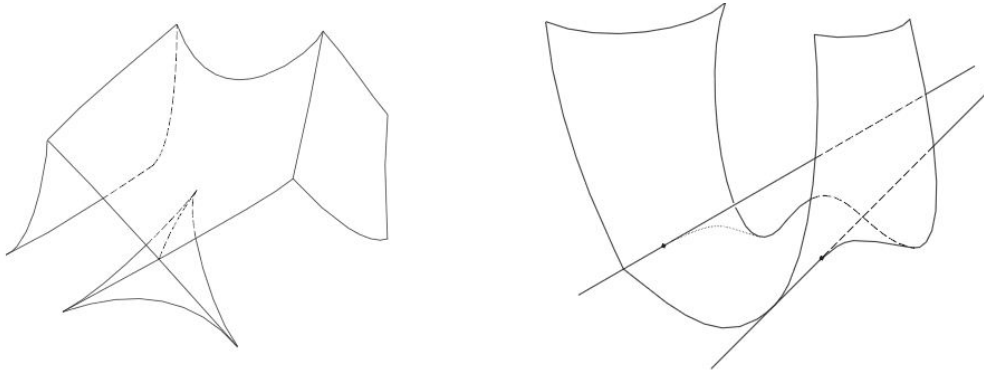


Рис. 2: Ласточкин хвост

2.5 Теорема 3.

Если центр масс не смещен ($s = 0$), то в трехмерном пространстве $\Sigma_{k,h,\omega}$ задает ласточкин хвост с двумя дополнительными поверхностями при $-1 < c < 0$, и поверхность с двумя лучами при $c > 0$

Комментарии¹ к доказательству²:

Равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов трех производных приведенного потенциала, в случае $s \neq 0$ выглядит так: $2c^2x^4 + 5cx^2 + c + 4 + \frac{2s}{cx}(cx^2 + 1)^{2,5} = 0$, без s мы действительно имеем дело с бипараболой, но если $s \neq 0$ качественно в доказательстве Ивочкина ничего не меняется. При $c > 0$ "возмущенная бипарабола" также положительна на интервале $(0;1)$. Четвертая производная также отлична от нуля. Матрица частных производных будет такой же, т.к. в приведенном потенциале s не является множителем ни при k ни при ω . Ряд Лорана для функции задающей график "возмущенной бипараболы" в окрестности нуля выглядит так: $\frac{2s}{c+x} + c + 4 + 5sx + 5cx^2 + \frac{15}{4}csx^3 + o(x^4)$ В статье Кудрявцевой и Лакштанова [4] рассмотрены особенности типа A_n , которые там называются каустиками. Ласточкин хвост в терминологии этой статьи имеет тип A_4 .

Определение: каустикой называется множество значений параметров, при которых $F(x, \bar{\lambda})$ имеет вырожденную (кратную) критическую точку. Т.е. $\dot{F}(x, \bar{\lambda}) = 0$ Чтобы A_4 была версальной деформацией в

¹ Дадим более подробное доказательство, т.к. в работе Ивочкина оно было предложено вкратце.

² Разбор теоремы проведен под руководством Е.А.Кудрявцевой

смысле статьи [4] необходима линейная независимость следующей системы: $\left\{ \frac{\partial(V-h)}{\partial\lambda_i} \right\}_{i=1}^3$, $\left\{ \frac{\partial^2(V-h)}{\partial x \partial \lambda_i} \right\}_{i=1}^3$, $\left\{ \frac{\partial^3(V-h)}{\partial^2 x \partial \lambda_i} \right\}_{i=1}^3$, где V - приведенный потенциал

$$\text{Напомним: } V_{k,\omega} = \frac{(k-J\omega x)^2}{2(1-x^2)} + \frac{J^2\omega}{2} + \sqrt{cx^2 + 1} + sx$$

Посчитаем частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(V-h)}{\partial\omega} &= \frac{J^2\omega x^2 - Jkx}{1-x^2} + \frac{J^2}{2}, \quad \frac{\partial(V-h)}{\partial k} = \frac{k-J\omega x}{1-x^2}, \quad \frac{\partial(V-h)}{\partial h} = 1. \\ \frac{\partial^2(V-h)}{\partial x \partial \omega} &= \frac{J}{(1-x^2)^2} (2J\omega x - k - kx^2), \quad \frac{\partial^2(V-h)}{\partial x \partial k} = \frac{2kx - J\omega}{(1-x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2(V-h)}{\partial x \partial h} = 0 \\ \frac{\partial^3(V-h)}{\partial^2 x \partial \omega} &= \frac{2J(\omega - 2kx)}{(1-x^2)^3}, \quad \frac{\partial^3(V-h)}{\partial x^2 \partial h} = \frac{2(k - J\omega x)}{(1-x^2)^3}, \quad \frac{\partial^3(V-h)}{\partial x^2 \partial h} = 0. \end{aligned}$$

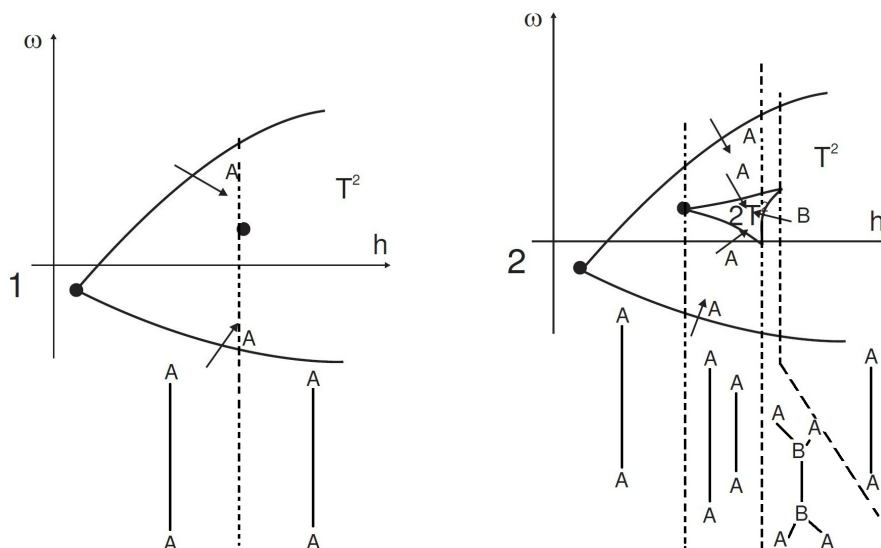
После некоторых упрощений матрица, составленная из правых частей примет такой вид:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{J^2\omega x^2 - Jkx}{1-x^2} + \frac{J^2}{2} & \frac{k - J\omega x}{1-x^2} & 1 \\ J(2J\omega x - k - kx^2) & 2kx - J\omega & 0 \\ J(\omega - 2kx) & (k - J\omega x) & 0 \end{pmatrix} &= \\ = J \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{J\omega x^2 - kx}{1-x^2} + \frac{J}{2} & \frac{k - J\omega x}{1-x^2} & 1 \\ (2J\omega x - k - kx^2) & 2kx - J\omega & 0 \\ (\omega - 2kx) & (k - J\omega x) & 0 \end{pmatrix} &= \end{aligned}$$

$= -J((J\omega kx - k^2)(1 + x^2) + J\omega^2(1 - 2Jx^2) + 2kx(2kx - \omega)) \neq 0$
 Таким образом, мы действительно имеем особенность типа A_4 - "ласточкин хвост". Так же, как было замечено, изменение параметра s на качественный вид доказательства не влияет. Т.е. мы будем наблюдать "ласточкин хвост" со смещением.

3 Инварианты Фоменко для случая произвольного s

В этой части мы построим молекулы (инварианты грубой лиувиллевой эквивалентности) для диаграмм приведенных в работе Ивочкина [2]. На рисунках 1-6 представлены все типы бифуркационных диаграмм, возникающих в данной задаче, соответствующих разным параметрам эллипсоида. Нами были рассмотрены изоэнергетические молекулы, они представлены под бифуркационными диаграммами. Пунктиром отмечены разделяющие значения энергии, то есть области между соседними пунктирными линиями соответствуют регулярным значениям энергии.



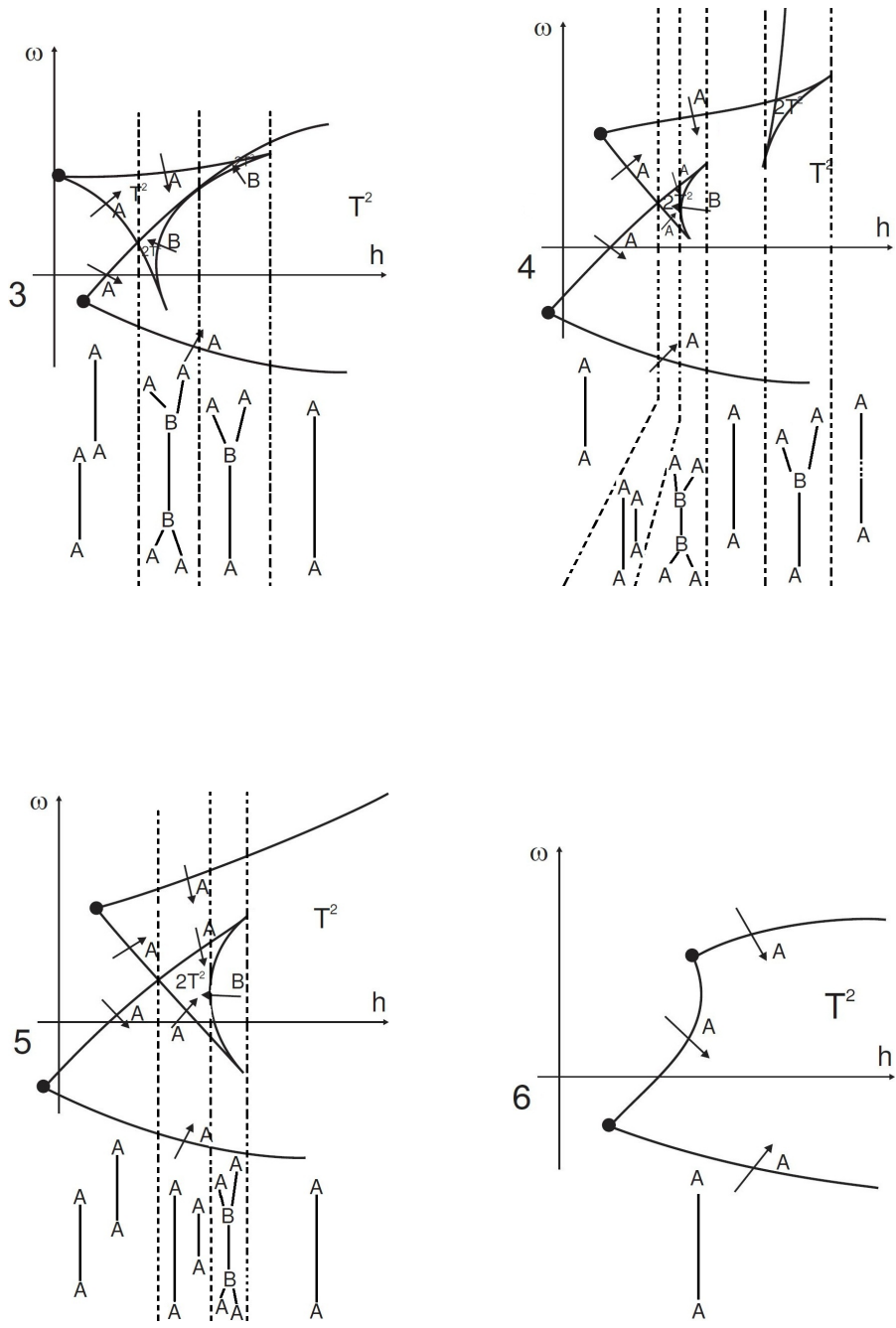


Рис. 3: Молекулы.

4 Инварианты Фоменко-Цишанга

4.1 Инварианты для случая $s = 0$

В этом разделе мы построим полный инвариант Лиувиллевой эквивалентности меченую молекулу Фоменко-Цишанга. Определение меток описано в книге "Интегрируемые гамильтоновы системы" [1].

Для построения меток будет использован метод круговых молекул, описание его можно найти в работах [1, 5]. После того, как метки для круговых молекул будут найдены будет произведена склейка. Так как при $c > 0$, $k^2 > \frac{4c}{\sqrt{c+1}}$, а также при $-1 < c < 0$ для случая несмещенного центра масс точки $\gamma_3 = \pm 1$ имеют особенность типа центр-центр, то, согласно теореме 9.1 книги [1], круговая молекула имеет метку $r = 0$. Таким образом, на диаграммах, где присутствует лишь одна особая точка типа центр-центр, изоэнергетические молекулы типа $A - A$ имеют r -метку равную нулю. То есть, по предложению 4.3 из [1], 3-многообразие с топологической точки зрения является трехмерной сферой S^3 .

Как следует из теоремы 5 работы Ивочкина связные компоненты изоэнергетических поверхностей могут быть только вида: S^3 , $\mathbf{R}P^3$, $S^1 \times S^2$, также в там приведены бифуркационные диаграммы на плоскости (h, k) для случая $-1 < c < 0$, $J > 1$ она представлена на рисунке 4 справа. Значит, диаграмм на плоскости (h, ω) имеет место переход от S^3 к $\mathbf{R}P^3$.

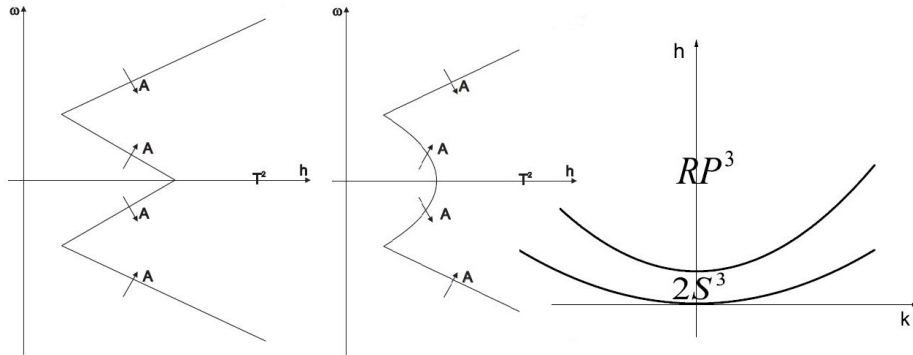


Рис. 4: случай $-1 < c < 0$

Зная это, из предложения 4.3 книги [1] заключаем, что метки $r = 0$, $\varepsilon = \pm 1$ и $r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Аналогичные рассуждения для случая $c > 0$, $0 < J < 1$ приводят

нас к следующим выводам. Рассмотрим бифуркационные диаграммы на рисунке 5, при движении по возрастанию значения интеграла энергии, имеет место переход от $S^1 \times S^2$ к RP^3 . Тогда для меток молекул характерны две возможности: $r = \infty, \varepsilon = -1$ и $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = \pm 1$. Во всех рассмотренных случаях для многообразий S^3, RP^3 знак s-метки зависит от ориентации многообразия, так что можно выбрать $\varepsilon = +1$.

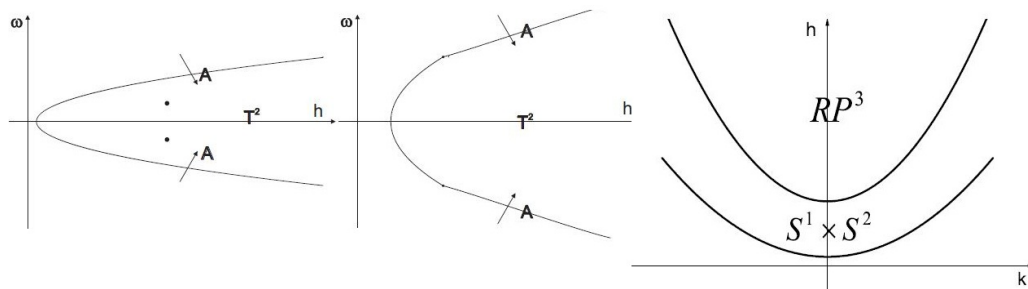


Рис. 5: случай $c > 0$

Соответствующие метки приведены на рисунках 6 и 7, способ изображения аналогичен способу, примененному в предыдущем пункте.

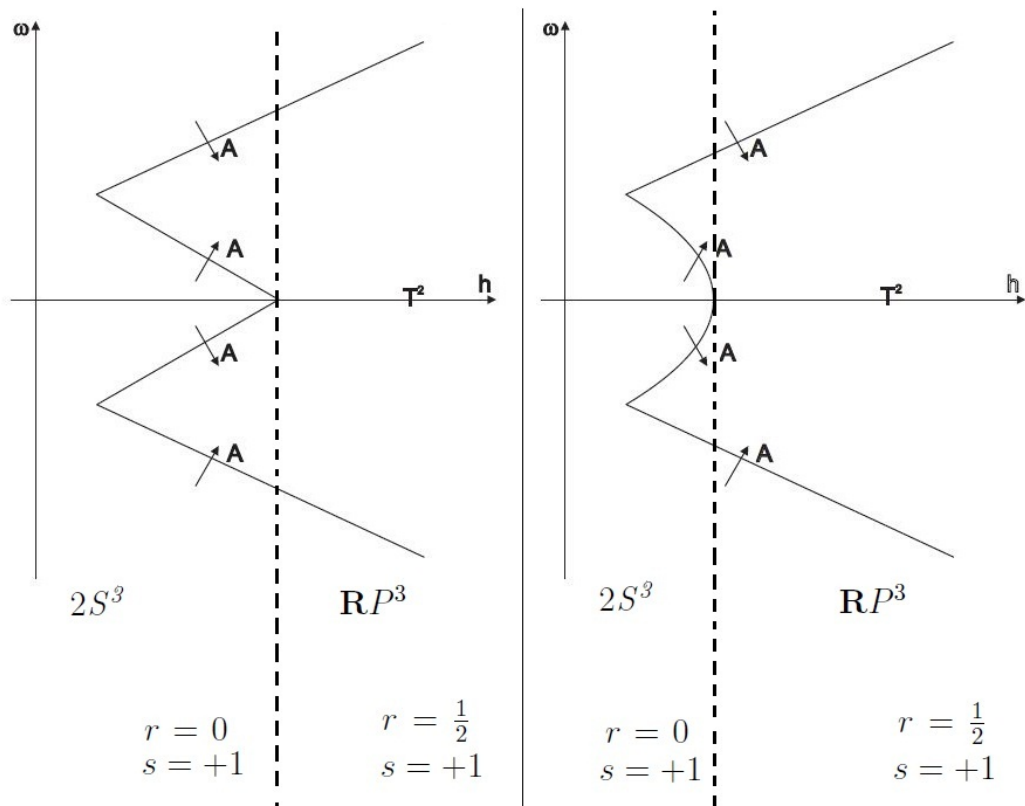


Рис. 6: первый случай

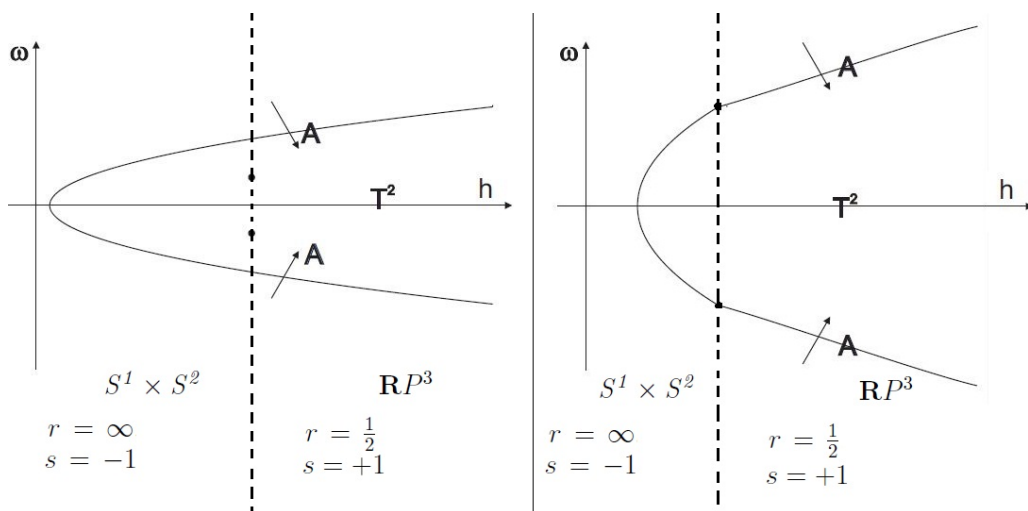


Рис. 7: второй случай

4.2 Инварианты для случая произвольного s

Сформулируем два предложения, доказанных Морозовым [13] стр. 57:

Предложение 1: На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты метки r равны ∞ . На ребрах, соединяющих атом A с седловым, метки r конечны. В обоих случаях метки ε равны $+1$.

Следствие: Матрица слейки на ребрах "седло-седло" круговой молекулы вырожденной круговой орбиты всегда равна \mathbf{K} , где $k \in \mathbf{Z}$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix}$$

Предложение 2: Пусть точка z соответствует вырожденной одномерной орбите, а её окрестности бифуркационная диаграмма представляет собой гладкую кривую с точкой возврата в z , меняющую при этом тип 3-атома с B на A . Тогда на ребре круговой молекулы $B - A$ метка $r = 0$.

Припишем ребрам бифуркационной диаграммы следующие индексы: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ - отвечают бифуркациям типа γ_1, γ_2 - отвечают бифуркациям типа B . K_1, K_2 - вырожденные двумерные точки.

Заметим также, что молекула типа $A - A$ вблизи особых точек типа центр-центр имеет $r = 0$, как молекула низких энергий, т.к. является S^3 .

За $r[x - y]$ условимся обозначать r -метку между x и y .

Тогда $r[\alpha_1 - \beta_1] = 0$ по 1, $r[\alpha_2 - \beta_2] = 0$ по 2, $r[\beta_1 - \alpha_3] = 0$.

Аналогично молекула $A - A$ больших энергий представляет собой RP^3 , т.е. её r -метка равна $\frac{1}{2}$.

Согласно теореме Морозова круговая молекула вблизи точек возврата имеет вид как показано на рисунке 9, там же указаны метки r и ε .

Таким образом для вычисления меток осталось воспользоваться правилом сложения меток сформулированным в книге Болсинова, Фоменко Интегрируемые гамильтоновы системы [1].

Утверждение 1: r -метки для всех возможных молекул изображены на рис. 11

Доказательство:

При низких энергиях изоэнергетическое многообразие S^3 , ему соответ-

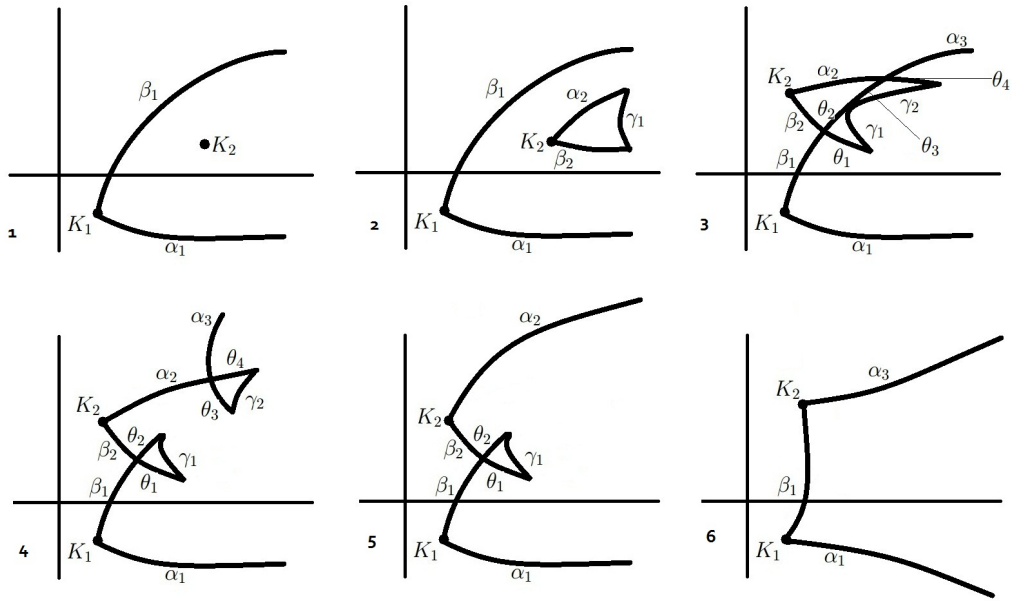


Рис. 8: Названия

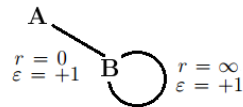


Рис. 9: Круговая молекула точки возврата

ствует молекула $A - A$ и как было отмечено выше для нее g -метка равна 0. Аналогично большим значениям энергии соответствуют молекулы $A - A$ с g -меткой $1/2$, т.к. данные многообразие является RP^3 . На рис. 11.7 появляется метка ∞ , т.к. для данной молекулы $A - A$ граничные торы принадлежат одной и той же дуге. Зная метку, можно определить, что изоэнергетические многообразия в данной области являются произведением $S^1 \times S^2$. Двигаясь по увеличению энергии трехмерное многообразие перестраивается в S^3 , т.к. встречает на своем пути фокусную особенность (точка фокус-фокус обладает матрицей монодрамии $\begin{pmatrix} 10 \\ k1 \end{pmatrix}$, как это отмечалось выше), пользуясь правилом сложения, имеем метку равную 0.

Таким образом нерассмотренными остались лишь молекулы, содержа-

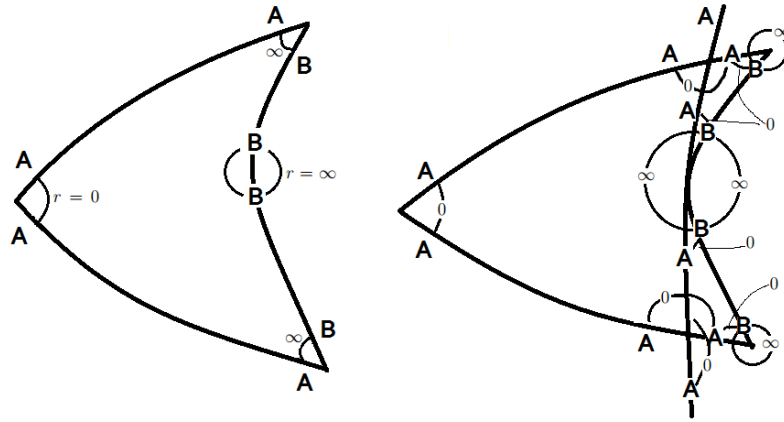


Рис. 10: Круговая ласточкина хвоста

щие атомы B и "средняя" молекула на четвертой диаграмме. Метки на коротких ребрах $A - B$ равны нулю по предположению 2 и на длинных они также равны нулю. Для вычисления мы воспользовались правилом сложения меток. Рассмотрим рис.10 правый, там видно, что длинное ребро $A - B$ получается слиянием двух круговых молекул, одна из которых имеет r -метку 0, а вторая бесконечность, в результате получаем r -метку равную нулю.

На ребре $B - B$ метка равна бесконечности, т.к. граничные торы совпадают следовательно матрица перехода - единичная. Для оставшейся молекулы r -метка определяется по непрерывности: рассмотрим переход от диаграммы 4 к диаграмме 5, как мы можем заметить "средняя" молекула на четвертой диаграмме переходит в молекулу больших энергий на пятой, т.к. малый треугольник, отделившись от большого (см. диаграмму 3), уходит на бесконечность и там пропадает.

Утверждение 2: ε -метки для всех возможных молекул изображены на рис. 12

Доказательство:

Как было показано в книге Болсинова, Фоменко [1] ε -метка для тех случаев, когда изоэнергетическое многообразие Q_h^3 является S^3 или RP^3 зависит от выбора ориентации, по этому без ограничения общности можно полагать ε -метку равную +1.

А для многообразий $S^1 \times S^2$ равна -1.

На ребрах $A - B$ метка равна +1 по предложению 1.

Утверждение 3: n -метки существуют только для тех изоэнергетических молекул, многообразие которых представляет собой RP^3

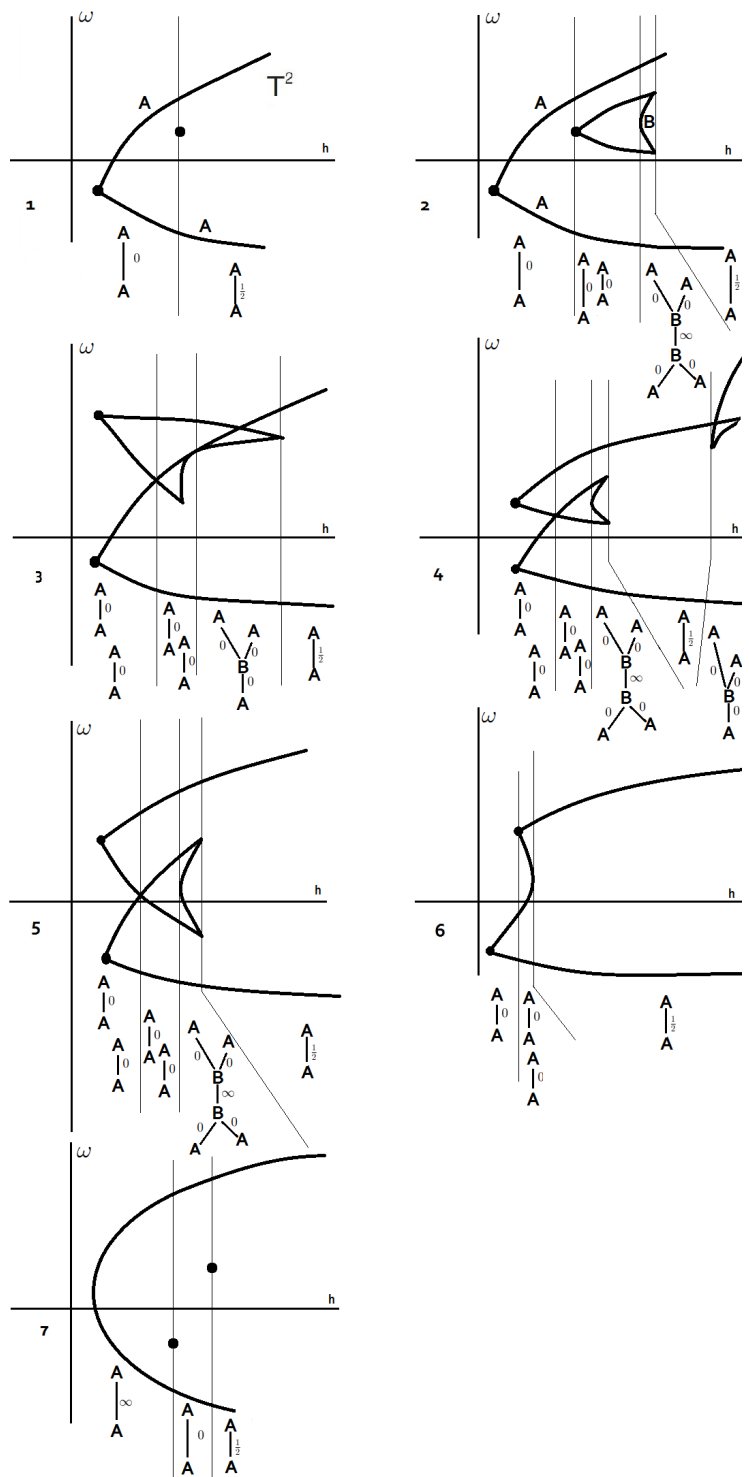


Рис. 11: g-метки для всех случаев

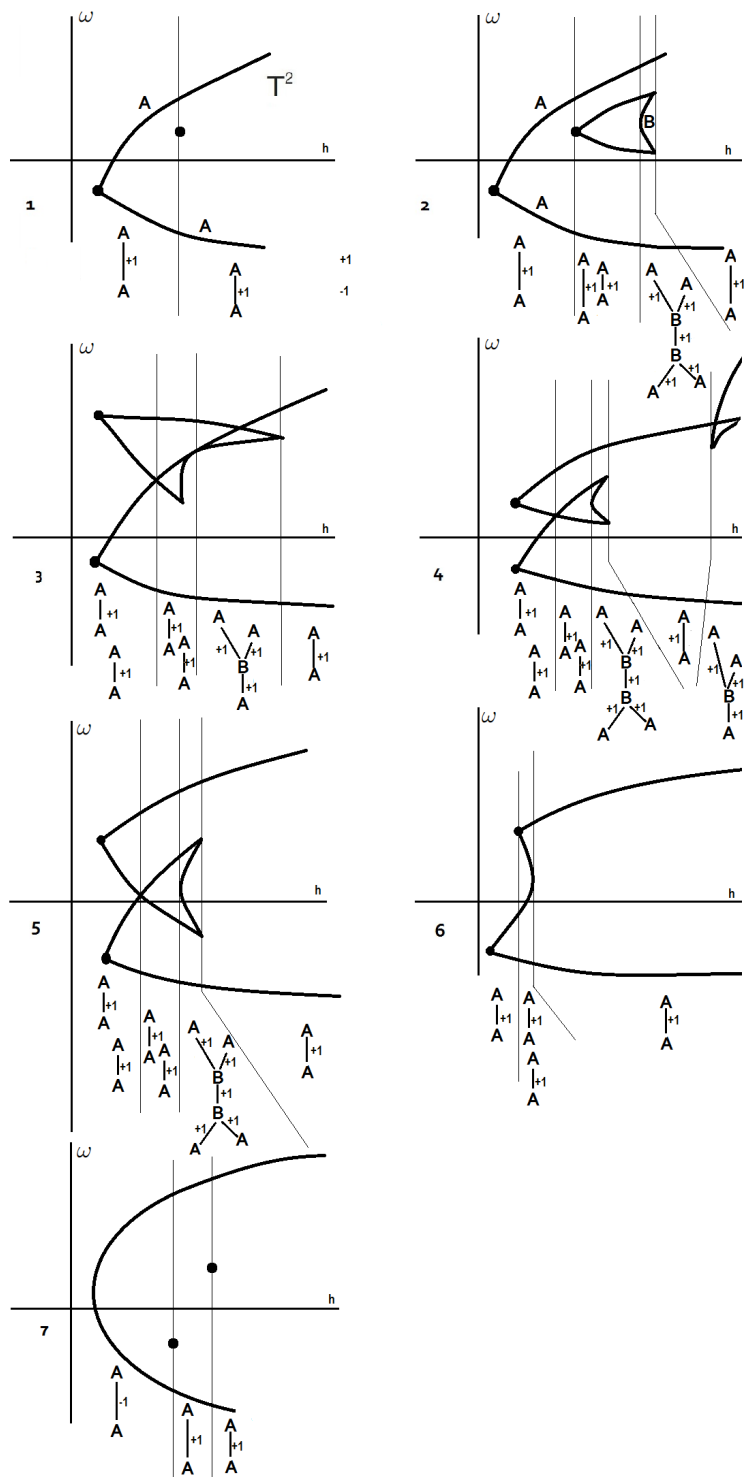


Рис. 12: ϵ -метки для всех случаев

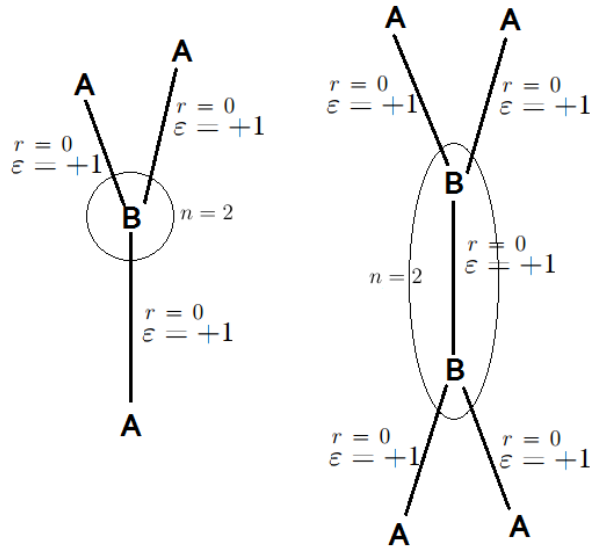


Рис. 13: n -метки для всех случаев

Доказательство:

По определению n -метки существуют для семей, т.е. таких молекул, где r -метка на ребрах $A - B$ равна нулю, а метка на ребре $B - B$, если такое имеется, равна бесконечности.

Метка считается по формуле Топалова, для данного случая она равна 2.

Таким образом построены все инварианты Фоменко-Цишанга, теперь воспользуемся теоремой о лиувиллевой эквивалентности и укажем несколько систем эквивалентных нашей.

5 Известные случаи эквивалентности

В данном разделе мы постарались собрать все известные нам системы, которые лиувиллево эквивалентны нашей. Сравнение проводилось с примерами, содержащимися в книге Интегрируемые гамильтоновы системы [1], а также в работах учеников Анатолия Тимофеевича Фоменко. Весьма вероятно, что список должен быть куда больше приведенного здесь. Жуковский обнаружил обобщение интегрируемого случая Эйлера, с гамильтонианом $H = \sum \frac{(S_i + \lambda_i)^2}{2A_i}$, $i \in 1, 2, 3$. Дополнительный интеграл

такой же, как и в случае Эйлера $K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. А.А. Ошемков построил бифуркационные диаграммы [14], а П.Й. Топалов посчитал инварианты Фоменко-Цишанга результаты приведены в книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [1].

Теорема 1: Система однородного динамически симметричного эллипсоида на гладкой плоскости полностью вкладывается, в смысле лиувиллевой эквивалентности, в систему тяжелого гиростата Жуковского. Т.е. для любого значения параметров задачи эллипсоида существуют такие параметры системы Жуковского для которых инварианты совпадают.

Для проверки данной теоремы предлагаем взглянуть на список топологии лиувиллевых слоений для случая Жуковского (см. [1] том 2, глава 5, стр 281-283, таблица 5.6) и сравнить его с приведенным в данной работе.

Рассмотрим систему геодезических потоков на поверхности вращения в R^3 , она является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Функция $r \cos \phi$ постоянна вдоль каждой геодезической, т.е. является первым интегралом.

Е.Кантонистова определила инварианты для системы на поверхности вращения, заданной парой функций $(f(r), V(r))$, где $V(r) = r$, $f(r) = \sqrt{(1 - r^2)(0.3 + 20r^2)}$.

Теорема 2: Система эллипсоида на гладкой плоскости при некоторых значениях параметров лиувиллево эквивалентна системе геодезических потоков, рассмотренных Еленой Кантонистовой.

Замечание: Отметим, что системы не вкладываются друг в друга, т.е. при некоторых значениях параметров они эквивалентны, но для каждой системы есть "уникальные" уровни - такие, которых нет в другой системе.

Из теорем 1 и 2 по транзитивности имеем:

Следствие: Система геодезических на поверхности вращения при некоторых значениях интегралов лиувиллево эквивалентна системе гиростата Жуковского.

6 Выводы

Подведем итоги проделанной работы. Были разобраны и уточнены теоремы из кандидатской диссертации М.Ю.Ивочкина [2]. По всем полученным Ивочниным бифуркационным диаграммам построены молекулы. Построены инварианты Фоменко-Цишанга, а также обнаружены системы лиувуллево эквивалентные нашей.

7 Программа дальнейших исследований

Необходимы исследования устойчивости бифуркации Хопфа, которая наблюдается в задаче. Также следует рассмотреть связь задачи с другими механическими проблемами, в том числе, и неинтегрируемыми, например, с движением эллипсоида по шероховатой плоскости (случай неголомомных связей). Профессор Алексей Викторович Болсинов говорил об отсутствии топологических различий в этих задачах. Финальным этапом исследования можно считать составление списка устойчивых и неустойчивых положений равновесия, а также их механическая интерпретация.

Интересно будет понять в связи с чем система, рассмотренная нами, вкладывается в задачу о движении гиростата Жуковского. Возможно, удастся обнаружить объяснение этому факту, а также красивые следствия из него.

Благодарности

Хочу выразить глубочайшую благодарность своим научным руководителям Анатолию Тимофеевичу и Александру Владиленовичу за поставленную задачу, многочасовые обсуждения, подбор литературы, проявленное внимание, а также за моральную поддержку.

Елене Александровне Кудрявцевой за важные комментарии, помощь в разборе доказательств.

Андрею Александровичу Ошемкову за помощь в подборе литературы, а также за ценные замечания.

Антону Михайловичу Изосимову за помощь в подборе литературы, в том числе на иностранных языках.

Сотрудникам кафедр Дифференциальной геометрии и Теоретической механики за обсуждения и комментарии.

Список литературы

- [1] *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы, т.1, 2, РХД, Ижевск, 1999
- [2] *Ивочкин М.Ю.* Интегрируемость и неинтегрируемость уравнений движения тяжелого тела эллипсоидальной формы на гладкой горизонтальной плоскости
- [3] *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений, 2-е изд., МЦНМО, М., 2004
- [4] *Кудрявцева Е.А., Лакиштанов Е.Л.* Классификация особенностей и бифуркации критических точек четных функций
- [5] *Болсинов А.В., Рихтер П. Фоменко А.Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42
- [6] *Брюно А.Д.* Теория нормальных форм уравнений Эйлера-Пуассона
- [7] *Поль А.* Теоретическая механика, т.1,2, издательство Физматлит, 1960 год.
- [8] *Вильке В.Г.* Теоретическая механика, Москва, издательство МГУ, 1991 год.
- [9] *Коробов М.В.* Вывод именных уравнений
- [10] *Смейл С.* Топология и механика УМН, 27:2(164) (1972), 77–133
- [11] *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс лекций по дифференциальной геометрии и топологии. — Москва, Издательство «Факториал Пресс», 2000. — 448 с. ISBN 5-88688-048-8.
- [12] *Гуревич В., Волман Г.* Теория размерности
- [13] *Морозов П.В.* Тонкая лиувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела
- [14] *Ошемков А.А.* Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 25, часть 2, издательство Московского университета, 1993 год, 23-109.