

1 Введение

1.1 История вопроса

Понятие атома было введено А.Т. Фоменко для качественного изучения гамильтоновых систем (см. [1]). Атом описывает бифуркацию торов Лиувилля в прообразе критического значения функции морса, определенной на симплектическом многообразии. В случае систем с двумя степенями свободы возникают трехмерные изоэнергетические многообразия (при $H = \text{const}$). Тем самым 3-атомы (то есть трехмерные атомы (см. [1], [2])) классифицируют особенности слоений Лиувилля. В [1], [2] доказано, что трехмерные атомы однозначно, с точностью до гомеоморфизма, кодируются двумерными атомами.

А.Т. Фоменко была поставлена задача: "Описать 2-атомы, соответствующие функциям с вырожденными критическими точками". В качестве первого важного шага было решено исследовать атомы с одной вырожденной критической точкой степени $2n$. Оказывается, что изучение 2-атомов можно свести к изучению хордовых диаграмм (с точностью до симметрии).

В [3], [4] вычислено количество хордовых диаграмм с точностью до поворотов (см. [3], Khruzin) и поворотов и симметрий (см. [4], Манойло). В работах [3] и [4] вопрос о хордовых диаграммах, соответствующих ориентируемым атомам не ставился.

Также есть работы по построению алгоритмов нахождения на компьютере хордовых диаграмм с точностью до поворотов, например в статьях [5] и [6]. В результате работы алгоритмов выдаются кодировки подходящих хордовых диаграмм. В.О.Мантуров в статье [7] с помощью языка *Mathematica 3.0* перечислил хордовые диаграммы с $2n$ вершинами и привел их для $n = 5$.

Для обычных (не черно-белых) хордовых диаграмм их количество, найденное в данной работе совпадает с результатами работ [3], [4] для небольших размерностей (до $n=5$). Отметим, что количество хордовых диаграмм растет очень быстро, например количество хордовых диаграмм с точностью до поворотов при $n = 12$ равно 13176573910, как указано в работе [5] Joe Sevada. Асимптотика роста найдена А.Khruzin в работе [3] и равна $(2n-1)!!/(2n)$ для хордовых диаграмм с точностью до поворотов и $(2n-1)!!/(4n)$ для хордовых диаграмм с точностью до поворотов и симметрий. Нестрогой причины появления таких чисел таковы: количество хордовых диаграмм с фиксированной нумерацией вершин равно $(2n-1)!!$, при $n \rightarrow \infty$ практически все хордовые диаграммы не имеют симметрий и имеют период $2n$, а любая хордовая диаграмма, имеющая период $2n$ и не имеющая осей симметрий участвует в выражении $(2n-1)!!$ ровно $2n$ раз с точностью до поворотов и $4n$ раз с точностью до поворотов и симметрий. Аналогично, количество черно-белых диаграмм с точностью до поворотов равно $n!/(2n)$ и с точностью до поворотов и симметрий — $n!/(4n)$, т.к. количество черно-белых хордовых диаграмм с фиксированной нумерацией вершин равно $n!$ (берем первую черную вершину, ей соответствует одна из n белых, следующей черной — одна из $n-1$ белой и т.д.). Отсюда можно сделать вывод, что доля количества классов эквивалентности ориентируемых вырожденных атомов среди всех атомов стремится к 0, так как $\frac{(2n-1)!!}{4n} / \frac{n!}{4n} \rightarrow \infty$ и $\frac{(2n-1)!!}{2n} / \frac{n!}{2n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Для хордовых диаграмм с фиксированным направлением обхода и началом отсчета можно рассматривать ориентируемые поверхности им соответствующие, получающиеся приклеивкой непопереченных ленточек вместо хорд к границе диска и дальнейшей заклеивкой граничных окружностей дисками. Таким образом, каждой хордовой диаграмме можно поставить в соответствие число — род соответствующей хордовой диаграмме поверхности. Формула Харера-Загира дает характеристическую функцию числа хордовых диаграмм рода g (см. [8]), а также в работе [9] показано, что эти числа распределены нормально с математическим ожиданием $(n - \ln n)/2$ и дисперсией $(\ln n)/4$.

Понятие атома также представляет интерес для теории узлов и комбинаторики. Например в теории инвариантов Васильева черно-белые хордовые диаграммы, рассматриваемые в теореме 3.1.1 соответствуют хордовым диаграммам с четными хордами.

1.2 Результаты данной работы

В нашей работе был проведен анализ 2-атомов с одной критической точкой. Задача была сведена к дискретной путем доказательства существования биекции между классами эквивалентности 2-атомов (с точностью до гомеоморфизма) и множеством хордовых черно-белых хордовых диаграмм (с точностью до поворотов и симметрий). Доказательство приведено в Утверждении 2.2.1.

Для получения количества хордовых диаграмм степени $2n$ (с точностью до поворотов и отражений) в основу были взяты труды [3] и [4], как результат сформулирована Теорема 3.1.1. В Теореме 3.1.1 получены рекуррентные соотношения, на что Никоновым И.М. было замечено, что возможно представление данных формул в нерекуррентном виде, в следствии чего была получена Теорема 3.1.2

Также в работе приведены примеры подсчета классов эквивалентностей вырожденных 2-атомов с одной критической точкой для небольших n .

2 Постановка проблемы

2.1 Определение атома

Для начала введем понятия вырожденного седлового атома с одной вершиной.

Определение 2.1.1 (Вырожденный седловой атом с одной вершиной степени $2n$ (2-атом)). Упорядоченная пара (P, K) , где P - компактная связная двумерная поверхность с краем, а K - это вложенные в нее граф, у которого одна вершина и n ребер ($n > 2$), называется “вырожденным седловым атомом с одной вершиной”, если:

1) каждая из компонент связности $P \setminus K$ гомеоморфна кольцу $I \times S$, где I — это полуинтервал, а S — это окружность;

2) каждое кольцо можно покрасить в один из двух цветов так, что к каждому ребру графа K в поверхности P примыкали кольца разных цветов. Степень атома определим, как число $2n$.

При таком определении легко наследуется понятия “ориентируемости” и “эквивалентности” из классической теории поверхностей.

Определение 2.1.2. *Ориентируемый атом* Атом является ориентируемым, если ориентируема соответствующая поверхность P .

Определение 2.1.3 (Эквивалентность двух атомов). *Атомы являются эквивалентными, если существует гомеоморфизм соответствующих пар (цвета раскраски при этом можно одновременно менять на противоположные).*

Теперь мы можем рассматривать классы эквивалентности 2-атомов и возникает естественный вопрос: сколько всего классов эквивалентности? Для решения данной задачи мы разобьем её, естественным образом, на задачи подсчета отдельно количества классов эквивалентности ориентируемых 2-атомов и неориентируемых.

Для полноценного сведения задачи к комбинаторной очень удобным оказалось понятия хордовой диаграммы и черно-белой хордовой диаграммы.

2.2 Сведение задачи к хордовым диаграммам

Определение 2.2.1 (Хордовая диаграмма с $2n$ вершинами). *Хордовой диаграммой с $2n$ вершинами называется множество из $2n$ точек в вершинах правильного многоугольника и окружности, которой они принадлежат, занумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до $2n$, с проведенными между ними отрезками, называемыми хордами и разделяющими точки на пары. Точку с номером 1 называют началом отсчета. Причем многоугольник задан на стандартной плоскости \mathbb{R}^2 , его центр совпадает с точкой $(0, 0)$ и вершина с номером 1 имеет координату $(0, 1)$.*

Хордовые диаграммы можно отождествлять с 2-атомами с одной особенностью, в то время, как для описания ориентируемых 2-атомов наилучшим образом подходит понятие “черно-белой хордовой диаграммы”:

Определение 2.2.2 (Черно-белая хордовая диаграмма с $2n$ вершинами). *Черно-белой хордовой диаграммой с $2n$ вершинами называется хордовая диаграмма с раскрашенными поочередно в черный и белые цвета вершинами, в которой каждая хорда соединяет вершины только разного цвета.*

Замечание 1. Раскраска не фиксирована, то есть ее можно одновременно менять на противоположную у всех вершин. Нам будет важно только то, что хорды соединяют вершины из разных классов. Следующие определения вводятся аналогично для черно-белых диаграмм.

Заметим также, что так как 2-атомы мы рассматриваем с точностью до гомеоморфизма, то и на множестве всех хордовых диаграмм нужно ввести некоторые симметрии: поворот на угол $\frac{2\pi k}{n}$ относительно центра окружности и отражение относительно основного диаметра.

Определение 2.2.3 (Эквивалентность двух 2-атомов). *Две хордовые диаграммы называются эквивалентными с точностью до поворотов и отражений, если существует поворот или отражение относительно оси, проходящей через начало координат, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (или их композиция), переводящая первую хордовую диаграмму во вторую (без учета нумерации вершин).*

Рационально будет рассматривать не все хордовые диаграммы, а классы эквивалентности относительно перечисленных выше симметрий.

Теперь покажем сходство двух множеств: множества классов эквивалентности вырожденных седловых атомов с одной вершиной степени $2n$ и множества классов эквивалентности хордовых диаграмм с $2n$ вершинами (классы эквивалентности относительно введенных на множествах симметрий).

Утверждение 2.2.1. *Существует естественная биекция между множеством классов эквивалентности вырожденных седловых атомов с одной вырожденной точкой и множеством классов эквивалентности хордовых диаграмм с $2n$ вершинами.*

Доказательство. Построим отображение из класса эквивалентных атомов в класс эквивалентных, с точностью до поворота и симметрий, хордовых диаграмм и покажем, что оно является биекцией. Рассмотрим гомеоморфный окрестности критической точки атома степени $2n$ диск в стандартной плоскости \mathbb{R}^2 с центром в начале координат и радиусом 1. На границе диска задана последовательность точек пересечения ребер графа K и диска, перенумеруем точки по часовой стрелке числами от 1 до $2n$, выбрав любую из них в качестве первой. Известно, какие пары точек соединены ребром в графе K , а значит и в последовательности нумерованных вершин. Построим соответствующему атому хордовую диаграмму с точностью до поворотов и отражений. На окружности радиуса 1 в стандартной плоскости расположим точки в вершинах правильного многоугольника, занумеруем их по часовой стрелке так, что вершина с номером 1 имеет координату $(0, 1)$ и построим хорды между вершинами с теми номерами, которые соединены ребром графа K в последовательности перенумерованных вершин на диске. Покажем проводимые преобразования на примере:

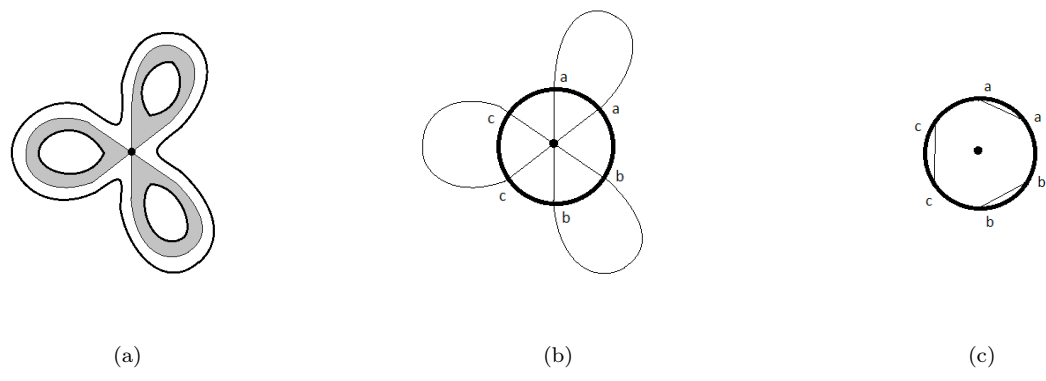


Рис. 1: Пример построения отображения: (d) пример вырожденного седлового атома степени 6; (c) соответствие между полуребрами графа K вырожденного атома и вершинами хордовой диаграммы; (a) соответствующая атому хордовая диаграмма.

Покажем корректность построенного отображения, для этого нужно показать, что эквивалентные атомы перейдут в эквивалентные с точностью до поворотов и симметрий хордовые диаграммы.

Гомеоморфизм атомов можно ограничить на окрестность критической точки, поэтому, если рассмотреть для двух эквивалентных атомов соответствующие им диски и построенные по ним хордовые диаграммы, то хордовые диаграммы могут отличаться друг от друга поворотом и отражением (ввиду неоднозначности выбора точки начала отсчета и направления обхода на граничных окружностях дисков).

Докажем биективность построенного отображения. Для любой заданной хордовой диаграммы построим единственный с точностью до гомеоморфизма соответствующий ей атом. Пусть есть хордовая диаграмма с $2n$ вершинами, “переносим ребра во внешнюю сторону окружности”, проводим отрезки, соединяющие вершины с началом координат. На этом этапе получаем граф K и окрестность критической точки атома, к которой впоследствии будем приклеивать ленточки. Временно раскрасим вершины хордовой диаграммы в черный и белый цвета в шахматном порядке. С каждой частью ребра графа K , соединяющей вершины хордовой диаграммы и находящейся вне окружности проведем следующую операцию: если она соединяет вершины разных цветов, то приклеиваем к диску на данных местах неперекрученную ленточку с нарисованной на ней частью ребра графа K , иначе — перекрученную. Далее красим сектора диска в шахматном порядке в черный и белый цвета и продолжаем раскраску на компоненты связности многообразия $P \setminus K$. Так как при построении атома мы можем забыть про нумерацию вершин диска, в котором располагаются $2n$ концов полуребер, то атом возникает единственный с точностью до гомеоморфизма. Проиллюстрируем сказанное на примере:

Так установлено взаимнооднозначное соответствие между классами эквивалентности атомов и хордовых диаграмм.

□

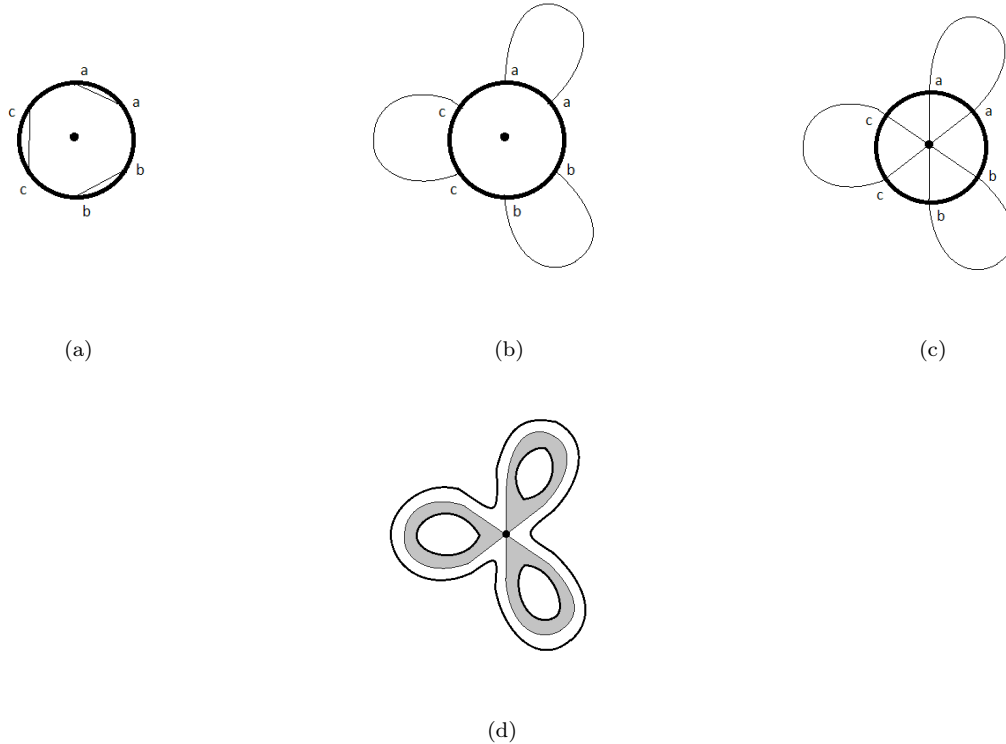


Рис. 2: Пример построения отображения: (a) хордовая диаграмма; (b) “пробрасываем хорды”; (c) построение графа K ; (d) соответствующий атом.

3 Подсчет количества классов эквивалентности хордовых диаграмм с $2n$ вершин с точностью до симметрий

3.1 Формулы для нахождения числа классов эквивалентностей хордовых диаграмм с $2n$ вершин с точностью до симметрий

Будем считать, что у нас есть хордовая диаграмма с $2n$ вершинами, тогда

Определение 3.1.1 (Период хордовой диаграммы). *Периодом (соотв. наименьшим положительным) хордовой диаграммы будем называть количество (соотв. минимальное положительное) вершин, на которое нужно ее повернуть так, чтобы все хорды исходной диаграммы совпали с хордами повернутой. Хордовые диаграммы с наименьшим периодом a называют “диаграммой типа $[a]$ ”.*

Определение 3.1.2 (Расстояние от вершины x до вершины y). *Минимальное неотрицательное количество вершин, на которое нужно повернуть хордовую диаграмму так, чтобы вершина x перешла в y называется расстоянием от x до y .*

Пусть :

$A(a, b)$ — это количество хордовых диаграмм типа $[a]$ с ab вершинами с точностью до поворотов;

$B(2n)$ — это количество хордовых диаграмм с $2n$ вершинами с точностью до поворотов и имеющих ось симметрии;

$D(2n)$ — это количество хордовых диаграмм с $2n$ вершинами с точностью до поворотов и отражений;

Теорема 3.1.1. *Числа $A(a, b)$, $B(2n)$ и $D(2n)$ однозначно определяются следующими рекуррентными соотношениями:*

$$D(2n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{a \leq 2n, a|2n} A(a, \frac{2n}{a}) + B(2n) \right).$$

$$A(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} (f(a, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'})), & 2 \nmid b, \\ \frac{1}{a} (\sum_{i=0}^{\frac{a}{2}} C_a^{2i} f(a - 2i, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'})), & 2 | b, 2 | a, \\ \frac{1}{a} (\sum_{i=0}^{\frac{a-1}{2}} C_a^{2i+1} f(a - 2i - 1, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'})), & 2 | b, 2 \nmid a. \end{cases}$$

$$B(2n) = C_1(2n) + C_1(2n - 2),$$

где

$$f(a, b) = b^{\frac{a}{2}} (a - 1)!!,$$

$$C_1(2n) = \sum_{k \leq n, 2 | (n-k)} C_n^k f(n - k, 2),$$

причем $f(0, b) = 1$.

Также сформулируем теорему, в которой числа $A(a, b)$ выражаются нерекуррентными формулами:

Теорема 3.1.2. Числа $A(a, b)$, $B(2n)$ и $D(2n)$ однозначно определяются следующими явными формулами:

$$D(2n) = \frac{1}{2} (\sum_{a \leq 2n, a | 2n} A(a, \frac{2n}{a}) + B(2n)).$$

$$A(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sum_{a' | a} \mu(a') f(\frac{a}{a'}, ba'), & 2 \nmid b, \\ \frac{1}{a} \sum_{a' | a} \mu(a') \sum_{i=0}^{\frac{a}{a'}} C_{\frac{a}{a'}}^{2i} f(a' - 2i, ba'), & 2 | b, 2 | a, \\ \frac{1}{a} \sum_{a' | a} \mu(a') \sum_{i=0}^{\frac{\frac{a}{a'}-1}{2}} C_{\frac{a}{a'}}^{2i+1} f(\frac{a}{a'} - 2i - 1, ba'), & 2 | b, 2 \nmid a. \end{cases}$$

$$B(2n) = C_1(2n) + C_1(2n - 2),$$

где

$$f(a, b) = b^{\frac{a}{2}} (a - 1)!!,$$

$\mu(x)$ - функция Мебиуса

$$C_1(2n) = \sum_{k \leq n, 2 | (n-k)} C_n^k f(n - k, 2),$$

причем $f(0, b) = 1$.

Отметим, что явные формулы для чисел $A(a, b)$ имеют преимущества, в случае, если есть необходимость посчитать количество 2-атомов с достаточно большим наименьшим периодом, совершив наименьшее количество операций. Но рекуррентные формулы остаются в плюсе, при необходимости получить полную картину, за счет отсутствия в записи формулы Мебиуса, которая трудоемко реализуется на компьютерах.

Доказательства формул будут приведены ниже.

3.2 Доказательство рекуррентных соотношений для $A(a, b)$

В хордовой диаграмме типа $[a]$ выберем первые a подряд идущих вершин. По тому, с какими точками они соединены, можно восстановить всю хордовую диаграмму. Таким образом, все точки разбиты на $b = 2n$ периодов, в каждом из которых a точек, которые будем нумеровать от 1 до a . Период, в котором лежит начало отсчета, занумеруем числом 1. Оставшимся периодам сопоставим натуральные числа $2, \dots, b$ по часовой стрелке. Возьмем точку с номером i в первом периоде, и пусть она соединена с точкой A . Сопоставим точке i пару чисел (j, k) , где j -номер точки A в своем периоде и k — номер периода, в котором она находится. Заметим, что таким кодированием мы просто показали, что расстояние между точкой с номером i в любом периоде до ее пары равно $(k - 1)a + j - i$. Таким образом, каждой хордовой диаграмме типа $[a]$ мы сопоставили последовательность из a пар чисел. В дальнейшем иногда мы будем обозначать пару одной буквой, а не двумя. Так, запись $x = y$ может обозначать то, что пара x совпадает с парой y .

Лемма 3.2.1. Пусть дана хордовая диаграмма типа $[a]$. Если при повороте на k вершин последовательности, отвечающие исходной и полученной хордовым диаграммам, совпадают, то k кратно a .

Доказательство. Так как наименьший положительный период хордовой диаграммы равен a , без ограничения общности будем считать, что поворот происходит на $0 \leq k \leq a$ вершин. Пусть при повороте на k вершин получается хордовая диаграмма, которой сопоставляется та же последовательность из a пар, что и исходной диаграмме. Обозначим подпоследовательность из k пар, соответствующих точкам периода с номерами $1, \dots, k$, через c .

Так как сдвинутая на k единиц последовательность начинается также с подпоследовательности c , то исходная последовательность начинается с двух подряд стоящих подпоследовательностей c . Возвращаемся к сдвинутой последовательности, она начинается с двух подряд стоящих последовательностей, значит, исходная последовательность начинается с трех подпоследовательностей и т.д. На i -ом шаге получаем, что начальная последовательность начинается с i подряд стоящих подпоследовательностей c . Это рассуждение мы можем проводить неограниченное число раз, даже когда $ik > a$, что означает, что k — это период хордовой диаграммы, но $k \leq a$, а a — это наименьший период хордовой диаграммы, значит, $k = 0$, откуда следует утверждение леммы. \square

Теперь докажем следующую формулу:

$$A(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(f(a, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'}) \right), & 2 \nmid b, \\ \frac{1}{a} \left(\sum_{i=0}^{\frac{a}{2}} C_a^{2i} f(a - 2i, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'}) \right), & 2 \mid b, 2 \mid a, \\ \frac{1}{a} \left(\sum_{i=0}^{\frac{a-1}{2}} C_a^{2i+1} f(a - 2i - 1, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'}) \right), & 2 \mid b, 2 \nmid a. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда b - нечетно.

Возьмем точку с номером $i \in \{1, \dots, a\}$ и посмотрим, какая пара (j, k) может ставиться ей в соответствие. Номер j может быть любым в $\{1, \dots, a\}$ кроме i , так как иначе вершине с номером i в периоде с номером k ставится в соответствие вершина с номером i в периоде с номером $2k-1 \pmod{b}$. Из чего можно сделать вывод, что $2k-2 = b$, но b нечетно. Таким образом, для первой вершины номер j может принимать $(a-1)$ значений, а k - любое из b значений. То есть, вариантов пар $(a-1)b$. Отметим, что точке с номером j однозначно сопоставляется пара $(1, b-k+2)$. Для следующей вершины аналогично количество возможных пар $(a-3)b$ и т.д. Так как количество шагов равно $\frac{a}{b}$, получаем $f(a, b)$ хордовых диаграмм с (необязательно наименьшим) периодом a . Заметим, что мы посчитали также и “лишние” хордовые диаграммы — это те, у которых минимальный период не a , а $a' \mid a$, где $0 \leq a' \leq a$. Более того, если отождествить хордовые диаграммы, отличающиеся поворотом, то каждую из них мы посчитали ровно a' раз в силу леммы 1. После вычитания “лишних” хордовых диаграмм остается $f(a, b) - \sum_{a' < a, a' | a} a' A(a', \frac{ba}{a'})$ -

это диаграммы, у которых минимальный период равно a . Но опять же, если отождествлять хордовые диаграммы, отличающиеся поворотом, в силу леммы 1 каждую из них мы посчитали a раз, значит, нужно на a разделить. Получаем требуемый ответ.

Рассмотрим случай, когда b - четно. Отличие от случая нечетного b в том, что теперь точке с номером i может быть сопоставлена противоположная вершина в многоугольнике, то есть пара $(i, \frac{b+2}{2})$ ($2k - k$ может быть равно b). Назовем такие точки *особыми*. Тогда появляется зависимость еще и от четности a , так как, если a четное, то особых точек в периоде четное число, а при нечетном a - нечетное.

Пусть в периоде d особых точек, тогда количество диаграмм типа $[a]$ равно $C_a^d f(a-d, b)$. Здесь C_a^d отвечает за то, какие именно точки в периоде особые, а $f(a-d, b)$ считается аналогично первому случаю после исключения особых точек. Таким образом, нами доказана справедливость формулы для вычисления $A(a, b)$.

3.3 Доказательство рекуррентных соотношений для $B(2n)$

До сих пор мы рассматривали хордовые диаграммы только с точностью до поворотов, теперь добавим осевые симметрии. В отличие от $A(a, b)$, для $B(2n)$ подсчет будет проводиться сразу для всей диаграммы без учета минимального периода.

Пусть хордовая диаграмма типа $[a]$ симметрична относительно какой-либо оси. Ось симметрии (или просто ось) может проходить либо через противоположные вершины многоугольника (тогда они соединены хордой), либо между вершинами (следовательно, любые две оси получаются друг из друга поворотом на полуцелое число точек). Изучим, какой вид может иметь период хордовой диаграммы в каждом из этих случаев расположения оси.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 3.3.1. Если a — это минимальный положительный период хордовой диаграммы, то все оси симметрии получаются друг из друга поворотами на целое или полуцелое количество точек, кратное $\frac{a}{2}$.

Доказательство. Пусть хордовая диаграмма симметрична относительно некоторой оси l , а также относительно оси, полученной из l с помощью поворота по часовой стрелке на k точек. Композиция симметрий относительно двух указанных осей — это поворот на $2k$ точек. Она переводит хордовую диаграмму в себя, то есть $2k \mid a$. Из условия о том, что a минимальный период следует лемма. \square

Лемма 3.3.2. *Для $B(2n)$ выполняются следующие соотношения:*

$$B(2n) = C_1(2n) + C_1(2n - 2),$$

где

$$C_1(2n) = \sum_{k \leq n, 2 \mid (n-k)} C_n^k f(n-k, 2).$$

Доказательство. Случай 1: Пусть у хордовой диаграммы существует ось симметрии, проходящая между вершинами. C_1 — это количество хордовых диаграмм (некоторые, возможно, подсчитаны несколько раз, что будет объяснено позже), у которых существует ось симметрии такого типа. По аналогии с подсчетом $A(a, b)$ выберем C_n^k вершин с одной стороны от выбранной оси, которым будут соответствовать вершины, симметричные относительно данной оси. Оставшимся $(n-k)$ точкам будут соответствовать $f(n-k, 2) = 2^{\frac{n-k}{2}}(n-k-1)!!$ вариантов сопоставления точек. Причем $2 \mid (n-k)$. Таким образом, выражение для C_1 таково:

$$C_1(2n) = \sum_{k \leq n, 2 \mid (n-k)} C_n^k f(n-k, 2).$$

Случай 2: Пусть у хордовой диаграммы существует ось симметрии, проходящая через противоположные вершины многоугольника. C_2 — это количество хордовых диаграмм (аналогично первому случаю некоторые, возможно, подсчитаны несколько раз), у которых существует ось симметрии такого типа. Подсчет аналогичен первому случаю, за исключением того, что в начальный момент две вершины уже “заняты” (через них уже проходит хорда). Таким образом, выражение для C_2 таково:

$$C_2(2n) = \sum_{k \leq n, 2 \mid (n-k-1)} C_{n-1}^k f(n-k-1, 2)$$

Заметим, что $C_2(2n) = C_1(2n - 2)$.

Утверждение 3.3.1. *Любая симметричная диаграмма участвует ровно два раза в подсчете $C_1(2n) + C_2(2n)$.*

Доказательство. В зависимости от четности длины минимального периода и их количества (a и b соответственно) можно выделить три вида расположения осей симметрии.

Случай 1: Если b нечетно (а значит a четно). В таком случае все оси симметрии обязательно проходят между вершинами, причем один из концов располагается в середине периода, а второй проходит между периодами. Как известно, все оси симметрии получаются при повороте диаграммы на $\frac{a}{2}$ точек. В этом случае при таком повороте получается диаграмма, совпадающая с исходной при повороте на π . То есть такие диаграммы подсчитаны ровно два раза в C_1 по одному с каждого из концов оси.

Случай 2: Если b четно, а a нечетно. В таком случае у диаграммы ровно два класса осей симметрии, одному из которых принадлежат оси, проходящие через противоположные точки, являющиеся серединами периода, а значит они подсчитаны в C_2 , а второму классу принадлежат оси, проходящие между периодами, а значит они включены в подсчет C_1 .

Случай 3: Если b и a четны. В таком случае у диаграммы также ровно два типа осей симметрии, оси одного из которых проходят между периодами, а второго посередине двух противоположных периодов. \square

Таким образом утверждение верно и количество симметричных диаграмм равно $\frac{C_1+C_2}{2}$. А значит доказана и лемма. \square

3.4 Доказательство рекуррентных соотношений для $D(2n)$

В леммах 2 и 4 найдены соотношения для $A(a, b)$ и $B(2n)$. Очевидно, что множество всех хордовых диаграмм с $2n$ вершинами можно разбить на непересекающиеся подмножества:

X — хордовые диаграммы с точностью до поворотов, у которых нет ни одной оси симметрии,

Y — хордовые диаграммы с точностью до поворотов, у которых есть ось симметрии,

где $|X|$ и $|Y|$ — количество элементов в соответствующих множествах.

Утверждение 3.4.1. *В выражении $\sum_{a \leq 2n, a \mid 2n} A(a, \frac{2n}{a}) + B(2n)$ каждая диаграмма посчитана ровно 2 раза.*

Доказательство. Заметим, что если хордовая диаграмма не имеет оси симметрии (принадлежит множеству X), тогда она участвует в подсчете $\sum_{a \leq 2n, a|2n} A(a, \frac{2n}{a})$ ровно два раза, и ни одного раза в $B(2n)$. Если же хордовая диаграмма имеет ось симметрии (принадлежит множеству Y), она участвует по одному разу в $\sum_{a \leq 2n, a|2n} A(a, \frac{2n}{a})$ и $B(2n)$. \square

Следствие. По предыдущему утверждению

$$D(2n) = \frac{1}{2}(|X| + |Y|) = \frac{1}{2} \left(\sum_{a \leq 2n, a|2n} A(a, \frac{2n}{a}) + B(2n) \right).$$

Теорема 3.1.1 доказана.

3.5 Доказательство Теоремы 3.1.2

Для доказательства теоремы будем полагать, что Теорема 3.1.1 уже известна, и попробуем просто преобразовать формулы для выражения чисел $A(a, b)$.

Воспользуемся следующей теоремой из курса Теории Чисел:

Теорема 3.5.1. (Формула обращения Мебиуса) Для арифметических функций f и g

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

тогда и только тогда, когда

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Запишем и преобразуем в общем виде выражения для $A(a, b)$:

$$A(a, b) = \frac{1}{a} \left(\varphi(a, b) - \sum_{a' < a, a'|a} a' A(a', \frac{ba}{a'}) \right)$$

$$aA(a, b) = \varphi(a, b) - \sum_{a' < a, a'|a} a' A(a', \frac{ba}{a'})$$

$$\varphi(a, b) = \sum_{a'|a} a' A(a', \frac{ba}{a'})$$

Помним, что $ab = 2n$ и фиксируем n

$$\varphi(a, \frac{2n}{a}) = \sum_{a'|a} a' A(a', \frac{2n}{a'})$$

Отсюда по Формуле Обращения Мебиуса

$$aA(a, \frac{2n}{a}) = \sum_{a'|a} \mu(a') \varphi\left(\frac{a}{a'}, 2n \frac{a'}{a}\right) \quad \text{или} \quad A(a, b) = \frac{1}{a} \sum_{a'|a} \mu(a') \varphi\left(\frac{a}{a'}, ba'\right)$$

$$A(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sum_{a'|a} \mu(a') f\left(\frac{a}{a'}, ba'\right), & 2 \nmid b, \\ \frac{1}{a} \sum_{a'|a} \mu(a') \sum_{i=0}^{\frac{a}{a'}-1} C_{\frac{a}{a'}}^{2i} f(a' - 2i, ba'), & 2 \mid b, 2 \mid a, \\ \frac{1}{a} \sum_{a'|a} \mu(a') \sum_{i=0}^{\frac{a}{a'}-1} C_{\frac{a}{a'}}^{2i+1} f\left(\frac{a}{a'} - 2i - 1, ba'\right), & 2 \mid b, 2 \nmid a. \end{cases}$$

Таким образом приведены явные выражения для функции $A(a, b)$ через которую выражается общее количество классов эквивалентностей хордовых диаграмм, а соответственно и 2-атомов с точностью до гомеоморфизма.

4 Алгоритм подсчета количества вырожденных 2-атомов с одной особенностью степени $2n$ и примеры

4.1 Алгоритм

Напомним, что определения основных функций, которые мы ввели ранее:

$A(a, b)$ — это количество хордовых диаграмм с точностью до поворотов и минимальным периодом длины a и $ab = 2n$ вершинами;

$B(2n)$ — это количество хордовых диаграмм с $2n$ вершинами с точностью до поворотов и имеющих ось симметрии;

$D(2n)$ — это количество хордовых диаграмм с $2n$ вершинами с точностью до поворотов и отражений (количество вырожденных атомов степени $2n$, а также количество ориентированных f-атомов с одной граничной черной окружностью).

Поставим цель посчитать число $D(2n)$. По Теореме 3.1.1:

$$D(2n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{a \leq 2n, a|2n} A(a, \frac{2n}{a}) + B(2n) \right).$$

Для подсчета общего количества необходимо посчитать для всех $a|2n$ числа $A(a, \frac{2n}{a})$.

4.2 Пример для $n = 3$

Найдем их значения для $n = 3$:

$$A(1, 6) = \frac{1}{1}(C_1^1 f(0, 6) - 0) = 1, \text{ (единственная диаграмма имеющая период 1)}$$

$$A(2, 3) = \frac{1}{2}(f(2, 3) - A(1, 6)) = \frac{3^{1-1}-1}{2} = 1, \text{ (единственная диаграмма имеющая период 2)}$$

$$A(3, 2) = \frac{1}{3}(C_3^1 f(2, 2) + C_3^3 f(0, 2) - A(1, 6)) = \frac{2^{1-3+1-1}}{3} = 2, \text{ (две диаграммы имеющи период 3)}$$

$$A(6, 1) = \frac{1}{6}(f(6, 1) - 3A(3, 2) - 2A(2, 3) - A(1, 6)) = \frac{15-6-2-1}{6} = 1, \text{ (единственная диаграмма не имеющая периода меньшего 6)}$$

$$B(6) = 5,$$

$$D(6) = \frac{1+1+2+1+5}{2} = 5.$$

Ниже приведены соответствующие хордовые диаграммы и 2-атомы (см. Рис. 3 и Рис. 4 соответственно)

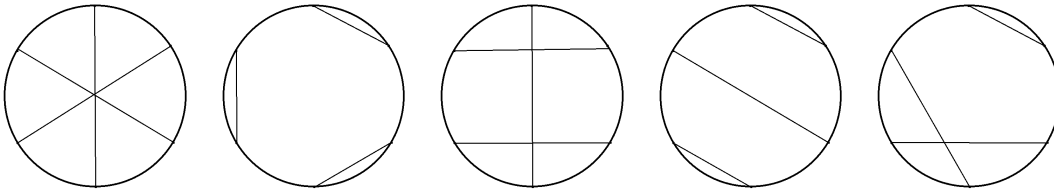


Рис. 3: Хордовые диаграммы с точностью до поворотов и симметрий для $n = 3$.

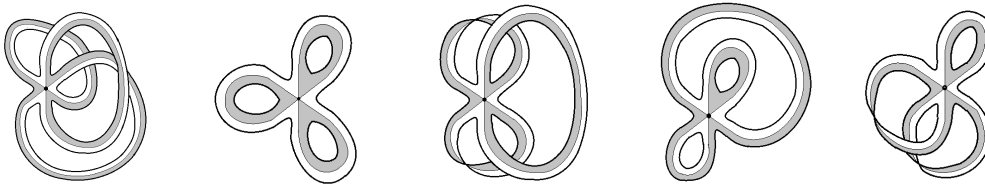


Рис. 4: Атомы степени 6, соответствующие данным хордовым диаграммам.

В данном случае все диаграммы имеют ось симметрии, что вводит в некоторые заблуждения, но в следующем примере приведена более полная картина.

4.3 Пример для $n = 4$

Аналогичным образом вычислим все необходимые значения:

$$A(1, 8) = \frac{1}{1} (C_1^1 f(0, 8) - 0) = 1,$$

$$A(2, 4) = \frac{1}{2} (C_2^0 f(2, 4) + C_2^2 f(0, 4) - A(1, 8)) = \frac{4+1-1}{2} = 2,$$

$$A(4, 2) = \frac{1}{4} (C_4^0 f(4, 2) + C_4^2 f(2, 2) + C_4^4 f(0, 2) - 2A(2, 4) - A(1, 8)) = \frac{12+12+1-4-1}{4} = 5,$$

$$A(8, 1) = \frac{1}{8} (f(8, 1) - 4A(4, 2) - 2A(2, 4) - A(1, 8)) = \frac{105-20-4-1}{8} = 10,$$

$$B(8) = 16,$$

$$D(8) = \frac{1+2+5+10+16}{2} = 17.$$

В данном случае отчетливо виден атом, не имеющий оси симметрии (см. Рис. 5: второй ряд, пятый столбец).

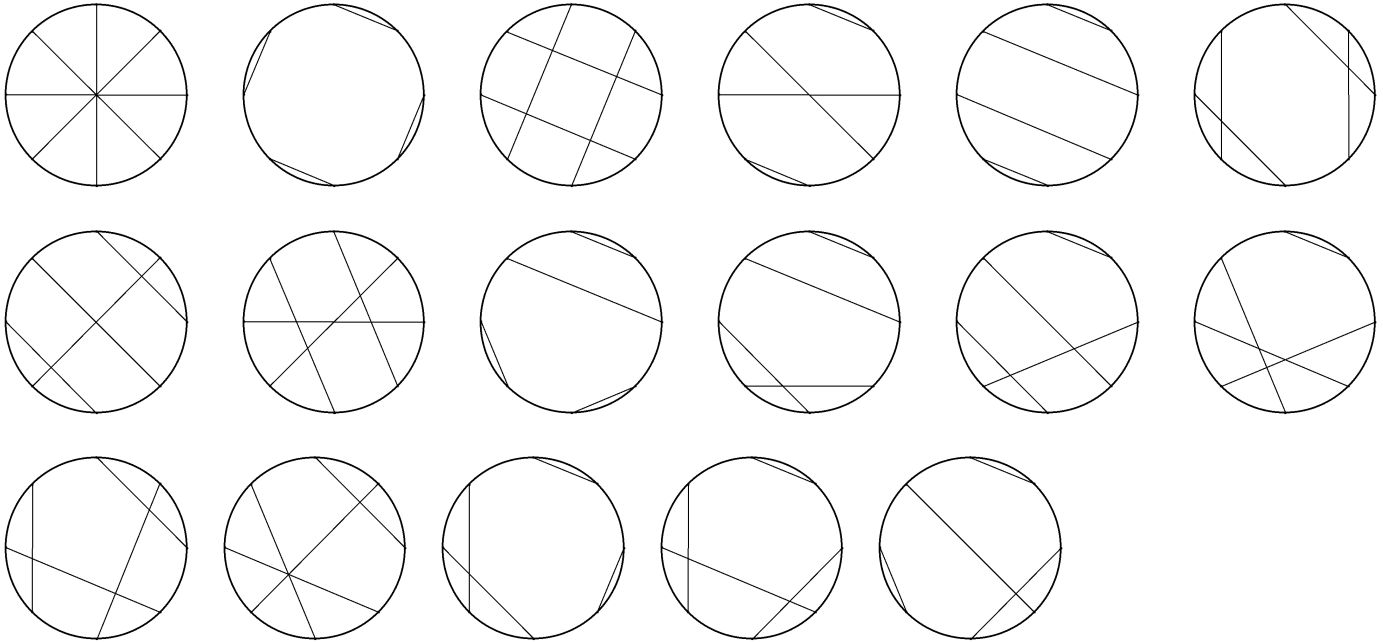


Рис. 5: Хордовые диаграммы с точностью до поворотов и симметрий для $n = 4$.

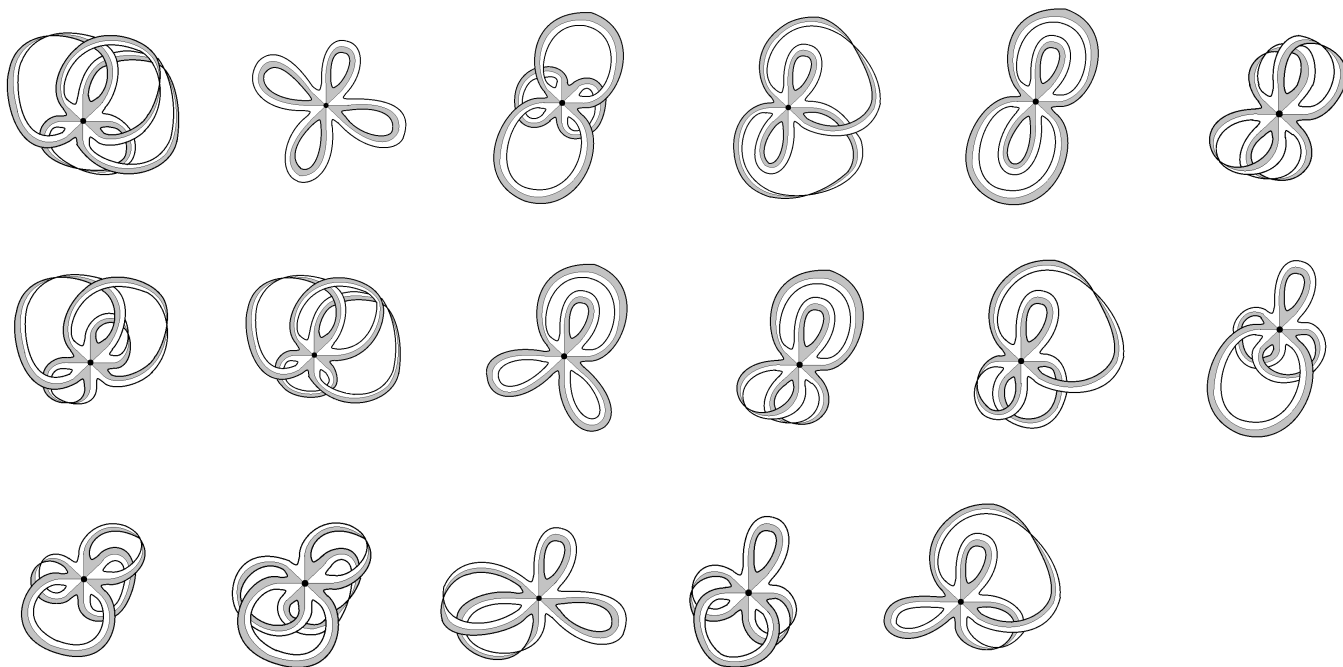


Рис. 6: Атомы степени 8, соответствующие данным хордовым диаграммам.

Список литературы

- [1] Фоменко А.Т. “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”// Доклады АН СССР, 1986, т. 287, No. 5, с. 1071-1075. Объем 0,3 п.л.
- [2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация” Т.1,2.// Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 199.
- [3] A.Kruzin, “Enumeration of chord diagrams”// <http://arxiv.org/abs/math.CO/008209>, 1998
- [4] Манойло Т.О., Сіра М.І., Кадубовский О.А., “Про число неізоморфних та нееквівалентних хордових діаграмм”// Пошуки і знахідки 2010 С. 61-70.
- [5] Gori R., Marcus M., “Counting non-isomorphic chord diagrams”// Theoretical Computer Science 301 (2003) 477-489.
- [6] Joe Sevada, “A fast algorithm to generate necklaces with fixed content”// Theoretical Computer Science - 1998-204. - p. 55-73
- [7] В.О. Мантуров “Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0”// Топологические методы в теории гамильтоновых систем, сборник статей, изд. “Факториал”, 1998.
- [8] А.А. Ошемков, “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей”// Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН, 205, Наука, М., 1994, 131-140.
- [9] Harer J., Zagier D. “The Euler characteristic of the moduli space of curves”// Invent. Math. 85 (1986) 457-485.
- [10] Chmutov S., Prittel B. “The genus of a random chord diagram is asymptotically normal”// arXiv:1108.5214v3, 2011.