

# Группы симметрий бифуркаций интегрируемых гамильтоновых систем

Орлова Е. И.

## Аннотация

Изучаются двумерные атомы, с помощью которых кодируются бифуркации слоений Лиувилля невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем. А именно, изучаются группы симметрий атомов сложности не более трех. Рассматриваются атомы с группой симметрий  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ . Доказано, что группа  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$  является группой симметрий некоторого торического атома. Вычислены группы симметрий всех неориентируемых атомов сложности не более трех.

## 1 Введение

Понятие атома было введено А. Т. Фоменко (см. [3,4]). Атомы кодируют типичные перестройки (бифуркации) торов Лиувилля в невырожденных интегрируемых гамильтоновых системах. В настоящее время в терминах двумерных атомов и “молекул” описаны многие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы и их классы относительно различных отношений эквивалентности. В частности, оказалось, что многомерные бифуркации торов Лиувилля представляются в виде полупрямых произведений двумерных атомов (см. [5]), что делает актуальным изучение групп симметрий двумерных атомов. Двумерные седловые атомы можно эквивалентным образом задавать при помощи так называемых  $f$ -графов [6].

Напомним понятие двумерного седлового атома (далее просто — атома). Пусть  $M$  — связная замкнутая двумерная поверхность (ориентируемая или неориентируемая) и  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  — правильная функция Морса, то есть имеющая ровно три критических значения: минимальное, максимальное и седловое. Тогда ее седловой уровень является связным графом  $K$ , все вершины которого имеют степень 4. Дополнение к этому графу состоит из двумерных клеток (дисков). Следовательно, все вершины клеточного разбиения имеют степень 4 (т.е. в вершине сходятся ровно 4 полуредра) и разбиение допускает шахматную раскраску, то есть каждое ребро граничит с черной клеткой и белой клеткой. Правильные функции Морса  $f$  и  $f'$  на поверхностях  $M$  и  $M'$  называются *послойно эквивалентными* в окрестностях  $P$  и  $P'$  своих критических уровней

$\{f = c\}$  и  $\{f' = c'\}$ , если существуют такие малые  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon' > 0$  и диффеоморфизм  $D : P = \{|f - c| < \varepsilon\} \rightarrow P' = \{|f' - c'| < \varepsilon'\}$ , что связные компоненты линий уровня функции  $f$  переходят в связные компоненты линий уровня функции  $f'$ . Если  $D$  сохраняет направление роста функции, то функции называются послойно *оснащенно* эквивалентными. В дальнейшем будем считать, что  $c = 0$ .

*Атомом*  $(P, K)$  называется класс послойной оснащенной эквивалентности функции Морса  $f$  в окрестности  $P = \{|f| < \varepsilon\}$  ее седлового критического уровня  $K = \{f = 0\}$ . Атомом часто называется какой-либо представитель класса послойной эквивалентности (то есть поверхность  $P$  с вложенным в нее графом  $K$ ). Дополнение к графу  $K$  в поверхности  $P$  состоит из “положительных” и “отрицательных” колец (на которых функция  $f$  положительна и отрицательна соответственно). Гомеоморфизмы пары  $(P, K)$  на себя, сохраняющие направление роста функции, и рассматриваемые с точностью до гомеоморфизмов, переводящих каждое ребро графа  $K$  в себя с сохранением любой выбранной на нем ориентации, образуют *группу симметрий атома* (будем обозначать  $\widehat{Sym}(P, K)$ ). Эта группа дискретна. Если атом (точнее, поверхность  $P$ ) ориентируем, то рассмотрение собственных (т.е. сохраняющих ориентацию) гомеоморфизмов дает группу собственных симметрий атома  $(Sym(P, K))$ . Седловые критические точки функции  $f$  называются *вершинами* атома, а их число — *сложностью* атома. В этом случае рассмотренная выше поверхность  $M$ , содержащая  $P$ , с правильной функцией Морса на ней, получается из поверхности  $P$  заклеиванием каждой ее граничной окружности двумерным диском и продолжением функции внутрь диска с ровно одной критической точкой в его центре. Род поверхности  $M$  называется *родом* атома.

Также иногда будем пользоваться другим эквивалентным понятием атома. Будем считать, что граничные окружности атома заклеены дисками, т.е. атом  $(M, K)$  реализован в виде двумерной связной компактной замкнутой поверхности  $M$  с вложенным в нее связным конечным графом  $K$ , каждая вершина которого имеет степень 4. Еще раз отметим, что  $M \setminus K$  гомеоморфно дизъюнктому объединению дисков (клеток), которые можно раскрасить в два цвета так, что каждое ребро графа примыкало бы к разноцветным клеткам (далее такую раскраску будем называть шахматной). Более точно, под атомом будем понимать такой класс эквивалентности. *Атомом* называется пара  $(M, K)$  с указанными свойствами, рассматриваемая с точностью до гомеоморфизма пары (переводящего граф в граф). *Оснащенным атомом* называется пара  $(M, K)$  с указанными свойствами и выбранной раскраской клеток в черный и белый цвета, рассматриваемая с точностью до гомеоморфизма, переводящего клетки в клетки того же цвета.

## 2 Необходимые утверждения

Пусть есть атом  $(P, K)$ . Рассмотрим некоторую вершину этого атома с окрестностью. Локально данная окрестность представляет собой двумерный диск с вложенным в него графом в виде крестика (вершина с исходящими ребрами). Пусть на диске задана ориентация с помощью репера  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Тогда эту ориентацию можно индуцировать на крестик, занумеровав ребра таким образом, чтобы при обходе вершины в направлении от  $\vec{e}_1$  к  $\vec{e}_2$  порядок ребер возрастал (Рис. 1). Рассмотрим ориентацию этого крестика при гомеоморфизме, полагая, что ориентация диска сохранилась.

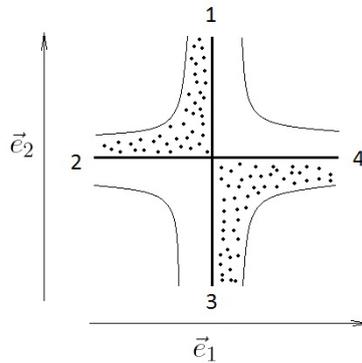


Рис. 1.

**Утверждение 1** (сохранение циклического порядка). *При гомеоморфизме вершины атома с окрестностью (с исходящими из нее ребрами) порядок ребер при обходе образа вершины в направлении от  $\vec{e}_1$  к  $\vec{e}_2$  либо остается прежним, либо меняется на противоположный.*

*Доказательство.* Занумеруем исходные ребра числами 1, 2, 3 и 4 (все вершины имеют степень 4), задав при этом положительную ориентацию крестика. При гомеоморфизме ребро 1 должно остаться соседним с ребром 2, т.к. они образуют часть границы одного отрицательного (положительного) диска. Аналогично, ребро 1 останется соседним с ребром 4. Такое отношение “соседства” (инцидентности) верно для каждого из ребер.

По расположению двух соседних ребер восстанавливаются и оставшиеся, т.к. каждое “крайнее” ребро имеет второго однозначно определенного соседа. Для двух инцидентных ребер существует два варианта расположения: от меньшего номера ребра к большему при обходе вершины от  $\vec{e}_1$  к  $\vec{e}_2$ , или наоборот, от большего к меньшему. Следовательно, такие два ребра породят два возможных расположения ребер образа вершины с указанным выше порядком.  $\square$

**Утверждение 2.** Любой гомеоморфизм атома (симметрия) однозначно определяется (с точностью до изотопии) образом двумерной окрестности одной вершины, т.е. образом вершины и ее ребер (с указанием: какое ребро куда переходит).

*Доказательство.* Пусть задан гомеоморфизм вершины с окрестностью. Тогда, двигаясь по остальным ребрам графа и примыкающим к ним кольцам, однозначно восстановятся образы оставшихся вершин и ребер.  $\square$

### 3 Реализация атомов с группой симметрий $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$

В работе [2] Е. А. Кудрявцевой и А. Т. Фоменко было доказано, что любая конечная группа  $G$  является группой симметрий некоторого атома, а также были получены оценки на минимальный род ( $Mg(G)$ ) и сложность ( $Mn(G)$ ) этого атома. Т.к. эти оценки носят общий характер, то в общем случае они могут быть неоптимальными. Т.е. для некоторых классов групп оценки могут быть улучшены. В частности, удалось улучшить оценку на род для атомов с группой симметрий  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$  ( $p, q > 1$ ). В общем случае оценка на род такова:  $Mg(G) \leq (k - 1)|G| + 1$ , где  $k$  — число порождающих элементов группы,  $|G|$  — порядок группы. Если применить ее к случаю группы  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ , то получим  $Mg(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) \leq pq + 1$ . В следующей теореме показывается, что  $Mg(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) \leq 1$ .

**Теорема 1.** Группа  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$  ( $p, q > 1$ ) является группой симметрий некоторого ориентируемого атома рода 1.

*Доказательство.* Рассмотрим тор как фактор плоскости  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . Построим атом на развертке тора (Рис. 2): разобьем квадрат (развертку) на  $2p$  полос по горизонтали и  $2q$  полос по вертикали (в силу четности такое разбиение допускает шахматную раскраску). Рассмотрим симметрии этого атома.

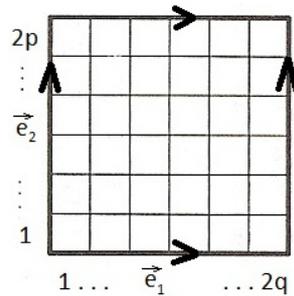


Рис. 2.

**Лемма 1.** *Симметрии данного атома — это композиция сдвигов на 2 клетки вверх-вниз, вправо-влево, поворотов на угол  $\pi$  относительно узлов решетки или относительно центров клеток (на  $\pi/2$  относительно центров клеток в случае  $p = q$ ) и отражений относительно прямых, проходящих через центры клеток и параллельных разбиению.*

*Доказательство.* Рассмотрим вершину с ее окрестностью и их образ при гомеоморфизме. Перечисленными в Лемме 1 симметриями получим из исходной вершины ее образ (с окрестностью) таким образом: одним отражением добьемся нужного порядка обхода ребер (как в образе); затем, с помощью поворотов, делаем ребра сонаправленными, т.е. направление луча, исходящего из вершины и идущего вдоль ребра, должно совпадать с направлением луча, построенного на соответствующем ребре образа. В результате могло получиться два варианта: вершина находится на расстоянии четного числа клеток до образа и по вертикали, и по горизонтали; вершина находится на расстоянии нечетного числа клеток до образа и по вертикали, и по горизонтали. В первом случае с помощью сдвигов накладываем эту вершину на образ. Окрестности этих вершин совпадут. Во втором случае необходимо отразить всё относительно любых горизонтальной и вертикальной прямой. Тогда получим первый случай. Далее, пользуясь Утверждением 2, заметим, что тогда атомы совпадут. Лемма доказана.  $\square$

Чтобы группа симметрий была изоморфна группе  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ , нужно запретить все симметрии, кроме сдвигов. Для этого добавим в произвольную клетку одну петлю к нижнему ребру и одну восьмерку к левому ребру. Теперь размножим эту клетку “через одну” вправо-влево, вверх-вниз (Рис. 3). Группа симметрий полученного атома является в точности группой  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ .

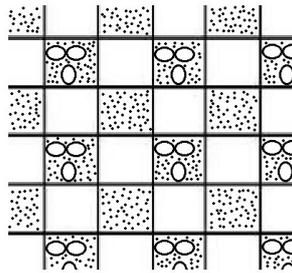


Рис. 3.

Действительно, докажем, что никакие симметрии, кроме сдвигов, невозможны. Повороты недопустимы, т.к. тогда добавленные петля и восьмерка, окажутся, соответственно, на верхнем и правом ребрах (на левом и верхнем в случае поворота на  $\pi$  вправо, в правом и нижнем —

на  $\pi$  влево), тогда как в исходном атоме на этих ребрах таких объектов нет. Отражения также недопустимы, т.к. тогда добавленная петля (восьмерка) окажется на верхнем (правом) ребре клетки. Сдвиги на две клетки вправо-влево, вверх-вниз останутся возможными, т.к. строение клеток, расположенных относительно друг друга через одну, полностью совпадает. Вправо-влево возможны  $q$  различных сдвигов, вверх-вниз —  $p$ . Получаем группу симметрий  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ . Теорема доказана.  $\square$

По вышеуказанной теореме Е. А. Кудрявцевой и А. Т. Фоменко оценка на сложность атома с группой симметрий  $G$  имеет такой вид:  $Mn(G) \leq (2k + 3)|G|$ . В случае группы  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ ,  $Mn(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) = 7pq$ . Сложность построенного в ходе доказательства теоремы атома равна  $7pq$ , т.е. совпадает с верхней оценкой на сложность атома с данной группой симметрий. Таким образом, данную оценку улучшить не удалось.

## 4 Группы симметрий всех атомов сложности не более трех

Существует полезная переформулировка определения атома через  $f$ -графы, принадлежащая А. А. Ошемкову (см. [1]).

Рассмотрим набор непересекающихся ориентированных окружностей. Выделим на них произвольным образом четное число точек, разобьем это множество на пары произвольным образом, и соединим получившиеся пары неориентированными отрезками с приписанным числом  $+1$  или  $-1$ . Это и есть  $f$ -граф.

Назовем два  $f$ -графа *эквивалентными*, если один из другого можно получить последовательностью следующих операций. Разрешается менять ориентации всех ребер какого-то цикла и одновременно изменять метки на всех неориентированных ребрах, инцидентных этому циклу, на противоположные. Если оба конца неориентированного ребра принадлежат данному циклу, то метка на этом ребре не меняется. Классы эквивалентности  $f$ -графов назовем  *$f$ -инвариантами*.

Существует взаимно-однозначное соответствие между  $f$ -инвариантами и атомами.

Построим по атому  $f$ -граф. У всех границ отрицательных колец атома выберем произвольное направление. Через каждую вершину атома проведем неориентированное ребро, соединяющее границы двух соответствующих этой вершине отрицательных колец. Концы этого ребра и будут вершинами  $f$ -графа, а дуги граничных окружностей — ориентированными ребрами. Осталось лишь расставить метки на неориентированных ребрах. Рассмотрим малую окрестность неориентированного ребра в поверхности  $P$ . Это прямоугольник, две противоположные стороны которого лежат на граничных окружностях отрицательных колец, и по-

тому — ориентированы. Если эти стороны прямоугольника индуцируют одну и ту же ориентацию границы прямоугольника, то ставим метку  $+1$ . Если же ориентации противоположные —  $-1$ .

В процессе построения мы произвольным образом фиксировали ориентации на граничных окружностях отрицательных колец. Однако легко понять, что при выборе другой ориентации мы получим эквивалентный  $f$ -граф.

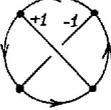
**Определение 1.** *Симметрией  $f$ -графа* будем называть такое его отображение в себя как абстрактного графа (переводящее вершины в вершины, ориентированные ребра — в ориентированные ребра, неориентированные — в неориентированные, с сохранением отношения инцидентности), которое преобразует данный  $f$ -граф в эквивалентный ему  $f$ -граф.

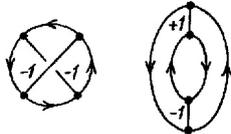
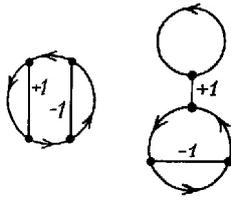
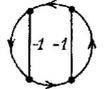
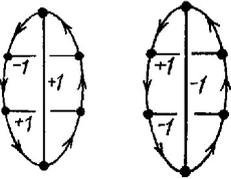
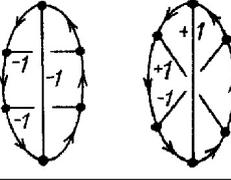
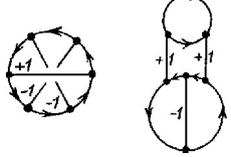
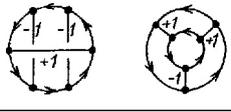
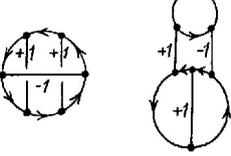
Очевидно, что группа симметрий атома изоморфна группе симметрий соответствующего ему  $f$ -графа (представителя из класса эквивалентности). Также отметим, что группы симметрий атомов, отличающихся друг от друга лишь направлением роста функции, совпадают. Это значит, что при вычислении группы симметрий атома можно построить два  $f$ -графа: первый как описано выше, а второй, приняв за окружности границы положительных колец. Вообще говоря, эти  $f$ -графы будут не эквивалентны, но в некоторых случаях они совпадают (эквивалентны).

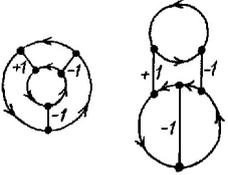
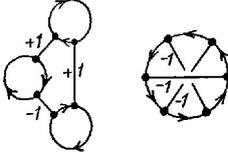
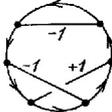
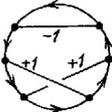
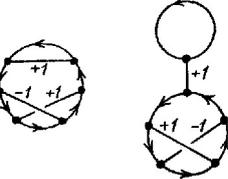
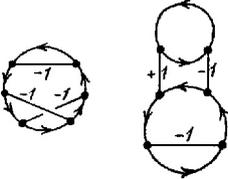
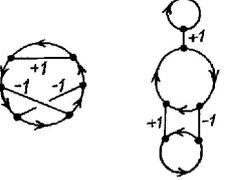
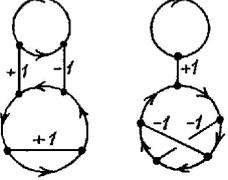
Группы симметрий ориентируемых атомов сложности не более трех были вычислены в [1] (стр. 178 - 180). Для каждого атома была найдена группа собственных симметрий и группа всех симметрий. Для неориентируемых атомов не существует понятия собственной симметрии, а значит, и понятия группы собственных симметрий.

Ниже вычислены группы симметрий неориентируемых атомов сложности не более трех. Будут использованы следующие обозначения:  $\mathbb{R}P^2$  — проективная плоскость,  $Kl$  — бутылка Клейна,  $S^2 + 3\mu$  — сфера с тремя листами Мебиуса,  $D_n$  — группа симметрий правильного  $n$ -угольника,  $E$  — тривиальная группа.

**Теорема 2.** *Вычислены группы симметрий неориентируемых атомов сложности не более трех. Результат приведен в таблице.*

Атом	$f$ -граф	Род	$\widehat{Sym}$
$\tilde{B}$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{C}_2$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Атом	$f$ -граф	Род	$\widehat{Sym}$
$\tilde{C}_1$		$\mathbb{R}P^2$	$D_4$
$\tilde{D}_1$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{D}_2$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{E}_1$		$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{E}_2$		$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{E}_3$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{E}_4$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{E}_5$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Атом	$f$ -граф	Род	$\widehat{Sym}$
$\tilde{E}_6$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{E}_7$		$\mathbb{R}P^2$	$D_6$
$\tilde{F}_1$		$S^2 + 3\mu$	$E$
$\tilde{F}_2$		$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{F}_3$		$Kl$	$E$
$\tilde{F}_4$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{F}_5$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{F}_6$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$

Атом	$f$ -граф	Род	$\widehat{Sym}$
$\tilde{F}_7$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{G}_1$		$S^2 + 3\mu$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{G}_2$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{G}_3$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{G}_4$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{G}_5$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{G}_6$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$

Атом	$f$ -граф	Род	$\widehat{Sym}$
$\tilde{G}_7$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\tilde{H}_1$		$S^2 + 3\mu$	$D_3$
$\tilde{H}_2$		$Kl$	$\mathbb{Z}_2$
$\tilde{H}_3$		$\mathbb{R}P^2$	$E$
$\tilde{H}_4$		$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{Z}_2$

*Доказательство.* Опишем общий метод вычисления групп симметрий для неориентируемого атома с помощью  $f$ -графов. Для данного атома строим два  $f$ -графа (напомним, что оснащённость атома не влияет на его группу симметрий, то есть для подсчета группы можем выбрать любой  $f$ -граф). Выбираем из них наиболее удобный. Например, если  $f$ -граф имеет ровно одну петлю, то, если нетривиальные симметрии есть, то это такие симметрии, которые эту петлю отображают в себя. Такой  $f$ -граф значительно сокращает перебор возможных вариантов отображений графа. Игнорируя метки и направления, находим симметрии графа. Нумеруем ребра в окрестности каждой вершины  $f$ -графа, то есть каждому ребру будут приписаны два числа на его концах (достаточно занумеровать только ориентированные ребра). Для найденных симметрий графа проверяем, будут ли эти отображения симметриями  $f$ -графа. Для этого отображаем вместе с графом все метки, направления и нумерацию на

ребрах. Если получился эквивалентный  $f$ -граф, значит, это отображение является симметрией  $f$ -графа, если получился  $f$ -граф из другого класса эквивалентности, следовательно, данное отображение — не симметрия. Обнаружив симметрию, выписываем соответствующую ей перестановку, учитывая нумерацию на ребрах. Тем самым, все элементы группы симметрий найдены. Осталось найти среди них образующие и выписать соотношения.  $\square$

## 5 Геодезические атомы

Поскольку атомы и их группы симметрий играют важную роль в теории динамических систем, А. Т. Фоменко поставил вопрос о классификации тех атомов, которые реализуются набором замкнутых геодезических на поверхностях постоянной кривизны. Более точно: какие атомы вкладываются в двумерные замкнутые поверхности постоянной кривизны так, что их критический уровень реализуется объединением нескольких замкнутых геодезических.

Напомним, что на двумерных компактных замкнутых поверхностях можно задать метрику постоянной кривизны: положительной на сфере и проективной плоскости, нулевой (локально евклидова метрика) на торе и бутылке Клейна, и отрицательной на поверхностях с количеством ручек, большим единицы (гиперболическая метрика). Вопрос: какие из двумерных атомов допускают такую реализацию, что особый граф  $K$  образован замкнутыми геодезическими указанных метрик? Как отметил А. Т. Фоменко, такие двумерные атомы естественно назвать “геодезическими атомами”.

Дадим определение геодезического атома более точно.

**Определение 2.** *Геодезическим атомом* называется атом, реализуемый на двумерной замкнутой поверхности  $M$  постоянной кривизны объединением  $K$  нескольких замкнутых геодезических.

Далеко не все атомы являются геодезическими. Например, легко видеть, что атомы  $C_2$  на сфере,  $\tilde{B}$  на проективной плоскости (Рис. 4),  $C_1$  и  $E_1$  на торе (Рис. 5) геодезические. Атом  $B$  на сфере (Рис. 6) не геодезический.

**Предложение 1.** *Все геодезические атомы на стандартной двумерной сфере образованы экваторами, находящимися в общем положении (т.е. все точки пересечения — трансверсальные и двукратные).*

*Доказательство.* Действительно, согласно определению, если геодезический атом реализуется объединением замкнутых геодезических  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , то все их точки пересечения и самопересечения простые, т.е. через каждую точку проходит или две различные геодезические, или одна самопересекающаяся геодезическая проходит дважды. Поэтому, если набор

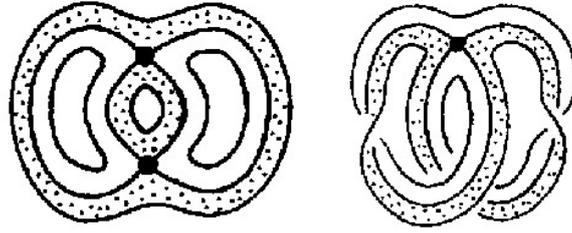


Рис. 4. Атомы  $C_2$  и  $\tilde{B}$

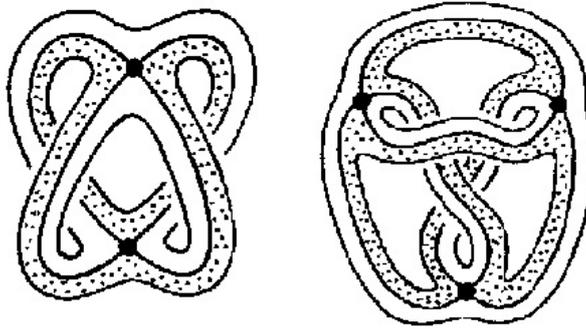


Рис. 5. Атомы  $C_1$  и  $E_1$

больших кругов на сфере образует геодезический атом, то все точки пересечения кругов простые, т.е. круги находятся в общем положении.

Для доказательства достаточности покрасим клетки разбиения двумерной сферы набором больших кругов в два цвета правильным образом, т.е. чтобы к каждому ребру примыкали бы разноцветные области. Проведем один круг на сфере из данного набора и покрасим две получившиеся области в разные цвета. Будем добавлять оставшиеся круги набора по одному. При каждом добавлении будем перекрашивать в другой цвет все области, находящиеся с одной стороны от добавленного круга. Если до добавления круга раскраска была правильной, то новая раскраска тоже будет правильной. Добавив все большие круги из данного набора, получим правильную раскраску областей.  $\square$

**Следствие 1.** Если атом на сфере является геодезическим, и  $K = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$  — объединение замкнутых геодезических, то

- все  $\gamma_i$  являются простыми (т.е. без самопересечений);
- $|\gamma_i \cap \gamma_j| = 2$  для любых  $i, j = 1, \dots, n$  и  $i \neq j$ , т.е. любые две замкнутые геодезические пересекаются ровно по двум различным точкам (при этом эти точки пересечения являются парой “диаметрально противоположных точек” на кривой  $\gamma_i$ , т.е. они раз-

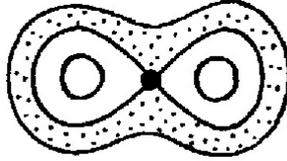


Рис. 6. Атом  $B$

бывают кривую  $\gamma_i$  на две дуги, каждая из которых содержит одинаковое количество точек пересечения с оставшимися кривыми);

- если  $n$  — чётно, то количество белых областей атома равно количеству черных.

Как распознать по данному атому, является ли он геодезическим? Следующее наблюдение получено Е. А. Кудрявцевой, И. М. Никоновым и А. Т. Фоменко ([7], теорема 3) и отвечает на вопрос, поставленный А. Т. Фоменко.

**Теорема 3.** *Рассмотрим конечный вложенный граф  $K$  на замкнутой двумерной поверхности  $M$ . Он разбивает поверхность на области. Разбиение допускает шахматную раскраску (т.е. такую двухцветную раскраску, что любое ребро ограничивает области разных цветов) в том и только том случае, когда степень любой вершины чётна, и сумма всех рёбер равна нулю в гомологиях поверхности по модулю два.*

**Замечание 1.** Эта теорема применима, конечно, не только к геодезическим атомам.

*Доказательство.* Предположим, что разбиение поверхности  $M$  графом  $K$  допускает шахматную (“черно-белую”) раскраску. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — все рёбра графа  $K$  и  $f_1, \dots, f_k$  — все “черные” двумерные области разбиения. Тогда граница 2-цепи  $f_1 + \dots + f_k$  равна  $e_1 + \dots + e_n$  по модулю два (в силу того, что раскраска является шахматной), т.е. 1-цепь  $e_1 + \dots + e_n$  является границей по модулю два (в частности, эта 1-цепь является 1-циклом, поэтому степени всех вершин графа  $K$  чётны), что и требовалось.

Докажем обратное. Предположим, что степени всех вершин графа  $K$  чётны и 1-цикл  $e_1 + \dots + e_n$  является границей некоторой 2-цепи  $C$  по модулю два. Пусть  $f_1, \dots, f_m$  — все двумерные области разбиения. Тогда 2-цепь  $C$  является линейной комбинацией 2-цепей  $f_1, \dots, f_m$  с коэффициентами  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_2$ . Присвоим каждой области  $f_i$  “цвет”  $a_i$ , равный 0 или 1. Получаем двухцветную раскраску двумерных областей. Докажем, что эта раскраска является шахматной. Действительно, фиксируем любое ребро  $e$  графа  $K$ . Оно содержится в границе ровно двух областей

разбиения, которые обозначим через  $f_i$  и  $f_j$ . Поэтому коэффициент при ребре  $e$  в разложении 1-цикла  $e_1 + \dots + e_n = \partial(a_1 f_1 + \dots + a_m f_m)$  по ребрам графа равен  $a_i + a_j$ . С другой стороны, этот коэффициент равен 1, т.е.  $a_i + a_j = 1$ , поэтому  $a_i \neq a_j$ , т.е. раскраска действительно является шахматной.  $\square$

**Замечание 2.** Приведенное выше доказательство теоремы 3 и предлагаемое ниже объяснение этой теоремы принадлежат Е. А. Кудрявцевой, И. М. Никонову и А. Т. Фоменко.

Поясним эту теорему в случае, когда степень любой вершины графа  $K$  равна четырем, используя одномерные когомологии. Пусть, для наглядности, граф  $K$  является объединением погруженных (регулярных) окружностей (1-циклов)  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , находящихся в общем положении, разбивающих поверхность  $M$  на области. Рассмотрим цикл  $\alpha = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ , являющийся суммой этих окружностей. Пусть  $\gamma$  — произвольная погруженная окружность (цикл) на поверхности  $M$ , находящаяся в общем положении с набором  $\{\gamma_i\}$ . Тогда она пересекает цикл  $\alpha$  в четном числе точек тогда и только тогда, когда когомологическое произведение  $\alpha \cdot \gamma \equiv 0 \pmod{2}$  в группе одномерных когомологий  $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ . В силу невырожденности умножения в  $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  (ко)цикл  $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$  в том и только в том случае, когда его произведение (в смысле когомологий)  $\alpha \cdot \gamma = 0 \pmod{2}$  для любого цикла  $\gamma$ . Что эквивалентно тому, что число точек пересечения цикла  $\alpha$  с  $\gamma$  четно. Но последнее условие эквивалентно существованию шахматной раскраски множества двумерных областей, на которые  $K$  разбивает поверхность  $M$ . В самом деле, покажем, что при этом условии существует шахматная раскраска. Выберем точку на поверхности  $M$ , лежащую в какой-либо области, и покрасим эту область в черный цвет. Выбранную точку будем называть базисной. Теперь все остальные области будем красить таким образом: выбираем точку из интересующей нас области и проводим через нее и базисную точку окружность  $\gamma$ ; она пересекает граф  $K$  в четном числе точек, значит, эти точки разбивают  $\gamma$  на четное число дуг; присваиваем дугам черный или белый цвет путем чередования, начиная с той, которой принадлежит базисная точка — эта дуга будет черной; очевидно, в силу четности числа дуг, соседние дуги будут иметь различный цвет; теперь красим интересующую нас область в цвет, который имеет дуга с выбранной из области точкой (здесь отметим, что для раскраски области достаточно соединить базисную и выбранную точку кривой (дугой) общего положения и определить цвет путем чередования). Такая раскраска корректна, т.е. не зависит от выбора погруженной окружности  $\gamma$ . Действительно, возьмем две различные окружности  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$ , проходящие через выбранную точку области и базисную точку. Эти точки разбивают каждую окружность на две дуги. Построим новую кривую  $\gamma$ , состоящую из одной дуги окружности  $\gamma^1$  и одной дуги окружности  $\gamma^2$ . Очевидно, получим замкнутую кривую.

Сгладим ее в базисной точке и в выбранной точке области так, чтобы полученная кривая также содержала эти точки. Получим погруженную окружность, находящуюся в общем положении с набором  $\gamma_i$ . Значит, она имеет четное число точек пересечения с этим набором. По этой окружности однозначно определяется цвет рассматриваемой области описанным выше образом. Следовательно, окружности  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$  определяли один и тот же цвет. Такая раскраска областей является шахматной. Чтобы в этом убедиться нужно проверить, что любые две соседние области имеют различные цвета. Для этого возьмем точку на общем ребре областей, не являющуюся вершиной графа  $K$ , и проведем трансверсально через нее и через базисную точку погруженную окружность. Она корректно определяет цвет этих областей. Теперь осталось показать, что если существует шахматная раскраска, то число точек пересечения произвольной погруженной окружности  $\gamma$  общего положения с набором  $\{\gamma_i\}$  четно. Индуцируем раскраску областей на дуги окружности. Т.к.  $\gamma$  находится в общем положении с набором  $\{\gamma_i\}$ , то все ее соседние дуги будут окрашены в разный цвет. Значит, число дуг четно. А значит, и число точек пересечения с циклом  $\alpha$  четно.

Эта теорема полезна при описании геодезических атомов на простых двумерных поверхностях, а именно, на сфере, торе, проективной плоскости, бутылке Клейна.

Интересная задача состоит в описании групп симметрий геодезических атомов.

## Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация”. Тома 1 и 2. (Монография). — Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [2] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко. “Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты (“атома”-бифуркации)”. — Вестник Моск.ун-та, Матем. Механ. 67:3 (2013), с.21-29. Английский перевод: А. Т. Fomenko, Е. А. Kudryavtseva, “Each finite group is a symmetry group of some map (an “atom”-bifurcation)”, Moscow Univ. Math. Bull., 68:3 (2013), pp.148-155.
- [3] А. Т. Фоменко. “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем” — Доклады АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1071–1075.
- [4] А. Т. Фоменко. “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем” — Успехи математических наук. 1989. **44**, № 1 (265). 145–173.

- [5] T. Z. Nguyen. “Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems” — *Lett. Math. Phys.* 1995. **33**. 187–193.
- [6] А. А. Ошемков. “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование Особенностей” — *Труды МИРАН*. 1994. **205**. 131–140.
- [7] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко. “Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях”. — *Доклады РАН, серия: математика*, 2012, том 446, № 6, с.615-617.
- [8] А. Т. Fomenko, А. Yu. Konyaev. “Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems”. — In: “Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications”. Series “Solid Mechanics and Its Applications”. Vol.211, pp.3-21. Editors: V. Z. Zgurovsky, V. A. Sadovnichiy. Springer. 2014.
- [9] А. Т. Fomenko, А. Yu. Konyaev. “New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems”. — *Topology and its Applications*, 2012, vol.159, pp.1964-1975.