Топология интегрируемых систем с неполными полями

Алёшкин К.Р.

1. Введение

Гамильтоновы системы часто встречаются в классической и квантовой механике и являются объектом большого числа исследований. В классической механике понятие интегрируемости системы связано с наличием достаточного количества попарно коммутирующих гамильтоновых векторных полей, в случае полноты которых поведение системы описывается теоремой Лиувилля [7, 6]. В большом числе задач гамильтоновы векторные поля полны автоматически, например в различных интегрируемых случаях движения твёрдого тела, геодезических потоках на компактных многообразиях [7] и многих других, но в некоторых системах гамильтоновы векторные поля оказываются неполны, например в системе на алгебре $\mathfrak{sl}(3)$, полученной методом сдвига аргумента (по поводу интегрируемых систем на алгебрах Ли и метода сдвига аргумента см. [8, 9]).

В случае, когда часть векторных полей интегрируемой гамильтоновой системы неполна, структура лиувиллева слоения мало изучена. В данной работе проводится исследование совместных поверхностей уровня интегрируемых систем с неполными полями с целью построить некий аналог теоремы Лиувилля для таких систем. В результате выводится более общий результат, непосредственно не связанный с гамильтоновыми системами. Стоит заметить, что изучение гамильтоновых систем часто позволяет получать не связанные с ними алгебраические и геометрические результаты, например, из последних работ в [1], [2].

В качестве примера с помощью полученных в работе методов исследуется система, полученная методом сдвига аргумента на $\mathfrak{sl}(3)$ и показывается, что для неё неполнота полей не приводит ни к хаотичности траекторий системы, ни к искажению топологии совместных поверхностей уровня первых интегралов. Хотелось бы выразить отдельную благодарность А.Т. Фоменко и А.М. Изосимову за постановку задачи, а также за интересные и конструктивные обсуждения.

2. Системы с неполными полями

В дальнейшем рассуждение будет вестись в основном в терминах фазовых потоков, так что для начала напомним некоторые понятия.

***Определение* 1.** *Пусть задано гладкое векторное поле v на гладком многообразии M^n, тогда фазовым потоком g^t векторного поля называется однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, заданное на M, и сдвигающее точку x на время t вдоль интегральных кривых поля v.*

$$\frac{d}{dt}g^t(x) = v(g^t(x))$$

То есть $g : U \to M$, где U – открытое подмножество в $M \times \mathbb{R}$.

***Определение* 2.** *Гладкое векторное поле v на гладком многообразии M^n называется полным, если естественный параметр на его интегральных кривых определён на всей числовой прямой.*

Таким образом векторное поле полно тогда и только тогда, когда соответствующие ему фазовый поток задаёт действие группы $\mathbb{R}$. Иногда будем называть фазовым потоком полного векторного поля действие группы $\mathbb{R}$ на многообразии.

***Обозначение* 1.** *В дальнейшем, если на пуассоновом многообразии задана гладкая функция f_i, то соответствующее гамильтоново векторное поле будем обозначать $v_i = \mathrm{sgrad} f_i$, а фазовый поток этого поля g_i.*

***Определение* 3.** *Назовём систему коммутирующих гладких функций f_i на многообразии M полной в смысле полей, если все поля v_i полны (отсюда следует, что любая их линейная комбинация полна) и взрывающейся в противном случае (такое определение продиктовано тем, что непродолжающиеся на всю временную ось интегральные траектории поля называют взрывающимися).*

Во избежание путаницы термин “полный инволютивный набор функций” (то есть набор коммутирующих функций, для которых касательное пространство к их совместной поверхности уровня почти всюду является лагранжевым подпространством) ниже употребляться не будет.

Определение 4. *Назовём систему гладких функций f_i на многообразии M полностью взрывающейся, если все векторные поля v_i вместе с их любой нетривиальной линейной комбинацией не полны. Или эквивалентно: если максимальное линейное подпространство полных полей в пространстве, задаваемом полями v_i нулевое.*

Таким образом, в нашей терминологии теорема Лиувилля верна для функционально независимого набора из n коммутирующих гладких функций полных в смысле полей. Следующие теоремы направлены на то, чтобы отказаться от последнего условия.

Обозначение 2. *Пусть векторные поля $v_1, \cdots, v_i$ коммутируют на многообразии M^n, и фиксирована точка x_0, тогда будем ассоциировать с ними $\mathbb{R}^i_{(t)} = \mathbb{R}_{t_1} \times \cdots \times \mathbb{R}_{t_i}$, где каждой точке $(t_1, t_2, \cdots, t_i)$ из $\mathbb{R}^i$ соотвествует точка на многообразии $g_1^{t_1} \circ \cdots \circ g_i^{t_i}(x_0)$. Если потоки коммутируют глобально, то порядок их применения не важен. Также если U – односвязная область в $\mathbb{R}^i_{(t)}$, содержащая ноль, и не содержащая точек непродолжения, то потоки в ней коммутируют глобально (по определению все пути с общим началом и концом гомотопны). В дальнейшем будем рассматривать только такие области.*

Теперь сформулируем общий факт, являющийся расширением известной теоремы Лиувилля. В дальнейшем под полнотой или неполнотой векторного поля будет пониматься полнота или неполнота его сужения на совместную поверхность уровня первых интегралов.

Теорема 1. *Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие, и на нём задан инволютивный набор из n функционально независимых первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$, причём векторные поля $sgrad\ f_i$ являются полными для $1 \leq i < n$, а векторное поле $sgrad\ f_n$ неполно. Тогда связная компонента регулярной совместной поверхности уровня первых интегралов гомеоморфна $Cyl^k_{n-1} \times \mathbb{R}$, где Cyl^k_{n-1} орбита действия группы сдвигов потоков, соответствующих первым $n-1$ интегралам $\simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$.*

Для уже двух неполных полей это утверждение верным не будет, как показывает следующий пример: рассмотрим интегрируемую систему на M^6 такую, что один из лиувиллевых торов является резонансным, а именно, интегральные кривые имеют коэффициенты резонансности $1:0:0,\ 0:1:0,\ 1:0:2$, то есть в базисе циклов (в первой группе гомологий) траектории гамильтоновых полей имеют вид $e_1, e_2, e_1 + 2e_3$. Все траектории замкнуты, и одна из них пересекается с каждой из двух других по двум точкам. Теперь испортим исходное многообразие M, выкинув одну из траекторий $e_1 + 2e_3$. Тогда поля, соответствующие e_1 и e_2 неполны, и заметаемая ими поверхность есть $\mathbb{T}^2 \backslash \{0, 1\}$, а совместная поверхность уровня трёх полей есть нетривиальное расслоение над окружностью со слоем $\mathbb{T}^2 \backslash \{0, 1\}$, что не равняется $\mathbb{T}^2 \backslash \{0, 1\} \times S^1$, см. рис. 1.

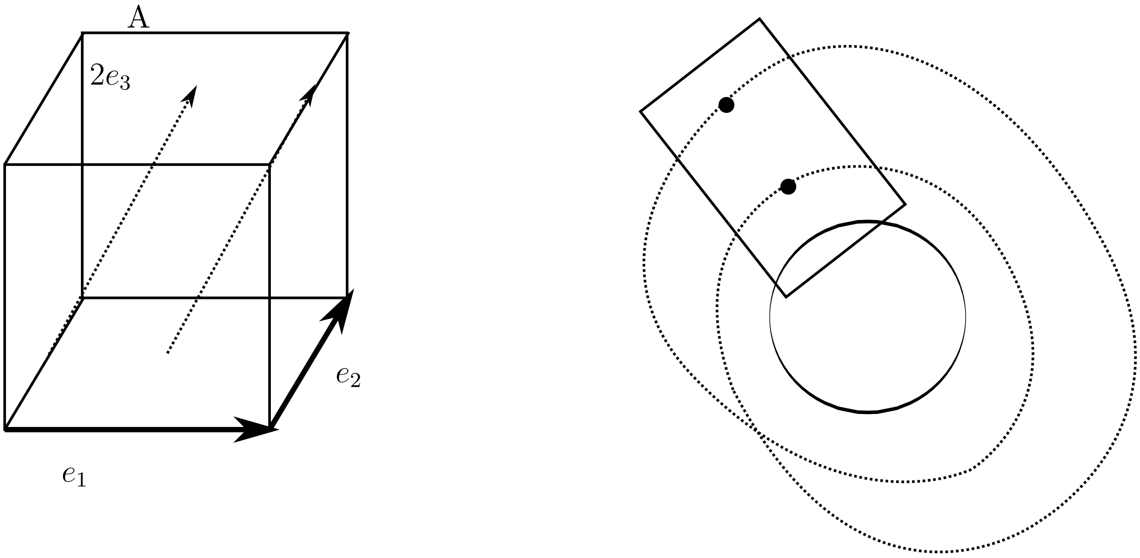

Рис. 1: Поверхность уровня.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится следущее определение:

***Определение* 5.** *Скажем, что подмножество $M(x_0)$ многообразия N заметается интегральными траекториями полей $v_1, \ldots, v_n$, если оно состоит из тех и только тех точек, в которые можно попасть по интегральным кривым этих полей из точки x_0 т.е.*

$$M(x_0) = x \in N \mid \exists\, i_1, \ldots, i_r, t_1, \ldots, t_r \;:\; x = g_{i_1}^{t_1} \circ \ldots \circ g_{i_r}^{t_r}(x_0)$$

.

Теперь сформулируем основное утверждение о структуре совместной поверхности уровня для случая нескольких полных и неполных полей.

Обозначение 3. *Пусть дан набор набор коммутирующих векторных полей на гладком многообразии N. Обозначим за V пространство, состоящее из линейных комбинаций векторных полей из набора. Выберем из этого набора максимальное подпространство V_0, состоящее из полных полей, то есть максимальную систему, полную в смысле полей. Для произвольной точки $x_0 \in N$ обозначим за $A(x_0)$ обозначим множество, заметаемое интегральными кривми полей из выбранного подпространства V_0, а за $M(x_0)$ множество, заметаемое интегральными кривыми полей из V/V_0 (из максимальной полностью взрывающейся системы), то есть интегральными кривыми неполных полей.*

Также обозначим за T пересечение $M(x)$ и $A(x)$, T имеет естественную структуру группы, действующей на $M(x), A(x)$ сдвигами вдоль интегральных кривых.

Теорема 2. *Пусть дано связное гладкое многообразие N без края и заданы n гладких, линейно независимых в каждой его точке коммутирующих векторных полей $v_1, \dots, v_n$ так, что $v_1, \dots, v_k$ полностью взрывающаяся система, а $v_{k+1}, \dots, v_n$ – полны.*

Тогда многообразие N является "испорченным прямым произведением " $A(x_0)$ и $M(x_0)$, и устроено следующим образом: для произвольной точки x_0 из многообразия N:

1) $A(x_0)$ и $M(x_0)$ являются гладкими многообразиями, и для любой $x \in N$ $A(x_0) \simeq A(x), M(x_0) \simeq M(x)$.

2) $A(x_0)$ является гладким подмногообразием в N.

3) Над каждой точкой $A(x_0)$ висит многообразие $M(x)$ (оно может не быть подмногообразием) , которое, быть может, пересекается с многообразием $A(x_0)$ по точкам T, причём на $M(x)$ нет точек накопления из T, то есть T является дискретным подмножеством в $M(x)$.

4) Если точек накопления T нет, то есть T дискретное подмножество в N, то $N \simeq (M(x_0) \times A(x_0))/T$ является локально тривиальным расслоением с базой $A(x_0)/T$ и слоем $M(x_0)$, а также с базой $M(x_0)/T$ и слоем $A(x_0)$.

Замечание 1. *В условиях предыдущей теоремы $M(x_0)$ имеет афинную структуру в следующем смысле: $M(x_0)$ имеет естественный атлас $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ такой, что все функции перехода являются прибавлением постоянного вектора и, следовательно, $M(x_0)$ обладает плоской метрикой. В окрестности каждой точки оно имеет структуру локальной группы Ли, совпадающей с локальной группой $\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{T}^k$.*

Как частный случай из предыдущей теоремы немедленно следует:

Следствие 1. *Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие, и задан набор функционально независимых коммутирующих функций $f_1, \ldots, f_n$ на нём, причём гамильтоновы векторные поля $v_1, \ldots, v_k$ образуют полностью взрывающуюся систему, а поля $v_{k+1}, \ldots, v_n$ полны, тогда связная компонента регулярной совместной поверхности уровня функций $f_1, \ldots, f_n$ устроена как многообразие N из теоремы 2.*

В соответствии с теоремой, описание совместных поверхностей уровня взрывающейся системы первых интегралов сводится к описанию отдельно полной в смысле полей части (которая уже описана) и полностью взрывающейся части. Также, видимо, несложно (по крайней мере для случая одного неполного поля) построить аналоги переменных действие-угол, в которых векторные поля косых градиентов первых интегралов выпрямятся. Стоит заметить, что этот вопрос для полностью взрывающихся систем в частном случае начал исследоваться в [10] Т.А. Лепским.

3. Доказательства основных теорем

Подготовим несколько утверждений для основной теоремы.

Заметим, что из того, что векторные поля коммутируют глобально следует только то, что соответствующие им потоки коммутируют только локально, легко привести пример неполных коммутирующих векторных полей, чьи фазовые потоки глобально не перестановочны (достаточно взять плоскость с выколотой точкой и постоянными векторными полями).

***Утверждение* 1.** *Пусть g_1, g_2 являются фазовыми потоками коммутирующих независимых векторных полей v_1, v_2 на гладком многообразии M^n, причём поле v_2 полно, а поле v_1 неполно, и пусть $g_1(x_0)$ не продолжается на время t_1, тогда $g_1(g_2^{t_2}(x_0))$ также не продолжается на то же время t_1 для любого t_2, то есть вдоль интегральной траектории полного поля неполные продолжаются на одно и то же время.*

Доказательство. Фазовые потоки g_1 и g_2 коммутируют локально.

Для любого t_2 если для всех $t < t_2$ $g_1(g_2^t(x_0))$ продолжается до t_1, запишем:

$$g_1^{t_1-\epsilon} \circ g_2^{t_2}(x_0) = g_2^{t_2} \circ g_1^{t_1-\epsilon}(x_0)$$
$$g_2^{-t_2} \circ g_1^{t_1-\epsilon} \circ g_2^{t_2}(x_0) = g_1^{t_1-\epsilon}(x_0)$$

Но поле v_2 полно, $g_1^{t_1-\epsilon}(x_0) \to \infty$, а значит и $g_1^{t_1-\epsilon}(g_2^{t_2}(x_0)) \to \infty$, что и требовалось.

В противном же случае рассмотрим $\mathbb{R}^2_{(t)}$ и множество точек непродолжения на нём, это множество замкнуто потому, что каждая точка содержит маленький шар, в котором потоки определены и коммутируют. Значит существует ближайшая к нулю точка в нём, тогда в прямоугольнике, соединяющем эту точку с нулём все потоки коммутируют.

А тогда воспользуемся рассуждением, приведённым выше. $\square$

Замечание 2. *Стремление к бесконечности в последнем доказательстве стоит понимать так: интегральная траектория выходит за границы любого компакта при $\epsilon \to 0$.*

Утверждение 2. *Пусть g_1, g_2 являются фазовыми потоками коммутирующих независимых векторных полей v_1, v_2 на гладком многообразии M^n, тогда если две интегральные кривые пересекаются в точках x_0, x_1 так, что $x_1 = g_1^{t_1}(x_0) = g_2^{t_2}(x_0)$, то они пересекаются и в точках $x_n = g_i^{nt_i}(x_0)$, если фазовые потоки продолжаются до этого времени.*

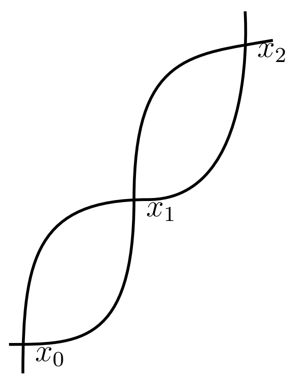

Рис. 2: фазовые потоки

Доказательство. Действительно, если предположить, что потоки продолжаются на нужное время, в силу коммутации получим:

$$g_1^{t_1}(x_0) = g_2^{t_2}(x_0)$$
$$g_1^{t_1} \circ g_1^{t_1}(x_0) = g_1^{t_1} \circ g_2^{t_2}(x_0)$$
$$g_1^{t_1}(x_1) = g_2^{t_2}(x_1)$$

Дальше рассуждение легко продолжается по индукции, а именно, заменой фигурирующих в выкладке x_0 и x_1 на x_{n-1} и x_n, см. рис. 2. □

В качестве следствия получим ещё одно утверждение.

Утверждение 3. *Пусть даны два коммутирующих потока g_1, g_2, пусть поток g_1 не продолжается на некоторое конечное время t'_x, а поток g_2 определён на $\mathbb{R}$, тогда интегральные кривые пересекаются максимум в одной точке.*

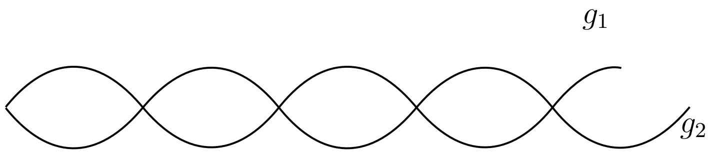

Рис. 3: фазовые потоки

Доказательство. Поскольку поток g_2 полон, из утвержения 1 следует, что g_1 должен продолжаться на одно и то же время, начиная с любой точки интегральной кривой потока g_2, если потоки пересекаются в двух точках x_0 и x_1, то такое возможно лишь если и поток g_1 полон, см. рис. 3.

□

Доказательство теоремы 1. Для начала заметим, что из коммутации интегралов следует коммутация соответствующих векторных полей, а, значит по теореме Фробениуса, и локальная коммутация фазовых потоков, причём, по предыдущим утверждениям, на каждой поверхности уровня вдоль полных потоков неполный продолжается на одно и то же время.

Пусть $A(x_0)$ – орбита действия полных фазовых потоков, проходящая через x_0, а N – рассматриваемая совместная поверхность уровня первых интегралов. Покажем, что интегральная кривая поля $v_n = \mathrm{sgrad}\ f_n$, изоморфная $\mathbb{R}^1$, не может пересечь $A(x_0)$ более чем в одной точке.

От противного: пусть существуют две различных точки пересечения x_0, x_1 такие, что

$$x_1 = g_n^{t_n}(x_0) = g_1^{t_1} \circ \ldots \circ g_{n-1}^{t_{m-1}}(x_0).$$

Тогда определим новый поток

$$g_*^t = g_1^{t_1 t} \circ \ldots \circ g_{n-1}^{t_{m-1} t}(x_0)$$

и соответствующее ему векторное поле фазовой скорости, являющееся линейной комбинацией полей $v_1, \ldots v_{n-1}$ и коммутирующее с полем v_n . Тогда по утверждению 3 для потоков g_n, g_* получаем требуемое утверждение.

Лемма. *В условиях теоремы $A(x_0)$ – орбита действия группы сдвигов потоков $g_1, \ldots, g_{n-1}$ является гладким подмногообразием, гомеоморфным Cyl_{n-1}^k*

Доказательство леммы. Для доказательства леммы применим теорему о неявных функциях для совместного уровня первых интегралов и ещё одной функции, которая равняется времени, за которое можно дойти до орбиты действия группы сдвигов полных фазовых потоков, проходящей через фиксированную x_0, а именно, пусть

$$A(t_1, \ldots, t_{n-1}) = g_1^{t_1} \circ \ldots \circ g_{n-1}^{t_{m-1}}.$$

Рассмотрим совместную поверхность уровня интегралов $f_1, \ldots, f_n$ и функции $\tilde{f}$, которую определим так: фиксируем точку x_0 на совместной поверхности интегралов N^n, тогда в силу леммы 2 однозначно определена функция

$$\tilde{f}(y) = t \mid \exists! y_0 = A^{(\tilde{t})}(x_0) : g_n^t(y_0) = y.$$

Нетрудно увидеть, что в силу гладкости потоков функция $\tilde{f}$ сама является гладкой (локально интегральные потоки задают систему координат на N, а значение этой функции есть просто одна из координат точки в этой системе координат). Градиент этой функции лежит в кокасательном пространстве к N^n, но все градиенты первых интегралов, очевидно, не лежат в ней, отсюда следует линейная независимость дифференциалов

$$df_1, \ldots, df_n, d\tilde{f},$$

а значит, по теореме о неявной функции совместная поверхность уровня функций $f_1, \ldots, f_n, \tilde{f}$ является гладким подмногообразием в N^n. На этой совместной поверхности уровня гладко транзитивно действует группа

$$A(t_1, \ldots, t_{n-1}) = g_1^{t_1} \circ \ldots \circ g_{n-1}^{t_{n-1}},$$

следовательно, связная компонента поверхности совпадает с орбитой действия группы и является гладким многообразием $\simeq Cyl^k_{n-1}$, то есть фактором $\mathbb{R}^{n-1}$ по централизатору H_{x_0}. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. По лемме орбита действия группы A определённой выше гомеоморфна Cyl^k_{n-1}.

Итак, совместная поверхность уровня – n-мерное гладкое многообразие, инвариантное относительно сдвигов вдоль $v_1, \ldots, v_n$, а значит связная компонента совместной поверхности уровня изоморфна $\mathbb{R} \times Cyl^k_{n-1}$. $\square$

Пусть на гладком многообразии N заданы гладкие линейно независимые в каждой точке коммутирующие векторные поля $v_1, \ldots, v_k$ и путь $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^k$, который является кусочно-линейным путём, каждый гладкий кусок траектории которого параллелен одному из координатных ортов в заранее фиксированном базисе. Определим отображение N на себя

$$G^\gamma : N \to N,\ G^\gamma(x) = g^{t_1}_{i_1} \circ \ldots \circ g^{t_n}_{i_n}(x)$$

, где оно определено (путь γ проходит вдоль координатных ортов в порядке i_j, на каждом из которых его траектория проходит расстояние t_j). Для произвольного пути отображение определяется через приближение пути кусочно-линейным, причём результат не будет зависеть от конкретного приближения в силу локальной коммутации потоков.

Далее каждой точке $x_0 \in N$ сопоставим односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, максимальную область, в которой все потоки коммутируют глобально. Будем её строить следующим образом:

1) $B(0, r) \subset \Omega$, т.ч. $\forall \gamma \subset B(0, r),\ G^\gamma(x_0)$ определено, то есть в образе $B(0, r)$ все потоки глобально коммутируют.

2) Будем максимально расширять Ω вдоль радиальных путей, насколько это возможно.

3) Дополним до максимальной односвязной области глобальной коммутации.

В построенной области $G^{\gamma_1} = G^{\gamma_2}$, если начала и концы γ_1 и γ_2 совпадают, поэтому будем писать $G^{\bar{t}}$ вместо G^γ, где $\bar{t} = \gamma(1) - \gamma(0)$.

Доказательство теоремы 2. 1) очевидно следует из глобальной коммутации полных и неполных потоков, а именно, пусть $y \in M(x_0)$, значит $x = G^{\bar{t}}(x_0)$, тогда $y = A^{\bar{s}}(x) = A^{\bar{s}} \circ G^{\bar{t}}(x_0) = G^{\bar{t}} \circ A^{\bar{s}}(x_0) = G^{\bar{t}}(y_0)$, множества $M(x_0)$ и $M(y_0)$ не пересекаются по определению, и $A^{\bar{s}}$ задаёт их диффеоморфизм. Аналогично доказывается диффеоморфность $A(x_0)$ и $A(y_0)$.

3) => 2) в силу теоремы о неявном отображении. Аналогично доказательству теоремы 2 можно показать, что $A(x)$ является гладким подмногообразием, рассматривая поверхность уровня первых интегралов и функций, равных времени, за которое можно добраться до фиксированной $A(x_0)$ (эти функции являются локальными координатами в системе координат, заданной интегральными траекториями потоков неполных полей, однозначность координат в некоторой окрестности $A(x_0)$ гарантируется в 3)).

3) => 4) Если в N нет точек накопления из T, то определено гладкое фактор-отображение прямого произведения $M(x_0) \times A(x_0)$, которое строится следующим образом: $(x, y) \in M(x_0) \times A(x_0) \;\; \simeq \;\; (x', y')$, если $\exists t \in T \; : \; (x', y') = t(x, y)$.
Докажем пункт 3)

Фиксируем точку x_0 на совместной поверхности уровня N. Рассмотрим

$$\mathbb{R}^k = t_1 \times, \ldots, \times t_k$$

и односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ (построенную выше) , в образе которой при действии

$$G^{\bar{t}}(x_0) = g_1^{t_1} \circ \ldots \circ g_k^{t_k}(x_0)$$

потоки неполных полей коммутируют глобально. Определим Γ как множество точек непродолжения, то есть множество точек $\tilde{t}$ из $\mathbb{R}^k$ таких, что знасение $G^{\tilde{t}}(x_0)$ неопределено, также определим $\Gamma_1 = \partial\Omega$, которое состоит из множества точек непродолжения Γ и некоторого множества χ. Ясно, что множество Γ замкнуто, поскольку в каждой из его граничных точек нельзя построить шар, в котором коммутируют потоки, а значит $\partial\Gamma \subset \Gamma$.

Пусть на $M(x_0)$ есть точки накопления, тогда будем доказывать утверждение от противного индукцией по числу неполных полей k. Выберем x_0 за точку накопления T.

1°. Случай с $k = 1$ следует из теоремы 1.

2° Рассмотрим сферу $S^{k-1}_{x_0}$ минимального радиуса с центром в нуле, содержащую точки из Γ, см. рис. 4. Такая существует в силу замкнутости Γ. Без ограничения общности будем считать, что $A = (0, 0, \ldots, r)$

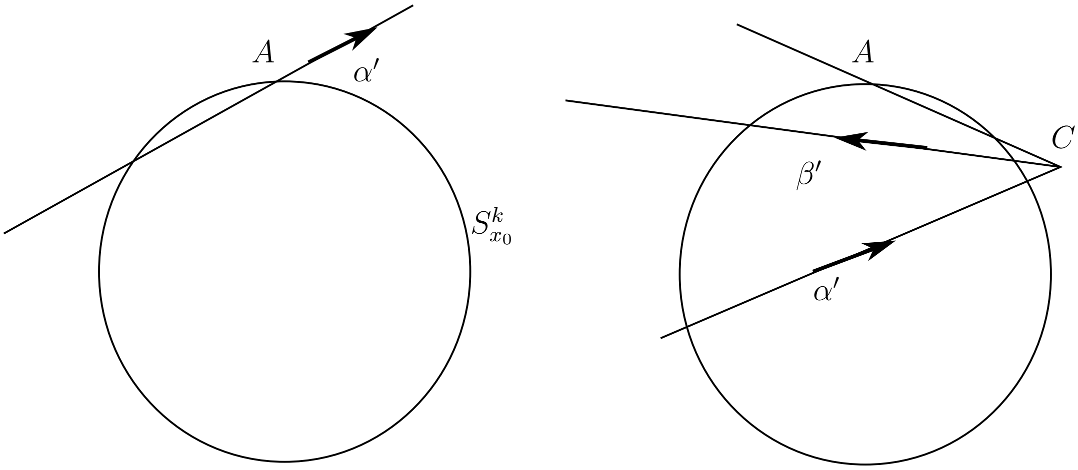

Рис. 4: Минимальная сфера, содержащая точки непродолжения.

лежит на пересечении сферы и Г. Будем отождествлять точки пересечения $M(x_0)$ с $A(x_0)$ $y = G^\omega(x_0)$ с ω. Тогда направлением на точку пересечения назовём нормированный вектор

$$\omega' = \frac{\omega}{|\omega|}$$

Если есть точки накопления, то рассмотрим последовательность элементов множества L направлений на точки пересечения

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$$

У неё есть предельные точки в силу того, что вся последовательность лежит на единичной сфере.

(1) Если есть предельные точки вне плоскости $t_k = 0$, то найдётся малый вектор $\alpha' \in L$ такой, что прямая l_α ему параллельная и проходящая через A пересекается с внутренностью сферы $S^k_{x_0}$ по интервалу с длиной больше, чем у α, тогда следующая цепочка равенств приводит к противоречию с утверждением 3:

$$A^t \circ G^\epsilon(x_0) = G^\epsilon \circ A^t(x_0) = G^\epsilon \circ G^\alpha(x_0) =$$

$$= G^\alpha \circ G^\epsilon(x_0) => A^t(x_\epsilon) = G^\alpha(x_\epsilon)$$

А значит, не продолжающаяся до бесконечности траектория неполного поля пересекается с траекторией полного поля более одного раза, что и приводит к противоречию.

(2) Если есть предельная последовательность в горизонтальной плоскости, то переходим к шагу индукции, а именно, найдётся горизонтальная плоскость π на которой есть как точки продолжения, так и непродолжения, а тогда соединим путём γ точки x_0 и точку y_0 – точку продолжения на π. Из-за компактности траектории пути следует, что в её малой окрестности все потоки коммутируют, а значит мы можем совершить индуктивный переход в плоскость π с новой центральной точкой y_0.

Если же в горизонтальной плоскости лежит лишь конечное число точек из L, то рассмотрим последовательность

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$$

с предельной точкой A' в горизонтальной плоскости.
Берём достаточно близкую к A' точку α' (достаточно, чтобы $|\alpha| < r/2$).

Понятно, что на прямой l_α, параллельной α', и проходящей через A на расстоянии не больше, чем модуль α, лежит какая-то точка непродолжения C (без ограничения общности выберем ближаюшую к нулю, а такая найдётся из-за замкнутости Γ).

Теперь выберем более близкую $\beta' \in L$ такую, что β' лежит внутри конуса с осью A' и образующей α' и с длиной β такой, что прямая l_β, параллельная β' и приложенная к C пересекает внутренность сферы $S^k_{x_0}$ по интервалу с длиной, больше, чем $|\beta|$.

Построив данную конструкцию мы сразу же приходим к противоречию с утверждением 3, полностью повторяя рассуждение из пункта (1). Таким образом теорема полностью доказана.

□

4. Системы на $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$

Многообразие M^{2n} называется пуассоновым, если на нём задана скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M^{2n}) \times C^\infty(M^{2n}) \to C^\infty(M^{2n})$ (в случае невырожденности скобки многообразие будет симплектическим). Пусть H – гладкая функция на M (называемая гамильтонианом), тогда она задаёт систему уравнений Гамильтона:

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, \tag{1}$$

где за x^i обозначены локальные координаты на многообразии. Одним из способов решения данной системы является поиск достаточного числа находящихся в инволюции первых интегралов и сужение системы на их совместную поверхность уровня. Например в случае интегрируемости по Лиувиллю для полного решения системы достаточно лишь n функционально независимых первых интегралов f_i, находящихся в инволюции, то есть для всех i, j выполнено $\{f_i, f_j\} = 0$ с условием полноты порождаемых векторных полей.

Теперь рассмотрим сопряжённое пространство к произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}^*$. На нём определим скобку Пуассона-Ли, заданную по правилу

$$\{f, g\}(x) :=< x, [d_x f, d_x g] > \tag{2}$$

где $x \in \mathfrak{g}^*$, а $d_x f, d_x g \in \mathfrak{g}^{**}$, которое изоморфно $\mathfrak{g}$.

Коприсоединённое представление группы Ли задаётся следующим образом: $Ad_g^* x(X) =< x, Ad_g^{-1} X >$, где $x \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}$, а g лежит в группе Ли G. На орбитах коприсоединённого представления скобка Пуассона-Ли, определённая выше, оказывается невырожденной ($< \cdot, \cdot >$ обозначает действия элемента из двойственного пространства на элементе из исходного).

Системы, заданные на орбитах коприсоединённого представления группы Ли со скобкой Пуассона, определённой выше, естественно возникают в механике, когда уравнения движения инвариантны относительно действия группы Ли, как, например, в случае динамики твёрдого тела [7].

Особый интерес представляют системы с полиномиальными первыми интегралами, поскольку именно такие системы чаще всего встречаются в приложениях (как например в случае динамики твёрдого тела или в случае геодезических потоков на сфере и торе [6]).

Вопрос построения таких систем на компактных алгебрах Ли решён, например, в [11], для некомпактных же алгебр вопрос построения полиномиальных интегрируемых систем с полными полями остаётся открытым, и поднимался, например, в [4].

Пусть алгебра $\mathfrak{g}$ является полупростой, тогда, обозначая за $f_1, \ldots, f_n$ базисные инварианты коприсоединённого представления, для элемента a из алгебры, запишем сдвиг инварианта вдоль a:

$$f_i(x + \lambda a) = \sum_{j=1}^{deg f_i} f_{ij}(x) \lambda^j$$

где функции $f_{ij}(x)$ – полиномы. Обозначим набор $f_{ij}(x)$ за F_a.

Теорема 3. *(Мищенко-Фоменко). Для любого регулярного ковектора a семейство F_a является полным инволютивным набором, то есть все* *функции семейства коммутируют относительно скобки Пуассона-Ли, а пространство, порождённое их дифференциалами, лагранжево почти всюду [8, 9].*

Стоит отметить, что позже было доказано существование полного инволютивного набора полиномов для произвольных конечномерных алгебр Ли С.Т. Садэтовым в [5].

Отличие полного инволютивного набора функций на симплектическом многообразии от *интегрируемой* или *вполне интегрируемой по Лиувиллю системы* состоит в том, что поля порождаемые первыми интегралами могут быть неполными, то есть их интегральные траектории могут не продолжаться по времени до бесконечности, что отражается на топологии слоения, делая её более сложной.

Теперь рассмотрим инволютивный набор полиномов, полученный методом сдвига аргуманта на $\mathfrak{sl}^*(3)$. При отождествлении коалгебры $\mathfrak{g}^*$ с алгеброй $\mathfrak{g}$ при помощи формы Киллинга гамильтоново уравнение переходит в уравнение Эйлера в форме Лакса:

$$\dot{X} = [X, dH] \tag{3}$$

При этом коприсоединённое представление отождествляется с присоединённым. Теперь рассмотрим инварианты присоединённого представления на алгебре $\mathfrak{sl}(3)$. Как известно, они имеют вид $\mathrm{tr}X^n$. С помощью метода сдвига аргумента строим полный инволютивный набор функций: рассмотрим полиномы по λ, на которые распадается $\mathrm{tr}(X + \lambda A)^n$, где A произвольный регулярный элемент, лежащий в алгебре Ли. Выделим из них тройку независимых первых интегралов:

$$\mathrm{tr}AX, \mathrm{tr}A^2X, \mathrm{tr}AX^2 \tag{4}$$

Соответствующие интегралам (4) векторные поля имеют вид (с точностью до знака и сомножителя):

$$\begin{aligned} v_1 &: \dot{X} = [X, A] \\ v_2 &: \dot{X} = [X, A^2] \\ v_3 &: \dot{X} = [X^2, A] \end{aligned}$$

Уравнения на X в случаях v_1 и v_2 представляют собой линейные системы и решаются явно, а сами векторные поля полны. Можно показать, что поле v_3 неполно для любого регулярного $A \in \mathfrak{sl}(3)$.

Таким образом система функций (4) является полным инволютивным набором, но соответствующие векторные поля не все полны, что является препятствием к интегрируемости системы по Лиувиллю. Требуется описать совместные поверхности уровня этих первых интегралов. Заменой базиса в алгебре любая матрица A приводится к одному из четырёх видов:

$$1.\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} \qquad 2.\ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}$$

$$3.\ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} \qquad 4.\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для каждого из видов матрицы можно явно выписать двупараметрическое семейство элементов $\mathfrak{sl}(3)$, через каждый из которых (и через 0) проходит прямая, распадающаяся на три интегральные кривые поля v_3, для двух из которых которых естественный параметр определён не на всей кривой. Интегральными кривыми на прямой являются стационарная точка 0, лежащая на вырожденной орбите, и два открытых луча, на которые неподвижная точка делит прямые.

***Утверждение* 4.** *Для случаев 1, 2, 3, 4 трёхмерное подмногообразие, заметаемое двупараметрическим семейством прямых (без точки 0), гомеоморфное двум экземплярам $\mathbb{R}^3$ в случаях 1, 3, 4 (двум экземплярам $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ в случае 2), лежит в орбите элемента нильпотентного элемента ранга 2, и его каждая связная компонента является связной компонентой совместной поверхности уровня системы (4). см. рис. 5.*

Это проверяется непосредственно (семейство является инвариантным относительно сдвигов вдоль v_i). Проведём выкладки, например, для случая 4. В этом случае явный вид подмногообразия N, заметаемого семейством прямых имеет вид:

$$X = k \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 - \beta & \alpha^3 \\ -1 & -2\alpha & -2\alpha^2 - \beta \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

где k не нуль. Запишем условие того, что поля v_1, v_2 лежат в касательной плоскости к N, для любой точки из N.

$$c_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & -2 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_\beta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} -1 & -3\alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 2 & 3\alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из этой выкладки видно, что каждый из векторов выражается через линейную комбинацию остальных, что и доказывает утверждение вкупе с тем фактом, что совместная поверхность уровня имеет размерность 3 и инвариантна относительно сдвигов вдоль фазовых потоков.

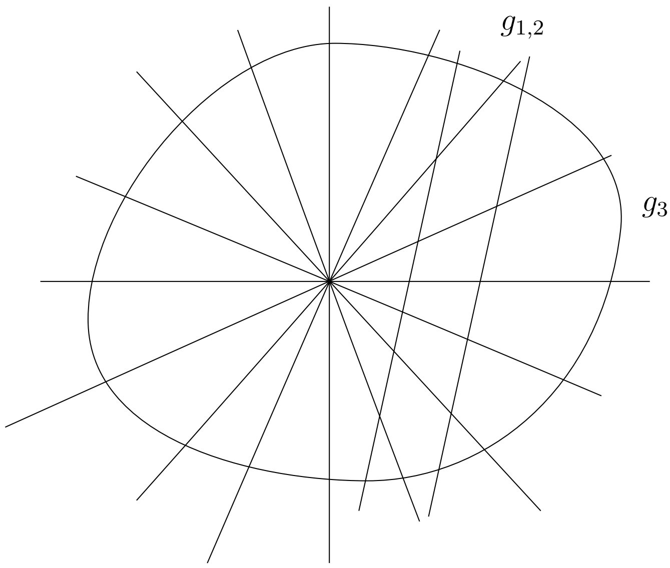

Рис. 5: Поверхность уровня

Естественные параметры этой поверхности являются параметрами интегральных кривых полей v_i. Эта поверхность является двумя компонентами связности поверхности уровня, гомеоморфными $\mathbb{R}^3$.

Дальнейшие исследования показали, что и другие поверхности уровня также имеют простое топологическое устройство, что навело на мысль об устройстве систем с одним неполным векторным полем.

Теперь применим результаты, полученные в предыдущем разделе к системе (4). Описание совместной поверхности уровня для неё сводится к описанию Cyl^k_{n-1}, то есть орбит потоков полных гамильтоновых полей. Явно опишем поверхности уровня полей v_1, v_2 для каждого из 4-х типов матрицы.

Утверждение 5. *Система функций $trAX, trA^2X$ и $trAX^2$ на коалгебре Ли $\mathfrak{sl}^*(3,\mathbb{R})$ является почти интегрируемой. Матрица A заменой базиса приводится к одному из следующих типов:*

1. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix}$ *2.* $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ *4.* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для типов 1, 3, 4 $Cyl_2^k \simeq \mathbb{R}^2$ и совместная поверхность уровня функций гомеоморфна $\mathbb{R}^3$, а для типа 2 $Cyl_2^k \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ и поверхность уровня гомеоморфна цилиндру $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Это показывается из явных выражений для векторных полей с использованием того факта, что поля переменных угол выражаются через линейные комбинации исходных векторных полей. Выпишем явно векторные поля для каждого из случаев. Ниже представлены поля $v_1 = [A, X]$

1. $\begin{pmatrix} 0 & (a-b)x_{12} & (2a+b)x_{13} \\ (b-a)x_{21} & 0 & (2b+a)x_{23} \\ (-b-2a)x_{31} & (-a-2b)x_{32} & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} b(x_{21}+x_{12}) & b(x_{22}-x_{11}) & bx_{23}+3ax_{13} \\ b(x_{22}-x_{11}) & -b(x_{21}+x_{12}) & -bx_{13}+3ax_{23} \\ bx_{32}+3ax_{31} & bx_{31}-3ax_{32}) & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22}-x_{11} & 3ax_{13}+x_{23} \\ 0 & -x_{21} & 3ax_{23} \\ -3ax_{31} & -3ax_{32}-x_{31} & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22}-x_{11} & x_{23}-x_{12} \\ x_{31} & x_{32}-x_{21} & x_{33}-x_{22} \\ 0 & -x_{31} & x_{23}-x_{32} \end{pmatrix}$

Векторные поля $v_2 = [A^2, X]$ для соответствующих типов матрицы A выглядят примерно также, но с другими константами при координатах.

Рассмотрим уравнения $\dot{X} = v_i(X)$. Эти уравнения являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, а потому исследуются явно. Таким образом получается, что для случаев 1, 2, 4 решение любой линейной комбинации полей v_1, v_2 гомеоморфно прямой, а потому образом действия фазовых потоков на произвольную точку является многообразие, гомеоморфное $\mathbb{R}^2$. Наибольший интерес представляет случай 2, в котором реализуется цилиндр. Выпишем для этого случая поле v_2:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2ab(x_{21}+x_{12}) & 2ab(x_{22}-x_{11}) & 2abx_{23}-cx_{13} \\ 2ab(x_{22}-x_{11}) & -2ab(x_{21}+x_{12}) & -2abx_{13}-cx_{23} \\ 2abx_{32}+cx_{31} & -2abx_{31}+cx_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Где $c = 3a^2+b^2$. Соответственно комбинируя v_1 и v_2 можем получить цикл и прямую (в евклидовом смысле):

$$v' = v_1 + \frac{3a}{c}v_2 = c_1 \begin{pmatrix} x_{21}+x_{12} & x_{22}-x_{11} & x_{23} \\ x_{22}-x_{11} & -x_{21}-x_{12} & -x_{13} \\ x_{32} & -x_{31} & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 = b + \frac{6a^2b}{c}$. Решением этого уравнения является линейная комбинация чисто мнимых экспонент, то есть окружность. Теперь получим прямую:

$$v' = v_1 - \frac{1}{2a}v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_{13} \\ 0 & 0 & -x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

где $c_2 = -3a - \frac{c}{2a}$. При интегрировании этого поля получаем прямую, а значит: 1) Cyl_2^k некомпактна, 2) Cyl_2^k не гомеоморфна $\mathbb{R}^2$ в силу наличия циклов, пересекающих прямую только в одной точке => k = 1 и поверхность является цилиндром. $\square$

В силу последнего утверждения можно заключить, что даже несмотря на неполноту поля система является с некторой точки зрения интегрируемой по Лиувиллю.

Также стоит заметить, что на $\mathfrak{sl}(3)$ построен как минимум один полный инволютивный набор полиномов с полными гамильтоновыми полями, а именно, система Гельфанда-Цейтлина, которая исследовалась в [3], полнота системы также следует из статьи.

Список литературы

[1] Konyaev A.Yu. Fomenko A.T. «Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems». В: *Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications. Solid Mechanics and Its Applications. Vol.211, pp.3-21* (2014).

[2] Konyaev A.Yu. Fomenko A.T. «New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems». В: *Topology and its Applications, vol.159, pp.1964-1975* (2012).

[3] Wallach N. Kostant B. «Gelfand-Zeitlin theory from the perspective of classical mechanics». В: *arXiv:math/0408342 [math.SG]* (2004).

[4] Болсинов А.В. и др. «Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования». В: *Труды Семинара по Векторному и Тензорному Анализу, том 28, с. 119-191* (2012).

[5] Садэтов А.Т.. «Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко». В: *Доклады Академии наук, том 397, № 6, с. 751-754 . - ISSN 0869-5652* (2004).

[6] Фоменко А.Т. Болсинов А.В.. *Интегрируемые гамильтоновы системы.* Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.

[7] Арнольд В.И.. *Математические методы классической механики.* Наука, 1989.

[8] Фоменко А.Т. Мищенко А.С.. «Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли». В: *Доклады АН СССР, том 231, № 3, с. 536-538* (1976).

[9] Фоменко А.Т. Мищенко А.С.. «Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли». В: *Известия АН СССР, том 42, № 2, с. 396-415* (1978).

[10] Лепский Т.А.. «Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени». В: *Матем. сб., 201:10 (2010), 109–136* (2012).

[11] Фоменко А.Т. Трофимов В.В.. «Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли». В: *Успехи математических наук, том 39, № 2, с. 3-56* (1984).