Введение

Цель работы - изучить геодезические на кусочно-гладких поверхностях постоянной кривизны. Данная работа яляется продолжением дипломной работы И. В. Сыпченко.

В своей работе И. В. Сыпченко доказала следующие теоремы:

Пусть даны $(M_{1.}, G_1)$ и $(M_{2.}, G_2)$ - гладкие компактные римановы многообразия с краем, причем задана изометрия краев $h{:}\partial M_1 \to \partial M_2$. Рассмотрим многообразие $M = M_1 \cup M_2/(x \backsim h(x),\, x \in M_1)$, полученное отождествлением точек на ∂M_1 и ∂M_2. После отождествления не будем различать ∂M_1и ∂M_2, обозначим за Ω полученную гиперповерхность M.

Теорема 1. Пусть $M = M_1 \cup M_2$, $dimM = 2$, $\Omega = \zeta(s)$ - натурально параметризованная кривая. Пусть также $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$- кусочно-гладкая кривая, γ_i- геодезическая в метрике G_i, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \zeta(s_0)$, $\varphi_i(s)$ - угол между γ_i и ζ в точке $\zeta(s)$, посчитанный в метрике G_i, $\varphi_i \neq 0$. Тогда $\gamma-$обобщенная геодезическая тогда и только тогда, когда $\varphi_1(s_0) = \varphi_2(s_0)$.

Теорема 2. Пусть $M = M_1 \cup M_2$, $dimM = n$, G_i-гладкая метрика на M_i, $i \in \{1{,}2\}$, $\Omega-$гиперповерхность "стыка" M_1и M_2, регулярная на каждом из M_i.

Пусть γ_i - натурально праметризованные кривые на M_i, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = P \in \Omega$. Рассмотрим вектор v_i, в касательном пространстве к M_i в точке P, полученный ортогональной проекцией в смысле метрики $G_i(P)$ вектора скорости кривой γ_i в точке P на касательное пространство к Ω. Пусть длина вектора v_i в смысле общей метрики на гиперповерхности Ω меньше 1. Тогда $\gamma-$обобщенная геодезическая тогда и только тогда, когда:

1.$\gamma_{\rm i}$- геодезическая в метрике G_i, $i \in \{1, 2\}$.

2.$v_1 = v_2$.

Так же И. В. Сыпченко нашла все замкнутые простые геодезические на цилиндре и поверхности, образованной двумя сферическими шапочками:

1)Множество различных замкнутых несамопересекающихся геодезических на поверхности, образованной двумя шапчками, счетно, а именно, для любого натурального n существует единственное решение α_n, для которого $l_1(\alpha_n) + l_2(\alpha_n) = 1/n$, и данный угол однзначно определяет замкнутую геодезическую.

2)Рассмотрим цилиндр высоты h и радиуса r. Пусть $k = h/r$. Тогда при любом значении k существует замкнутая геодезическая без самопересечений, образованная образующими цилиндра и диаметрами дисков, и при этом

1. если $k \geq 2$, то других замкнутых несамопересекающихся гедезических нет.

2. если $k < 2$, то при любом фиксированном значении k (т.е. при любой заданной конфигурации цилиндра) число замкнутых геодезических без самопересечений конечно: существует $n_0 \in N$, такое, что всем таким n, что $1 \leq n < n_0$ отвечают две различные замкнутые несамопересекающиеся геодезические, имеющие $4n$ звеньев, $n = n_0$ - одна с $4n_0$ звеньями, а для $n > n_0$замкнутых несамопересекающихся геодезических с $4n$ звеньями нет.

В данной работе найдены и исследованы на устойчивость (в определенном классе возмущений) все замкнутые геодезические без самопересечений на поверхности, образованной двумя конусами, соединенными по основанию.

Для начала дадим определения, которые могут быть не известны читателю:

Определение 1 Кусочно-гладкую кривую $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ назовем обобщенной геодезической на $M = M_1 \cup M_2$, если она является локально кратчайшей в каждой своей точке.

Определение 2 Геодезическая называется неустойчивой, если индекс формы второй вариации (см. А.Т. Фоменко, Б.А. Дубровин, С.П. Новиков. "Современная геометрия. Методы и приложения") больше 0.

Определение 3 Индексом симметричной квадратичной формы называется число отрицательных собственных чисел.

Утверждения и теоремы

Найдем все замкнутые геодезические без самопересечений на поверхности, образованной двумя консами, соединенными по основанию. Для этого сначала докажем утверждение и лемму.

Рассмотрим две поверхности вращения M_1 и M_2, соединенных по окружности "стыка", имеющую длину l.

Утверждение 1 (Сыпченко)

Пусть геодезическая γ пересекает окружность "стыка" под углом $\alpha \neq 0$. Тогда условие замкунтости γ на $M = M_1 \cup M_2$ равносильно тому, что

$$l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = lp$$

где p—это рациональное число.

Где $l_i(\alpha)$ - длина меньшей дуги окружности пересечения окружности "стыка", отсекаемой звеном геодезической γ_{i}.

Если при этом звено γ от первого до последнего пересечения окружности лежит в секторе, ограниченном диаметрами, проведенными из начальной и конечной точек, имеет место слудующий критерий:

γ замкнута и не имеет самопересечений тогда и только тогда, когда:

$$l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = l/n$$

где n - натуральное число.

Доказательство

При помощи диффеоморфизма f спроецируем спроецируем обе поверхности на диск - внутренность окружности "стыка". Тогда получим диаграмму, где точки пересечения γ с окружностью переходят в себя, а участки геодезических - в кривые, соединяющие соседние пары точек, причем каждую кривую будем "красить" в цвет M_1или M_2, таким образом, цвета соседних дуг будут чередоваться. Из сохранения угла α и симметричности поверхностей вращения следует равенство длин соответствующих дуг окружности "стыка", отсекаемых на диаграмме кривыми одного цвета. В таком случае, окружность делится на чередующиеся дуги длин $l_1(\alpha)$ и $l_2(\alpha)$. Условие того, что γ замыкается через конечное число обходов, означает, что существуют такие натуральные числа a и b, что $a(l_1(\alpha) + l_2(\alpha)) = lb$, или:

$l_1(\alpha) + l_2(\alpha) = lp$, где p - рациональное число.

Так как f - диффеоморфизм,условие несамопересекаемости геодезической равносильно отсутствию пересечений у дуг одного цвета. Действительно, пусть существует $P \in M_1$- точка самопересечения γ, тогда при f точка P переходит в некоторую точку на диске, а пересекающиеся участки γ - в участки пересекающихся дуг. Так как каждое звено лежит в своем секторе, а никакие два сектора не пересекаются, и каждый определяется крайними точками соответствующих дуг на окружности "стыка", условие несамопересекаемости равносильно тому, что никакие две пары точек на окружности "стыка" не зацеплены. Иначе говоря, длины окружности кратна сумме длин $l_1(\alpha) + l_2(\alpha)$. *Утверждение доказано.*

Лемма 1

Рассмотрим конус высоты h и геодезическую, выпущенную под углом α к основанию конуса. Пусть угол развертки конуса равен γ.

Тогда если $\alpha > \frac{\gamma}{2}$, то геодезическая имеет сомопересечения. При $\alpha \leq \frac{\gamma}{2}$ самопересечения отсутствуют.

Доказательство

Рассмотрим развертку конуса. Пусть$\gamma \geq \pi$ (Рис 1). Тогда с точностью до симметрий и поворотов достаточно рассмотреть геодезические, выходящие из точки A, образующие угол от 0 до $\pi/2$ с касательной. Так как геодезические на развертке конуса - это прямые на плоскости, то такие геодезические не будут иметь самопересечений, и утверждение теоремы доказано для $\gamma \geq \pi$.

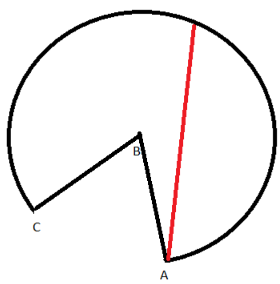


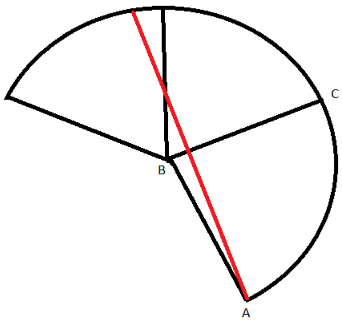
Рис 1

Пусть $\gamma < \pi$ (Рис 2).И пусть ABC - развертка конуса. С точностью до симметрий и поворотов достаточно рассмотреть геодезические, выходящие из точки A, образующие угол от 0 до $\pi/2$ с касательной. Если геодезическая не пересекает сторону CB, то она не имеет самопересечений, так как является хордой окружности на развертке. Это соответствует $\alpha \leq \frac{\gamma}{2}$.

Если же геодезическая пересекает сторону CB, то она имеет самопересечения. Для этого достаточно доказать, что за конечное число обходов конуса она пересечет его основание.

Пусть геодезическая пересекает сторону CB. Тогда продолжим ее после пересечения с CB на копию развертки, что иллюстрирует ее дальнейшее поведение. Продолжаем этот процесс до ее пересечения с дугой окружности (Рис 2). Так как "продолженная" геодезическая пересечет дугу окружности (так как является просто хордой), то она самопересечется.

Этот случай соответствует $\alpha > \frac{\gamma}{2}$.



Лемма доказана.

Рассмотрим развертку конуса.

Рассмотрим поверхность, состоящую из двух конусов, соединенных по основанию.

Определим характеристику k поверхности следующим образом:

$k := \frac{\pi R}{r_1 + r_2}$, где R-радиус основания, r_1и r_2- длины образующих.

γ_1, γ_2-углы разверток конусов.

Теорема 1

Рассмотрим 2 случая:

1)Пусть оба угла γ_1, γ_2 больше π

Тогда для любой характеристики k поверхности и для любого натурального числа n существует угол α,такой что геодезическая, выпущенная под этим углом α к окружности пересечения конусов имеет $2n$ звеньев, является замкнутой и не имеет самопересечений. Причем геодезическая определяется углом αединственным образом с точностью до поворотов. Других замкнутых несамопересекающихся геодезических нет.

Более того, связь между углом α и количеством звеньев:

$\alpha = \frac{\mathrm{k}}{n}$.

2)Пусть хотя бы один из углов γ_1, γ_2меньше π.

Тогда для любой характеристики k поверхности и для любого натурального числа $n \geq \frac{2k}{min\gamma_i}$ существует угол α,такой что геодезическая, выпущенная под этим углом α к окружности пересечения конусов имеет $2n$ звеньев, является замкнутой и не имеет самопересечений. Причем геодезическая определяется углом αединственным образом с точностью до поворотов. Других замкнутых несамопересекающихся геодезических нет.

Более того, связь между углом α и количеством звеньев:

$\alpha = \frac{\mathrm{k}}{n}$.

Доказательство

1)Известно, что геодезические на конусе - это прямые на его развертке. $l_1(\alpha) = 2\alpha r_1$, $l_2(\alpha) = 2\alpha r_2$ - длины дуг окружностей, ограниченных хордой, составляющей угол α с касательной. Пользуемся *утверждением 1* :

$2\alpha r_1 + 2\alpha r_2 = \frac{2\pi R}{n}$

отсюда:
$\alpha = \frac{k}{n}$.

2)Из *леммы 1* следует, что при $\alpha \geq \frac{\gamma_i}{2}$ геодезическая, выпущенная под таким углом, будет иметь самопересечения. Следовательно, будем рассматривать те геодезические, у которых угол с основанием меньше $\frac{\gamma_i}{2}$ для любого i. Дальнейшие рассуждения повторяют первый случай теоремы.
Теорема доказана.

Теперь исследуем найденые геодезические на устойчивость в определенном классе возмущений.

Лемма 2.

Рассмотрим поверхность, состоящую из двух конусов, соединенных по основанию. Пусть R-радиус основания, r_1и r_2- длины образующих конусов. Положим $R = 1$. Рассмотрим на этой поверхности следующую кривую, состоящую из двух звеньев. Одно звено - геодезическая на первом конусе, выпущенная под углом β к основанию. Второе звено - геодезическая на втором конусе, замыкающее первое звено. Обозначит длину такой кривой $l(\beta)$. Тогда:

$$l(\beta) = 2r_1 sin(\beta) + 2r_2 sin\frac{\pi - \beta r_1}{r_2}$$

Доказательство

Первое звено - хорда на развертке конуса, выпущенная под углом β к касательной. Ее длина равна $2r_1 sin(\beta)$. Эта хорда заметает дугу окружности, по длине равную $2\beta r_1$. Тогда второе звено заметает дугу окружности, по длине равную $2\pi - 2\beta r_1$.Значит оно образует с основанием угол $\frac{2\pi - 2\beta r_1}{2r_2}$. А значит, длина второго звена равна $2r_2 sin\frac{\pi-\beta r_1}{r_2}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Теорема 2.

Рассмотрим поверхность, состоящую из двух конусов, соединенных по основанию и замкнутую геодезическую на нем без самопересечений. Пусть R-радиус основания, r_1и r_2- длины образующих конусов. Пусть геодезическая имеет всего 2 звена. Положим $R = 1$. Рассмотрим следующий класс возмущений: "пошевелим" геодезическую, изменив угол α на малую величину ε. Получившийся угол равен $\alpha + \varepsilon$. Чтобы она осталась замкнутой, соединим концы звена, лежащего на одном конусе звеном геодезической на другом. Тогда наша геодезическая неустойчива в данном классе возмущений.

Доказательство.

Известно по *теореме 1*, что геодезическая имеет с основанием конусов угол $\alpha = \frac{\pi}{r_1+r_2}$

"Пошевелим" геодезическую, изменив угол α на малую величину ε. Получившийся угол равен $\alpha + \varepsilon$. Чтобы она осталась замкнутой, соединим концы звена, лежащего на одном конусе звеном геодезической на другом. Получим кривую. Ясно, что длина этой кривой будет полностью определяться величиной ε.Обозначим ее $l(\varepsilon)$. По *лемме 2* :

$$l(\varepsilon) = 2r_1 sin(\alpha+\varepsilon) + 2r_2 sin\frac{\pi - (\alpha+\varepsilon)r_1}{r_2}$$

$$l\text{'}(\varepsilon) = 2r_1 cos(\alpha+\varepsilon) - 2r_1 cos\frac{\pi - (\alpha+\varepsilon)r_1}{r_2}$$

С учетом того, что $\alpha = \frac{\pi}{r_1+r_2}$ получаем :

$$l'(0) = 0$$

$$l''(\varepsilon) = -2r_1 sin(\alpha+\varepsilon) - \frac{2r_1^2}{r_2} sin\frac{\pi - (\alpha+\varepsilon)r_1}{r_2}$$

$$l''(0) = -2r_1 sin\alpha - \frac{2r_1^2}{r_2} sin\frac{\pi - \alpha r_1}{r_2}$$

$\frac{\pi-\alpha r_1}{r_2} = \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{r_1+r_2}$
Следовательно

$$l''(0) = \left(-2r_1 - \frac{2r_1^2}{r_2}\right) sin\frac{\pi}{r_1+r_2}$$

Геодезическая устойчива тогда и только тогда когда $l''(0) > 0$, то есть когда $sin\frac{\pi}{r_1+r_2} < 0$. То есть

$$\frac{1}{r_1+r_2} \in (1+2k\,;\,2+2k)$$

где k - любое целое.

Из того, что r_1 и r_2 больше $R = 1$ следует утверждение теоремы.

Для рассмотрения другого класса возмущений нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3.

Рассмотрим матрицуB размера $n \times n$, составленную из единиц. Тогла все ее собствееные значения - нули, за исключением одного. Оно равно n.

Доказательство.

Легко проверить, что совственные вектора $(-c_{n-1} - c_{n-2} - ... - c_1)$, $(c, ..., c)$ отвечают собственным числам 0 и n соответсвенно. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 4.

Рассмотрим поверхность, состоящую из двух конусов, соединенных по основанию . Пусть R-радиус основания, $r-$ длины образующих конусов. Положим $R = 1$. Рассмотрим на этой поверхности следующую замкнутую кривую, состоящую из $2n$ звеньев. Первые $2n-1$ звеньев - геодезические на конусах, выпущенная под углом $\alpha + \varepsilon_{\text{i}}$ к основанию (соответсвенно). Последнее звено - геодезическая на конусе, замыкающее первое звено.Обозначит длину такой кривой $l(\varepsilon)$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{2n-1})$. Тогда:

$$l(\varepsilon) = 2rsin(\alpha+\varepsilon_1)+2rsin(\alpha+\varepsilon_2)+....+2rsin(\alpha+\varepsilon_{2n-1})+2rsin\frac{2\pi - 2r(\alpha+\varepsilon_1) - ... - 2r(\alpha+\varepsilon_{2n-1})}{2r}$$

Доказательство.

Первые $2n-1$ звеньев - хорды на развертке конуса, выпущенная под углом $\alpha+\varepsilon_{\text{i}}$ к касательной (соответственно). Их длины равны $2rsin(\alpha+\varepsilon_{\text{i}})$ соответственно. Эти хорды заметают дугу окружности, по длине равную $2(\alpha+\varepsilon_{\text{i}})r$. Тогда последнее звено заметает дугу окружности, по длине равную $2\pi - 2(\alpha+\varepsilon_1)r - ...$-$2(\alpha+\varepsilon_{\text{2n-1}})r$.Значит оно образует с основанием угол $\frac{2\pi-2(\alpha+\varepsilon_1)r-...\text{-}2(\alpha+\varepsilon_{\text{2n-1}})r}{2r}$. А значит длина последнего звена равна $2rsin\frac{2\pi-2(\alpha+\varepsilon_1)r-...\text{-}2(\alpha+\varepsilon_{\text{2n-1}})r}{2r}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Теорема 3 .

Рассмотрим поверхность, состоящую из двух конусов, соединенных по основанию и замкнутую геодезическую на нем без самопересечений. Пусть R-радиус основания, $r-$ длина образующих конусов. Пусть геодезическая имеет $2n$ звеньев. Положим $R = 1$. Рассмотрим следующий класс возмущений: "пошевелим" геодезическую, изменив угол α независимо на изломах геодезической на малую величину ε_{i}, $i \leq 2n-1$. Получившийся углы равны $\alpha+\varepsilon_{\text{i}}$соответственно. Чтобы она осталась замкнутой, соединим конец $2n-1$-ого звена с началом первого. Тогда наша геодезическая неустойчива в данном классе возмущений.

Доказательство.

Известно по *теореме 1*, что геодезическая имеет с основанием конусов угол $\alpha = \frac{\pi}{2\text{n}r}$

"Пошевелим" геодезическую, изменив угол α независимо на изломах геодезической на малую величину ε_{i}, $i \leq 2n-1$. Получившийся углы равны $\alpha+\varepsilon_{\text{i}}$соответственно. Чтобы она осталась замкнутой, соединим конец $2n-1$-ого звена с началом первого. Получим кривую. Ясно, что длина этой кривой будет полностью определяться величиной компонент вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{2n-1})$.Обозначим ее $l(\varepsilon)$. По *лемме 4*:

$$l(\varepsilon) = 2rsin(\alpha+\varepsilon_1)+2rsin(\alpha+\varepsilon_2)+....+2rsin(\alpha+\varepsilon_{2n-1})+2rsin\frac{2\pi - 2r(\alpha+\varepsilon_1) - ... - 2r(\alpha+\varepsilon_{2n-1})}{2r}$$

$$l_{\varepsilon_{\text{i}}}\text{'}(\varepsilon) = 2rcos(\alpha+\varepsilon_i) - 2rcos\frac{2\pi - 2r(\alpha+\varepsilon_1) - ... - 2r(\alpha+\varepsilon_{2n-1})}{2r}$$

С учетом того, что $\alpha = \frac{\pi}{2nr}$ получаем :

$$l'(0, 0..., 0) = 0$$

$$l'_{\varepsilon_{\text{i}}\varepsilon_{\text{i}}}\text{'}(\varepsilon) = -2rsin(\alpha+\varepsilon_i) - 2rsin\frac{2\pi - 2r(\alpha+\varepsilon_1) - ... - 2r(\alpha+\varepsilon_{2n-1})}{2r}$$

$$l'_{\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{j}}\text{'}(\varepsilon) = -2rsin\frac{2\pi - 2r(\alpha+\varepsilon_1) - ... - 2r(\alpha+\varepsilon_{2n-1})}{2r}$$

$$l'_{\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_i}\text{'}(0) = -2rsin(\alpha) - 2rsin\frac{2\pi - 2r(2n-1)\alpha}{2r}$$

$$l'_{\varepsilon_\mathrm{i}\varepsilon_j}\text{'}(0) = -2rsin\frac{2\pi - 2r(2n-1)\alpha}{2r}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{2rn}$
Следовательно

$$l''_{\varepsilon_i\varepsilon_i}(0) = -4rsin\frac{\pi}{2rn}$$

$$l''_{\varepsilon_i\varepsilon_j}(0) = -2rsin\frac{\pi}{2rn}$$

Осталось найти знаки собственных чисел такой матрицы. Для этого представим нашу матрицу в виде следующей суммы:

$$-2rsin\frac{\pi}{2rn}E - 2rsin\frac{\pi}{2rn}A$$

Где A-матрица, составленная из единиц. Ортогональными пребразованиями приведем сумму матриц к виду (*лемма 3*):

$$-2rsin\frac{\pi}{2rn}E + -2rsin\frac{\pi}{2rn}B$$

где B- матрица, оставленная из нулей за исключением числа $2n-1$ в верхнем левом углу. Очевидно,все собственные значения такой суммы матриц имеют знак "минус". Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Список литературы

1)И.В. Сыпченко. Дипломная работа "Геодезические на кусочно-гладких поверхностях". Механико-математический факультет МГУ, 2013 г.

2)А.Т. Фоменко, Б.А. Дубровин, С.П. Новиков. "Современная геометрия. Методы и приложения". Издательство "Наука". 1986 г.