Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Функции, не меняющие типы минимальных заполнений

Курсовая работа студента 303 группы Липатова Степана Юрьевича

Научный руководитель: Тужилин Алексей Августинович

Москва, 2014.

Введение

Проблема Штейнера — это задача об оптимальном соединении конечного множества точек метрического пространства. *Сетью* в псевдометрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, d)$, *параметризованной* произвольным связным *графом* $G = (V, E)$, или *сетью типа* G, называется отображение $\Gamma : V \to X$ ([1]). *Вершинами* и *ребрами* сети Γ называются ограничения отображения Γ соответственно на вершины и ребра графа G. *Длиной ребра* $\Gamma : vw \to X$ назовем число $d(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а *длиной* $d(\Gamma)$ *сети* Γ — сумму длин всех ее ребер. *Границей* $\partial\Gamma$ *сети* Γ назовем ограничение отображения Γ на ∂G. Если $M \subset X$ — конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то будем говорить, что *сеть* Γ *соединяет множество* M. Вершины графов и сетей, не являющиеся граничными, будем называть *внутренними*. Число $\mathrm{smt}(M) = \inf\{d(\Gamma) | \Gamma$ — сеть, соединяющая $M\}$ назовем длиной кратчайшей сети. Сеть, для которой $d(\Gamma) = \mathrm{smt}(M)$, называется *кратчайшей сетью* ([2]). Понятие минимального заполнения появилось в работах Громова в следующем виде: пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$, где M — замкнутое многообразие с функцией расстояния ρ на нём, а $\mathcal{W} = (W, d)$, где W — компактное многообразие с краем, равным M, таково, что d не уменьшает расстояния между точками из M, тогда $\mathcal{W}$ называется *заполнением* $\mathcal{M}$. Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объемов заполнений, а также описании тех пространств $\mathcal{W}$, называемых *минимальными заполнениями*, на которых эта нижняя грань достигается.
В контексте проблемы Штейнера естественно рассмотреть в качестве M конечное метрическое пространство. Тогда возможные заполнения — метрические пространства, имеющие структуру одномерных стратифицированных многообразий (которые можно рассматривать как реберно взвешенные графы с неотрицательными весовыми функциями). Аналогично взвешенные графы $\mathcal{G} = (G, \omega)$ могут быть заполнениями типа G с весовой функцией ω.

В [1] доказано, что изменение метрики ρ на метрику $\lambda\rho + a$, $\lambda > 0$, $a > \lambda a_\rho$, где a_ρ — некоторое число, зависящее от метрики ρ, не меняет тип минимального заполнения. Основная задача настоящей работы — описать все функции $f(\rho)$, не меняющие типы минимальных заполнений. Мы покажем, что $f(\rho) = \lambda\rho + a$ — единственные такие функции.

1 Предварительные результаты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты. Подробности см. в [1].

Пусть M — произвольное конечное множество и $G = (V, E)$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M, а M — *граница графа* G, если $M \subset V$. Границу графа G будем также обозначать через ∂G. Пусть теперь $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное псевдометрическое пространство (в отличие от метрики, расстояния между разными точками могут быть равны нулю), $G=(V,E)$ — связный граф, соединяющий M, и $\omega: E \to \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа, называемое обычно *весовой функцией* и порождающее *взвешенный граф* $\mathcal{G}=(G,\omega)$. *Весом* взвешенного графа $\mathcal{G}$ называется величина $\omega(G)$, равная сумме весов всех ребер этого графа. Функция ω задает на V псевдометрику d_ω, а именно, расстоянием между вершинами графа $\mathcal{G}$ назовем наименьший из весов путей, соединяющих эти вершины. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p,q) \le d_\omega(p,q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого *заполнения*. Число $\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$ назовем *весом минимального заполнения*, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \mathrm{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением*.

Утверждение 1.1 ([1]). *Пространство $\mathcal{M}=(M,\rho)$, минимальное заполнение $\mathcal{G}=(G,\omega)$ которого представляет собой звезду, в которой внутренняя вершина v соединена со всеми точками $p_i \in M$, $1 \le i \le n$, $n \ge 3$ аддитивно.*

Пусть $G=(V,E)$ — произвольное дерево. Пусть $v \in V$ — внутренняя вершина степени $(k+1) \ge 3$, смежная с k вершинами $w_1,\dots,w_k$ из ∂G. Тогда множество вершин $\{w_1,\dots,w_k\}$, а также множество ребер $\{vw_1,\dots,vw_k\}$, называются *усами*. Число k назовём *степенью*, а v — *общей вершиной* этих усов.

Будем считать дерево *бинарным* если каждая его вершина имеет степень 1 или 3.

Утверждение 1.2 ([1]). *Пусть $M=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$, и ρ — произвольная псевдометрика на M . Положим $\rho_{ij}=\rho(p_i,p_j)$. Тогда вес минимального заполнения $\mathcal{G}=(G,\omega)$ пространства $\mathcal{M}=(M,\rho)$ дается формулой*

$$\frac{1}{2}\big(\min\{\rho_{12}+\rho_{34},\rho_{13}+\rho_{24},\rho_{14}+\rho_{23}\}+\max\{\rho_{12}+\rho_{34},\rho_{13}+\rho_{24},\rho_{14}+\rho_{23}\}\big).$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij}+\rho_{rs}$, то тип минимального заполнения — бинарное дерево, усы которого суть $\{p_i,p_j\}$ и $\{p_r,p_s\}$.

2 Основные результаты

В этом разделе мы докажем следующий основной результат статьи.

Положим $\mathbb{R}_{>0}=\{x\in\mathbb{R} | x>0\}$.

Теорема 2.1 (Основная теорема). *Пусть $f\colon \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ — такая функция, что для каждого метрического пространства (M,ρ) функция $f\circ\rho$*

по-прежнему является метрикой на M, и типы всех минимальных заполнений у пространств (M,ρ) и $(M,\, f\circ\rho)$ одинаковы. Тогда существует такое C, что $f+2C$ линейна на $\mathbb{R}_{>0}$.

Доказательство основной теоремы основано на двух вспомогательных результатах — леммах 2.2 и 2.5.

Лемма 2.2. *Пусть $f\colon \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ — такая функция, что для каждого метрического пространства (M,ρ) функция $f\circ\rho$ по-прежнему является метрикой на M, и типы всех минимальных заполнений у пространств (M,ρ) и $(M,\, f\circ\rho)$ одинаковы. Тогда существует такое C, что $f+2C$ аддитивна на $\mathbb{R}_{>0}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}=(M,\rho)$, $M=\{p_i\}_{i=0}^n$, $n\ge 3$, — метрическое пространство, минимальное заполнение которого $\mathcal{G}=(G,\omega)$ представляет собой звезду с внутренней вершиной v, соединенной со всеми точками p_i ребрами $e_i=vp_i$, причем $\omega(e_0)=0$, $\rho(p_0,p_1)=\rho(p_0,p_2)=1$. Заметим, что при всех $i=1,\dots,n$ имеем $\omega(e_i)>0$, так как иначе ρ не является метрикой. Так как $f\circ\rho$ — метрика на M, а звезда $\mathcal{G}_1=(G,\omega_1)$ — минимальное заполнение пространства $\mathcal{M}_1=(M,f\circ\rho)$, то в силу 1.1 для всех $i\ne j$ выполняется

$$f\big(\rho(p_i,p_j)\big)=f\big(\omega(e_i)+\omega(e_j)\big)=\omega_1(e_i)+\omega_1(e_j).$$

Следовательно, при каждом $i>0$ имеем

$$f\big(\omega(e_i)\big)=f\big(\omega(e_i)+\omega(e_0)\big)=\omega_1(e_i)+\omega_1(e_0)=\omega_1(e_i)-C,$$

где $C=-\omega_1(e_0)$. Следовательно, для любых положительных $i\ne j$ выполняется

$$f\big(\omega(e_i)+\omega(e_j)\big)=f\big(\omega(e_i)\big)+f\big(\omega(e_j)\big)+2C.$$

Покажем, что при изменении весов $\omega(e_i)$, $i\ge 3$, и сохранении весов ребер e_0, e_1, e_2, число $C=-\omega_1(e_0)$ не изменится. Действительно,

$$\omega_1(e_0)=\frac{\omega_1(e_0)+\omega_1(e_1)+\omega_1(e_0)+\omega_1(e_2)-\omega_1(e_1)-\omega_1(e_2)}{2}= \\ \frac{f\big(\rho(p_0,p_1)\big)+f\big(\rho(p_0,p_2)\big)-f\big(\rho(p_1,p_2)\big)}{2}=f(1)-\frac{f(2)}{2}.$$

Таким образом, для любой весовой функции ω такой, что $\omega(e_0)=0$, $\omega(e_1)=\omega(e_2)=1$, число C равно $f(1)-\frac{f(2)}{2}$, поэтому оно не зависит от $\omega(e_i)$, $i\ge 3$, которые можно выбрать любыми в силу того, что проведенные выше рассуждения имеют место для любой звезды. Отсюда вытекает, что функция $f+2C$ аддитивна на открытом луче $x>0$. □

Замечание 2.3. Для доказательства $f(a+b)=f(a)+f(b)+2C$ можно ограничиться рассмотрением пространств из пяти точек, содержащих p_0, p_1, p_2 и p_3, p_4, таких, что $\rho(p_0,p_3)=a$, $\rho(p_0,p_4)=b$.

Лемма 2.4. *Функции, не меняющие типы минимальных заполнений, монотонно возрастают.*

Доказательство. Покажем, что если $0 < a < b$, то $f(a) < (b)$. Возьмём множество $X = \{p_i\}_{i=1}^n$ и такую функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$, что $\rho(p_1, p_2) = \rho(p_2, p_1) = \rho(p_3, p_4) = \rho(p_4, p_3) = a$, для любого $x \in X$ выполняется $\rho(x, x) = 0$, а на остальных парах ρ принимает значение b. Очевидно, $\big(X, \rho\big)$ метрическое пространство, заполнение которого согласно утверждению 1.2 имеет усы $\{p_1, p_2\}$ и $\{p_3, p_4\}$, так как на соответствующих противоположных рёбрах достигается минимум суммы длин (он равен $2a$). После замены ρ на $f \circ \rho$ для не меняющей типы минимальных заполнений функции f усы останутся теми же, поэтому $2f(a)$ есть минимум суммы длин противоположных рёбер, т.е. $f(a) < f(b)$. $\square$

Лемма 2.5. *Если $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ — монотонно возрастающая функция, такая, что $g = f + 2C$ аддитивна на $\mathbb{R}_{>0}$, то g линейна на $\mathbb{R}_{>0}$.*

Замечание 2.6. Здесь и далее линейными функциями на $\mathbb{R}_{>}$ называются ограничения линейных отображений $\mathbb{R}$ в себя, а не функции вида $f(x) = kx + b$.

Доказательство. Пусть g не линейна, тогда существуют такие $x_1, x_2 > 0$, что $\frac{g(x_1)}{x_1} = \alpha > \beta = \frac{g(x_2)}{x_2}$. Возьмём такое $\epsilon > 0$, что $\alpha x_1 > \beta(x_1 + \epsilon)$. Тогда найдётся $m \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{x_2}{m} < \epsilon$, и, следовательно, $\frac{x_2}{m} < x_1 + \epsilon$, поэтому существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что $x_1 < \frac{kx_2}{m} < x_1 + \epsilon$.

Но тогда $g(\frac{kx_2}{m}) = \beta\frac{kx_2}{m} < \beta(x_1 + \epsilon) < \alpha x_1 = g(x_1)$, что противоречит монотонному возрастанию. $\square$

Доказательство основной теоремы. По лемме 2.2 существует такое C, что $f + 2C$ аддитивна, по лемме 2.4 функция f монотонно возрастает, а по лемме 2.5 для такой функции существует C, для которого $f + 2C$ линейна. $\square$

Список литературы

[1] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении.* Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, с. 65-118.

[2] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей.* Ижевск, ИКИ, с. 1-424.