

В общем случае уравнения движения твёрдого тела с закреплённой точкой в однородном поле тяжести описываются следующим образом:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \kappa) \times \omega + \nu \times \frac{\partial U}{\partial \nu}, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (1)$$

где $U(\nu)$ - потенциальная функция, ω - угловая скорость, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ - тензор инерции, ν - единичный вертикальный вектор, через $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ обозначен вектор с координатами $\left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\right)$, а $\kappa(\nu)$ - вектор-функция, компоненты которой являются коэффициентами некоторой замкнутой 2-формы на группе вращений $SO(3)$, то есть формы гироскопических сил. При этом вектор-функция $\kappa(\nu)$ не произвольна, а имеет вид:

$$\kappa = \lambda + (\Lambda - \text{div} \lambda \cdot E) \nu, \quad (2)$$

где $\lambda(\nu)$ - произвольная вектор-функция, $\text{div} \lambda = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \nu_3}$, а $\Lambda = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu_j}\right)^T$ - транспонированная матрица Якоби.

У такой системы существуют геометрический интеграл

$$F = \langle \nu, \nu \rangle = 1,$$

интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + U(\nu)$$

и интеграл площадей

$$G = \langle A\omega + \lambda, \nu \rangle$$

Уравнения (1), (2) можно представить в виде уравнений Эйлера для 6-мерной алгебры $e(3)$ группы движений трёхмерного пространства. На пространстве $e(3)$ возьмём естественные координаты $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$.

При отображении $\phi : \mathbb{R}^6(\nu, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^6(S, R)$, заданном формулами

$$S = -(A\omega + \lambda), R = \nu,$$

интегралы площадей и геометрический переходят соответственно в следующие выражения:

$$F = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2,$$

$$G = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3$$

а условие на κ эквивалентно тому, что гамильтониан имеет вид:

$$H = \langle CS, S \rangle + \langle W, S \rangle + V,$$

где C - постоянная симметрическая матрица размера 3×3 , $W(R)$ - гладкая вектор-функция, а $V(R)$ - гладкая функция.

Пусть гамильтониан имеет следующий вид:

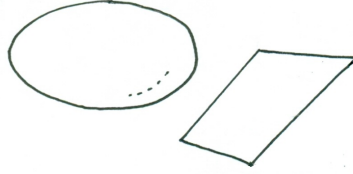
$$\langle \mathbf{A}S, S \rangle + \langle \mathbf{B}S, R \rangle + U(R),$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} - постоянные матрицы, а $U(R)$ - гладкая функция от аргументов R_1, R_2, R_3 . Задача состоит в описании топологии многообразия Q^3 , получающегося в результате пересечения поверхностей уровня функций F, G и H .

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}S, S \rangle + \langle \mathbf{B}S, R \rangle + U(R) = h, \\ S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g, \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases}$$

Один из способов описания топологии состоит в проекции многообразия на сферу Пуассона $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$.

Можно рассмотреть пространство, натянутое на S_i , приняв R_i в качестве параметров, учитывая, что $R_1 + R_2 + R_3 = 1$. Тогда первое уравнение будет описывать эллипсоид, а второе - плоскость. При различных (R_1, R_2, R_3) возможны три варианта взаимного расположения этих поверхностей: они могут не пересекаться, касаться или пересекаться по окружности. Следовательно, для точки на сфере Пуассона прообразом будет соответственно пустое множество, точка или окружность.



Функция $\phi_g(R)$, называемая приведённым потенциалом, описывает множество всех точек на сфере, прообразы которых не пусты. По сути, приведённый потенциал - ограничение двух первых уравнений на сферу Пуассона. Его линии уровня представляют собой окружности и “восьмёрки”.



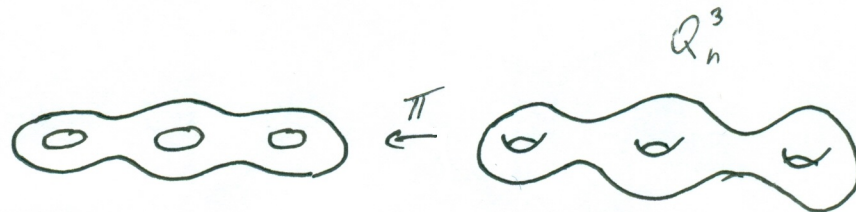
Так как приведённый потенциал - гладкая функция на сфере, то множество точек $\phi_g(R) \leq h$ будет представлять собой либо всю сферу, либо пустое множество, либо диск с k дырками, $k = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим отдельно эти случаи.

Если образ проекции совпадает со всей сферой Пуассона, то многообразие Q^3 представляет собой S^1 - расслоение над сферой, эквивалентное расслоению единичных касательных векторов. Поэтому $Q^3 = \mathbb{R}P^3$.

Если образ представляет собой кольцо, то можно заметить, что над точками внутри кольца “висят” окружности, а прообразами точек на границе являются точки. Можно взять отрезок, представляющий из себя ту часть радиуса большой окружности, которая попадает в кольцо, и умножить его на окружность, стягивая её в точку на концах отрезка.



Таким образом, получается S^2 . Вращая отрезок вокруг центра большой окружности, мы получим кольцо, поэтому S^2 нужно умножить на S^1 . Значит, если образом проекции является диск с дыркой, то многообразие Q^3 представляет из себя $S^1 \times S^2$. Если в диске больше одной дырки, то многообразие будет связной суммой k штук $S^1 \times S^2$.



Предположим, что образ проекции - диск. В этом случае нужно умножить двумерный диск на окружность и стянуть в точку те окружности, которые лежат на границе. Таким образом, получается сфера S^3 .

Обобщая результаты, получаем (см. [1])

Теорема 1 Пусть $H = \langle CS, S \rangle + \langle W, S \rangle + V$, где C - постоянная симметричная положительно определённая матрица размера 3×3 , $W(R)$ - произвольная вектор-функция, и $V(R)$ - произвольная гладкая

функция. Рассмотрим проекцию $\pi(Q^3)$ изоэнергетической 3-поверхности Q^3 на двумерную сферу Пуассона, задаваемую уравнением $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$. Здесь $\pi(S, R) = R$. Пусть $\pi(Q^3)$ гомеоморфна сфере с t дырками. Тогда:

- 1) если $t = 0$, то Q^3 диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$,
- 2) если $t = 1$, то Q^3 диффеоморфна S^3 ,
- 3) если $t > 1$, то Q^3 диффеоморфна связной сумме $\sharp(S^1 \times S^2)$ в количестве $t - 1$ экземпляров.

Количество минимумов и максимумов приведённого потенциала равно количеству дырок в образе, поэтому задача сводится к нахождению и оценке количества критических точек приведённого потенциала, а также определению их типа. Итак, рассмотрим совместную поверхность уровня трёх функций, заданных в пространстве $\mathbb{R}^6(S_i, R_i), i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}S, S \rangle + \langle \mathbf{B}S, R \rangle = h - U(R), \\ \langle S, R \rangle = g, \\ \langle R, R \rangle = 1. \end{cases},$$

где $S = (S_1, S_2, S_3), R = (R_1, R_2, R_3)$ - векторы, $U(R)$ - гладкая функция (R_1, R_2, R_3) , а \mathbf{A}, \mathbf{B} - постоянные матрицы, причём \mathbf{A} положительно определена.

Утверждение 1 Матрицу \mathbf{A} можно считать диагональной

Доказательство.

Так как $\langle \mathbf{A}S, S \rangle$ является квадратичной формой на векторах S в пространстве $\mathbb{R}^3(S)$, то можно ортогональной заменой с матрицей \mathbf{C} привести её к диагональной матрице:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы сохранить второе уравнение в системе, нужно произвести замену координат в пространстве, натянутом на (R_1, R_2, R_3) с помощью той же матрицы \mathbf{C} . В силу её ортогональности такая замена сохраняет сферу Пуассона.

Итак, мы считаем матрицу \mathbf{A} диагональной, пусть при этом матрица \mathbf{B} имеет произвольный вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_1 S_1^2 + a_2 S_2^2 + a_3 S_3^2 + S_1(b_{11}R_1 + b_{21}R_2 + b_{31}R_3) + S_2(b_{12}R_1 + b_{22}R_2 + b_{32}R_3) + S_3(b_{13}R_1 + b_{23}R_2 + b_{33}R_3) = h - U(R), \\ S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g, \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases}$$

Выделим полные квадраты:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 a_i \left(S_i^2 + 2S_i \left(\frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i} \right) + \left(\frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i} \right)^2 \right) = h + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{(b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3)^2}{4a_i} \right) - U(R) \\ \sum_{i=1}^3 \left(S_i + \frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i} \right) R_i = \sum_{i=1}^3 R_i \left(\frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i} \right) + g \\ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1. \end{cases}$$

Тогда для того, чтобы у точки на сфере Пуассона был прообраз, должно выполняться неравенство:

$$(a_1 R_1^2 + a_2 R_2^2 + a_3 R_3^2) \left(h - U(R) + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{(b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3)^2}{4a_i} \right) \right) \geq \left(\sum_{i=1}^3 R_i \left(\frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i} \right) + g \right)^2$$

В этом случае приведённый потенциал будет иметь вид:

$$\phi_g = U(R) + \frac{\left(\sum_{i=1}^3 R_i \left(\frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i} \right) + g \right)^2}{a_1 R_1^2 + a_2 R_2^2 + a_3 R_3^2} - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{(b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3)^2}{4a_i} \right)$$

В работе [4] И.Н.Гашененко рассматривал частный случай движения тела, при котором уравнения Эйлера-Пуассона будут иметь вид

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + r \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega,$$

где ω - угловая скорость, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ - тензор инерции, ν - единичный вертикальный вектор, а r - вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс тела. В статье доказано, что одно из свойств вектора r заключается в том, что он сохраняет положение не только в теле, но и в пространстве. К тому же, он лежит в плоскости, натянутой на векторы $A\omega, \omega$. Если считать, что центр масс твёрдого тела расположен в главной плоскости инерции, то без ограничения общности можно полагать, что

$$|r| = 1, \quad r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_2. \quad (3)$$

При этих условиях интегралы и приведённый потенциал выглядят следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - r \cdot \nu = h, \quad G = A\omega \cdot \nu = g, \quad I = \nu \cdot \nu = 1.$$

$$\phi_g(\nu) = \frac{g^2}{2(A\nu \cdot \nu)} - r \cdot \nu$$

Выше упоминалось, что r - линейная комбинация $A\omega$ и ω . Записывая гамильтониан с учётом этого, мы получаем следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2}A\omega \cdot \omega - (A(c_1\omega) + c_2\omega) \cdot \nu = h,$$

где c_1, c_2 - скалярные константы. Если при записи гамильтониана использовать матрицы, то \mathbf{A} будет произвольной, должны лишь выполняться условия (3), а \mathbf{B} будет иметь вид $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{E}$, где \mathbf{E} - единичная матрица.

Теорема 2 Пусть гамильтониан имеет вид $\langle \mathbf{A}S, S \rangle + \langle \mathbf{B}S, R \rangle + U(R)$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} - постоянные матрицы, а $U(R)$ - гладкая функция от аргументов R_1, R_2, R_3 . По доказанному ранее, матрица A может быть диагональной - пусть она имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда для различных \mathbf{B} и $U(R)$ будут выполняться следующие оценки на количество критических точек приведённого потенциала на сфере Пуассона:

- a) (Гашененко, [4]) Пусть матрица \mathbf{B} имеет вид $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{E}$, и выполняются условия (3). Тогда при любом фиксированном значении интеграла G приведённый потенциал имеет не менее двух, но не более десяти критических точек на сфере Пуассона.
- b) Приведённый потенциал имеет не более 18 критических точек, если матрица \mathbf{B} диагональна, а функция $U(R)$ тождественно равна 0.
- c) Приведённый потенциал имеет не более 18 критических точек, если матрица \mathbf{B} диагональна, а $U(R) = c_1R_1^2 + c_2R_2^2 + c_3R_3^2$, где c_1, c_2, c_3 - некоторые константы.
- d) Приведённый потенциал имеет не более 144 критических точек, если матрица \mathbf{B} диагональна, а $U(R) = c_1R_1 + c_2R_2 + c_3R_3$, где c_1, c_2, c_3 - некоторые константы.
- e) Приведённый потенциал имеет не более 28 критических точек, если матрица \mathbf{B} - прямая сумма двух Жордановых клеток, а функция $U(R)$ тождественно равна 0.
- f) Приведённый потенциал имеет не более, чем 204 критические точки, если матрица \mathbf{B} произвольна, а $U(R)$ тождественно равна 0.

Доказательство.

а) См. [4] и [5].

б) Пусть матрица \mathbf{B} имеет следующий вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix},$$

Приведённый потенциал в этом случае выглядит следующим образом:

$$\phi_g(R) = \frac{\left(\frac{b_1}{2a_1}R_1^2 + \frac{b_2}{2a_2}R_2^2 + \frac{b_3}{2a_3}R_3^2 + g\right)^2}{\frac{R_1^2}{a_1} + \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_3^2}{a_3}} - R_1^2 \frac{b_1^2}{4a_1} - R_2^2 \frac{b_2^2}{4a_2} - R_3^2 \frac{b_3^2}{4a_3}$$

Для того, чтобы найти критические точки приведённого потенциала, нужно покрыть сферу тремя картами, то есть по очереди выразить одни R_i через другие. Выразим R_1 через R_2 и R_3 и подставим в приведённый потенциал для диагональных матриц:

$$R_1^2 = 1 - R_2^2 - R_3^2$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b_1^2}{4a_1} - \frac{b_2^2}{4a_2}\right)R_2^2 + \left(\frac{b_1^2}{4a_1} - \frac{b_3^2}{4a_3}\right)R_3^2 + \frac{\frac{b_1^2}{4a_1} + \frac{b_1g}{a_1} + g^2 + \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_1}{2a_1} + g\right)R_2^2 + \left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_1}{2a_1} + g\right)R_3^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{(a_1-a_2)R_2^2}{a_1a_2} + \frac{(a_1-a_3)R_3^2}{a_1a_3}} + \\ & + \frac{\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2R_2^4}{4a_1^2a_2^2} + \frac{(a_1b_3-a_3b_1)^2R_3^4}{4a_1^2a_3^2} + \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right)\left(\frac{b_1}{2a_1} - \frac{b_3}{2a_3}\right)R_2^2R_3^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{(a_1-a_2)R_2^2}{a_1a_2} + \frac{(a_1-a_3)R_3^2}{a_1a_3}} \end{aligned}$$

Продифференцировав по R_3 , получаем:

$$\begin{aligned} & R_3 \frac{a_1a_3(-a_3(b_1-b_2)^2 + a_1(b_2-b_3)^2)R_2^4 + a_2^2(-4a_1a_3^2g^2 - a_1(b_1-b_3)^2R_3^4 + a_3((-b_1+b_3-2a_1g + (b_1-b_3)R_2^2)^2))}{2(a_1a_3R_2^2 + a_2(a_1R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2} + \\ & + R_3 \frac{a_2^2a_32(b_1-b_3)^2(-1 + R_2^2)R_3^2 + (b_1-b_3)^2R_3^4}{2(a_1a_3R_2^2 + a_2(a_1R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2} + \\ & + R_3 \frac{2a_1a_2a_3R_2^2(b_2(2(a_1-a_3)g + b_3(-1 + R_2^2)) - b_1^2R_3^2 - b_3(2a_1g + b_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))}{2(a_1a_3R_2^2 + a_2(a_1R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2} + \\ & + R_3 \frac{2a_1a_2a_3(R_2^2)b_1(b_2 + 2a_3g - b_2R_2^2 + b_3(-1 + R_2^2 + 2R_3^2))}{2(a_1a_3R_2^2 + a_2(a_1R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2} \end{aligned}$$

Продифференцировав по R_2 , получаем:

$$\begin{aligned} & R_2 \frac{-a_1a_3^2(b_1-b_2)^2R_2^4 - a_1a_2^2(2a_3g + (-b_1+b_3)R_3^2)^2 + a_2(a_3^2((b_1-b_2+2a_1g)^2 - 2(b_1-b_2)^2R_2^2 + (b_1-b_2)^2R_2^4))}{2(a_1a_3R_2^2 + a_2(a_1R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2} \\ & - R_2 \frac{-2a_3((a_3(b_1-b_2) + a_1(b_2-b_3))(b_1-b_2+2a_1g) + (a_1-a_3)(b_1-b_2)^2R_2^2)R_3^2 + (a_3(b_1-b_2) + a_1(b_2-b_3))^2R_3^4}{2(a_1a_3R_2^2 + a_2(a_1R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2} \end{aligned}$$

Приравняв оба выражения к нулю, составляем систему, решениями которой (Wolfram) являются следующие точки (R_2, R_3) :

$$\begin{aligned} & (0, 0), \left(0, \pm \sqrt{\frac{-a_3(b_1-b_3)^2 + \sqrt{a_1a_3(b_1-b_3)^2(b_1-b_3+2a_1g-2a_3g)^2}}{(a_1-a_3)(b_1-b_3)^2}}\right) \\ & \left(0, \pm \sqrt{\frac{-a_3(b_1-b_3)^2 + \sqrt{a_1a_3(b_1-b_3)^2(b_1-b_3+2a_1g-2a_3g)^2}}{(a_1-a_3)(b_1-b_3)^2}}\right), \end{aligned}$$

$$\left(0, \pm \sqrt{-\frac{a_2(b_1 - b_2)^2 + \sqrt{a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_2 + 2a_1 g - 2a_2 g)^2}}{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)^2}}\right),$$

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{-a_2(b_1 - b_2)^2 + \sqrt{a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_2 + 2a_1 g - 2a_2 g)^2}}{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)^2}}\right).$$

Для того, чтобы покрыть сферу второй картой, нужно выразить, например, R_2 через R_1 и R_3 и продифференцировать. При этом в системе уравнений, полученных после дифференцирования, можно сразу положить $R_1 = 0$. Действуя аналогично, получаем решения системы - при

$$R_2^2 = 1 - R_1^2 - R_3^2$$

имеем

$$\left(\frac{b_2^2}{4a_2} - \frac{b_1^2}{4a_1}\right)R_1^2 + \left(\frac{b_2^2}{4a_2} - \frac{b_3^2}{4a_3}\right)R_3^2 + \frac{\frac{b_2^2}{4a_2} + \frac{b_2 g}{a_2} + g^2 + \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right)\left(\frac{b_2}{2a_2} + g\right)R_1^2 + \left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_2}{a_2}\right)\left(\frac{b_2}{2a_2} + g\right)R_3^2}{\frac{1}{a_2} + \frac{(a_2 - a_1)R_1^2}{a_1 a_2} + \frac{(a_2 - a_3)R_3^2}{a_2 a_3}} +$$

$$+ \frac{\frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 R_1^4}{4a_1^2 a_2^2} + \frac{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 R_3^4}{4a_2^2 a_3^2} + \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_2}{2a_2} - \frac{b_3}{2a_3}\right)R_1^2 R_3^2}{\frac{1}{a_2} + \frac{(a_2 - a_1)R_1^2}{a_1 a_2} + \frac{(a_2 - a_3)R_3^2}{a_2 a_3}}$$

Решения системы уравнений - следующие пары точек (R_1, R_3) :

$$(0, 0), \left(0, \pm \sqrt{\frac{-a_3(b_2 - b_3)^2 + \sqrt{a_2 a_3 (b_2 - b_3)^2 (b_2 - b_3 + 2a_2 g - 2a_3 g)^2}}{(a_2 - a_3)(b_2 - b_3)^2}}\right),$$

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{a_3(b_2 - b_3)^2 + \sqrt{a_2 a_3 (b_2 - b_3)^2 (b_2 - b_3 + 2a_2 g - 2a_3 g)^2}}{(a_2 - a_3)(b_2 - b_3)^2}}\right)$$

Покроем сферу третьей картой, выразив R_3 через R_2 и R_1 . Приведённый потенциал симметричен относительно перестановки индексов, и, к тому же, все точки, кроме $(0, 0, \pm 1)$ уже покрыты. Подставив их в полученную систему уравнений, получим 0, поэтому $(0, 0, \pm 1)$ - критическая точка.

Таким образом, координаты критических точек на сфере могут быть выражены через элементы матриц. Так как точки лежат на сфере, и в выражениях присутствуют квадратные корни, то для существования этих точек на a_i и b_i должны быть наложены ограничения. Выражения, стоящие под корнями, должны быть больше 0 и меньше 1. Отсюда возникает система неравенств - например, для первых четырёх решений :

$$\begin{cases} \frac{-a_3(b_1 - b_3)^2 + \sqrt{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 (b_1 - b_3 + 2a_1 g - 2a_3 g)^2}}{(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)^2} > 0 \\ \frac{-a_3(b_1 - b_3)^2 + \sqrt{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 (b_1 - b_3 + 2a_1 g - 2a_3 g)^2}}{(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)^2} < 1 \\ \frac{a_3(b_1 - b_3)^2 + \sqrt{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 (b_1 - b_3 + 2a_1 g - 2a_3 g)^2}}{(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)^2} < 0 \\ \frac{a_3(b_1 - b_3)^2 + \sqrt{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 (b_1 - b_3 + 2a_1 g - 2a_3 g)^2}}{(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)^2} > -1 \end{cases}$$

обратим внимание на последние два неравенства: в силу того, что a_i положительны, для выполнения неравенства необходимо, чтобы $a_1 - a_3$ было меньше 0.

$$\frac{1}{a_1 - a_3} \left(a_3 + \sqrt{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 (b_1 - b_3 + 2a_1 g - 2a_3 g)^2} \right) > -1$$

так как мы прибавляем к a_3 положительное число, то достаточно проверить, что неравенство не выполняется, даже если квадратный корень равен 0:

$$\frac{a_3}{a_1 - a_3} = -1 + \frac{a_1}{a_1 - a_3} < -1$$

Значит, не подходят следующие решения:

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{a_3(b_1 - b_3)^2 + \sqrt{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2 (b_1 - b_3 + 2a_1 g - 2a_3 g)^2}}{(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)^2}}\right),$$

$$\left(0, \pm \sqrt{-\frac{a_2(b_1 - b_2)^2 + \sqrt{a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_2 + 2a_1 g - 2a_2 g)^2}}{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)^2}}\right),$$

$$\left(0, \pm \sqrt{-\frac{a_3(b_2 - b_3)^2 + \sqrt{a_2 a_3 (b_2 - b_3)^2 (b_2 - b_3 + 2a_2 g - 2a_3 g)^2}}{(a_2 - a_3)(b_2 - b_3)^2}}\right)$$

с) Доказательство полностью повторяет предыдущее - аналитически вычисляются нули производной и проверяется выполнение неравенств. За счет того, что $U(R)$ - сумма квадратов, решения легко выражаются через коэффициенты. Критические точки (R_1, R_2, R_3) :

$$(0, 0, \pm 1), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0),$$

$$\left(\pm \sqrt{\frac{a_1((b_1 - b_3)^2 + 4(a_1 - a_3)(c_1 - c_3)) - \sqrt{a_1 a_3((b_1 - b_3)^2 + 4(a_1 - a_3)(c_1 - c_3))(b_1 - b_3 + 2(a_1 - a_3)g)^2}}{(a_1 - a_3)((b_1 - b_3)^2 + 4(a_1 - a_3)(c_1 - c_3))}}, 0,\right.$$

$$\pm \sqrt{\frac{a_3(-(b_1 - b_3)^2 - 4(a_1 - a_3)(c_1 - c_3)) + \sqrt{a_1 a_3((b_1 - b_3)^2 + 4(a_1 - a_3)(c_1 - c_3))(b_1 - b_3 + 2(a_1 - a_3)g)^2}}{(a_1 - a_3)((b_1 - b_3)^2 + 4(a_1 - a_3)(c_1 - c_3))}},$$

$$\left(\pm \sqrt{\frac{a_1((b_1 - b_2)^2 + 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)) - \sqrt{a_1 a_2((b_1 - b_2)^2 + 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2))(b_1 - b_2 + 2(a_1 - a_2)g)^2}}{(a_1 - a_2)((b_1 - b_2)^2 + 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2))}},\right.$$

$$\pm \sqrt{\frac{a_2(-(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)) + \sqrt{a_1 a_2((b_1 - b_2)^2 + 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2))(b_1 - b_2 + 2(a_1 - a_2)g)^2}}{(a_1 - a_2)((b_1 - b_2)^2 + 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2))}}, 0),$$

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{a_2((b_2 - b_3)^2 + 4(a_2 - a_3)(c_2 - c_3)) - \sqrt{a_2 a_3((b_2 - b_3)^2 + 4(a_2 - a_3)(c_2 - c_3))(b_2 - b_3 + 2(a_2 - a_3)g)^2}}{(a_2 - a_3)((b_2 - b_3)^2 + 4(a_2 - a_3)(c_2 - c_3))}},\right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\frac{a_3(-(b_2 - b_3)^2 - 4(a_2 - a_3)(c_2 - c_3)) + \sqrt{a_2 a_3((b_2 - b_3)^2 + 4(a_2 - a_3)(c_2 - c_3))(b_2 - b_3 + 2(a_2 - a_3)g)^2}}{(a_2 - a_3)((b_2 - b_3)^2 + 4(a_2 - a_3)(c_2 - c_3))}}\right).$$

d) Приведённый потенциал имеет вид:

$$\phi_g(R) = \frac{\left(\frac{b_1}{2a_1}R_1^2 + \frac{b_2}{2a_2}R_2^2 + \frac{b_3}{2a_3}R_3^2 + g\right)^2}{\frac{R_1^2}{a_1} + \frac{R_2^2}{a_2} + \frac{R_3^2}{a_3}} - R_1^2 \frac{b_1^2}{4a_1} - R_2^2 \frac{b_2^2}{4a_2} - R_3^2 \frac{b_3^2}{4a_3} - c_1 R_1 - c_2 R_2 - c_3 R_3$$

Подставив $R_1 = \pm \sqrt{1 - R_2^2 - R_3^2}$ и продифференцировав по R_2 и R_3 , получаем выражения: $\frac{1}{4}(-4c_2 + \frac{2b_1^2 R_2}{a_1} - \frac{2b_3^2 R_2}{a_2} +$

$$-\frac{2(a_1 - a_2)R_2(a_1 a_3 b_2 R_2^2 + a_2(a_1 b_3 R_3^2 + a_3(2a_1 g - b_1(-1 + R_2^2 + R_3^2))))^2}{a_1 a_3(a_1 a_3 R_2^2 + a_2(a_1 R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2}$$

$$\frac{1}{4}(-4c_3 + \frac{2b_1^2 R_3}{a_1} - \frac{2b_2^2 R_3}{a_2} + \frac{4c_1 R_3}{\sqrt{1 - R_2^2 - R_3^2}} + \frac{4R_3(-a_3 b_1 + a_1 b_3)(a_1 a_3 b_2 R_2^2 + a_2(a_1 b_3 R_3^2 + a_3(2a_1 g - b_1(-1 + R_2^2 + R_3^2))))}{a_1 a_3(a_1 a_3 R_2^2 + a_2(a_1 R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))} -$$

$$-\frac{2(a_1 - a_3)R_3(a_1 a_3 b_2 R_2^2 + a_2(a_1 b_3 R_3^2 + a_3(2a_1 g - b_1(-1 + R_2^2 + R_3^2))))^2}{a_1 a_3(a_1 a_3 R_2^2 + a_2(a_1 R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2}$$

Воспользуемся следующим фактом:

Теорема 3 (Безу) *Предположим, что X и Y - плоские проективные кривые над полем F , не имеющие общих делителей (это условие означает, что X и Y определены полиномами, наибольший по степени общий полиномиальный делитель которых - константа, в частности, если X и Y - две кривые общего положения). В этом случае общее число точек пересечения X и Y с координатами из алгебраически замкнутого поля E , содержащего F , с учетом их кратности, равно произведению степеней X и Y .*

Домножим оба выражения на $a_1 a_2 a_3 (a_1 a_3 R_2^2 + a_2(a_1 R_3^2 - a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2)))^2 \sqrt{1 - R_2^2 - R_3^2}$, возведём в квадрат, вынеся $\sqrt{1 - R_2^2 - R_3^2}$ в качестве общего множителя в одной части равенства.

В результате получим два полинома 12-й степени. Отсюда, по теореме Безу, количество решений не превышает 144. Если мы покроем сферу второй картой, выразив R_2 через R_1 и R_3 , то получим:

$$-c_1 R_1 - \frac{b_1^2 R_1^2}{4a_1} - c_3 R_3 - \frac{b_3^2 R_3^2}{4a_3} - c_2 \sqrt{1 - R_1^2 - R_3^2} - \frac{b_2^2(1 - R_1^2 - R_3^2)}{4a_2} + \frac{(g + \frac{b_1 R_1^2}{2a_1} + \frac{b_3 R_3^2}{2a_3} + \frac{b_2(1 - R_1^2 - R_3^2)}{2a_2})^2}{\frac{R_1^2}{a_1} + \frac{R_3^2}{a_3} + \frac{(1 - R_1^2 - R_3^2)}{a_2}}$$

Как уже ранее замечалось, теперь в систему уравнений, полученной после дифференцирования, можно сразу подставить $R_1 = 0$. При этом дифференциал по R_1 принимает значение $-c_1$, по предположению не равное 0. Поэтому решений у системы уравнений нет. При покрытии третьей картой (R_3 через R_2, R_1 достаточно только проверить, что точка $(0,0)$ не является критической.

е) Пусть матрица \mathbf{B} имеет следующий вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Тогда приведённый потенциал имеет вид

$$\phi_g(R) = \frac{-R_1^2(a_3(R_1^2 - 4a_2g\lambda) + a_2R_3^2(\lambda - \mu)^2) + a_1(4a_3gR_2(R_1 + R_2\lambda) - R_3^2(R_1 + R_2\lambda - R_2\mu)^2 + 4a_2g(a_3g + R_3^2\mu))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 + a_1a_2R_3^2)}$$

Удобнее всего выразить R_3 через R_2 и R_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{-R_1^2(a_3(R_1^2 - 4a_2g\lambda) - a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2)(\lambda - \mu)^2)}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))} + \\ & + \frac{a_1(4a_3gR_2(R_1 + R_2\lambda) + (-1 + R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2(\lambda - \mu))^2 + 4a_2g(a_3g - (-1 + R_1^2 + R_2^2)\mu))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))} \end{aligned}$$

Дифференцируя по R_1 , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))(2R_1(-2a_3(R_1^2 - 2a_2g\lambda) + a_2(-1 + 2R_1^2 + R_2^2)(\lambda - \mu)^2))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} + \\ & + \frac{(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))(2a_1(2R_1^3 + 2a_3gR_2 + 3R_1^2R_2(\lambda - \mu) + R_2(-1 + R_2^2)(\lambda - \mu) +))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} + \\ & + \frac{(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))(2a_1(R_1(-1 + R_2^2(1 + (\lambda - \mu)^2) - 4a_2g\mu))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} - \\ & - \frac{2a_2(-a_1 + a_3)R_1(-R_1^2(a_3(R_1^2 - 4a_2g\lambda) - a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2)(\lambda - \mu)^2) -)}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} + \\ & - \frac{2a_2(-a_1 + a_3)R_1(a_1(4a_3gR_2(R_1 + R_2\lambda) + (-1 + R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2(\lambda - \mu))^2))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} - \\ & - \frac{2a_2(-a_1 + a_3)R_1(a_1(4a_2g(a_3g - (-1 + R_1^2 + R_2^2)\mu)))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} \end{aligned}$$

При дифференцировании по R_2 , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))(2a_2R_1^2R_2(\lambda - \mu)^2)}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} + \\ & + \frac{(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))(2(-1 + R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2(\lambda - \mu))(\lambda - \mu) - 8a_2gR_2\mu)}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} - \\ & - \frac{2a_1(-a_2 + a_3)R_2(-R_1^2(a_3(R_1^2 - 4a_2g\lambda) - a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2)(\lambda - \mu)^2))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} - \\ & - \frac{2a_1(-a_2 + a_3)R_2(a_1(4a_3gR_2(R_1 + R_2\lambda) + (-1 + R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2(\lambda - \mu))^2 + 4a_2g(a_3g - (-1 + R_1^2 + R_2^2)\mu))}{4(a_2a_3R_1^2 + a_1a_3R_2^2 - a_1a_2(-1 + R_1^2 + R_2^2))^2} \end{aligned}$$

В знаменателях обоих выражений стоят полиномы пятой степени.

Соответственно, по теореме Безу, для двух кривых на плоскости количество точек пересечения не превышает произведения их степеней - поэтому точек пересечения не больше 25.

Но если попробовать аналитически (Wolfram) выразить одну переменную через другую, то получится 4 решения. Соответственно, количество решений - не больше 24. Выразим R_1 через R_2 и R_3 :

$$\begin{aligned} & \frac{-(1 - R_2^2 - R_3^2)(-a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2 + 4a_2g\lambda) + a_2R_3^2(\lambda - \mu)^2)}{4(a_1a_3R_2^2 + a_1a_2R_3^2 - a_2a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2))} + \\ & \frac{a_1(4a_3gR_2(\sqrt{1 - R_2^2 - R_3^2} + R_2\lambda) - R_3^2(\sqrt{1 - R_2^2 - R_3^2} + R_2(\lambda - \mu))^2 + 4a_2g(a_3g + R_3^2\mu))}{4(a_1a_3R_2^2 + a_1a_2R_3^2 - a_2a_3(-1 + R_2^2 + R_3^2))} \end{aligned}$$

После дифференцирования можно сразу подставить $R_3 = 0$.

Дифференциал приведённого потенциала по R_3 пропорционален R_3 . Если $R_3 = 0$, то это выражение тоже равно 0.

Продифференцировав по R_2 и тоже подставив 0 вместо R_3 , получим выражение следующего вида:

$$\frac{a_2 R_2 (-1 + R_2^2)^2 + 2a_1^2 g R_2 (-2a_2 g - \frac{R_2}{\sqrt{1-R_2^2}}) + a_1 (R_2 + 4a_2^2 g^2 R_2 - R_2^5 + 2a_2 g \sqrt{1-R_2^2})}{2(a_2 + a_1 R_2^2 - a_2 R_2^2)^2}$$

Составим уравнение:

$$a_2 R_2 (-1 + R_2^2)^2 + 2a_1^2 g R_2 (-2a_2 g) + a_1 (R_2 + 4a_2^2 g^2 R_2 - R_2^5) = 2a_1^2 g R_2 \left(\frac{R_2}{\sqrt{1-R_2^2}} \right) - (a_1) (2a_2 g \sqrt{1-R_2^2})$$

Справа - чётная функция, чья производная по R_2 равна

$$-\frac{2a_1 g R_2 (a_1 (-2 + R_2^2) + a_2 (-1 + R_2^2))}{(1 - R_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Она меньше 0 при $R_2 < 0$ и больше 0 при $R_2 > 0$ и имеет единственную критическую точку (минимум) в 0 на отрезке $[-1, 1]$, и в этой точке принимает отрицательное значение.

Выражение слева - полином пятой степени, продифференцируем его по R_2 и приравняем полученное выражение к 0:

$$a_1 + a_2 - 4a_1^2 a_2 g^2 + 4a_1 a_2^2 g^2 - 6a_2 R_2^2 + 5(-a_1 + a_2) R_2^4 = 0$$

Решения имеют вид:

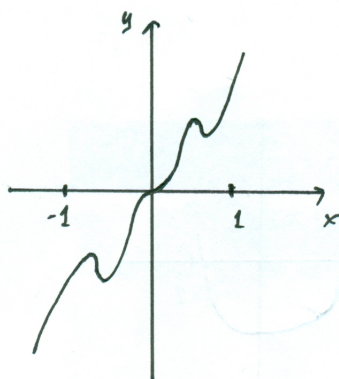
$$R_2 = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\frac{-3a_2 + \sqrt{4a_2^2 + 5a_1(a_1 - 4(a_1 - a_2)^2 a_2 g^2)}}{(a_1 - a_2)}}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{\frac{-3a_2 + \sqrt{4a_2^2 + 5a_1(a_1 - 4(a_1 - a_2)^2 a_2 g^2)}}{(a_1 - a_2)}}}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{\frac{3a_2 + \sqrt{4a_2^2 + 5a_1(a_1 - 4(a_1 - a_2)^2 a_2 g^2)}}{(a_1 - a_2)}}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{\frac{3a_2 + \sqrt{4a_2^2 + 5a_1(a_1 - 4(a_1 - a_2)^2 a_2 g^2)}}{(a_1 - a_2)}}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Найдём решения уравнения $a_2 R_2 (-1 + R_2^2)^2 + 2a_1^2 g R_2 (-2a_2 g) + a_1 (R_2 + 4a_2^2 g^2 R_2 - R_2^5) = 0$. Получим следующее множество точек:

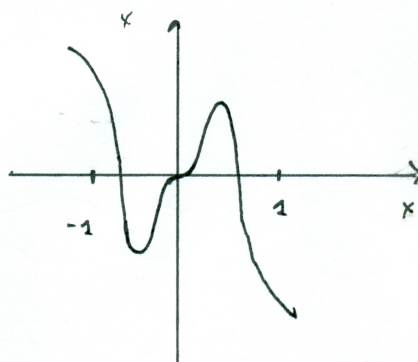
$$\left\{ 0, \pm \sqrt{\frac{-a_2 + \sqrt{a_1(a_1 - 4(a_1 - a_2)^2 a_2 g^2)}}{a_1 - a_2}} \right\}$$

Если мы потребуем, чтобы все минимумы, максимумы и нули принадлежали отрезку $[-1, 1]$, то обнаружим, что такая система неравенств не будет совместной.

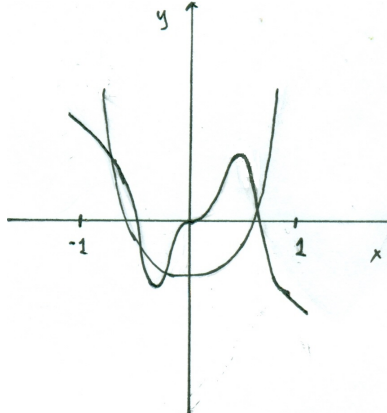
Однако, система, содержащая условия на два нуля производной и на два нуля функции, имеет решения, также как и система с условиями принадлежности отрезку всех нулей производной. Поэтому функция будет иметь вид



или



Поэтому наибольшее количество решений будет, если графики будут пересекаться следующим образом:



Поэтому максимальное количество точек пересечения двух графиков функций - 4.

f) Напомним вид приведённого потенциала в общем случае:

$$\phi_g(R) = \frac{\left(\sum_{i=1}^3 R_i \left(\frac{b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3}{2a_i}\right) + g\right)^2}{a_1R_1^2 + a_2R_2^2 + a_3R_3^2} - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{(b_{1i}R_1 + b_{2i}R_2 + b_{3i}R_3)^2}{4a_i}\right)$$

Поступая аналогично пункту d), покрываем сферу картами и применяем теорему Безу. Получаем два выражения 14 степени. Количество точек пересечения меньше 196. На второй карте получаем 8 решений максимум.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы, т.1,2. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [2] А. Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. Ижевск:Ижевская республиканская типография, 1999.
- [3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия, т.1,2 УРСС:Книжный дом “Либроком”, 2013.
- [4] И. Н. Гашененко. Интегральные многообразия в задаче о движении твёрдого тела. Механика твердого тела, №33, 2003.
- [5] И. Н. Гашененко. Инвариантные многообразия и множества допустимых скоростей в задачах динамики твёрдого тела. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Национальная академия наук Украины, Институт прикладной математики и механики, 2008 г.