МГУ имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Дипломная работа:
Реализация алгоритма построения коммутирующих дифференциальных операторов по геометрическим данным.

Студент 5 курса кафедры
дифференциальной геометрии и приложений
Погорелов Дмитрий Александрович

Научный руководитель:
Жеглов Александр Борисович

Москва, 2014 г.

1 Введение

Цель этой работы — разработка и программная реализация алгоритма построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов по некоторым геометрическим (спектральным) данным.

Построение явных примеров коммутирующих операторов — сложная задача. Ее важность обусловлена тем, что коэффициенты таких операторов дают явные решения известных нелинейных дифференциальных уравнений, таких как уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП), Кортевега-де-Фриза (КдВ), sin-Gordon, и т. д. (см. например [9], [4], [12]). Особый интерес представляют примеры коммутирующих операторов с рациональными коэффициентами: исследование свойств таких операторов может помочь в решении известной проблемы Диксмье. Напомним, что гипотеза Диксмье утверждает, что всякий эндоморфизм алгебры Вейля $D_1 = \mathbb{C}[x][\partial_x]$ является автоморфизмом. Как известно (см. [1]), гипотеза Диксмье для алгебр D_n эквивалентна другой не менее известной гипотезе о якобиане, утверждающей, что полиномиальное отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, якобиан которого — ненулевая константа, — обратимо.

Напомним, что коммутативные алгебры обыкновенных дифференциальных операторов соответствуют так называемым спектральным данным. Так, если имеется кольцо коммутирующих дифференциальных операторов, порожденное над полем k характеристики 0 двумя обыкновенными дифференциальными операторами

$$P_1 = \partial_x^n + u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \ldots + u_0(x), \quad P_2 = \partial_x^m + v_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \ldots + v_0(x),$$

то, как это было замечено еще Берчналлом и Чаунди в [3], существует ненулевой полином $Q(\lambda, \mu)$, такой что $Q(P_1, P_2) = 0$. Пополнение C кривой $Q(\lambda, \mu) = 0$ называется *спектральной кривой.* В общей точке (λ, μ) пространство собственных функций ψ (функции Бейкера-Ахиезера):

$$P_1\psi = \lambda\psi, \quad P_2\psi = \mu\psi$$

имеет размерность r, и эти функции являются сечениями пучка без кручения $\mathcal{F}$ ранга r на спектральной кривой (для более точных утверждений и дальнейших деталей см. работы процитированные выше). Пополнение кривой $Q(\lambda, \mu) = 0$, полученное добавлением неособой точки P (не обязательно проективное замыкание в $\mathbb{P}^2$!), и тройка $(C, P, \mathcal{F})$ являются частью так называемых *спектральных данных.*

Кричевер ([9], [10]) дал геометрическую классификацию алгебр "общего положения"ранга r в терминах спектральных данных (когда спектральная кривая — гладкая). Дринфельд [8] предложил алгебро-геометрическую переформулировку результатов Кричевера, которая была впоследствии усовершенствована Мамфордом [21] и Муласе [19].

В настоящее время известно довольно много примеров коммутирующих операторов. В случае данных ранга один явные формулы собственных функций коммутирующих операторов (функции Бейкера-ахиезера) были найдены Кричевером. Для данных ранга один, в которых спектральная кривая рациональна, явные формулы были также даны Вилсоном ([23]). В случае данных ранга больше 1 задача существенно усложняется, и универсальных формул для собственных функций или для коэффициентов коммутирующих операторов пока не существует. Тем не менее, существует ряд примеров. Так, операторы ранга два, соответствующие эллиптическим спектральным кривым, были найдены Кричевером и Новиковым в [11]. В работе [6] приводятся явные формулы общего вида для коммутирующих операторов порядка 4 и 6. Такие операторы тоже соответствуют геометрическим данным ранга 2 (см. подробные определения в параграфах 2, 4). Диксмье в [7] построил пример коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами, соответствующих эллиптическим спектральным кривым. В связи с этим результатом и результатами Кричевера и Новикова интересно отметить теорему Гриневича ([5]), которая дает критерий рациональности коэффициентов коммутирующих операторов, соответствующих эллиптическим спектральным кривым. Операторы ранга 3, соответствующие элиииптическим спектральным кривым, были найдены Моховым ([17]). В работах [13], [14], [15], [16] были найдены примеры операторов ранга $r > 1$, соответствующие спектральным кривым рода $g > 1$, причем в работе [13] были найдены примеры операторов ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, соответствующие гиперэллиптическим кривым. Существует множество других работ на эту тему, ссылки на которые мы здесь не приводим ввиду большого объема.

Между тем, все вышеперечисленные примеры были найдены практически без использования знания о спектральных данных из теоремы классификации Кричевера. Так, спектральные данные для операторов Кричевера-Новикова были найдены для случая гладких кривых позднее в работе [22], а для особых кривых - лишь в работе [2].

В этой работе для построения примеров коммутирующих операторов мы стартуем со спектральных данных и далее используем конструктивную теорию Сато (см. обзор в [4] или [18]), а также некоторые новые соображения и результаты из работы [2]. В результате мы получаем теоретический алгоритм построения примеров коммутирующих операторов любого ранга по заданным начальным спектральным данным в случае, когда спектральная кривая рациональна. Алгоритм состоит из двух частей: сначала по спектральным данным строится точка в грассманиане Сато (или пара Шура, см. параграф 3). Затем по ней строятся коммутирующие операторы. Мы приводим в этой работе программную реализацию второй части алгоритма для случая, когда пара Шура определяет операторы с рациональными коэффициентами (такие пары Шура ищутся с помощью аналога критерия Гриневича). А именно, реализован пакет программ, необходимых для применения теории Сато: нахождение оператора Сато по паре Шура, работа с псевдодифференциальными операторами и с дифференциальными операторами, коэффициенты которых — рациональные функции, программа восстановления рациональной функции по ее ряду Тейлора. Первая часть алгоритма (теоретическая) описана в [2], программной реализации ее пока нет. В будущем пакет программ можно усовершенствовать для поиска примеров для любых рациональных кривых, и даже, возможно, не рациональных.

Структура работы такова. В параграфах 1-4 мы напоминаем необходимые сведения из теории Сато.

В параграфе 5 предлагается идея реализации алгоритма восстановления дробно-рациональной функции по ее ряду Тейлора.

В параграфе 6 мы приводим описание алгоритма построения коммутирующих операторов.

В параграфе 7 мы приводим описание пакета программ.

В параграфе 7 мы приводим несколько примеров конкретных вычислений и коммутирующих операторов.

2 Псевдодифференциальные операторы

Определение 1. *Дифференциальными кольцами, полями и алгебрами называются кольца, поля и алгебры, снабжённые дифференцированием — унарной операцией, удовлетворяющей правилу Лейбница, дистрибутивной по сложению.*

Естественный пример дифференциального поля — поле рациональных функций одной комплексной/вещественной переменной $\mathbb{C}[x]$ / $\mathbb{R}[x]$, операции дифференцирования соответствует дифференцирование по x.

Рассмотрим дифференциальное кольцо A (ассоциативное, коммутативное, с единицей) обозначим через ∂ - оператор дифференцирования. Выясним, как коммутируют операторы ∂ и оператор умножения на функцию из A

$$a, f \in A$$

$$(\partial(*f))a = \partial(f * a) = (\partial f) * a + f * (\partial a) \tag{1}$$
$$((*f)\partial)a = f * \partial a$$

перепишем (1) в безиндексном виде

$$\partial(*f) = *(\partial f) + (*f)\partial$$

$(\partial^n)f$ будем обозначать $f^{(n)}$

Начиная отсюда вместо $*f$ будем писать просто f, поскольку будем говорить только об операторах. Тогда (1) перепишется как :

$$\partial f = f' + f\partial$$

применяя эту формулу многократно, получим:

$$\partial^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \partial^{n-k}$$

Введем формально оператор ∂^{-1}, обратный к ∂

$$\partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1$$

Рассмотрим, как он должен коммутировать с операторами умножения на функции из A

$$\partial f = f' + f\partial$$
$$\partial^{-1}\partial f \partial^{-1} = \partial^{-1} f' \partial^{-1} + \partial^{-1} f \partial\partial^{-1}$$
$$f\partial^{-1} = \partial^{-1} f' \partial^{-1} + \partial^{-1} f$$

отсюда

$$\partial^{-1} f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f' \partial^{-1}$$

применяя это многократно, получим

$$\partial^{-1} f = f\partial^{-1} - f'\partial^{-1} + \partial^{-1} f'' \partial^{-1} = ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)} \partial^{-1-k}$$

Определение 2. *Псевдодифференциальным оператором(ПДО) с коэффициентами из кольца A называется формальный лорановский ряд*

$$p = \sum_{i=-\infty}^{n} a_i \partial^i, a \in A, n \in \mathbb{Z}$$

Наибольшая степень ∂ с ненулевым коэффициентом называется порядком ПДО, обозначается $ord\, p$. Определим умножение мономов формулой

$$\partial^n a = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k a^{(k)} \partial^{n-k}, n \in \mathbb{Z}, a \in A$$

и распространим по линейности

Теорема 1. *([20, ch.III, §11]) Псевдодифференциальные операторы с введенным выше умножением образуют ассоциативную алгебру.*

Далее кольцо псведодифференциальных операторов над кольцом Тейлоровских рядов (над полем $\mathbb{K}$) будем обозначать $\mathbb{E}$, а кольцо дифференциальных операторов - $\mathbb{D}$. Также эти кольца являются алгебрами над $\mathbb{K}$. Еще один важный пример - алгебра псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, являющаяся подалгеброй $\mathbb{E}$. Обозначим ее через $\mathbb{E}'$. Очевидно, $\mathbb{E}'$ является коммутативной алгеброй.

$$\mathbb{E}' = \{p, p = \sum_{i=-\infty}^{n} c_i \partial^i, c_i \in \mathbb{K}\}$$

Определение 3. *Кольцо псевдодифференциальных операторов раскладывается в прямую сумму кольца дифференциальных операторов($\mathbb{E}_+$ или $\mathbb{D}$) и кольца операторов отрицательного порядка.*

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_+ + \mathbb{E}_-$$

$$\mathbb{E}_- = \sum_{i=-\infty}^{n} a_i \partial^i, a \in A, n \in \mathbb{Z}, n < 0$$

Определение 4. *Коммутативная подалгебра $B \in D$ называется эллиптической если содержит элемент P порядка больше нуля с единичным старшим членом. Для элиптической подалгебры B можно определить ранг*

$$rk\, B = gcd(ord\, Q, Q \in B)$$

Обознчим через B_r множество всех элиптических коммутативных подалгебр D ранга r.

Алгебры B и B' называются эквивалентными, если существует обратимый ряд f,такой что

$$B' = f B' f^{-1}$$

Определим через B_p-множество дифференциальных операторов, коммутирующих с P. То есть $B_p = \{Q \in D, [Q, P] = 0\}$

Теорема 2. *(Шур, ср. [18, Lemma 7.5]) Для любого дифференциального оператора P положительного порядка с единичным старшим членом, существует обратимый псевдодифференциальный оператор нулевого порядка S такой, что множество $A_p = S^{-1}B_pS$ состоит из псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.*

$$A_p = S^{-1}B_pS \subseteq \mathbb{E}'$$

$$B_p \subseteq S \cdot \mathbb{E}' \cdot S^{-1} = \mathbb{C}((P^{-1/n}))$$

Определение 5. *Обратимый оператор нулевого порядка S называется допустимым, если $S\partial S^{-1}$ - псевдодифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Все допустимые операторы образуют группу G_a.*

Доказательство. Проверим групповые свойства. Так как $G_a \subseteq \mathbb{E}$ остается проверить только замкнутость

$$S_1\partial S_1^{-1} \in \mathbb{E}'$$

$$(S_1\partial S_1^{-1})^n = S_1\partial^n S_1^{-1} \in \mathbb{E}'$$

$$(S_1S_2)\partial(S_1S_2)^{-1} = S_1S_2\partial S_2^{-1}S_1^{-1} = S_1(\sum_{i=-\infty}^{n} c_i\partial^i)S_1^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{n} c_i(S_1\partial^i S_1^{-1}) \in \mathbb{E}'$$

что и требовалось доказать □

3 Пары Шура

Пусть V - пространство Лорановских рядов над произвольным полем $\mathbb{K}$. Далее, если не оговорено иное, будем полагать, что $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$$V : \{\sum_{i=n}^{\infty} a_i z^i\}, n \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{K}$$

Пусть E - кольцо псевдодифференциальных операторов с коэффициентами из кольца тейлоровских рядов.

$$E : \{\sum_{i=-\infty}^{n} a_i(\partial_x)^i\}, n \in \mathbb{Z}, a_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x^j$$

Определение 6 (отображение Сато).

$$\rho : E \longrightarrow V$$

$$e \in E, e = \sum_{i=-\infty}^{n} e_i(\partial_x)^i,$$

$$\rho(e) = \sum_{i=-\infty}^{n} (e_i \mod x)z^{-i} = \sum_{i=-n}^{\infty} (e_{-i} \mod x)z^i$$

Определим также отображение ρ'

Определение 7.

$$\rho' : V \longrightarrow E$$

$$v \in V, v = \sum_{i=n}^{\infty} v_i z^i$$

$$\rho'(v) = \sum_{i=-\infty}^{-n} v_{-i}(\partial_x)^i$$

Отображения ρ и ρ' задают биекцию между элементами из V и E'. Далее в тексте, умножая элементы из V и E, мы будем опускать $\rho()$ и $\rho'()$, подразумевая что умножение элементов происходит в E. Заметим также, что $\rho(\rho'(a) \cdot \rho'(b)) = a \cdot b$

Определение 8. *Пусть W - подпространство в V. Назовем носителем W пространство, порожденное старшими мономами всех элементов W.*

$$supp\, W = < a_N z^N, a = \sum_{i=N}^{\infty} a_i z^i \in W >$$

Определение 9. *Назовем пространство W_1 вполне соизмеримым с W_2, если $supp\, W_1 = supp\, W_2$*

Пусть W_0 - пространство, порожденное мономами $z^i, i \leq 0$

$$W_0 = \mathbb{K}[z^{-1}]$$

Определение 10. *Назовем базис пространства вполне соизмеримого с W_0 допустимым, если он имеет вид*

$$w_k = z^{-k} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Теорема 3. *(Сато, [18, Th.7.4]) Для любого пространства W, вполне соизмеримого с W_0, сущетсвует единственный оператор $S \in E$, называемый сопрягающим, что $W = W_0 \cdot S$*

Теорема 4. *([18, Lemma 7.2]) Пусть $P \in E$. Если $W_0 \cdot P \subseteq W_0$, то $P \in D$*

Определение 11. *Стабилизатором пространства $W \subseteq V$ называется пространство $A \subseteq V$, для которого выполняется условие*

$$\forall a \in A, \forall w \in W, a \cdot w \in W$$

Лемма 1. *Стабилизатор является кольцом.*

Доказательство. Очевидно. □

Определение 12 (Пары Шура)**.** *Пару пространство-стабилизатор (A, W) называют парой Шура.*

$$A \cdot W \subseteq W$$

Теорема 5. *Пусть W - пространство, вполне соизмеримое с W_0, A - стабилизатор W, S - сопрягающий оператор. Тогда $SAS^{-1} \subseteq D$, где D - кольцо дифференциальных операторов.*

Доказательство. $W = W_0 \cdot S$ по теореме Сато

$$W \cdot A \subseteq W \Longrightarrow W_0 \cdot SA \subseteq W_0 \cdot S \Longrightarrow W_0 \cdot SAS^{-1} \subseteq W_0$$

По теореме 4, SAS^{-1} - дифференциальный. □

Определение 13. *Порядком элемента пространства V называется степень его страшего монома. $a = \sum_{i=N}^{\infty} a_i z^i, ord\, a = N$*

Определение 14. *Рангом пары (A, W) называется наибольший общий делитель порядков элементов стабилизатора.*

$$rk(A, W) = \gcd(ord\, a, a \in A)$$

Определение 15. *Рангом пространства W называется наибольший общий делитель порядков элементов его максимального стабилизатора.*

$$rk\, W = \gcd(ord\, a, a \in A)$$

Группа допустимых операторов G_a действует на пары Шура следующим образом

$$T(A, W) = (TAT^{-1}, TW), T \in G_a$$

Определение 16. *Пары Шура* (A, W) *и* (A', W') *называются изоморфными, если существует допустимый оператор* $T \in G_a$ *такой, что* $T(A, W) = (A', W')$

Теорема 6. *([18, Th.5.6, Cor.5.7]) Существует взаимнооднозначное соответсвие между классами эквивалентности коммутативных эллиптических алгебр ранга* r *и классами изоморфных пар Шура ранга* r

Доказательство. Это соответсвие можно построить конструктивно

$$B \longrightarrow (A, W), A = S^{-1}BS, W = \rho(S^{-1}D) = S^{-1}W_0$$

где S - оператор из теоремы Шура.

В обратную сторону:

$$(A, W) \longrightarrow B = SAS^{-1}, W = S^{-1}W_0$$

где S однозначно определяется теоремой Сато □

4 Геометрические данные

Определение 17. *Геометрические данные ранга* r *— это набор*

$$(C, P, \mathcal{F}, \rho, \phi),$$

где

- C *— проективная кривая над полем* k *характеристики ноль.*
- $P \in C$ *— неособая точка.*
- $\rho : \hat{\mathcal{O}}_C \to k[[z]]$ *— изоморфизм локальных* k*-алгебр.*
- $\mathcal{F}$ *— когерентный пучок без кручения ранга* r*.*
- $\phi : \mathcal{F} \to \hat{\mathcal{O}}_C^{\oplus r}$ *— изоморфизм пучков* $\hat{\mathcal{O}}_C$*-модулей.*

Нетрудно ввести понятие изморфизма геометрических данных (см. [19]). Имеет место следующее утверждение:

Теорема 7. *([18, Th.3.7]) Существует взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфных пар Шура ранга* r *и классами изоморфных геометрических данных ранга* r*.*

Это соответствие можно задать конструктивно (см. [19] или [2]). Из результатов работы [2] следует, что для любого пучка без кручения на рациональной кривой над полем $\mathbb{Q}$ существует тривиализация ϕ, такая что соответствующая пара Шура будет определена тоже над полем $\mathbb{Q}$. Более того, ранг пространства в этом случае будет равен 1. Это позволяет реализовать алгоритм построения коммутирующих операторов с рациональными коэффициентами (см. ниже раздел 6). Отметим, что все тривиализации ϕ отличаются друг от друга на автоморфизм пространства $k[[z]]^{\oplus r}$, задаваемый матрицей из группы $GL(r, k[[z]])$.

В работе [2] также были описаны все пучки без кручения ранга 2 на рациональных кривых рода 1 (т.е. на кривых, задаваемых уравнением $zy^2 - 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3 = 0$ в $\mathbb{P}^2$, где дискриминант $g_2^3 + 27g_3^2 = 0$), и найдены пары Шура для некоторых тривиализаций, упомянутые выше. Эти примеры послужили в качестве тестовых примеров для проверки работы программ.

5 Восстановление дробно-рациональной функции по ее ряду Тейлора

Постановка задачи

Здесь и далее рассматриваются ряды Тейлора над полем рациональных чисел. Пусть имеется алгоритм позволяющий вычислить сколь угодно много членов ряда Тейлора некой рациональной функции $P(x)/Q(x), deg\,P, deg\,Q < c, c = const$. Требуется найти коэффициенты многочленов $P(x), Q(x)$

Определение 18. *Назовем ряд w обратным r, если $w \cdot r = 1$*

Лемма 2. *Для любого ряда $r, r_0 \neq 0$ существует обратный.*

Доказательство. Построим требуемый ряд

$$w_0 = 1/r_0$$

$$w_i = -1/r_0 \sum_{j=0}^{i-1} w_j \cdot r_{i-j}$$

Докажем что $r \cdot w = 1$ пусть $r \cdot w = u$ тогда $u_0 = w_0 \cdot r_0 = 1$

$$u_i = \sum_{j=0}^{i} (w_j \cdot r_{i-j}) = \sum_{j=0}^{i-1} (w_j \cdot r_{i-j}) + w_i \cdot r_0 = 0$$

Данная конструкция дает нам алгоритм для построения обратного ряда с заданной точностью.

$\square$

Пусть имеется функция F, разложимая в ряд Тейлора в точке $x = 0$. Будем говорить что рациональная дробь $R = P/Q, q_0 \neq 0$ приближает заданную функцию с точностью n, если ряд Тейлора функции $F - R$ начинается с члена степени больше n

Теорема 8. *Пусть имеется две рациональные дроби $R = P/Q$ и $R' = P'/Q'$ такие, что $deg\, P, deg\, Q, deg\, P', deg\, Q' \leq n$ и они приближают F с точностью $2n$. Тогда $R = R'$*

Доказательство. Пусть $R \neq R'$

$$R - R' = \frac{P \cdot Q' - P' \cdot Q}{Q \cdot Q'} \neq 0$$

$$P \cdot Q' - P' \cdot Q \neq 0$$

$$deg(P \cdot Q' - P' \cdot Q) \leq 2n$$

Тогда числитель делится на x в степени не более чем $2n$. Тогда в разложение $R - R'$ в ряд Тейлора начинается с члена степени не более чем $2n$. Но, по-скольку ряды функций R , R' и F совпадают по крайней мере в первых $2n$ членах, ряд, представляющий $R - R'$, должен делится на x в степени не менее чем $2n + 1$. Противоречие $\square$

Лемма 3 (Следствие)**.** *Для того чтобы найти коэффициенты рациональной дроби $P/Q, deg\, P, deg\, Q \leq n$ достаточно взять $2n$ членов ее ряда Тейлора.*

Пусть имеется рациональная функция $R = P(x)/Q(x), q_0 \neq 0, deg\, P \leq n, deg\, Q \leq m$ и ее ряд Тейлора r_i.

Если $m > n$ и $r_0 \neq 0$, вычислим обратный ряд r^{-1} и сведем задачу к восстановлению дроби $\overline{R} = Q(x)/P(x)$. Исходная дробь вычисляется как $1/\overline{R}$

Если $m \leq n$ или $r_0 = 0$,

$$\overline{R} = (R - r_0)/x, deg\, \overline{P} \leq n - 1, deg\, \overline{Q} \leq m$$

Задача сводится к нахождению дроби $\overline{R}$. $R = \overline{R} \cdot x + r_0$.

6 Описание алгоритма

Алгоритм состоит из двух частей. В первой части, описанной в [2], по заданным геометрическим данным $(C, P, \mathcal{F}, \rho, \phi)$ ранга r над полем $\mathbb{Q}$, где C — рациональная кривая, строится пара Шура (A, W). Пространство A — это подкольцо кольца многочленов от одной переменной, и оно может быть задано как подалгебра конечным числом образующих. Пространство W бесконечномерно, поэтому первая часть алгоритма на выходе выдает любое наперед заданное число образующих этого пространства (точнее, первые элементы допустимого базиса). При этом количество операций, необходимых для продуцирования n элементов базиса, линейно по n. Еще известно, что для некоторых тривиализаций все коэффициенты сопрягающего оператора S, а также все коэффициенты коммутирующих операторов — рациональные функции.

Вторая часть алгоритма — построение коммутирующих операторов по паре Шура. Это можно сделать, используя следующее соображение: если известно достаточно большое количество коэффициентов оператора S (равное степени оператора, который мы ищем, или, что аналогично, порядку элемента в кольце A), то искомый оператор можно найти по формуле

$$(SaS^{-1})_+ \tag{2}$$

где $a \in A$ — произвольный элемент, или с помощью решения уравнения

$$P\psi = a\psi,$$

где P — искомый оператор, а $\psi = S(\exp(xz^{-1}))$ — функция, получающаяся применением оператора S к экспоненте $(\exp(xz^{-1}))$.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти достаточное количество коэффициентов оператора S. Для этого используется теорема Сато. Ее доказательство конструктивно, и потому может быть запрограммировано. При этом на входе алгоритма задается некоторое количество первых базисных элементов пространства W, а на выходе выводятся коэффициенты рядов Тейлора первых коэффициентов оператора S. Количество выводимых коэффициентов зависит от количества базисных элементов на входе. Сложность этого алгоритма опять линейная.

Если известно, что коэффициенты оператора S — рациональные функции, то можно использовать алгоритм восстановления рациональной функции по ее ряду Тейлора.

Алгоритм останавливается тогда, когда полученные по формуле (2) операторы с рациональными коэффициентами коммутируют. Важно, что проверка коммутирования двух операторов — точное (не зависящее от точности компьютерных вычислений) вычисление, так как поле определения — $\mathbb{Q}$.

7 Описание пакета программ

Для работы с псевдодифференциальными операторами в этой работе написана библиотека C++, реализующая некоторые основные операции.

- умножение
- сложение
- вычисление арифметического корня эллиптического оператора (решение уравнения $L^n = P$)
- вычисление обратного оператора (для операторов со старшим мономом ∂^n)
- вычисление сопрягающего оператора для эллиптических операторов (решение уравнения $S \cdot \partial^n \cdot S^{-1} = P$)
- восстановление оператора по пространству (теорема Сато)
- восстановление дробно-рациональной функции по ряд Тейлора

  Теорема Сато позволяет восстановить оператор с коэффициентами в виде рядов (с заданной точностью). Данная процедура нужна чтобы восстановить оператор с коэффициентами в виде дробно-рациональных функций.

Все вычисления используют пакет точных рациональных чисел, поэтому любые результаты являются абсолютно точными и не нуждаются в оценке погрешности.

7.1 Псевдодифференциальные операторы. DPolynom.cpp, DPolynom.h

Для представления псевдодифференциальных операторов используется шаблонный класс DPolynom<T>. Шаблон T представляет тип данных, используемый в качестве коэффициентов. Предусмотрено использование многочленов, рядов Тейлора и рациональных функций, реализованных соответсвующими классами. Далее приведены заголовки и описание членов и методов класса. Псевдодифференциальный оператор хранится в виде массива коэффициентов мономов со степени n по степень m. Мономы степени o и младше мы считаем неизвестными. Если оператор представлен точно o = n + 1. Это позволяет реализовывать как дифференциальные операторы, так и псевдодифференциальные операторы, не имеющие конечного явного представления.

```
template <typename T>
class DPolynom
{
private:
....
public:
int n;
int m;
int o;
T* a; //Массив коэффициентов
......
DPolynom(const T& b); //конструктор, создающий оператор нулевой степени с заданным коэффициентом b
//Сложение, умножение, вычитание, унарный минус
DPolynom operator+ (const DPolynom&) const;
DPolynom operator- (const DPolynom&) const;
DPolynom operator* (const DPolynom&) const;
DPolynom operator- () const;
static DPolynom D(); //Создает оператор ∂
static DPolynom D(int); Создает оператор ∂^n
//Далее, аргумент - степень монома с точностью до которой нужно произвести вычисление
DPolynom sopr(int) const; //Вычисление сопрягающего оператора
DPolynom obr(int) const; //Вычисление обратного оператора
DPolynom sqr(int) const; //Вычисление корня
};
```

7.2 Умножение(DPolynom.cpp)

```
.....
for (int i = n; i >= m;i–)
for (int j = b.n; j >= b.m; j–) {
big_int Cni = 1; // биномиальный коэффициент
big_int ir = 0;
dBj = b[j]; //dBj - динамически вычисляемая производная коэффициента b_j
```

for (int p = i + j; p >= c.m; p–) {

c[p] = c[p] + ((*this)[i] * dBj) *(Cni); // *c - результатирующий оператор*

if (p > c.m) dBj = dBj.d(); //*динамическое вычисление производной*

Cni *= (i-ir);

ir++;

Cni /= ir;

}

}

При умножении ПДО

$a_n \partial^{n_1} + a_{n_1 - 1} \partial^{n_1 - 1} + ... + a_m \partial^{m_1} + ...$

$b_n \partial^{n_2} + b_{n_2 - 1} \partial^{n_2 - 1} + ... + b_m \partial^{m_2} + ...$

Сложность алгоритма :

количество циклов: $(n_1 - m_1 + 1) * (n_2 - m_2 + 1) * (n_1 + n_2 - min(n_1 + m_2, n_2 + m_1))/2 = O(n^3)$ где n - количество членов в результирующем операторе

Внутри цикла динамически считаются производные и биномиальные коэффициенты. Сложность одного цикла определяется умножением двух коэффициентов и дифференцированием коэффициента.

7.3 Извлечение корня(DPolynom.cpp)

Будем решать уравнение $L^n = P$, где n - порядок оператора P

Предполагаем что $P[n] = 1$

Пусть нам известны коэффициенты с 1 по j+1 оператора P;

L_j - оператор, коэффициенты которого с 1 по j+1 совпадают с коэффициентами L;

$P_j = L_j^n$

составим уравнение на j-й коэффициент оператора L

$$(L_j + L[j]\partial^j)^n = (\partial + L[0] + L[-1]\partial^{-1} + ... + L[j+1]\partial^{j+1} + L[j]\partial^j)^n = P$$

$$P[n+j-1] = P_j[n+j-1] + nL[j]$$

$$L[j] = (P[n+j-1] - P_j[n+j-1])/n$$

Таким образом, коээфициенты оператора L можно вычислять последовательно. Код, реализующий извлечение корня:

....

for (int m = 1; m >= accuracy; m–) {

L[m] = T::id_add();

DPolynom<T> Pj(L);

for (int i = 1; i < n; i++) Pj = Pj * L;
T k;
k = ((*this)[n + m - 1] - Pj[n + m - 1]);
if (m < 1) k = k / n;
L[m] = k;
}

Сложность алгоритма: При вычислении каждого коэффициента оператора L нужно возвести в n-ю степень L_j , произвести вычитание коэффициентов. Если мы считаем с точностью до - m -го члена количество умножений $O(m*n)$ Сложность умножения $O(m^3)$ Итого $O(n*m^4)$ произвдений и дифференцирований коэффициентов.

7.4 Вычисление обратного оператора(DPolynom.cpp)

Пусть старший моном S степени ноль и равен единице. Идея алгоритма та же, что и в предыдущем разделе. Будем решать уравнение

$S^{-1}S = 1$

Пусть S_j^{-1} - оператор, коэффициенты которого до j+1 совпадают с коэффициентами S^{-1};

Составим уравнение на jй коэффициент S^{-1}

$(S_j^{-1} + S^{-1}[j]\partial^j) \cdot S = 1$

$S^{-1}[j] = -(S_j^{-1}S)[j]$

Будем последовательно вычислять коэффициенты оператора S^{-1} ....

for (int k= -1; k>= accuracy; k–) {
S[k] = (*this)[k];
S1[k] = T::id_add();
S1[k] = -(S1 * S)[k];
}

Для вычисления каждого следующего коэффициента, требуется выполнить одно умножение. Это дает сложность $O(n^4)$ где n - количество членов исходного оператора.

7.5 Вычисление сопрягающего оператора(DPolynom.cpp)

Как и в предыдущих случаях, будем вычислять коэффициенты S последовательно. Введем вспомогательный оператор S_x

Коэффициенты будем вычислять по рекурентным соотношениям $S[0] = 1$, $S_x[0] = 0$

$S^{-1}[k+1] = -(S^{-1}S)[k+1]$
$S_x[k] = L[k] - (S^{-1}S_x)[k]$
$S[k] = \int S_x[k]$

Для вычисления каждого следующего коэффициента, требуется выполнить два умножения. Это дает сложность $O(n^4)$ где n - количество членов исходного оператора.

7.6 Восстановление дробно-рациональной функции

Ряд Тейлора будем хранить в виде рациональной дроби r, это позволяет вычислять обратный ряд за время $O(1)$ а вычитать константу за $O(n)$ и делить на x за $O(1)$. Для вычисления r_0 нужно просто разделить нулевой член числителя на нулевой член знаменателя. Заведем два глобальных массива - коэффициентов числителя и знаменателя, для вычисления обратной дроби или деления на x, достаточно просто сдвинуть указатели начала массива. Для вычитания константы используется процедура minus_c(rational< >) которая на вход получает число, которое нужно вычесть из дробно-рациональной функции, представляющей исходный ряд Тейлора.

Сделаем рекурсивную функцию MakeRat(int k), которая на вход получает один параметр - $k = n - m$, где n и m - оценки количества членов числителя и знаменателя искомой дробно-рациональной функции.

Если $k < 0$ и $r_0 \neq 0$, вычислим обратную дробно-рациональную функцию r^{-1} и сведем задачу к восстановлению дроби $\overline{R} = Q(x)/P(x)$. Исходная дробь вычисляется как $1/\overline{R}$

Если $0 \leq k$ или $r_0 = 0$,

$$\overline{R} = (R - r_0)/x, deg\,\overline{P} \leq n-1, deg\,\overline{Q} \leq m$$

Задача сводится к нахождению дроби $\overline{R}$. $R = \overline{R} \cdot x + r_0$.

Исполняемый код:

```
RatFunc MakeRat(int k)
if (n < 1)
return RatFunc(rational< >(rn[0]) / rational< >(rd[0]));
RatFunc res;
rational< > tmp;
Polynom<big_int> x(1);
x[1] = 1;
if (rn[0] == 0){
rn = &(rn[1]);
n -= 1;
```

```
res = MakeRat(k-1);
res = res * x;
}
else {
if (k >= 0) {
tmp = rational< >(rn[0]) / rational< > (rd[0]);
minus_c(tmp);
res = (MakeRat(k) + RatFunc(tmp.numerator())) / RatFunc(tmp.denominator());
}
if (k<0) {
sw = rn;
rn = rd;
rd = sw;
res = MakeRat(-k);
res = RatFunc::id_mult() / res;
}
}
return res;
}
```

Пусть степени числителя и знаменателя искомой дробно-рациональной функции не более чем n. Тогда нам потребуется не более чем 2n вычитаний. Каждое вычитание работает линейное по n время. Сложность алгоритма получается $O(n^2)$

8 Примеры

Пусть спектральная кривая C — рациональная кривая $zy^2 - x^3 = 0$ в $\mathbb{P}^2$ с одной особенностью в нуле в виде "каспа точка $P = (0:1:0)$. Длятакой кривой в [2] были вычислены все представители пар Шура для всех возможных пучков без кручения ранга 2. Все такие пучки являются либо разложимыми, т.е. прямыми суммами двух пучков ранга 1, либо неразложимыми. В последнем случае есть два однопараметрических семейства пучков-сечений векторных расслоений (семейство Атьи и дополнительное семейство), и один выделенный не локально свободный пучок.

Пример 1. *Пример работы алгоритма*

- *Входные данные (матрица простанства для пучка из дополнительного семейства):*

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1
\end{array}
$$

Ранг пары Шура - 2.

- *Сопрягающий оператор в виде рядов, восстановленый по теореме Сато*

  $1 + o(x^{21})$

  ∂^{-1} : $10/11907x^{19} - 1216/5103x^{18} + 4096/243x^{17} + 17/47628x^{16} - 256/1701x^{15} + 1024/81x^{14} + 1/9072x^{13} - 52/567x^{12} + 256/27x^{11} - 10/189x^{9} + 64/9x^{8} - 1/36x^{6} + 16/3x^{5} + 4x^{2} + o(x^{20})$

  ....

  ∂^{-2} : $-100424/35721x^{18} + 13141/31752x^{17} - 28648/1701x^{16} - 100397/47628x^{15} + 160/567x^{14} - 796/63x^{13} - 14339/9072x^{12} + 4/21x^{11} - 3583/378x^{10} - 32/27x^{9} + 8/63x^{8} - 64/9x^{7} - 8/9x^{6} + 1/12x^{5} - 16/3x^{4} - 2/3x^{3} - 4x^{1} + o(x^{19})$

  ....

  ∂^{-3} : $14342/1701x^{17} - 50173/95256x^{16} - 8/189x^{15} + 1195/189x^{14} - 32/81x^{13} - 4/189x^{12} + 7169/1512x^{11} - 8/27x^{10} - 1/126x^{9} + 32/9x^{8} - 2/9x^{7} + 8/3x^{5} - 1/6x^{4} + 2x^{2} + o(x^{18})$

  ....

  ∂^{-4} $-14342/1701x^{16} + 50173/95256x^{15} + 8/189x^{14} - 1195/189x^{13} + 32/81x^{12} + 4/189x^{11} - 7169/1512x^{10} + 8/27x^{9} + 1/126x^{8} - 32/9x^{7} + 2/9x^{6} - 8/3x^{4} + 1/6x^{3} - 2x^{1} + o(x^{17})$ $+O(\partial^{-5})$

- *Сопрягающий оператор с коэффициентами в виде рациональных дробей*

  $1 + \frac{-7x^6+1008x^2}{x^7-336x^3+252}\partial^{-1} + \frac{21x^5-168x^3-1008x}{x^7-336x^3+252}\partial^{-2} + \frac{-42x^4+504x^2}{x^7-336x^3+252}\partial^{-3} + \frac{42x^3-504x}{x^7-336x^3+252}\partial^{-4}$

Соответствующие коммутирующие операторы слишком громоздки, поэтому мы их здесь не приводим.

Пример 2. *Пространство W для одного представителя семейства Атьи выглядит так:*

$$W = \langle -1 + z - z^2, z^{-1} + 1 + z^2, z^{-2}, z^{-3}, \ldots \rangle.$$

Сопрягающий оператор:

$$S = 1 - 4\frac{x^3+3}{x^4+12x+12}\partial^{-1} + \frac{6x^2+12}{x^4+12x+12}\partial^{-2}.$$

Коммутирующие операторы:

$$P_4 = \partial^4 - 16\frac{x^6-12x^3-36x^2+36}{(x^4+12x+12)^2}\partial^2$$

$$+32\frac{x^9+6x^7-54x^6-144x^5+90x^4-288x^3+216x^2+648x+648}{(x^4+12x+12)^3}\partial$$

$$+8\frac{5x^{12}-60x^{10}+708x^9+1692x^8-864x^7-5040x^6}{(x^4+12x+12)^4}$$

$$\frac{-11232x^5-19440x^4-8640x^3-25920x-25920}{(x^4+12x+12)^4}$$

$$P_6 = \partial^6 - 24\frac{x^6-12x^3-36x^2+36}{(x^4+12x+12)^2}\partial^4$$

$$+96\frac{x^9+3x^7-54x^6-144x^5+45x^4+252x^3+216x^2+540x+540}{(x^4+12x+12)^3}\partial^3$$

$$-36\frac{3x^{12}+60x^{10}-1140x^9-3100x^8+864x^7+10800x^6+24672x^5+37488x^4+}{}$$

$$\frac{15552x^3-9216x^2+28224x+37440}{(x^4+12x+12)^4}\partial^2$$

$$-144\frac{x^{15}-64x^{13}+1047x^{12}+3188x^{11}-720x^{10}-21924x^9-68868x^8-91536x^7+}{}$$

$$\frac{9936x^6+135648x^5+106128x^4+94464x^3+70848x^2-171072x-188352}{(x^4+12x+12)^5}\partial$$

$$+72\frac{7x^{18}-238x^{16}+3168x^{15}+11200x^{14}-1056x^{13}-131640x^{12}-494016x^{11}-}{}$$

$$\frac{639264x^{10}+496800x^9+2575808x^8+4008960x^7+3489408x^6+214272x^5-}{}$$

$$\frac{4060800x^4-2889216x^3-725760x^2-4271616x-3815424}{(x^4+12x+12)^6}$$

Пример 3. *Пространство W для выделенного пучка без кручения выглядит так:*
$$W = \langle 1, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3} + z^2, z^{-4}, z^{-5}, \ldots \rangle.$$
Сопрягающий оператор:
$$S = 1 - 5\frac{x^4}{x^5+30}\partial^{-1} + 5\frac{x^3}{x^5+30}\partial^{-2}.$$
Коммутирующие операторы:
$$P_4 = \partial^4 - 20\frac{x^3(x^5-120)}{(x^5+30)^2}\partial^2 - 3000\frac{x^2(7x^5-90)}{(x^5+30)^3}\partial + 18000\frac{x(3x^{10}-145x^5+450)}{(x^5+30)^4}$$
$$P_6 = \partial^6 - 30\frac{x^3(x^5-120)}{(x^5+30)^2}\partial^4 + 60\frac{x^2(x^{10}-1065x^5+12150}{(x^5+30)^3}\partial^3 +$$
$$9000\frac{x(59x^{10}-2535x^5+5850}{(x^5+30)^4}\partial^2 -$$
$$18000\frac{128x^{15}-13755x^{10}+145350x^5-54000}{(x^5+30)^5}\partial +$$
$$90000\frac{x^4(49x^{15}-10515x^{10}+283050x^5-972000)}{(x^5+30)^6}$$

Список литературы

[1] Belov-Kanel A., Kontsevich M., *The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture*, Mosc. Math. J. 7 (2007), no. 2, 209–218, 349.

[2] Burban I., Zheglov A., *Semistable sheaves on Weierstrass cubics and commuting differential operators*, preprint, to appear

[3] Burchnall J.L., Chaundy T.W., *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21** (1923) 420-440; Proc. Royal Soc. London Ser. A, **118** (1928) 557-583.

[4] Демидов Е.Е., *Иерархия Кадомцева-Петвиашвили и проблема Шоттки*, Фундамент. и прикл. матем., 1998, 4:1, 367–460

[5] P.G. Grinevich, Rational solutions for the equation of commutation of differential operators, Functional Anal. Appl., **16**:1, 15–19 (1982).

[6] Grünbaum F.A., *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six*, Physica D 31 (1988), 424-433

[7] J. Dixmier, Sur les algèbres de Weyl, *Bull. Soc. Math. France.* **96** (1968), 209—242.

[8] Дринфельд В., *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец*, Функц. анализ и его прил. 11:1 (1977), 11-14.

[9] Кричевер И.М., *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, УМН **32**, 6 (1977), 183-208

[10] Кричевер И.М., *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., 12:3, 1978, 20–31

[11] I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations*, Russian Math. Surveys, **35**:6, 47–68 (1980).

[12] Manin Y., *Algebraic aspects of nonlinear differential equations*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. 11, 5-152 (1978).

[13] A.E. Mironov, Self-adjoint commuting ordinary differential operators, Invent math, DOI 10.1007/s00222-013-0486-8

[14] A.E. Mironov, A ring of commuting differential operators of rank 2 corresponding to a curve of genus 2, Sbornik: Math., **195**:5, 711—722 (2004).

[15] A.E. Mironov, On commuting differential operators of rank 2, Siberian Electronic Math. Reports. **6**, 533–536 (2009).

[16] A.E. Mironov, Commuting rank 2 differential operators corresponding to a curve of genus 2, Functional Anal. Appl., **39**:3, 240—243 (2005).

[17] O.I. Mokhov, Commuting differential operators of rank 3 and nonlinear differential equations, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **35**:3, 629–655 (1990).

[18] Mulase M., *Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmanians*, Int. J. Math., 1 (1990), 293-342.

[19] Mulase M., *Algebraic theory of the KP equations*, Perspectives in Mathematical Physics, R.Penner and S.Yau, Editors, (1994), 151-218

[20] Mumford D., *Tata lectures on Theta II*, Birkhäuser, Boston, 1984

[21] Mumford D., *An algebro-geometric constructions of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equations, Korteweg-de Vries equations and related non-linear equations*, In Proc. Internat. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, Kinokuniya Publ. (1978) 115-153.

[22] Previato E., Wilson G., *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves*, Comp. Math. 81 (1992), 107-119.

[23] Wilson G., *Bispectral commutative ordinary differential operators*, J. reine angew. Math. 442 (1993), 177 -204.