Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Дипломная работа

Топологические вопросы теории комплексных гамильтоновых систем в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, заданных лорановским гамильтонианом степени (m, n).

01.01.04 — «Геометрия и топология»

Студента 5 курса кафедры
дифференциальной геометрии и приложений
Мартынчука Николая Николаевича

Научный руководитель:
Академик А.Т. Фоменко

Москва – 2014

Аннотация

В работе рассматриваются *комплексные гамильтоновы системы* на $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ со стандартной *симплектической структурой* $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$ и *функцией Гамильтона* $f = az^2 + P_n(w) + Q_m(1/w)$, где P_n и Q_m — многочлены степеней $n \geq 0$ и $m > 0$ соответственно. Такой гамильтониан называется *гиперэллиптическим лорановским гамильтонианом степени* (m, n). Изучены некоторые вопросы $\mathbb{C}$-*выпрямляемости* интегральных траекторий векторных полей $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f$. Получена классификация, с точностью до *гамильтоновой эквивалентности*, $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем, задаваемых гиперэллиптическим лорановским гамильтонианом специального вида: $f = az^2 + b/w + cw^n + d,\ n = 0, 1, 2$. Устанавливается, как топологически устроены факторпространства, полученные отождествлением эквивалентных систем, в каждом из рассмотренных классов ($n = 0, 1, 2$). Также в работе установлено, чему гомеоморфен *бифуркационный комплекс* произвольной $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы, заданной гиперэллиптическим лорановским гамильтонианом и получена *полулокальная классификация* более общего класса $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем, заданных гамильтонианом $f = az^2 + R(w)$, где R — рациональная функция.

Ключевые слова

Симплектическая структура, гамильтонова система, гамильтонова эквивалентность, топологическая эквивалентность, бифуркационный комплекс, $\mathbb{C}$-выпрямляемость векторного поля.

Благодарности

Автор выражает благодарность А.Т. Фоменко за плодотворные обсуждения поставленных задач, а также Е.А. Кудрявцевой за ее многочисленные замечания.

Содержание

1. Введение

1.1. Предварительные замечания

Дипломная работа посвящена решению ряда задач в теории гамильтоновых систем, которые возникают в связи с проблемой их классификации (с точностью до некоторого отношения эквивалентности). В качестве объекта нашего исследования будет выступать класс комплексных гамильтоновых систем, заданных в $\mathbb{C}^2$ голоморфным гамильтонианом f специального вида: $f = az^2 + R(w)$, где $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $R(w)$ — рациональная функция переменной w (т.е. отношение двух многочленов). Здесь под *комплексной гамильтоновой системой* (или $\mathbb{C}$-*гамильтоновой системой*) (см. [8]) мы понимаем тройку $(M_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $M_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{2N}$ — многообразие комплексной размерности $2N$, $\omega_{\mathbb{C}}$ — замкнутая невырожденная голоморфная 2-форма на этом многообразии, а $f\colon M_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, называемая *гамильтонианом*. В случае, когда $f = az^2 + R(w)$, гамильтониан f будет называться *(гиперэллиптическим) рациональным гамильтонианом*. В более частном случае $f = az^2 + P_n(w) + Q_m(1/w)$, где P_n и Q_m — многочлены степеней $n \geq 0$ и $m > 0$, гамильтониан f будет называться *(гиперэллиптическим) лорановским гамильтонианом (степени (m, n))*. В обоих случаях в качестве *симплектического многообразия* $M_{\mathbb{C}}$ будет рассматриваться $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \dots, d_m\})$, где $d_1, \dots, d_m$, $m \geq 0$, — полюса функции $R(w)$, со стандартной *комплексной симплектической структурой* $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw$.

Интерес к комплексным гамильтоновым системам в $\mathbb{C}^2$ общего вида возник в связи со следующим замечанием. Рассмотрим в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2(z, w)$ открытое подмножество U и ассоциированную с $(U, dz \wedge dw, f = f(z, w))$ *вещественную гамильтонову систему* $(U, \mathrm{Re}(dz \wedge dw), H = \mathrm{Re} f)$. Оказывается, что вещественная система (в случае, когда голоморфная функция $f \neq const$) интегрируема с дополнительным первым интегралом $F = \mathrm{Im} f$. Другими словами, функции F и H функционально независимы на U, их *скобка Пуассона* $\{F, H\} = \omega_{\mathbb{R}}(\mathrm{sgrad} F, \mathrm{sgrad} H)$, т.е. значение формы $\omega_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(dz \wedge dw)$ на паре гамильтоновых векторных полей $\mathrm{sgrad} F = \omega_{\mathbb{R}}^{-1}(dF)$, $\mathrm{sgrad} H = \omega_{\mathbb{R}}^{-1}(dH)$, равна нулю. Это вытекает из условий Коши-Римана для функции f. Из этих условий также вытекает равенство $\mathrm{sgrad} H = \mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f := (-f_w, f_z)$. Заметим, что, вообще говоря, наша вещественная гамильтонова система не будет *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, так как ее потоки могут оказаться *неполными* (вещественный параметр на интегральных траекториях векторного поля $\mathrm{sgrad} H$ может оказаться определенным не на всей прямой). Таким образом, к комплексным гамильтоновым системам в $\mathbb{C}^2$ неприменима классическая теорема Лиувилля. Возникает задача, поставленная А.Т. Фоменко, об обобщении теоремы Лиувилля на случай таких систем.

Некоторые смежные с сформулированной выше задачей вопросы изучены в работах [2-5] и [8] Т.А. Лепским и Е. А. Кудрявцевой. Они рассматривали $\mathbb{C}$-гамильтоновы системы вида $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f)$, где $f = f(z, w)$ — многочлен двух переменных. В [2,5] исследуется условие полноты потоков для таких систем (с многочленом f, невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона), дается аналог теоремы Лиувилля. В работах [3,4] рассматривается более узкий класс $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем: гамильтониан f предполагается *гиперэллиптическим полиномиальным*, т.е. имеющим вид $f(z, w) = az^2 + P(w),\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, где $P(w)$ — многочлен. Для таких систем получены результаты о топологии лагранжевых слоений, доказана комплексная теорема Лиувилля.

Упомянем также работы [6,7,11,15,18]. В них изучаются вопросы топологии неособых слоев слоений Лиувилля интегрируемых систем и их симметрий.

Основными результатами дипломной работы являются следующие (определения см. ниже):

1 Изучены некоторые вопросы $\mathbb{C}$-выпрямляемости интегральных траекторий аналитических векторных полей на комплексных многообразиях.

2 Получена классификация $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем в $\mathbb{C}^2$, заданных лорановским гамильтонианом $f = az^2 + b/w + cw^n + d,\ ab \neq 0,\ n = 0, 1, 2$, с точностью до гамильтоновой эквивалентности.

3 Установлено, чему гомеоморфен бифуркационный комплекс для произвольной $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы в $\mathbb{C}^2$, заданной гамильтонианом $f = az^2 + P_n(w) + Q_m(1/w),\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ n \geq 0,\ m \geq 0$.

4 Получена полулокальная классификация $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем вида $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\}), dz \wedge dw, f)$ с гиперэллиптическим рациональным гамильтонианом f.

Все основные определения, используемые в настояшей работе, можно найти в следующем параграфе или в §4.1 (§4.1 в достаточной степени независим от основного текста, и носит обзорный характер). Базовые понятия и утверждения, связанные с вещественными гамильтоновыми системами, можно найти в [1].

1.2. Основные определения

Определение 1.1. $\mathbb{C}$-*гамильтоновой системой* называется тройка $(M_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, где $M_{\mathbb{C}}$ — комплексное многообразие, $\omega_{\mathbb{C}}$ — замкнутая невырожденная голоморфная 2-форма на этом многообразии, а $f\colon M_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, называемая *гамильтонианом.*

Определение 1.2. Пусть $M_{\mathbb{C}}^N$ — N-мерное комплексное многообразие, v — векторное поле на нем. Будем говорить, что интегральные траектории этого векторного поля $\mathbb{C}$-*выпрямляются* на инвариантном d-мерном комплексном подмногообразии $U^d \subset M_{\mathbb{C}}^N$, если существуют функция $\lambda = \lambda(w) \neq 0$ (для всех $w \in U^d$) и погружение $h\colon U^d \to \mathbb{C}^d/\Gamma$ для некоторой дискретной подгруппы $\Gamma \subset \mathbb{C}^d$, являющиеся $\mathbb{C}$-дифференцируемыми отображениями, и такие, что h переводит v в векторное поле $h_*(v) = \lambda v_0$, $v_0 = const$. В случае $d = 1$ дополнительно потребуем $\lambda \equiv 1$.

Определение 1.3. Векторным полем *косой градиент* функции $f\colon M_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ относительно формы $\omega_{\mathbb{C}}$ называется векторное поле $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ на $M_{\mathbb{C}}$ такое, что для любого векторного поля v на $M_{\mathbb{C}}$ выполнено равенство $\omega_{\mathbb{C}}(v, \mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f) = v(f)$, где $v(f)$ — производная функции f по направлению v.

Нетрудно видеть, что если $M_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{2N}$ имеет комплексную размерность $2N$, а $\omega_{\mathbb{C}} = dz \wedge dw = dz_1 \wedge dw_1 + \ldots + dz_N \wedge dw_N$, где $z = (z_1, \ldots, z_N)$ и $w = (w_1, \ldots, w_N)$ — локальные комплексные координаты на многообразии, то $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f = (-f_w, f_z) = (-f_{w_1}, \ldots, -f_{w_N}, f_{z_1}, \ldots, f_{z_N})$.

Определение 1.4. *Уравнением Гамильтона* $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $(M_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ называется уравнение $\dot{z}(t) = \mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f|_{z(t)}$, где $t \in I$ — параметр в некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$, $z = (z_1, \ldots, z_{2N})$ — локальные координаты на многообразии. Если $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ имеет в этих координатах компоненты $(v_1, \ldots, v_{2N})$, то уравнение Гамильтона следует рассматривать как систему $4N$ уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \mathrm{Re}\ v_k, \\ \dot{y}_k = \mathrm{Im}\ v_k, \end{cases}$$

где $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, 2N$.

Определение 1.5. Голоморфная функция h называется *первым интегралом* $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $(M_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$, если $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f(h) = 0$.

Определение 1.6. Пусть дан многочлен $f(z, w) = az^2 + b_n w^n + \ldots + b_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$, $ab_n \neq 0$. Он называется *гиперэллиптическим* многочленом степени n (*эллиптическим* многочленом при $n \leq 4$). Соответствующую $\mathbb{C}$-гамильтонову систему $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$ в дальнейшем будем обозначать через $\mathcal{H}_n(a, b_n, \ldots, b_0)$.

Определение 1.7. *$\mathbb{C}$-гамильтоновой системой с (гиперэллиптическим) лорановским гамильтонианом степени* (m, n) назовем тройку $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}), dz \wedge dw, f)$, где $f(z, w) = az^2 + \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{b_i}{w^i} + \sum\limits_{j=0}^{n} c_j w^j$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b_i, c_j \in \mathbb{C}$, $ab_m \neq 0$ и $c_n \neq 0$ при $n > 0$. Рассмотрим частный случай, когда гамильтониан $f(z, w) = az^2 + b/w + \sum\limits_{k=0}^{n} c_k w^k$. Такой вид гамильтониана является естественным обобщением гиперэллиптических полиномиальных гамильтонианов (см. определение выше), рассмотренных в работах [1-3], на случай полюса первого порядка. Для удобства соответствующую систему назовем *системой с лорановским гамильтонианом степени* n и обозначим через $\mathfrak{L}_n(a, b, c_n, \ldots, c_0)$.

Определение 1.8. Пусть дана функция $f(z, w) = az^2 + R(w)$ двух комплексных переменных $(z, w) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\})$, такая, что $a \neq 0$, $\dfrac{d}{dw} R(w) \not\equiv 0$. Здесь $R = R(w)$ — рациональная функция переменной w, а d_j, $j = 1, \ldots, m$, — ее полюса. Назовем ее *(гиперэллиптическим) рациональным гамильтонианом* системы $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\}), dz \wedge dw, f)$.

Заметим, что класс $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем с (гиперэллиптическим) рациональным гамильтонианом содержит в себе классы систем из определений 2.6 и 2.7, однако класс систем из определения 2.7 не содержит в себе класс систем из определения 2.6, так как лорановский гамильтониан обязательно имеет полюс в нуле (относительно переменной w).

Определение 1.9. Пусть дана $\mathbb{C}$-гамильтонова система $(M^{2N}_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ с N первыми интегралами $f_1, \ldots, f_N$ ($f = f_1$, $\dim_{\mathbb{C}} M^{2N}_{\mathbb{C}} = 2N$). Тогда отображение $F = (f_1, \ldots, f_N)\colon M^{2N}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^N$ называется *отображением момента.*

Слоем (или *листом*) $\mathrm{T}_\xi \subset M^{2N}_{\mathbb{C}}$ уровня ξ функций $f_1, \ldots, f_N$, а также соответствующей $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы, называется совместная поверхность уровня этих функций, т.е. $\mathrm{T}_\xi = F^{-1}(\xi)$. Здесь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $\xi_k \in \mathbb{C}$. Слой T_ξ называется *неособым*, если в каждой его точке ранг матрицы Якоби $(\partial_j f_i)$ максимален.

Определение 1.10. *Бифуркационным комплексом* $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $(M^{2N}_{\mathbb{C}}, \omega_{\mathbb{C}}, f)$ с N первыми интегралами $f_1, \ldots, f_N$ называется факторпространство многообразия $M^{2N}_{\mathbb{C}}$ по разбиению на связные компоненты прообразов точек $\mathbb{C}^N$ при отображении момента.

Определение 1.11. Пусть дан рациональный гамильтониан $f(z, w) = az^2 + R(w)$ системы $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\}), dz \wedge dw, f)$. Пусть $R(w)$ принимает значение ξ в точке w_0 с кратностью k, $k \geq 1$, т.е. $(R(w) - \xi)^{(j)}|_{w_0} = 0$

при $j = 0, \ldots, k-1$, $R^{(k)}(w_0) \neq 0$. При $k \geq 2$ точку $P = (0, w_0)$ назовем *особой точкой кратности* k слоя $\mathrm{T}_{f(P)}$, а при $k = 1$ *простой точкой* этого слоя.

Заметим, что особые точки (некоторой кратности) слоя T_ξ — это в точности те точки слоя, в которых $\mathrm{grad} f = 0$, а значит, слой T_ξ будет неособым в том и только в том случае, когда он имеет лишь простые точки.

Определение 1.12. Пусть даны две $\mathbb{C}$-дифференцируемые функции $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{C}$ и $f_2 \colon M_2 \to \mathbb{C}$. Они называются *эквивалентными* (соответственно *топологически эквивалентными*), если существует $\mathbb{C}$-диффеоморфизм (сохраняющий ориентацию гомеоморфизм) $h \colon M_1 \to M_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ h$.

Определение 1.13. Пусть $D_{\xi_0,\varepsilon}$ — открытый двумерный диск радиуса $\varepsilon > 0$ вокруг $\xi_0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два рациональных гамильтониана f_1 и f_2. Будем говорить, что f_1 и f_2 (а точнее, соответствующие им слоения, т.е. разбиения на слои $f_j^{-1}(\xi)$, $j = 1, 2$), *полулокально топологически эквивалентны относительно значения* ξ_0, если для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon \in (0, \delta)$, что функции $f_1|_{f_1^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon})}$ и $f_2|_{f_2^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon})}$ топологически эквивалентны.

Будем говорить, что f_1 и f_2 *локально топологически эквивалентны относительно точек* P_1 и P_2, если существуют такие сколь угодно малые окрестности U_1 и U_2 этих точек, что функции $f_1|_{U_1}$ и $f_2|_{U_2}$ топологически эквивалентны.

Определение 1.14. Две $\mathbb{C}$-гамильтоновы системы $(M_{\mathbb{C},1}, \omega_{\mathbb{C},1}, f_1)$ и $(M_{\mathbb{C},2}, \omega_{\mathbb{C},2}, f_2)$ называются *гамильтоново эквивалентными,* если существует биголоморфное отображение $h \colon M_{\mathbb{C},1} \to M_{\mathbb{C},2}$ такое, что выполнены следующие два условия:

1) $\omega_{\mathbb{C},1} = h^*(\omega_{\mathbb{C},2})$;

2) $f_1 = f_2 \circ h + c$, где c — некоторая константа.

2. $\mathbb{C}$-выпрямляемость интегральных траекторий векторных полей на комплексных многообразиях

Теорема 2.1. *Рассмотрим произвольное векторное поле $v = (v_1, \ldots, v_N)$, заданное на $M_{\mathbb{C}}^N$, $N \geq 2$, голоморфными функциями $v_1, \ldots, v_N$ локальных комплексных координат на $M_{\mathbb{C}}^N$. Пусть векторное поле v имеет* *особые точки (т.е. нули) $P_1, \ldots, P_k$, принадлежащие инвариантному d-мерному, $d \geq 2$, комплексному подмногообразию $U^d \subset M^N_{\mathbb{C}}$. Пусть существует точка $P \in \{P_1, \ldots, P_k\}$, не являющаяся внутренней точкой множества особых точек векторного поля $v|_{U^d}$. Рассмотрим инвариантное подмногообразие $U^d \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$. Тогда интегральные траектории векторного поля v не $\mathbb{C}$-выпрямляются на $U^d \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$.*

Доказательство. Пусть U — достаточно малая шаровая окрестность точки P в U^d. Предположим, что интегральные траектории векторного поля v выпрямляются на $U^d \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$. Тогда существуют функции $u_i = u_i(w)$, $i = 1, \ldots, d$, и $\lambda = \lambda(w) \neq 0$ локальных коомплексных координат $w = (w_1, \ldots, w_d)$, голоморфные в $U \setminus \{P\}$, такие, что $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial w_j}\right) v^j = \lambda(w) v_0^i$, причем вектор констант $v_0 \neq 0$ (иначе P является внутренней точкой множества особых точек векторного поля $v|_U$).

По лемме об устранимой особенности для голоморфных функций многих переменных, функции u_i и λ можно считать голоморфными всюду на U. Нетрудно видеть, что так как точка P — особая точка векторного поля v, то $\lambda(P) = 0$. Но такого не может быть. Действительно, так как проколотая окрестность $U \setminus \{P\}$ односвязна, в ней определена однозначная ветвь логарифма $g = \ln \lambda$ функции $\lambda(w)$. Снова пользуясь леммой об устранимой особенности, получаем, что существует голоморфное продолжение g в U с некоторым значением $g(P) \in \mathbb{C}$, при этом всюду в U имеем $\lambda(w) = \exp(g(w))$, а значит $\lambda(P) \neq 0$. $\square$

Пример 2.1. Рассмотрим функцию Гамильтона f системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$. Интегральные траектории векторного поля $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ не $\mathbb{C}$-выпрямляются на $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, -\frac{c}{2b})\}$.

Рассмотрим произвольное векторное поле v, заданное на связном многообразии $M_{\mathbb{C}}$, $\dim M_{\mathbb{C}} = 1$, голоморфной функцией $v = v(z)$ локальной комплексной координаты z на $M_{\mathbb{C}}$. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — особые точки векторного поля v. Рассмотрим инвариантное подмногообразие $M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ и 1-форму $\alpha = \dfrac{dz}{v(z)}$ на нем. Рассмотрим образующие γ_j фундаментальной группы $\pi_1(M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\})$. Обозначим через $I_j = \int\limits_{\gamma_j} \alpha$ интегралы формы α по циклам γ_j. Имеет место

Теорема 2.2. *Интегральные траектории векторного поля v $\mathbb{C}$-выпрямляются на $M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ тогда и только тогда, когда I_j лежат в некоторой дискретной подгруппе $\Gamma \subset \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть I_j лежат в некоторой дискретной подгруппе $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Фиксируем некоторую отмеченную точку $z_0 \in M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$. Определим (многозначную) функцию h так: $h(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \alpha$. Значение $h(z)$ в точке z, вообще говоря, зависит от пути, соединяющего z_0 и z. В силу замкнутости формы α, для двух гомологичных путей, соединяющих z_0 и z, соответствующие значения $h(z)$ совпадают. Нетрудно видеть, что $h\colon M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\} \to \mathbb{C}/\Gamma$ корректно определенное однозначное погружение, причем $dh = \alpha$, и, следовательно, $dh(v) = 1$. Тем самым h осуществляет искомое $\mathbb{C}$-выпрямление.

В обратную сторону, пусть интегральные траектории векторного поля v $\mathbb{C}$-выпрямляются на $M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$. Тогда, согласно определению 1.2, существует погружение $h\colon M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\} \to \mathbb{C}/\Gamma'$ для некоторой дискретной подгруппы $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ такое, что $dh(v) = v_0 \neq 0$. Без ограничения общности, $v_0 = 1$. Рассмотрим $h\colon M_{\mathbb{C}} \setminus \{P_1, \ldots, P_k\} \to \mathbb{C}$ как многозначное отображение. Нетрудно видеть, что $dh = \alpha$, т.е. $h(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \alpha + const$, где $const$ не зависит от z. Отсюда получаем условие на I_j, требуемое в теореме. $\square$

Пример 2.2.

1) Рассмотрим функцию Гамильтона f системы $\mathcal{H}_2(a, b, c, d)$. Интегральные траектории векторного поля $\operatorname{sgrad}_{\mathbb{C}} f$ $\mathbb{C}$-выпрямляются на каждом неособом слое (и даже на дополнении к единственному особому слою T_{ξ_0}, где $\xi_0 = \frac{c^2}{4b} + d$, см. [8]).

2) Интегральные траектории векторного поля $v(z) = \dfrac{2\pi z(z-1)}{(2\pi+1)z - 2\pi}$ не $\mathbb{C}$-выпрямляются на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{2\pi}{2\pi+1}\}$.

3. Гамильтонова эквивалентность и фактор-пространства

3.1. Известные результаты о гамильтоновой эквивалентности $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем с эллиптическим гамильтонианом

Рассмотрим $\mathbb{C}$-гамильтонову систему $\mathcal{H}_n(a, b_n, \ldots, b_0)$ с гамильтонианом $f(z, w) = az^2 + b_n w^n + \ldots + b_0$. Ясно, что она имеет не более $n-1$ особых слоев, и слой T_ξ особый тогда и только тогда, когда ξ — критическое значение многочлена $b_n w^n + \ldots + b_0$. Система $\mathcal{H}_n(a, b_n, \ldots, b_0)$ называется *невырожденной*, если у многочлена $b_n w^n + \ldots + b_0$ критических значений ровно $n-1$.

Теорема 3.1. (Т. Лепский [8]). *Пусть дана $\mathbb{C}$-гамильтонова система $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f_n(z,w))$ с эллиптическим гамильтонианом степени n, $n = 1, 2, 3, 4$. Тогда:*

1) *Каждая $\mathbb{C}$-гамильтонова система $\mathcal{H}_1(a,b,c)$ гамильтоново эквивалентна канонической "линейной" $\mathbb{C}$-гамильтоновой системе $(\mathbb{C}^2(u,v), du \wedge dv, f_1(u,v) = u)$. Все слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $\mathcal{H}_1(a,b,c)$ являются неособыми, биголоморфными плоскости $\mathbb{C}$, и образуют тривиальное расслоение с базой $\mathbb{C}$.*

2) *Каждая $\mathbb{C}$-гамильтонова система $\mathcal{H}_2(a,b,c,d)$ гамильтоново эквивалентна системе*
$\mathcal{H}_2(a_1, 1, 0, 0)$, для $a_1 = ab \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и имеет один особый слой T_{ξ_1}, $\xi_1 = \frac{c^2-4bd}{-4b}$. Ограничение системы на $\mathbb{C}^2 \setminus T_{\xi_1}$ гамильтоново эквивалентно "линейной" системе $((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), du \wedge dv, f_2(u,v) = 2\sqrt{a_1} u)$. Все неособые слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $\mathcal{H}_2(a,b,c,d)$ биголоморфны цилиндру $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ и образуют тривиальное расслоение с базой $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3) *Каждая невырожденная $\mathbb{C}$-гамильтонова система $\mathcal{H}_3(a,b,c,d,e)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_3(r,s,s,0,0)$, для некоторых $r, s \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$, и имеет два особых слоя T_{ξ_j}, $j = 1, 2$. Все неособые слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $\mathcal{H}_3(a,b,c,d,e)$ биголоморфны $\mathbb{T}^2_\lambda \setminus \{p\}$ для некоторого $\lambda = \lambda(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, зависящего от слоя T_ξ, где $\mathbb{T}^2_\lambda = \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z})$ — двумерный тор, $p \in \mathbb{T}^2_\lambda$.*

4) *Каждая невырожденная $\mathbb{C}$-гамильтонова система $\mathcal{H}_4(a,b,c,d,e,k)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathcal{H}_4(r, s, s(p+1), sp, 0, 0)$, для некоторых $r, s, p \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$, и имеет три особых слоя T_{ξ_j}, $j = 1, 2, 3$. Все неособые слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $\mathcal{H}_4(a,b,c,d,e,k)$ биголоморфны $\mathbb{T}^2_\lambda \setminus \{p_1, p_2\}$ для некоторого $\lambda = \lambda(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, зависящего от слоя T_ξ, где $p_1, p_2 \in \mathbb{T}^2_\lambda$, $p_1 \neq p_2$.*

В работе [8] получены также критерии гамильтоновой эквивалентности пар систем $\mathcal{H}_2(a_1, 1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_2(a_2, 1, 0, 0)$, $\mathcal{H}_3(r_1, s_1, s_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_3(r_2, s_2, s_2, 0, 0)$, $\mathcal{H}_4(r_1, s_1, s_1(p_1+1), s_1 p_1, 0, 0)$ и $\mathcal{H}_4(r_2, s_2, s_2(p_2+1), s_2 p_2, 0, 0)$.

3.2. Случай полюса первого порядка

Рассмотрим $\mathbb{C}$-гамильтонову систему $\mathfrak{L}_0(a,b,c)$ с лорановским гамильтонианом степени нуль.

Теорема 3.2. *Каждая система* $\mathfrak{L}_0(a,b,c)$ *гамильтоново эквивалентна системе* $\mathfrak{L}_0(\gamma,\gamma,0)$ *при* $\gamma = b^2/a$. *Любые две системы* $\mathfrak{L}_0(\gamma_1,\gamma_1,0)$ *и* $\mathfrak{L}_0(\gamma_2,\gamma_2,0)$ *гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\gamma_1=\gamma_2$. *Все слои* T_ξ *являются неособыми, биголоморфными плоскости* $\mathbb{C}$ *с двумя проколами при* $\xi\neq c$ *и с одним проколом при* $\xi = c$.

Доказательство. Сделаем замену координат в $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})(z,w)$ по формулам: $u = az/b$, $v = bw/a$. Положим $\gamma = b^2/a$. Тогда, очевидно, $du\wedge dv = dz\wedge dw$ и $\gamma u^2+\gamma/v = az^2+b/w$.

Докажем второе утверждение теоремы. Предположим, что существует гамильтонова эквивалентность между $\mathfrak{L}_0(\gamma_1,\gamma_1,0)$ и $\mathfrak{L}_0(\gamma_2,\gamma_2,0)$ с биголоморфным отображением $h=(u,v)\colon \mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})\to\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, $u=u(z,w)$, $v=v(z,w)$. Выведем отсюда, что $\gamma_1=\gamma_2$.

По определению гамильтоновой эквивалентности имеем

$$\gamma_1 z^2+\frac{\gamma_1}{w}+C=\gamma_2u^2+\frac{\gamma_2}{v}, \tag{1}$$

где C — некоторая константа. Рассмотрим произвольный слой T^1_ξ уровня ξ системы $\mathfrak{L}_0(\gamma_1,\gamma_1,0)$. Он гомеоморфен двумерной сфере с 3 проколами при $\xi\neq 0$ и сфере с двумя проколами при $\xi=0$. Отсюда следует, что "нулевой" слой T^1_0 системы $\mathfrak{L}_0(\gamma_1,\gamma_1,0)$ обязан перейти при гамильтоновой эквивалентности в "нулевой" слой T^2_0 системы $\mathfrak{L}_0(\gamma_2,\gamma_2,0)$. Значит, $C=0$ в (1). Пусть $f_1(z,w)=\gamma_1z^2+\dfrac{\gamma_1}{w}$, а $f_2(u,v)=\gamma_2u^2+\dfrac{\gamma_2}{v}$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}}f_1=(\gamma_1/w^2, 2\gamma_1 z)$, $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}}f_2=(\gamma_2/v^2,2\gamma_2u)$.

Рассмотрим $\xi\neq 0$. Тогда $h(\mathrm{T}^1_\xi)=\mathrm{T}^2_\xi$, причем "выколотые точки" первого слоя перейдут в "выколотые точки" второго слоя (под выколотыми точками слоев T^j_ξ, $j=1,2$, мы подразумеваем их граничные точки в $\overline{\mathbb{C}}^2$, где $\overline{\mathbb{C}}$ — пополненная комплексная плоскость, гомеоморфная двумерной сфере). В слое T^1_ξ выколотые точки имеют вид $P^{\pm}_{\xi,1}=(\pm\sqrt{\frac{\xi}{\gamma_1}},\infty)$, $P_{\xi,1}=(\infty,0)$, а в слое T^2_ξ, соответственно, $P^{\pm}_{\xi,2}=(\pm\sqrt{\frac{\xi}{\gamma_2}},\infty)$, $P_{\xi,2}=(\infty,0)$. Покажем, что $h(P_{\xi,1})=P_{\xi,2}$. Для этого определим на слое T^1_ξ голоморфную 1-форму Δ^1_ξ такую, что $\Delta^1_\xi(\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}}f_1|_{\mathrm{T}^1_\xi})=1$ (аналогично определим форму Δ^2_ξ). Нетрудно проверить, что замыкание $\overline{\mathrm{T}^1_\xi}$ слоя T^1_ξ в $\overline{\mathbb{C}}^2$ является регулярной кривой, биголоморфной $\overline{\mathbb{C}}$, причем проекция $\mathrm{Pr}_z\colon \overline{\mathrm{T}^1_\xi}\to\overline{\mathbb{C}}$, $(z,w)\mapsto z$, является биголоморфным отображением, и что в координате z форма Δ^1_ξ запишется в виде $\Delta^1_\xi=\left.\dfrac{dz}{\gamma_1(\xi/\gamma_1-z^2)^2}\right|_{\mathrm{T}^1_\xi}$. В точке $P_{\xi,1}$ эта форма имеет устранимую особенность — нуль второго порядка (чтобы в этом убедиться, нужно сделать замену $z\mapsto 1/z$), а в точках $P^{\pm}_{\xi,1}$ неустранимую особенность — полюс второго порядка. Аналогично форма Δ^2_ξ имеет устранимую особенность в точке $P_{\xi,2}$ и неустранимую особенность в точках $P^{\pm}_{\xi,2}$. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и посчитаем интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z\mp\sqrt{\frac{\xi}{\gamma_1}}|=\varepsilon}\Delta^1_\xi \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u\mp\sqrt{\frac{\xi}{\gamma_2}}|=\varepsilon}\Delta^2_\xi. \tag{2}$$

Для вычисления интегралов используем формулу для подсчета вычета произвольной мероморфной функции g в полюсе a порядка k:

$$\mathrm{res}_a g(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(g(z)(z-a)^k\right).$$

Так как интегралы в (2) суть вычеты соответствующих функций (точнее, 1-форм) в точках $P^{\pm}_{\xi,1}$ и $P^{\pm}_{\xi,2}$, прямой подсчет дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z\mp\sqrt{\frac{\xi}{\gamma_1}}|=\varepsilon}\Delta^1_\xi &= \frac{\mp 1}{4\gamma_1(\sqrt{\xi/\gamma_1})^3},\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u\mp\sqrt{\frac{\xi}{\gamma_2}}|=\varepsilon}\Delta^2_\xi &= \frac{\mp 1}{4\gamma_2(\sqrt{\xi/\gamma_2})^3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Полученные числа отличны от нуля, а значения аналогичных интегралов, взятых вокруг точек $P_{\xi,1}$ и $P_{\xi,2}$, равны нулю. Тем самым, $h(P_{\xi,1}) = P_{\xi,2}$, откуда $h(P^{\pm}_{\xi,1}) = P^{\pm}_{\xi,2}$ или $h(P^{\pm}_{\xi,1}) = P^{\mp}_{\xi,2}$. Значит, из равенства интегралов в (3) следует, что $\gamma_1(\sqrt{\xi/\gamma_1})^3 = \pm\gamma_2(\sqrt{\xi/\gamma_2})^3$. Возводя полученное равенство в квадрат, получаем $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Следствие 3.1. *Любые две системы $\mathfrak{L}_0(a_1, b_1, c_1)$ и $\mathfrak{L}_0(a_2, b_2, c_2)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $a_2 b_1^2 = a_1 b_2^2$.*

Рассмотрим $\mathbb{C}$-гамильтонову систему $\mathfrak{L}_1(a, b, c, d)$ с лорановским гамильтонианом степени один.

Теорема 3.3. *Каждая система $\mathfrak{L}_1(a, b, c, d)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathfrak{L}_1(r, \gamma, \gamma, 0)$ при $r = \frac{ac}{b}$ и $\gamma = \sqrt{bc}$. Любые две системы $\mathfrak{L}_1(r_1, \gamma_1, \gamma_1, 0)$ и $\mathfrak{L}_1(r_2, \gamma_2, \gamma_2, 0)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\gamma_1 = \pm\gamma_2$. Система имеет два особых слоя $\mathrm{T}_{\xi_\pm}$, $\xi_\pm = d \pm 2\sqrt{bc}$. Все неособые слои T_ξ гомеоморфны двумерному тору $\mathbb{T}^2$ с двумя проколами.*

Доказательство. Сделаем замену координат в $(\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}))(z,w)$: $u=\sqrt{\frac{b}{c}}z$, $v=\sqrt{\frac{c}{b}}w$. Положим $r=\frac{ac}{b}$, $\gamma=\sqrt{bc}$. Тогда, очевидно, $du\wedge dv=dz\wedge dw$ и $ru^2+\gamma/v+\gamma v=az^2+b/w+cw$.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть имеется гамильтонова эквивалентность h между $\mathfrak{L}_1(r_1,\gamma_1,\gamma_1,0)$ и $\mathfrak{L}_1(r_2,\gamma_2,\gamma_2,0)$. Рассмотрим особые точки (т.е. нули) векторных полей $\mathrm{sgrad}_{\mathbb{C}} f_j$ в $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, где f_j — гамильтонианы соответствующих систем, $j=1,2$. Как нетрудно видеть, это будут точки $(0,\pm1)$. Обозначим их через $P^{\pm}$. При гамильтоновой эквивалентности особые точки переходят в особые, значит $f_1(P^+)-f_1(P^-)=\pm(f_2(P^+)-f_2(P^-))$, откуда $\gamma_1=\pm\gamma_2$ и особые значения суть $\xi_{\pm}=f_1(P^{\pm})=\pm2\gamma_1$.

Для доказательства равенства $r_1=r_2$ рассмотрим линейные операторы — линеаризации соответствующих векторных полей в особых точках. Они имеют вид

$$A_j^{\pm}=\begin{pmatrix}0 & \mp2\gamma_j\\ 2r_j & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть особые точки $P^{\pm}$ переходят в себя. Тогда $A_1^{\pm}=((dh)|_{P^{\pm}})^{-1}\circ A_2^{\pm}\circ(dh)|_{P^{\pm}}$. А значит, $\det A_1^{\pm}=\det A_2^{\pm}$. Если же особые точки меняются местами, то будем иметь $\det A_1^{\pm}=\det A_2^{\mp}$. В первом случае имеем $r_1\gamma_1=r_2\gamma_2$ и $\gamma_1=\gamma_2$, а во втором $r_1\gamma_1=-r_2\gamma_2$ и $\gamma_1=-\gamma_2$. В обоих случаях $r_1=r_2$. То, что системы $\mathfrak{L}_1(r,\gamma,\gamma,0)$ и $\mathfrak{L}_1(r,-\gamma,-\gamma,0)$ гамильтоново эквивалентны, очевидно.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что все неособые слои гомеоморфны тору с двумя проколами. Рассмотрим компактификацию $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi$ любого неособого слоя T_ξ ("заклеивающую" проколы неособого слоя бесконечно удаленными точками) и его проекцию на пополненную плоскость $\mathrm{Pr}_w\colon\widetilde{\mathrm{T}}_\xi\to\overline{\mathbb{C}}$, $(z,w)\mapsto w$. Нетрудно проверить, что это отображение является двулистным разветвленным накрытием с четырьмя точками ветвления индекса два (над точками $w=0$ и $w=\infty$ пополненной плоскости есть ветвление, поэтому в качестве компактификации $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi$ слоя T_ξ можно взять его замыкание в $\overline{\mathbb{C}}^2$). По формуле Римана-Гурвица мы получаем, что компактификация $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi$ неособого слоя гомеоморфна двумерной поверхности рода $g=\frac{1}{2}\sum(k_i-1)-(m-1)=1$. Здесь k_i — индексы ветвлений в особых точках, а m — число листов. Отсюда неособый слой T_ξ гомеоморфен тору с двумя проколами. $\square$

Следствие 3.2. *Любые две системы $\mathfrak{L}_1(a_1,b_1,c_1,d_1)$ и $\mathfrak{L}_1(a_2,b_2,c_2,d_2)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $a_2b_1^2=a_1b_2^2$ и $b_1c_1=b_2c_2$.*

Рассмотрим $\mathbb{C}$-гамильтонову систему $\mathfrak{L}_2(a,b,c,0,d)$ с лорановским гамильтонианом степени два.

Теорема 3.4. *Каждая система $\mathfrak{L}_2(a,b,c,0,d)$ гамильтоново эквивалентна системе $\mathfrak{L}_2(r,\gamma,\gamma,0,0)$ при $r = a(\frac{c}{b})^{2/3}$ и $\gamma = \sqrt[3]{cb^2}$. Любые две системы $\mathfrak{L}_2(r_1,\gamma_1,\gamma_1,0,0)$ и $\mathfrak{L}_2(r_2,\gamma_2,\gamma_2,0,0)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $r_1\gamma_1 = r_2\gamma_2$ и $\gamma_1^3 = \gamma_2^3$, т.е. когда выполнено одно из следующих трех условий (здесь $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i(k-1)}{3}}$, $k = 1,2,3$ — корни третьей степени из единицы)*

$$\begin{aligned}&1)\ r_2 = r_1 \text{ и } \gamma_1 = \gamma_2,\\ &2)\ r_2 = \varepsilon_3 r_1 \text{ и } \gamma_1 = \varepsilon_3\gamma_2,\\ &3)\ r_2 = \varepsilon_2 r_1 \text{ и } \gamma_1 = \varepsilon_2\gamma_2.\end{aligned}$$

Система имеет три особых слоя T_{ξ_j}, $\xi_j^3 = \frac{27}{4}cb^2$, $j = 1,2,3$. Все неособые слои T_ξ гомеоморфны двумерному тору $\mathbb{T}^2$ с тремя проколами.

Доказательство. Сделаем замену координат в $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})(z,w)$: $u = \sqrt[3]{\frac{b}{c}}z$, $v = \sqrt[3]{\frac{c}{b}}w$. Положим $r = a(\frac{c}{b})^{2/3}$, $\gamma = \sqrt[3]{cb^2}$. Тогда, очевидно, $du\wedge dv = dz\wedge dw$ и $ru^2+\gamma/v+\gamma v^2 = az^2+b/w+cw^2$.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть имеется гамильтонова эквивалентность между
$\mathfrak{L}_2(r_1,\gamma_1,\gamma_1,0,0)$ и $\mathfrak{L}_2(r_2,\gamma_2,\gamma_2,0,0)$. Рассмотрим особые точки векторных полей $\mathrm{sgrad}_\mathbb{C} f_j$, где f_j — гамильтонианы соответствующих систем, $j = 1,2$. Как нетрудно видеть, это будут точки $(0,\varepsilon_k)$, $k = 1,2,3$. Всего имеется 6 возможностей “перемешивания” особых точек. Причем в действительности реализуются только 3: либо все особые точки остаются на месте, либо ни одна не остается на месте. Докажем это. Предположим сначала, что точка $(0,\varepsilon_1)$ остается на месте. Так как гамильтонова эквивалентность сохраняет разность функции f_1 в особых точках, в этом случае мы получаем, что оставшиеся точки также остаются на месте. Действительно, в противном случае $\gamma_1-\gamma_1\varepsilon_3 = \gamma_2-\gamma_2\varepsilon_2$ и $\gamma_1\varepsilon_2-\gamma_1\varepsilon_3 = \gamma_2\varepsilon_3-\gamma_2\varepsilon_2$. Пусть теперь точка $(0,\varepsilon_1)$ переходит в $(0,\varepsilon_k)$, а точка $(0,\varepsilon_k)$ в $(0,\varepsilon_1)$, $k = 2,3$. Тогда точка $(0,\varepsilon_{5-k})$ переходит в себя, откуда получаем следующее равенство: $(1-\varepsilon_k)/(\varepsilon_k-1) = (1-\varepsilon_{5-k})/(\varepsilon_k-\varepsilon_{5-k})$, которое, очевидно, не может иметь место. Тем самым, остаются следующие

возможные условия на γ_j:

$$1)\ \gamma_1 = \gamma_2,$$
$$2)\ \gamma_1 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_3}\gamma_2,$$
$$3)\ \gamma_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2}\gamma_2.$$

Эти три условия эквивалентны случаям, описанным в теореме. Чтобы получить условия на r_j, можно рассмотреть линеаризации векторных полей в особых точках:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & -3\gamma_j \\ 2r_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы A_j одни и те же для всех особых точек, аналогично доказательству теоремы 4.2 получаем, что $r_1\gamma_1 = r_2\gamma_2$, откуда следуют условия на r_j.

Еще нужно показать, что все три случая, описанные в теореме, реализуются. Достаточно рассмотреть случай 2). Пусть имеются две системы $\mathfrak{L}_2(r, \gamma, \gamma, 0, 0)$ и $\mathfrak{L}_2(\varepsilon_3 r, \varepsilon_2\gamma, \varepsilon_2\gamma, 0, 0)$. Сделаем замену координат в $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})(z, w)$: $u = \varepsilon_3 z,\ v = \varepsilon_2 w$. Тогда, очевидно, $du \wedge dv = dz \wedge dw$ и $rz^2 + \gamma/w + \gamma w^2/2 = \varepsilon_3 r u^2 + \varepsilon_2\gamma/v + \varepsilon_2\gamma v^2/2$.

Аналогично доказательству теоремы 3.3, рассмотрим компактификацию $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi$ любого неособого слоя T_ξ ("заклеивающую" проколы неособого слоя бесконечно удаленными точками) и его проекцию на пополненную плоскость $\mathrm{Pr}_w \colon \widetilde{\mathrm{T}}_\xi \to \overline{\mathbb{C}},\ (z, w) \mapsto w$. Нетрудно проверить, что это отображение является двулистным разветвленным накрытием с четырьмя точками ветвления индекса два (над точкой $w = 0$ в пополненной плоскости есть ветвление, а над точкой $w = \infty$ его нет, поэтому в качестве компактификации $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi$ слоя T_ξ можно взять его замыкание в $\overline{\mathbb{C}}^2$ с "расклеенной" бесконечностью). По формуле Римана-Гурвица мы получаем, что компактификация $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi$ неособого слоя гомеоморфна двумерной поверхности рода $g = 1$. Отсюда неособый слой T_ξ гомеоморфен тору с тремя проколами. $\square$

Следствие 3.3. *Любые две системы $\mathfrak{L}_2(a_1, b_1, c_1, 0, d_1)$ и $\mathfrak{L}_2(a_2, b_2, c_2, 0, d_2)$ гамильтоново эквивалентны тогда и только тогда, когда $c_1 b_1^2 = c_2 b_2^2$ и $a_1 c_1 = a_2 c_2$.*

3.3. Пространства гамильтоново неэквивалентных систем и бифуркационный комплекс

Под пространством гамильтоново неэквивалентных систем данного класса $\mathfrak{L}$ $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем мы будем подразумевать факторпространство множества $\mathfrak{L}$ по разбиению на гамильтоново эквивалентные между собой системы. Рассмотрим гамильтоновы системы вида $\mathfrak{L}_0(a,b,c)$, $\mathfrak{L}_1(a,b,c,d)$ и $\mathfrak{L}_2(a,b,c,0,d)$. Они имеют естественную структуру комплексных многообразий, биголоморфных, соотвественно, $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2\times\mathbb{C}$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^3\times\mathbb{C}$ и $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^3\times\mathbb{C}$. Изучим топологию пространств гамильтоново неэквивалентных систем этих классов. Для этого введем следующее определение. Пусть имеется комплексное многообразие X и его разбиение E. Скажем, что факторпространство X/E имеет *естественную структуру комплексного многообразия*, если на нем существует такая структура комплексного многообразия, относительно которой каноническая проекция $p\colon X\to X/E$ является комплексно дифференцируемой субмерсией (т.е. комплексно дифференцируемым отображением, дифференциал которого является эпиморфизмом в каждой точке). Заметим, что по теореме о неявных функциях, это условие эквивалентно тому, что X/E является многообразием (относительно фактортопологии) и на нем существует такой комплексный атлас $\{(U_\alpha;\phi_\alpha)\}$ с координатными гомеоморфизмами $\phi_\alpha\colon U_\alpha\to V_\alpha$, что его можно продолжить до некоторого комплексного атласа $\{(\mathbb{U}_{\alpha,\beta};\Phi_{\alpha,\beta})\}$ на X, с координатными окрестностями $\mathbb{U}_{\alpha,\beta}\subset p^{-1}(U_\alpha)$ и координатными гомеоморфизмами вида $\Phi_{\alpha,\beta}=(\phi_\alpha\circ p,\psi_{\alpha,\beta})\colon\mathbb{U}_{\alpha,\beta}\to V_\alpha\times W_{\alpha,\beta}$, где $V_\alpha\subset\mathbb{C}^k$ и $W_{\alpha,\beta}\subset\mathbb{C}^l$ — открытые подмножества соответствующих комплексных координатных пространств.

Теорема 3.5. *Пространства гамильтоново неэквивалентных систем вида $\mathfrak{L}_0(a,b,c)$, $\mathfrak{L}_1(a,b,c,d)$ и $\mathfrak{L}_2(a,b,c,0,d)$ имеют естественную структуру комплексных многообразий, биголоморфных, соответственно, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ и $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$.*

Доказательство. Рассмотрим класс гамильтоновых систем вида $\mathfrak{L}_0(a,b,c)$ и отображение $\alpha_0\colon(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$, где $\alpha_0(a,b,c)=b^2/a$. Пусть E_0 — разбиение $X_0=(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2\times\mathbb{C}$ на слои $\alpha_0^{-1}(\xi_1)$, $\xi_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Согласно следствию 3.1, факторпространство X_0/E_0 — это в точности пространство гамильтоново неэквивалентных систем вида $\mathfrak{L}_0(a,b,c)$. Так как функция α_0 сюръективна, всюду аналитична и имеет всюду отличный от нуля дифференциал, то она является искомой субмерсией.

Рассмотрим класс гамильтоновых систем вида $\mathfrak{L}_1(a,b,c,d)$ и отображение $\alpha_1\colon(\mathbb{C}\setminus\{0\})^3\times\mathbb{C}\to(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$, где $\alpha_1(a,b,c,d)=(ac/b,bc)$. Пусть E_1 — разбиение $X_1=(\mathbb{C}\setminus\{0\})^3\times\mathbb{C}$ на слои $\alpha_1^{-1}(\xi_1,\xi_2)$, $(\xi_1,\xi_2)\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$.

Согласно следствию 3.2, факторпространство X_1/E_1 — это в точности пространство гамильтоново неэквивалентных систем вида $\mathfrak{L}_1(a,b,c,d)$. Так как отображение α_1 сюръективно, всюду аналитично и его матрица Якоби имеет всюду максимальный ранг, то оно является искомой субмерсией.

Рассмотрим оставшийся случай. Пусть $h(r,\gamma)=(r,r\gamma)$ — биголоморфизм из $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ в себя. Он переводит все трехточия вида $\{(r,\gamma),\ (\varepsilon_2 r,\varepsilon_3\gamma),\ (\varepsilon_3 r,\varepsilon_2\gamma)\}$ в трехточия вида $\{(r',\gamma'),\ (\varepsilon_2 r',\gamma'),\ (\varepsilon_3 r',\gamma')\}$. Здесь переменные (r,γ) и корни из единицы $\varepsilon_j,\ j=1,2,3$, как в теореме 3.4. Используя новые переменные (r',γ') в $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$, определим отображение $\alpha_2\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^3\times\mathbb{C}\to(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ формулой $\alpha_2(a,b,c,d)=(r'^3,\gamma')=(a^3c^2/b^2,ac)$. Нетрудно видеть, что, по аналогии с предыдущими случаями, мы получим утверждение следствия. $\square$

Пусть f — произвольный лорановский гамильтониан степени $(1,n)$, т.е. пусть $f(z,w)=az^2+P_n(w)+b/w$.

Теорема 3.6. *Бифуркационный комплекс системы* $(\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}),\omega_{\mathbb{C}},f)$ *гомеоморфен* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Для начала заметим следующее. Пусть имеется непрерывное сюръективное отображение $f\colon X\to Y$ топологических T_1 (то есть все точки замкнуты) пространств. Пусть E — разбиение X на слои $f^{-1}(y)$. Предположим, что естественная биекция $g\colon X/E\to Y$ является открытым отображением. Тогда факторпространство X/E гомеоморфно Y, и g является гомеоморфизмом.

Заметим также, что открытость отображения g равносильна тому, что для любого открытого в X объединения слоев $p^{-1}(U)$ образ $f\circ p^{-1}(U)$ открыт в Y. Здесь $p\colon X\to X/E$ — каноническая проекция.

В нашем случае $X=\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, а $Y=\mathbb{C}$. Докажем, что прообраз $f^{-1}(\xi)$ связен в X для любого $\xi\in\mathbb{C}$. Очевидно, что любой слой $\mathrm{T}_\xi=f^{-1}(\xi)$ двулистно разветвленно накрывает плоскость $\mathbb{C}$ отображением $\mathrm{Pr}_w(z,w)\mapsto w,\ (z,w)\in\mathrm{T}_\xi$. Значит, T_ξ состоит не более чем из двух компонент связности. Но, делая обходы вокруг нуля в плоскости переменной w, мы будем переходить с ветви на ветвь всегда, если w близко к нулю, в силу наличия полюса первого порядка.

Таким образом, в силу того, что бифуркационный комплекс системы с гамильтонианом f — это в точности X/E, осталось лишь доказать открытость соответствующего отображения g. Для этого рассмотрим открытое множество $U\subset X/E$ и его прообраз $p^{-1}(U)$ при канонической проекции. Проверим, что множество $f(p^{-1}(U))$ открыто в Y. Пусть $y_0\in f(p^{-1}(U))$. Тогда слой $f^{-1}(y)\subset p^{-1}(U)$ содержит лишь конечное число особых точек и бесконечно много неособых точек. Пусть (z_0,w_0) — неособая точка на этом слое. Тогда $(f_z(z_0,w_0), f_w(z_0,w_0)) \neq (0,0)$. По теореме о неявных функциях уравнение $f(z,w)-y=0$ в малой окрестности $O_{(z_0,w_0)}$ точки (z_0,w_0) разрешимо относительно одной из переменных z,w. Пусть, для определенности, $z=z(w,y)$ в этой окрестности. Рассмотрим функцию $z(w_0,y)$. Она является непрерывной функцией в некоторой малой окрестности O_{y_0} точки y_0, причем, $(z(w_0,O_{y_0}),w_0) \subset O_{(z_0,w_0)}$. Очевидно, можно считать, что $O_{(z_0,w_0)} \subset p^{-1}(U)$. Тем самым, $O_{y_0} \subset f(p^{-1}(U))$ и, значит, отображение g открыто. □

Замечание 3.1. Пусть f — лорановский гамильтониан степени (m,n). Разрешим m принимать значение 0. Потребуем, чтобы прообраз $f^{-1}(\xi)$ был связен в $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ для любого $\xi\in\mathbb{C}$. Тогда, как видно из доказательства теоремы 3.6, бифуркационный комплекс системы $(\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}),\omega_{\mathbb{C}},f)$ будет также гомеоморфен $\mathbb{C}$. Предположим теперь, что существует такое $\xi\in\mathbb{C}$, что прообраз $f^{-1}(\xi)$ несвязен в $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Такое возможно тогда и только тогда, когда $f=az^2+b/w^{2k}+c$ для некоторых $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $a,b,c\in\mathbb{C}$ и $ab\neq 0$. Нетрудно показать, что бифуркационный комплекс системы $(\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{0\}),\omega_{\mathbb{C}},f)$, где $f=az^2+b/w^{2k}+c$, гомеоморфен факторпространству несвязного объединения $\mathbb{C}\sqcup\mathbb{C}$ двух экземпляров двумерной плоскости по разбиению, склеивающему двухточия вида $(\xi,\xi)\in\mathbb{C}\sqcup\mathbb{C}$, $\xi\neq c$, при $k\neq 0$, и одно двухточие $(c+b,c+b)\in\mathbb{C}\sqcup\mathbb{C}$ при $k=0$.

4. Топология окрестности слоя рационального гамильтониана

4.1. Известные результаты о топологии слоений

A. Гомотопический тип слоя в терминах чисел Милнора

Пусть $f=f(z)$ — многочлен $n+1$ комплексных переменных $z=(z_1,\dots,z_{n+1})$. Пусть точка $z^0\in f^{-1}(0)$ является его изолированной особой точкой. Определим отображение $\Gamma\colon S_\varepsilon^{2n+1}\to S^{2n+1}$ формулой $\Gamma(z)=\dfrac{\operatorname{grad} f(z)}{|\operatorname{grad} f(z)|}$. Здесь S_ε^{2n+1} — сфера размерности $2n+1$ радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке z^0, а S^{2n+1} — стандартная $(2n+1)$-мерная сфера единичного радиуса. Пусть $K=f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{2n+1}$. Введем отображение $\varphi\colon S_\varepsilon^{2n+1}\setminus K\to S^1$ формулой $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{|f(z)|}$. Имеет место теорема

Теорема 4.1. *(Дж. Милнор, [9]). Если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то построенное выше отображение $\varphi(z)$ является проекцией некоторого* *локально тривиального расслоения (расслоение Милнора).*

Каждый слой $\varphi^{-1}(e^{i\theta})$ является гладким $2n$-мерным многообразием, и имеет гомотопический тип букета $S^n \vee S^n \vee \ldots \vee S^n$ n-мерных сфер, причем количество сфер в этом букете μ_0 (число Милнора) равно степени отображения Γ.

В связи с этой теоремой возникает вопрос: что можно сказать о топологии слоев $f^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$, зная как устроены расслоения Милнора в окрестностях особых точек f? Ответ на этот вопрос (для некоторых специальных классов многочленов) получен в работах [16], [17]. Сформулируем соответствующие результаты.

Определение 4.1. Многочлен f называется *ручным*, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех последовательностей z^i с $|z^i| \to \infty$ выполнено $|\mathrm{grad} f(z^i)| \geq \delta$ для достаточно больших i.

Пусть μ — сумма чисел Милнора, взятая по всем особым точкам f. Пусть μ^ξ, $\xi \in \mathbb{C}$, сумма чисел Милнора, взятая по всем особым точка f, попавшим в слой $f^{-1}(\xi)$.

Теорема 4.2. *(см. [16]). Пусть f — ручной многочлен. Тогда для всех $\xi \in \mathbb{C}$ слой $f^{-1}(\xi)$ гомотопически эквивалентен букету из $\mu - \mu^\xi$ n-сфер.*

Определение 4.2. Многочлен f называется *GI-многочленом*, если для любого $\xi \in \mathbb{C}$ компактификация слоя $\overline{f^{-1}(\xi)}$ в $\mathbb{CP}^n$ (осуществляемая с помощью переменной ζ) трансверсальна гиперплоскости $\zeta = 0$.

Теорема 4.3. *(см. [17]). Общий слой GI-многочлена f степени d гомотопически эквивалентен букету из $(d-1)^{n+1}$ n-сфер.*

Пример 4.1. Рассмотрим многочлен $f = z^2 + w^2$. Он является как ручным, так и GI-многочленом. Поэтому его нулевой слой гомотопически эквивалентен точке, а любой ненулевой слой гомотопически эквивалентен окружности S^1.

Б. Топология слоя в терминах многоугольника Ньютона

Рассмотрим в качестве функции $f(z, w)$ произвольный многочлен Лорана двух комплексных переменных (например, лорановский гамильтониан некоторой степени). Нам понадобятся следующие определения

Определение 4.3. Пусть $f(z, w) = \sum\limits_{l,m \in \mathbb{Z}} a_{l,m} z^l w^m$ — лорановский многочлен от двух комплексных переменных. Выпуклая оболочка точек $(l, m) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что $a_{l,m} \neq 0$ называется *многоугольником Ньютона* лорановского многочлена f и обозначается через P_f.

Для каждой грани (размерности 0,1,2) многоугольника Ньютона P_f определен усеченный многочлен, состоящий из тех слагаемых $a_{l,m}z^l w^m$ многочлена $f(z,w)$, для которых точка (l,m) этой грани принадлежит. Для удобства, усеченные многочлены будем кодировать векторами на плоскости (любым вектором соответствущего верхнего конуса для граней размерности нуль, векторами внешней нормали для граней размерности 1 и нулевым вектором для размерности 2) и обозначать через f^η.

Определение 4.4. Грань (или соотвествующий ей усеченный многочлен) P_f называется *невырожденной (невырожденным)*, если для соотвествующего усеченного многочлена f^η выполнено следующее условие: для любого решения (z,w) уравнения $f^\eta(z,w)=0$, лежащего в $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$, дифференциал $df^\eta(z,w)\neq 0$. Лорановский многочлен $f(z,w)$ называется *невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона P_f*, если любая его грань невырождена.

Определение 4.5. Пусть $\Omega_k(M)$ — пространство голоморфных дифференциальных k-форм на компактном аналитическом проективном многообразии M. *Арифметическим родом* $\chi(M)$ называется число $\chi(M)=\sum(-1)^k\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}\Omega_k(M)$.

В случае, когда M — компактная связная риманова поверхность, в силу замечания из [12, §17.10], имеем следующую формулу для арифметического рода: $\chi(M)=1-g$, где g — число ручек на M.

Обозначим через $B^+(P_f)$ число целых точек, внутренних для P_f (в топологии минимального линейного пространства, содержащего P_f). Пусть M — *достаточно полная* (см. [13]) компактификация для P_f. Согласно теореме 1 из [14, §1.3], имеем $\chi(M)=1-(-1)^{\mathrm{dim}P_f}B^+(P_f)$. Из сказанного выше, а также из [14, §2.1] и теоремы из [14, §4.1] вытекает

Следствие 4.1. *Предположим, что функция f имеет ненулевой свободный член, а* $\mathrm{dim}P_f=2$. *Тогда нулевой слой $f^{-1}(0)$ является неособым для функции f. Предположим, что этот слой связен. Тогда он гомеоморфным сфере с $g=B^+(P_f)$ ручками и k проколами, где k — это число целых точек, лежащих на границе многоугольника P_f.*

Пример 4.2. Рассмотрим многочлен $f(z,w)=z^2+w+1/w+c$, $c\neq 0$. Он является невырожденным относительно своего многоугольника Ньютона P_f тогда и только тогда, когда $c\neq\pm 2$. Так как $\mathrm{dim}P_f=2$, при $c\neq\pm2$, нулевой слой $f^{-1}(0)$ гомеоморфен двумерному тору с одним проколом.

B. Топология окрестности слоя

Изложение в этом пункте будет конспективным. Более подробную информацию (определения, полные формулировки теорем и их доказательства) можно найти в работах [1], [3], [10] и [19].

Одним из отправных результатов о топологии окрестности слоя интегрируемой гамильтоновой системы является приводимая ниже теорема Лиувилля. Рассмотрим вполне интегрируемую вещественную гамильтонову систему (M, ω, H), $\dim_{\mathbb{R}} M = 2N$, с N первыми инволютивными интегралами $H = H_1, \ldots, H_N$. Имеет место

Теорема 4.4. *(Теорема Лиувилля). Любая связная регулярная поверхность уровня интегралов H_i, $i = 1, \ldots, N$, диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{R}^k \times T^{N-k}$, где T^{N-k} — $(N-k)$-мерный тор, $0 \leq k \leq N$. В случае $k = 0$ получаем N-мерный тор (тор Лиувилля). Слоение в окрестности тора Лиувилля тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^N на диск D^N.*

Таким образом, сформулированная выше теорема говорит, что малые окрестности торов Лиувилля систем с одинаковым числом степеней свободы "устроены одинаково". Возникает вопрос: как эффективно классифицировать малые окрестности особых слоев интегрируемых систем с точностью до полулокальной Лиувиллевой (полулокальной топологической) эквивалентности? Приведем несколько известных результатов.

Теорема 4.5. *(см. [10]). Две седловые особенности вполне интегрируемых гамильтоновых систем с N степенями свободы полулокально Лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_N-графы эквивалентны.*

Теорема 4.6. *(см. [19]). Две топологически устойчивые фокусные особенности вполне интегрируемых гамильтоновых систем с компактными слоями и 2 степенями свободы полулокально Лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им особые слои имеют одинаковую сложность (т.е. одинаковое число особенностей типа фокус-фокус).*

Теоремы 4.5 и 4.6 имеют дело с вполне интегрируемыми системами, у которых особенности невырождены. В работе [3] рассматривался класс интегрируемых (но в большинстве случаев не вполне интегрируемых) систем $\mathcal{H}_n(a, b_n, \ldots, b_0)$, у которых особенности имеют тип A_k, $k \in \mathbb{N}$, и, тем самым, либо вырождены либо имеют тип фокус-фокус.

Теорема 4.7. *(см. [3]). Две интегрируемые системы $\mathcal{H}_{n_1}(a^1, b^1_{n_1}, \ldots, b^1_0)$ и $\mathcal{H}_{n_2}(a^2, b^2_{n_2}, \ldots, b^2_0)$ полулокально топологически эквивалентны относительно ξ_0 тогда и только тогда, когда $n_1 = n_2$, и соответствующие* *слои уровня ξ_0 этих систем имеют одинаковые наборы кратностей особых точек.*

В [3] также доказано, что слоение в окрестности любого неособого слоя гиперэллиптического многочлена устроено тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению слоя на двумерный диск. Отметим, что в случае рационального гамильтониана это не всегда так (мы покажем в §4.2 (см. следствие 4.2), что слоение в окрестности неособого слоя рационального гамильтониана тривиально только при некотором “условии невырожденности” в бесконечности).

4.2. Вспомогательные леммы и утверждения

Рассмотрим рациональный гамильтониан $f(z,w) = az^2 + R(w)$ системы $(\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\}), dz \wedge dw, f)$. Пусть $R(w) = \dfrac{A_n(w)}{B_m(w)}$, где $A = A_n(w)$ и $B = B_m(w)$ — взаимно простые многочлены степеней $n \geq 0$ и $m \geq 0$, $R(w) \not\equiv const$. Не ограничивая общности дальнейших рассмотрений, считаем $a = 1$ и $n \neq m$ (достаточно поделить $R(w)$ на a и прибавить, если потребуется, константу). Рассмотрим некоторое $\xi_0 \in \mathbb{C}$. На слое T_{ξ_0} имеется конечное число $s^P \geq 0$ особых точек $P_1, \ldots, P_{s^P}$ с кратностями $l_1, \ldots, l_{s^P}$ и конечное число $s^Q \geq 0$ простых точек $Q_1, \ldots, Q_{s^Q}$ (числа s^P, s^Q, P_j и Q_k зависят от ξ_0). При этом $\sum l_j + s^Q = \max(m,n)$, при $\xi \neq 0$, и $\sum l_j + s^Q = n$, если $\xi = 0$, т.к. P_j и Q_k — все точки, соответствующие решению уравнения $f(0,w) = \xi_0$.

Лемма 4.1. *Для каждой точки P_j, $j = 1, \ldots, s^P$, существует такая ее четырехмерная окрестность U_j^P, что в ней функция $f(z,w)$ эквивалентна функции $g_j^P \colon V_{\varepsilon,l_j} \to \mathbb{C}$, где $g_j^P(z',w') = z'^2 + w'^{l_j} + \xi_0$, $V_{\varepsilon,l_j} = \{(z',w') \in \mathbb{C}^2 \mid |z'^2 + w'^{l_j}| < \varepsilon,\ |w'| < (2\varepsilon)^{1/l_j}\}$. Для каждой точки Q_k, $k = 1, \ldots, s^Q$, существует такая ее четырехмерная окрестность U_k^Q, что в ней функция $f(z,w)$ эквивалентна функции $g_k^Q \colon V_{\varepsilon,1} \to \mathbb{C}$, где $g_k^Q(z',w') = z'^2 + w' + \xi_0$. Здесь $\varepsilon > 0$ может быть выбрано единым для всех точек P_j и Q_k, а все $\overline{U_j^P}$ и $\overline{U_k^Q}$ могут быть сделаны попарно не пересекающимися.*

Доказательство. Следуя доказательству [3, §2, Лемма 4], рассмотрим произвольную точку $P_j = (0, w_j)$. В некоторой ее окрестности $f(z,w) = z^2 + g(w)(w - w_j)^{l_j} + \xi_0$, где $g = g(w)$ — голоморфная функция, такая, что $g(w_j) \neq 0$. Рассмотрим столь малую окрестность U^w точки w_j (в плоскости переменной w), чтобы для некоторой ветви корня $\sqrt[l_j]{}$ отображение

$$\phi_{P,j}\colon w \mapsto w' = (w - w_j)\sqrt[l_j]{g(w)} \tag{4}$$

было диффеоморфизмом U^w на $\phi_{P,j}(U^w)$. Положим $h_{P,j} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \times \phi_{P,j}$. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы $V_{\varepsilon,l_j} \subset h_{P,j}(\mathbb{C} \times U^w) = \mathbb{C} \times \phi(U^w)$, и положим $U_j^P = h_{0,j}^{-1}(V_{\varepsilon,l_j})$. Отображение $h_{P,j}\colon U_j^P \to V_{\varepsilon,l_j}$ осуществляет требуемую эквивалентность функций $f|_{U_j^P}$ и g_j^P. Аналогично поступим с простыми точками Q_k. Уменьшая, если потребуется, $\varepsilon > 0$, получим утверждение леммы. $\square$

Замечание 4.1. Таким образом, особенности $\mathbb{C}$-гамильтоновых систем с рациональным гамильтонианом имеют тип $A_k, k \in \mathbb{N}$. В частности, особенности интегрируемых систем $\mathcal{H}_n(a, b_n, \ldots, b_0)$ (см. §4.1, пункт B) имеют тип A_k.

Рассмотрим открытый двумерный диск $D_{\xi_0,\varepsilon}$ вокруг (особого) значения ξ_0 рационального гамильтониана $f = z^2 + R(w)$. Пусть, как и выше, $P_1, \ldots, P_{s^P}$ — особые точки слоя T_{ξ_0} соответствующих кратностей l_j, а $Q_1, \ldots, Q_{s^Q}$ — простые точки этого слоя. Под окрестностью конечного набора точек всюду в дальнейшем будем иметь ввиду объединение попарно непересекающихся (вместе с замыканиями) связных окрестностей этих точек.

Лемма 4.2. *Пусть $\xi_0 \neq R(\infty) := \lim\limits_{w\to\infty} R(w) \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда для любой четырехмерной окрестности U' набора точек P_j и Q_k существуют $\varepsilon > 0$ и четырехмерная окрестность $U \subset U'$ набора точек P_j и Q_k, такие, что функция $f|_{f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})\setminus\overline{U}}$ эквивалентна функции $\mathrm{Pr}_1\colon D_{\xi_0,\varepsilon} \times L \to D_{\xi_0,\varepsilon}$, где $L = \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$, $\mathrm{Pr}_1(\xi, \eta) = \xi$.*

Доказательство. Рассмотрим малую “круговую” окрестность U^w набора точек P_j и Q_k в плоскости переменной w (с проколами, отвечающими полюсам функции $R = R(w)$). Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что при $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$ и $w \notin U^w$ функция $u(\xi, w) = \xi - R(w)$ отделена от нуля. Такое $\varepsilon > 0$ существует, так как рациональная функция $R - \xi_0 = R(w) - \xi_0$ продолжается до голоморфного отображения компакта $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, нулями которого являются в точности точки (рассматриваемые в плоскости переменной w) P_j и Q_k из U^w в силу условия $R(\infty) - \xi_0 \neq 0$. Положим

$$U := \{(\pm\sqrt{\xi - R(w)}, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \ \xi \in D_{\xi_0,\varepsilon},\ w \in U^w\}. \tag{5}$$

Уменьшая, если нужно окрестность U^w и $\varepsilon > 0$, получим $U \subset U'$. Докажем, что U является искомой четырехмерной окрестностью точек P_j, Q_k.

Рассмотрим случай, когда многообразие $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$ линейно связно. Фиксируем некоторую точку $(z_0, w_0) \in \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$. Выберем ветвь корня таким образом, чтобы $z_0 = \sqrt{\xi_0 - R(w_0)}$, и продолжим ее однозначно в некоторую окрестность. Очевидно, можно считать, что при w, близких к w_0, и всех $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$ определено значение $\sqrt{u(\xi, w)} = \sqrt{\xi - R(w)}$, гладко зависящее от ξ и w.

Заметим, что $(\sqrt{\xi - R(w)}, w) \in \mathrm{T}_\xi \setminus U$ для всех $w \notin U^w$, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$. Поэтому, для каждого $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, мы можем рассмотреть росток корня $\sqrt{u(\xi, w_0)}$ и аналитически его продолжить (неоднозначным образом) на слой T_ξ с помощью переменной $w \notin U^w$, меняющейся на базе накрытия $\mathrm{Pr}_2 \colon \mathrm{T}_\xi \setminus U \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Pr}_2(z, w) = w$. Рассмотрим некоторый путь γ в плоскости переменной w, не проходящий через полюса $R(w)$ и U^w. Он индуцирует путь $u(\xi, \gamma)$ в плоскости переменной u. Значение корня $\sqrt{u(\xi, w)}$ зависит от четности числа оборотов $u(\xi, \gamma)$ вокруг нуля (в плоскости переменной u) при аналитическом продолжении. Так как $u(\xi, w)$ отделено от нуля, это число оборотов совпадает с числом оборотов пути $u(\xi, \gamma) + \xi_0 - \xi$. Последнее, в свою очередь, есть $u(\xi_0, \gamma)$.

Рассмотрим отображение $\mu \colon f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus \overline{U} \to \mathrm{T}_{\xi_0}$, определенное соотношением $\mu(z, w) = (v(z, w), w)$, где $v^2(z, w) + R(w) = \xi_0$. Функция $v(z, w)$ строится следующим образом. Пусть $(z, w) \in \mathrm{T}_\xi$, тогда $z = \pm\sqrt{u(\xi, w)}$. Пусть пусть γ выбран так, что $z = \sqrt{u(\xi, w)}$. Полагаем $v(z, w) := \sqrt{u(\xi_0, w)}$, где значение корня $\sqrt{u(\xi_0, w)}$ определяется тем же путем γ. По построению U, аналитической функции $\sqrt{u(\xi, w)}$, а также в силу линейной связности $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$, функция v определена корректно на $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus \overline{U}$. Тем самым, корректно определено отображение $\mu(z, w)$, тождественное на слое T_{ξ_0} и такое, что $\mu(z, w)|_{\mathrm{T}_\xi \setminus \overline{U}}$ является биголоморфизмом $\mathrm{T}_\xi \setminus \overline{U} \to \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$ при каждом $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$.

Определим теперь отображение $h_1 \colon f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus \overline{U} \to D_{\xi_0,\varepsilon} \times L$ следующим образом:

$$h_1(z, w) = (f(z, w), \mu(z, w)) \text{ (здесь } \mu(z, w) \text{ — точка на слое } \mathrm{T}_{\xi_0}). \tag{6}$$

Пусть $H_1 = i \circ h_1$, где $i \colon D_{\xi_0,\varepsilon} \times L \to D_{\xi_0,\varepsilon} \times \mathbb{C}^2$ — отображение включения. Нетрудно видеть, что ранг матрицы Якоби отображения H_1 максимален в каждой точке. Действительно, матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} f_z & v_z & 0 \\ f_w & v_w & 1 \end{pmatrix},$$

причем на множестве $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus \overline{U}$ верно неравенство $f_z \neq 0$. Так как отображение h_1 по построению взаимно однозначно, $\mathbb{C}$-дифференцируемо и его дифференциал является изоморфизмом в каждой точке, то оно является биголоморфизмом. Очевидно, $f = \mathrm{Pr}_1 \circ h_1$, откуда и следует утверждение леммы в случае связного $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$.

Если $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{U}$ состоит из двух линейно связных компонент, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ все слои $\mathrm{T}_{\xi} \setminus \overline{U}$, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, также состоят из двух линейно связных компонент. Повторяя рассуждения, проведенные выше, для каждой из двух линейно связных компонент, мы получаем утверждение леммы. □

Лемма 4.3. *Пусть $\xi_0 \neq R(\infty)$. Тогда для любой четырехмерной окрестности V' набора точек P_j существуют $\varepsilon > 0$ и четырехмерная окрестность $V \subset V'$ набора точек P_j, такие, что функция $f|_{f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})\setminus V}$ топологически эквивалентна функции $\mathrm{Pr}_1 \colon D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L} \to D_{\xi_0,\varepsilon}$, где $\overline{L} = \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus V$, $\mathrm{Pr}_1(\xi, \eta) = \xi$.*

Доказательство. Проведем все построения, описанные в доказательстве леммы 4.2. Если на слое T_{ξ_0} отсутствуют простые точки Q_k, то все доказано. Предположим теперь, что они есть, и рассмотрим одну из них — точку $Q = (0, w_{\xi_0})$. В окрестности точки Q, согласно лемме 4.1, существуют координаты (z, w') такие, что в них $f(z, w') = z^2 + w' + \xi_0$. В этих координатах $(z, w')(Q) = (0, 0)$ — простая точка на слое T_{ξ_0}. Для каждого $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$ будем иметь простые точки $Q^{\xi} = (0, w_{\xi})$ на слоях T_{ξ}, близкие к точке Q, причем можно считать (в силу леммы 4.2), что связная компонента окрестности U из леммы 4.2, содержащая Q, содержится в области определения координат (z, w'), и все точки Q^{ξ} при $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$ принадлежат этой связной компоненте. В частности, $(z, w')(Q^{\xi}) = (0, \xi - \xi_0)$, и в указанной связной компоненте других особых или простых точек нет.

Рассмотрим некоторое $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$ и связную компоненту U^w_Q окрестности U^w из леммы 4.2, содержащую точку w_{ξ_0}. Рассмотрим гомеоморфизм γ_{ξ} плоскости переменной w, который оставляет неподвижными $\mathbb{C} \setminus U^w_Q$ и малую окрестность границы ∂U^w_Q области U^w_Q, а также совпадает с отображением $w' \mapsto w' + \xi_0 - \xi$ в малой окрестности точки w_{ξ} (в нашей новой координате w'). Такой гомеоморфизм может быть получен сдвигом вдоль интегральных траекторий векторного поля X_{ξ}, которое строится следующим образом. Рассмотрим в плоскости переменной w окрестность W_1 точки w_{ξ_0}, содержащую точки w_{ξ} при любом $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, и окрестность W_2 такие, что $\overline{W}_1 \subset W_2 \subset \overline{W}_2 \subset U^w_Q$, а также гладкую вещественнозначную функцию $\alpha = \alpha(w)$, тождественно равную единице в W_1 и тождественно равную нулю вне W_2. Положим $X_{\xi} = \alpha(w)(\xi_0 - \xi)\dfrac{d}{dw'}$. Заметим, что функцию α можно выбрать единой для всех $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$. Тогда отображение γ_{ξ} будет гладко зависеть от ξ.

Построим отображение $h_2\colon O(Q) \to D_{\xi_0,\varepsilon} \times \mathrm{T}_{\xi_0}$, где $O(Q)$ — малая четырехмерная окрестность точки Q, в которой введены координаты из леммы 4.1 (с, вообще говоря, другим ε' в формулировке), и которая содержит соответствующую связную компоненту окрестности U из (5). Для построения отображения h_2 введем семейство отображений $g_\xi\colon \mathrm{T}_\xi \cap O(Q) \to \mathrm{T}_{\xi_0}$, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, формулой $(z, w')(g_\xi(z, w)) = \left(\sqrt{-w'(\gamma_\xi(w))}, w'(\gamma_\xi(w))\right)$, где ветвь корня выбирается таким образом, чтобы отображение g_{ξ_0} было отображением включения $\mathrm{T}_{\xi_0} \cap O(Q) \to \mathrm{T}_{\xi_0}$, и положим $h_2(z, w) = (f(z, w), g_{f(z,w)}(z, w))$.

Осталось "объединить" отображение h_1 из (6) с отображениями вида h_2, построенными для каждой точки Q_k. Полученное отображение $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus \overline{V} \to D_{\xi_0,\varepsilon} \times \left(\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus \overline{V}\right)$, где V — объединение связных компонент окрестности U из (5), содержащих особые точки P_j, определено корректно и, как нетрудно видеть, продолжается до гомеоморфизма

$$h_3\colon f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus V \to D_{\xi_0,\varepsilon} \times (\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus V)\,, \tag{7}$$

осуществляющего требуемую топологическую эквивалентность функций f и Pr_1, рассматриваемых на множествах $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \setminus V$ и $D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L}$ соответственно. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть $\xi_0 \neq R(\infty)$, и слой T_{ξ_0} не содержит особых точек. Тогда слоение, задаваемое функцией $f(z, w) = z^2 + R(w)$ вблизи слоя T_{ξ_0} тривиально, т.е. гомеоморфно (и даже диффеоморфно) прямому произведению слоя на двумерный диск. Если же $\xi_0 \neq R(\infty)$, то соответствующее слоение не тривиально, т.к. слои T_ξ, близкие к T_{ξ_0}, ему не гомеоморфны.*

Замечание 4.2. Рассмотрим произвольную особую точку P_j и соответствующее ей отображение $\phi_{P,j}$ из (4). Тогда в качестве содержащей ее (в плоскости переменной w) связной компоненты множества U^w (в доказательстве леммы 4.2) можно взять $\phi_{P,j}^{-1}(D_{0,(2\varepsilon)^{1/l_j}})$. Построим по множеству U^w окрестность V как это описано выше. Нетрудно видеть, что такая четырехмерная окрестность V набора особых точек P_j удовлетворяет утверждению леммы 4.3. Заметим также, что в случае, когда $R(w) = w^{l_j}$, а $\xi_0 = 0$, окрестность V в точности совпадет с окрестностью V_{ε,l_j} из леммы 4.1.

Согласно леммы 4.3, при $\xi_0 \neq R(\infty)$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ все многообразия $\mathrm{T}_\xi \setminus V$ с краем, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, попарно гомеоморфны, а в случае неособости слоя T_{ξ_0}, все слои T_ξ, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, попарно гомеоморфны. Здесь (и всюду в дальнейшем) V — малая четырехмерная окрестность набора особых точек P_j из замечания 4.2. Более того, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, все слои T_ξ, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, $\xi \neq \xi_0$, неособы и попарно гомеоморфны. Пусть $M^g_{h,k}$ — двумерная сфера с g ручками, h дырками и k проколами. Пусть, как и выше, l_j, $j = 1, \dots, s^P$, обозначают кратности особых точек P_j на слое T_{ξ_0}, а s^Q обозначает число простых точек на этом слое. Введем кратности полюсов (в конечной части плоскости) рациональной функции $R = R(w) = \dfrac{A_n(w)}{B_m(w)}$, которые обозначим через l^d_k, $k = 1, \dots, s^D$. Заметим, что l_j всегда больше единицы, а l^d_k, вообще говоря, больше или равны единице, $\sum_{k=1}^{s^D} l^d_k = m$.

Следующее утверждение описывает, с точностью до гомеоморфизма, топологию многообразий $\mathrm{T}_\xi \setminus V$ с краем, а также топологию слоев T_ξ.

Следствие 4.3.

1) Пусть многообразие $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus V$ с краем связно (это выполнено тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна простая точка на слое T_{ξ_0}, или когда хотя бы одно из чисел l_j, l^d_k нечетно) . Тогда оно гомеоморфно многообразию $M^g_{h,k}$ с краем, где

$$g = \frac{1}{2}\left(L - \frac{3 + (-1)^L}{2}\right),$$
$$h = p + s^P,$$
$$k = M + \frac{3 + (-1)^L}{2}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$L = s^Q + (s^P - p) + (2s^D - M),$$
$$p = \sum_{j=1}^{s^P} \frac{1 + (-1)^{l_j}}{2},$$
$$M = \sum_{k=1}^{s^D} \frac{3 + (-1)^{l^d_k}}{2}.$$

Пусть $J = \max\{m, n\} + 2s^D - M$. Тогда все многообразия T_ξ, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, $\xi \neq \xi_0$, гомеоморфны сфере с $\dfrac{1}{2}\left(J - \dfrac{3 + (-1)^J}{2}\right)$ ручками и $M + \dfrac{3 + (-1)^J}{2}$ проколами. Слой T_{ξ_0} гомеоморфен сфере с g ручками, p парами склеенных точек и k проколами.

2) Пусть многообразие $\mathrm{T}_{\xi_0} \setminus V$ *с краем несвязно. Тогда это многообразие гомеоморфно несвязному объединению* $M^g_{h,k} \bigsqcup M^g_{h,k}$, *где*

$$g = 0,\ h = s^P,\ k = s^D + 1.$$

При $s^P \geq 1$ *слой* T_{ξ_0} *получен из двух экземпляров сферы с* k *проколами и* s^P *отмеченными точками склеиванием* s^P *пар соответсвующих отмеченных точек. При* $s^P = 0$ *слой* T_{ξ_0} *несвязен и гомеоморфен* $M^0_{0,k} \bigsqcup M^0_{0,k}$. *Число ручек и проколов у многообразий* T_ξ, $\xi \in D_{\xi_0,\varepsilon}$, $\xi \neq \xi_0$, *(все они связны) считается по тем же формулам, что и в 1).*

Заметим, что следствие остается верным и в том случае, когда $\xi_0 = R(\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим компактификацию $\widetilde{\mathrm{T}}_{\xi_0}$ слоя T_{ξ_0}, заклеивающую проколы "бесконечно удаленными точками". Получим конечный двумерный клеточный комплекс — сферу с ручками и "перетяжками". Из рассуждений, проведенных в леммах 4.1 — 4.3, а также из специального выбора окрестности V следует, что $\widetilde{\mathrm{T}}_{\xi_0}$ получается из клеточного комплекса $\widetilde{\mathrm{T}}_{\xi_0} \setminus V$ следующей операцией. Берется особая точка $P \in V \cap \mathrm{T}_{\xi_0}$ кратности l и содержащая ее связная компонента V_P окрестности V. Если l нечетно, то граница $\partial(V_P \cap \mathrm{T}_{\xi_0})$ есть окружность, и мы приклеиваем вдоль нее комплекс $V_P \cap \mathrm{T}_{\xi_0}$, гомеоморфный двумерному замкнутому диску, по общей границе. Если l четно, то граница $\partial(V_P \cap \mathrm{T}_{\xi_0})$ есть несвязное объединение двух окружностей, и мы приклеиваем вдоль него комплекс $V_P \cap \mathrm{T}_{\xi_0}$, гомеоморфный двумерному замкнутому цилиндру, у которого один цикл стянут в точку.

Используя это наблюдение, а также формулу Римана-Гурвица для двулистных разветвленных накрытий $\widetilde{\mathrm{T}}_\xi \to \overline{\mathbb{C}}$, прямыми вычислениями получаем утверждение следствия. □

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало и l_j — некоторое натуральное число, зависящее от параметра j. Пусть оно четно. Определим четырехмерное многообразие $N^4_{\varepsilon,l_j} := ([0,\varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1, 0_-] \bigsqcup [0_+, 1])/\sim$ с краем (см. [3, §3, утверждение 1]). Здесь $\sim$ порождено следующими отношениями:

$$\begin{cases} (r,\ \varphi \mod 2\pi,\ \frac{\varphi+t+2\pi k}{l_j} \mod 2\pi,\ 0_-) \sim (r,\ \varphi \mod 2\pi,\ \frac{-\varphi+t-2\pi k}{l_j} \mod 2\pi,\ 0_+), \\ (0,\ \varphi \mod 2\pi,\ \psi \mod 2\pi,\ h) \sim (0,\ 0,\ \psi \mod 2\pi,\ h), \end{cases}$$

где $0 \leq k < l_j$, $r \in [0,\varepsilon]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$, $t \in [-\pi, \pi]$, $h \in [-1, 0_-] \bigsqcup [0_+, 1]$. Положим $q_j\colon N^4_{\varepsilon,l_j} \to \mathbb{C}$, $q_j(r, \varphi, \psi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0$.

Пусть l_j нечетно. Определим четырехмерное многообразие $N^4_{\varepsilon,l_j} := ([0,\varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times [-1,0])/\sim$ с краем (см. [3, §3, утверждение 2]). Здесь $\sim$ порождено следующими отношениями:

$$\begin{cases}(r,\ \varphi \mod 2\pi,\ \frac{\varphi+t+2\pi k}{l_j} \mod 4\pi,\ 0) \sim (r,\ \varphi \mod 2\pi,\ \frac{\varphi-t+2\pi k}{l_j}+2\pi \mod 4\pi,\ 0),\\ (0,\ \varphi \mod 2\pi,\ \psi \mod 4\pi,\ h) \sim (0,\ 0,\ \psi \mod 4\pi,\ h),\end{cases}$$

где $0 \le k < l_j$, $r \in [0,\varepsilon]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\psi \in [0,4\pi]$, $t \in [-\pi,\pi]$, $h \in [-1,0]$. Положим $q_j\colon N^4_{\varepsilon,l_j} \to \mathbb{C}$, $q_j(r,\varphi,\psi,h) = re^{i\varphi}+\xi_0$.

Индекс j нумерует особые точки $P_j \in \mathrm{T}_{\xi_0}$, $j=1,\dots,s^P$, а l_j обозначают их кратности. Определим функцию $q\colon \bigsqcup\limits_{j=1}^{s^P} N^4_{\varepsilon,l_j} \to \mathbb{C}$ следующим образом: $q|_{N^4_{\varepsilon,l_j}}(r,\varphi,\psi,h) = q_j(r,\varphi,\psi,h)$. Аналогично определим функцию $g\colon \bigsqcup\limits_{j=1}^{s^P} \overline{V}_{\varepsilon,l_j} \to \mathbb{C}$ формулой $g|_{\overline{V}_{\varepsilon,l_j}}(z',w') = z'^2 + w'^{l_j} + \xi_0$.

Напомним, что через V мы обозначаем малую четырехмерную окрестность набора особых точек P_j из замечания 4.2.

Следствие 4.4. *Существует $\varepsilon > 0$, такое, что функция $f|_{\overline{V}}$ топологически эквивалентна функциям g и q.*

Доказательство. Рассмотрим связную компоненту окрестности V, содержащую некоторую особую точку P_j кратности l_j. По построению V, в координатах из леммы 4.1, эта компонента совпадает с V_{ε,l_j}. Из леммы 4.1 получаем гомеоморфизм $h_4\colon \overline{V} \to \bigsqcup_{j=1}^{s^P} \overline{V}_{\varepsilon,l_j}$, где $h_4|_{U_j^P}(z,w) = h_{P,j}(z,w)$, осуществляющий требуемую топологическую эквивалентность функций $f|_{\overline{V}}$ и g. Топологическая эквивалентность функций g и q следует из [3, §3, утверждения 1 и 2]. □

Лемма 4.4. *Пусть X, X_1', X_2' — топологическое пространство, X_1 и X_2 — замкнутые подмножества пространства X такие, что $X_1 \cup X_2 = X$. Пусть $H_j\colon X_j \to X_j'$, $j=1,2$, — гомеоморфизмы. Склеим X_1' и X_2' по отображению $H_{12}\colon H_1(X_1\cap X_2) \to H_2(X_1\cap X_2)$, где $H_{12} = H_2 \circ H_1^{-1}|_{H_1(X_1\cap X_2)}$. Обозначим эту склейку через $\sim_{12}$. Тогда отображение $H\colon X \to (X_1' \sqcup X_2')/\sim_{12}$, определенное правилом $H|_{X_j} = H_j$, $j=1,2$, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Так как отображение H по построению взаимно однозначно и открыто, достаточно проверить его непрерывность. Пусть O — открытое множество в $(X_1' \sqcup X_2')/\sim_{12}$. Нам нужно доказать, что множество $H^{-1}(O) = H_1^{-1}(O|_{X_1}) \cup H_2^{-1}(O|_{X_2})$ открыто в X. Рассмотрим произвольную точку $x \in H_1^{-1}(O|_{X_1}) \cup H_2^{-1}(O|_{X_2})$. Пусть $x \in X_1 \cap X_2$. Тогда существуют такая ее окрестность V_1 в X_1 и такая ее окрестность V_2 в X_2, что $H_1(V_1) \subset O|_{X_1'}$ и $H_2(V_2) \subset O|_{X_2'}$. Рассмотрим открытые в X множества U_1 и U_2 такие, что $U_1|_{X_1} = V_1$, $U_2|_{X_2} = V_2$. Положим $U = U_1 \cap U_2$. Множество U является окрестностью точки x в пространстве X, целиком содержащейся в $H^{-1}(O)$. Пусть точка $x \notin X_1 \cap X_2$. Тогда для нее также найдется окрестность в X, целиком содержащаяся в $H^{-1}(O)$, ввиду того, что H_1 и H_2 являются гомеоморфизмами, а также ввиду замкнутости множеств X_1 и X_2 в X. □

4.3. Основные результаты о полулокальной классификации особенностей

Введем множество $\partial^+ V_{\varepsilon,l_j} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \ |z^2 + w^{l_j}| < \varepsilon,\ |w| = (2\varepsilon)^{1/l_j}\}$. Как в лемме 4.3, положим $\overline{L} = \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus V$. Пусть $\mu(z,w)$ — отображение, такое же как в формуле (6), и пусть $z' = z,\ w' = \phi_{P,j}(w)$. Можно считать, что определено значение $\mu(z', \phi_{P,j}^{-1}(w')) = \left(\sqrt{-w'^{l_j}}, \phi_{P,j}^{-1}(w')\right)$ при всех $(z',w') \in \partial^+ V_{\varepsilon,l_j}$ для некоторой ветви корня $\sqrt{-w'^{l_j}}$. Рассмотрим отображения $\nu_j\colon \partial^+ V_{\varepsilon,l_j} \to D_{\xi_0,\varepsilon} \times \partial\overline{L}$, где $\nu_j(z',w') = \left(z'^2 + w'^{l_j} + \xi_0,\ \mu(z', \phi_{P,j}^{-1}(w'))\right) = \left(z'^2 + w'^{l_j} + \xi_0, \sqrt{-w'^{l_j}}, \phi_{P,j}^{-1}(w')\right)$. Отображения ν_j гомеоморфно отображают $\partial^+ V_{\varepsilon,l_j}$ на свой образ.

Произведем склейку множеств $\bigsqcup\limits_{j=1}^{s^P} (V_{\varepsilon,l_j} \cup \partial^+ V_{\varepsilon,l_j})$ и $D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L}$ по всем отображениям ν_j. Обозначим эту склейку через $\sim$. Имеет место

Теорема 4.8. *Пусть $\xi_0 \neq f(0,\infty)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $f|_{f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})}\colon f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \to \mathbb{C}$ топологически эквивалентна функции $G\colon M^4 \to \mathbb{C}$, где*

$$M^4 = \left(D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L}\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{s^P} (V_{\varepsilon,l_j} \cup \partial^+ V_{\varepsilon,l_j})\right) / \sim,$$

на множестве $D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L}$ функция G есть проекция: $G = \mathrm{Pr}_1$, а на множествах $V_{\varepsilon,l_j} \cup \partial^+ V_{\varepsilon,l_j}$ задается формулами $G(z',w') = z'^2 + w'^{l_j} + \xi_0$.

Доказательство. Функция G определена корректно, так как для любого j при $(z',w') \in \partial^+ V_{\varepsilon,l_j}$ выполнено равенство $G(z',w') = \mathrm{Pr}_1 \circ \nu_j(z',w')$. Построим гомеоморфизм $h\colon f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}) \to M^4$, осуществляющий требуемую топологическую эквивалентность функций $f|_{f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})}$ и G. Представим $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})$ как $(f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})\setminus V)\bigcup\left(\overline{V}\cap f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})\right)$. Согласно лемме 4.3 и следствию 4.4, определим $h(z,w)$ так:

$$h(z,w)=\begin{cases}h_3(z,w) & \text{при } (z,w)\in f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})\setminus V,\\ h_4(z,w)=(z',w') & \text{при } (z,w)\in\overline{V}\cap f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon}).\end{cases}$$

Отображение h определено корректно. Действительно, $\nu_j\circ h_4(z,w)=\nu_j(z',w')=(z'^2+w'^{l_j}+\xi_0,\mu(z,w))=(f(z,w),\mu(z,w))=h_3(z,w)$ при $(z,w)\in\partial\overline{V}\cap f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})$.

Положим $X=f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})$, $X'_1=\bigsqcup\limits_{j=1}^{s^P}(V_{\varepsilon,l_j}\cup\partial^+V_{\varepsilon,l_j})$, $X'_2=D_{\xi_0,\varepsilon}\times\overline{L}$, $H_1=h_4$, $H_2=h_3$. Тогда из леммы 4.4 получаем, что h — гомеоморфизм.

Осталось проверить, что h осуществляет топологическую эквивалентность функций $f|_{f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})}$ и G. Имеем: на множестве $\overline{V}\cap f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})$ композиция $G\circ h(z,w)=z'^2+w'^{l_j}+\xi_0=f(z,w)$, а на множестве $f^{-1}(D_{\xi_0,\varepsilon})\setminus V$ композиция $G\circ h(z,w)=\xi$, где $\xi=f(z,w)$ по определению. Теорема доказана. □

В силу следствия 4.4, многообразие $\bigsqcup\limits_{j=1}^{s^P}\overline{V}_{\varepsilon,l_j}$ с краем можно отождествить с $\bigsqcup\limits_{j=1}^{s^P}N^4_{\varepsilon,l_j}$, а функции $g|_{\overline{V}_{\varepsilon,l_j}}$ с функциями q_j с помощью некоторой топологической эквивалентности (явные формулы которой можно найти в [3, §3, утверждения 1 и 2]). При этом ограничение этого отождествления на $\partial^+V_{\varepsilon,l_j}$ обратно гомеоморфизму $([0,\varepsilon)\times S^1\times S^1\times\{-1,1\}/\sim)\to\partial^+V_{\varepsilon,l_j}$, задаваемому формулой $(r,\varphi,\psi,\pm1)\mapsto(\pm\sqrt{re^{i\varphi}-2\varepsilon\, e^{il_j\psi}},(2\varepsilon)^{\frac{1}{l_j}}e^{i\psi})$. Получаем следующее

Следствие 4.5. *Пусть $\xi_0\neq f(0,\infty)$. Тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что функция $f\colon f^{-1}(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon})\to\mathbb{C}$ топологически эквивалентна функции $Q\colon N^4\to\mathbb{C}$, где*

$$N^4=(\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon/2}\times\overline{L})\sqcup\left(\bigsqcup_j N^4_{\varepsilon,l_j}\right)/\sim'.$$

Здесь через $\sim'$ обозначена склейка, индуцированная склейкой $\sim$ и указанными выше отождествлениями. На множестве $\overline{D}_{\xi_0,\varepsilon}\times\overline{L}$ отображение Q есть проекция: $Q=\mathrm{Pr}_1$, а на множествах N^4_{ε,l_j} задается формулами $Q(r,\varphi,\psi,h)=re^{i\varphi}+\xi_0$. □

Описанная конструкция построения по заданным гиперэллиптическому рациональному гамильтониану $f = f(z, w)$, уровню ξ_0 и числу $\varepsilon > 0$ пространства M^4 с функцией G на нем (соотвественно, N^4 с функцией Q) осуществлялась в предположении, что $f(0, \infty) \neq \xi_0$. Аналогичное построение можно провести и в случае, когда $f(0, \infty) = \xi_0$. Действительно, если для гиперэллиптического рационального гамильтониана $f = z^2 + R(w)$ имеет место равенство $f(0, \infty) = \xi_0$, то, непременно, $R(w)$ имеет полюса в конечной части плоскости. Рассмотрим один из этих полюсов и обозначим его через w_0. Сделаем замену переменных $w \to w' = \frac{1}{w - w_0}$. Она устанавливает эквивалентность функций $f = f(z, w)$ и $g = g(z, w') = f(z, w_0 + \frac{1}{w'})$, где точки (z, w') с $w' = 0$ считаются выколотыми из области определения функции g. Для функции g уже верно неравенство $g(0, \infty) \neq \xi_0$, значит, для нее может быть осуществлено построение пространства M^4 из теоремы 4.8, с той лишь разницей, что в плоскости переменной w' нужно сделать дополнительный прокол в нуле (хотя точка $w' = 0$ не является полюсом функции $g(0, w')$ ввиду $g(0, 0) = \xi_0 = f(0, \infty) \neq \infty$). Эта выколотая точка является устранимой особенностью для функции $g(0, w')$, значит, корректно говорить о кратности (особой) точки $(0, \infty)$ слоя $f^{-1}(\xi_0)$.

Рассмотрим два (гиперэллиптических) рациональных гамильтониана f_1 и f_2. Пусть они не имеют "выколотых" (особых) точек в слоях $\mathrm{T}^1_{\xi_0} = f_1^{-1}(\xi_0)$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0} = f_2^{-1}(\xi_0)$, отличных от $(0, \infty)$. Имеет место

Теорема 4.9. *Пусть $f_1(0, \infty) \neq \xi_0$ и $f_2(0, \infty) \neq \xi_0$ или $f_1(0, \infty) = f_2(0, \infty) = \xi_0$. Тогда функции f_1 и f_2 полулокально топологически эквивалентны относительно значения ξ_0 тогда и только тогда, когда слои $\mathrm{T}^1_{\xi_0}$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0}$ гомеоморфны и имеют одинаковые наборы кратностей особых точек (включая кратность (особой) точки $(0, \infty)$ при $f_j(0, \infty) = \xi_0$, $j = 1, 2$). В случае, когда $f_1(0, \infty) \neq f_2(0, \infty) = \xi_0$, функции f_1 и f_2 полулокально топологически не эквивалентны относительно значения ξ_0.*

Доказательство. Второе утверждение теоремы следует из леммы 4.3, так как соответствующее лемме утверждение верно для функции f_1 и неверно для функции f_2 (для любой четырехмерной окрестности V особых точек слоя $\mathrm{T}^2_{\xi_0}$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ пространства $\mathrm{T}^2_{\xi} \setminus V$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0} \setminus V$ не гомеоморфны при $\xi \in D_{\xi_0, \varepsilon}$, $\xi \neq \xi_0$). Докажем первое утверждение.

Сперва рассмотрим случай $f_1(0, \infty) \neq \xi_0$ и $f_2(0, \infty) \neq \xi_0$.
Необходимость. Условие на гомеоморфность слоев $\mathrm{T}^1_{\xi_0}$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0}$ вытекает из определения топологической эквивалентности функций. Выведем

условие на совпадение кратностей. Достаточно показать, что функции $g_k = z^2 + w^k$ и $g_l = z^2 + w^l$ локально топологически эквивалентны относительно точек P_k и P_l, $P_k = P_l = (0,0)$, тогда и только тогда, когда $k = l$. Предположим, что существует топологическая эквивалентность $h\colon U_1 \to U_2$ функций g_k и g_l, где U_1 и U_2 — малые окрестности точки $(0,0)$.

Определим отображение $\Gamma_k\colon U_1 \setminus \{0,0\} \to S^3$ формулой $\Gamma_k(z,w) = \frac{(\frac{\partial g_k}{\partial z}, \frac{\partial g_k}{\partial w})}{|(\frac{\partial g_k}{\partial z}, \frac{\partial g_k}{\partial w})|}$. Здесь S^3 — трехмерная сфера единичного радиуса. Аналогично определим $\Gamma_l\colon U_2 \setminus \{0,0\} \to S^3$. Рассмотрим композицию $\Gamma_l \circ h|_{h^{-1}(S^3_\varepsilon)}\colon h^{-1}(S^3_\varepsilon) \to S^3$, где S^3_ε — трехмерная сфера достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что $\deg\left(\Gamma_l \circ h'|_{h'^{-1}(S^3_\varepsilon)}\right) = \deg\left(\Gamma_l \circ h|_{h^{-1}(S^3_\varepsilon)}\right) = \deg \Gamma_l|_{S^3_\varepsilon}$, где h' близко к h. С другой стороны, если h' гладкое отображение, матрица Якоби которого всюду имеет положительный определитель, в силу инвариантности степени относительно деформаций, имеем $\deg\left(\Gamma_l \circ h'|_{h'^{-1}(S^3_\varepsilon)}\right) = \deg \Gamma_k|_{S^3_\varepsilon}$. Но можно проверить, что степень $\deg \Gamma_k|_{S^3_\varepsilon} = k-1$, а $\deg \Gamma_l|_{S^3_\varepsilon} = l-1$, откуда $k = l$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Достаточность. Занумеруем наборы особых точек слоев $\mathrm{T}^1_{\xi_0}$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0}$ через P^1_j и P^2_j, $j = 1, \ldots, s^{P^1} = s^{P^2}$, так, чтобы кратности особых точек P^1_j и P^2_j совпадали. Обозначим эти кратности через l_j. Для каждой функции f_1 и f_2 и некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ проведем построения пространств

$$M^4_1 = \left(D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L}_1\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{s^{P^1}} (V_{\varepsilon,l_j} \cup \partial^+ V_{\varepsilon,l_j})\right) / \sim_1 \quad \text{и}$$

$$M^4_2 = \left(D_{\xi_0,\varepsilon} \times \overline{L}_2\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{s^{P^2}} (V_{\varepsilon,l_j} \cup \partial^+ V_{\varepsilon,l_j})\right) / \sim_2$$

из теоремы 4.8, где $\overline{L}_1 = \mathrm{T}^1_{\xi_0} \setminus V^1$ и $\overline{L}_2 = \mathrm{T}^2_{\xi_0} \setminus V^2$. Обозначим соответствующие функции из теоремы 4.8, топологически эквивалентные f_1 и f_2, через G_1 и G_2. Докажем, что функции G_1 и G_2 топологически эквивалентны.

В силу гомеоморфности слоев $\mathrm{T}^1_{\xi_0}$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0}$ и совпадения наборов кратностей их особых точек, гомеоморфны многообразия $\mathrm{T}^1_{\xi_0} \setminus V^1$ и $\mathrm{T}^2_{\xi_0} \setminus V^2$ с краем. Рассмотрим для каждой связной компоненты множества $D_{\xi_0,\varepsilon} \times \partial(\mathrm{T}^1_{\xi_0} \setminus V^1)$ ее небольшое раздутие в $D_{\xi_0,\varepsilon} \times (\mathrm{T}^1_{\xi_0} \setminus V^1)$, гомеоморфное прямому произведению двумерного диска $D_{\xi_0,\varepsilon}$ на кольцо $[0,1] \times S^1$, и добавим эти раздутия к множеству $\bigsqcup_j V_{\varepsilon,l_j} \approx V^1$. Получим замкнутое в

M_1^4 множество $\widetilde{V}^1$. Аналогично поступим со слоем $\mathrm{T}^2_{\xi_0}$ и получим замкнутое в M_2^4 множество $\widetilde{V}^2$. Нетрудно видеть, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\mathrm{id}\times h_L\colon D_{\xi_0,\varepsilon}\times(\mathrm{T}^1_{\xi_0}\setminus\widetilde{V}^1)\to D_{\xi_0,\varepsilon}\times(\mathrm{T}^2_{\xi_0}\setminus\widetilde{V}^2)$. На множествах $V_{\varepsilon,l_j}\cup\partial^+V_{\varepsilon,l_j}$ рассмотрим гомеоморфизм h_V, задаваемый формулой $(z,w)\mapsto(z,w)$. Рассмотрим связную компоненту множества $\widetilde{V}^1\setminus\bigsqcup_j V_{\varepsilon,l_j}$, гомеоморфную $D_{\xi_0,\varepsilon}\times[0,1]\times S^1$, и ограничения отображений h_L и h_V на соответствующие части границы $\partial(\widetilde{V}^1\setminus\bigsqcup_j V_{\varepsilon,l_j})$ (гомеоморфные полноториям $D_{\xi_0,\varepsilon}\times S^1$). По построению склеек $\sim_1$ и $\sim_2$, индуцированные ориентации на двух "граничных полноториях" из $\partial(\widetilde{V}^2\setminus\bigsqcup_j V_{\varepsilon,l_j})$ согласованы друг с другом. Отсюда следует, что существует гомеоморфизм, переводящий $\widetilde{V}^1\setminus\bigsqcup_j V_{\varepsilon,l_j}$ в $\widetilde{V}^2\setminus\bigsqcup_j V_{\varepsilon,l_j}$ такой, что он "склеивает" гомеоморфизмы h_L и h_V в единый гомеоморфизм $h_M\colon M_1^4\to M_2^4$ (для доказательства этого утверждения можно воспользоваться тем фактом, что пространство сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности в себя линейно связно). По построению, гомеоморфизм h_M осуществляет требуемую топологическую эквивалентность функций G_1 и G_2.

Теперь рассмотрим случай $f_1(0,\infty)=\xi_0$ и $f_2(0,\infty)=\xi_0$.
Необходимость. Без ограничения общности мы можем считать, что $\xi_0=0$, $f_1(z,w)=z^2+\dfrac{A^1(w)}{B^1(w)}$, $f_2(z,w)=z^2+\dfrac{A^2(w)}{B^2(w)}$, где A^j,B^j, $j=1,2$ — взаимно простые многочлены, степени которых удовлетворяют неравенствам $\deg A^1<\deg B^1$, $\deg A^2<\deg B^2$. Из сказанного выше вытекает, что слои T^1_0 и T^2_0 должны быть гомеоморфны и иметь одинаковые наборы кратностей особых точек (не включая кратность (особой) точки $(0,\infty)$). Мы хотим получить условие на совпадение кратностей (особой) точки $(0,\infty)$ для функций f_1 и f_2. Другими словами, мы хотим доказать равенство $\deg B^1-\deg A^1=\deg B^2-\deg A^2$. Пусть $\deg B^2=\deg B^1+k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Рассмотрим слои T^1_δ и T^2_δ, где $\delta>0$ мало. Они задаются уравнениями $z=\pm\sqrt{\dfrac{\delta B^1(w)-A^1(w)}{B^1(w)}}$ и $z=\pm\sqrt{\dfrac{\delta B^2(w)-A^2(w)}{B^2(w)}}$ соответственно. Так как $\delta>0$ мало, слои T^1_δ и T^2_δ неособы, а по определению полулокальной топологической эквивалентности должны быть гомеоморфны, т.е. иметь одинаковое число ручек и проколов. Используя это замечание, а также сказанное выше заключаем, что $\deg A^2=\deg A^1+k$, а значит $\deg B^1-\deg A^1=\deg B^2-\deg A^2$.

Достаточность. Введем функции $g_1=g_1(z,w')$ и $g_1=g_2(z,w')$, эквивалентные f_1 и f_2 и имеющие прокол в нуле в плоскости переменной w', как это описано перед формулировкой теоремы 4.9. Имея условие совпадения кратностей особых точек (включая кратность (особой) точки

$(0,\infty))$, мы можем провести доказательство топологической эквивалентности функций g_1 и g_2 по той же схеме, что и выше, для случая функций f_1 и f_2 с $f_1(0,\infty) \neq \xi_0$ и $f_2(0,\infty) \neq \xi_0$. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: РХД, 1999.

[2] *Кудрявцева Е. А.* Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // Докл. РАН. 2012. **445**, №4. 383-385.

[3] *Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А.* Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом // Матем. сб. 2010. **202**, №3. 69-106. Transl. Sbornik Mathematics. **202**, №3. 373-411.

[4] *Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А.* Топология слоения и теорема Лиувилля для интегрируемых систем с неполными потоками // Труды Сем. Вект. Тенз. Анализу. 2011. **28**. 106-149.

[5] *Кудрявцева Е. А., Лепский Т. А.* Интегрируемые гамильтоновы системы с неполными потоками и многоугольники Ньютона // Соврем. Пробл. Матем. Механ. 2011. **6**, №3. 42-55.

[6] *Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т.* Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Математический Сборник. 2008. **199**, №9. 3-96.

[7] *Кудрявцева Е. А., Фоменко А. Т.* Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Доклады РАН, серия: математика. 2012. **446**, №6. 615-617.

[8] *Лепский Т. А.* Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени // Матем. сб. 2010. **10**. 109-136.

[9] *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.

[10] *Ошемков А. А.* Классификация гиперболических особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сборник, 2010, **201**, №8. с. 63–102.

[11] *Фоменко А. Т.* Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функц. анализ и его приложения. 1991. **25**. 23-35.

[12] *Форстер О.* Римановы поверхности // М.: Мир, 1980.

[13] *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функц. Анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4, с. 56-67.

[14] *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и род полных пересечений // Функц. Анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 1, с. 51-61.

[15] *Bolsinov A. V., Fomenko A. T.* Integrable Geodesic Flows on Two-Dimensional Surfaces // Consultants Bureau. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. Kluwer Academic Plenum Publishers, New York, 2000.

[16] *Broughton S. A.* On the topology of polynomial hypersurfaces, Proceedings A.M.S. Symp. in Pure. Math., 1983, №40, I, 165–178.

[17] *Dirk S., Tibar M.* Deformations of polynomials, boundary singularities and monodromy // Mosc. Math. J. 2003., **3**, №2, 661–679.

[18] *Fomenko A. T., Konyaev A. Yu.* New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems // Topology and its Applications. 2012. **159**. 1964-1975.

[19] *Nguyen Tien Zung* A note on focus-focus singularities, Diff. Geom. Appl.