1 Введение.

Данная работа посвящена исследованию такого понятия как **согласованный оператор**, определенного на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. По умолчанию будем считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{C}$(случаи, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ будут специально оговариваться). Данные операторы представляют интерес, так как на V задают семейство согласованных скобок Ли.
Раздел 1 посвящен краткому описанию конструкции, приведенной в работах В.В Соколова и А.В. Одесского. Суть её состоит в том, что пусть на V задано ассоциативное умножения $*$, причем алгебра (V, $*$) жесткая. Рассматривается новое умножение $\circ$, такое что $x \bullet y = x * y + \lambda x \circ y$ ассоциативна для любого λ. Тогда существует такой линейный оператор $R : V \to V$, для которого верна следующая формула: $x \circ y = R(x) * y + x * R(y) - R(x * y)$. Из ассоциативности $\circ$ следует существование на конечномерном пространстве семейства согласованных скобок.
В результате на V определено семейство алгебр Ли, зависящее от параметра λ. Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, тогда из жесткости алгебры с умножением $*$ следует, что для почти всех λ они будут изоморфны алгебре Ли с исходным коммутатором, порожденным операцией $*$ (остальные алгебры Ли будут называться **особыми**).
В работах В.В Соколова и А. В. Одесского приведено немало примеров согласованных операторов, два из которых рассмотрены в данной работе. Третий раздел посвящен первому примеру. Мною подробно изучено семейство алгебр Ли, получающееся с помощью него.
Особым классом согласованных операторов являются так называемые операторы **Нийенхейса**. Впервые это понятие встречается в работе [7]. Особенными они являются, потому что как в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, так и в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ почти все алгебры Ли изоморфны между собой, что, вообще говоря, не выполняется для произвольного согласованного оператора. При этом известен явный вид отображения, устанавливающего изоморфизм алгебр Ли. Поэтому облегчается изучение их. В разделе 5 мною были получены некоторые свойства особых алгебр Ли из семейства для случая диагонализуемого оператора Нийенхейса. Следующим результатом данной работы является доказательство диагонализуемости примера оператора Нийенхейса на $\mathfrak{gl}(m)$, приведенного в работе [2]. А при $m = 2$ оперделен тип особых алгебр Ли.
Основной результат данной работы описан в последнем разделе. Он заключается в приведении достаточных условий того, что набор функций Казимира скобок Пуассона-Ли общего положения, соответствующих пучку алгебр Ли, построенному по некоторому согласованному оператору на $\mathfrak{gl}(m)$, является полным коммутативным набором.

2 Построение семейства алгебр Ли при помощи согласованных операторов.

В работах [1], [2] описана конструкция, с помощью которой можно получать семейство согласованных скобок.Опишем её.
Ассоциативные алгебры с умножениями $*$ и $\circ$, определенными на некотором конечномерном пространстве V называются **согласованными**, если для любого λ ассоциативна операция

$$x \bullet y = x * y + \lambda x \circ y \tag{1}$$

где $x, y \in V$.
Новую операцию $\bullet$ можно рассматривать как линейную по λ деформацию умножения $*$.

Определение 1 *Алгебра с заданной на ней операцией $*$ называется жесткой, если при малых линейных деформациях (1) новая алгебра с операцией $\bullet$ изоморфна исходной.*

Предположим, что $(V, *)$ жесткая алгебра. Тогда умножение (1) изоморфно $*$ для почти всех λ (см. [1], [2]). Это означает, что существует формальный ряд $S_\lambda = 1 + R\lambda + O(\lambda^2)$, коэффициентами которого являются линейные операторы $R : V \to V$, удовлетворяющий следующему равенству:

$$S_\lambda(x)S_\lambda(y) = S_\lambda(x * y + \lambda x \circ y) \tag{2}$$

Если в этом равенстве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ, то получим формулу для $\circ$:

$$x \circ y = R(x) * y + x * R(y) - R(x * y) \tag{3}$$

Замечание. Умножение $\circ$ не меняется при замене R на $R + ad_a$.

Лемма 1 *Операция (1),порождённая двумя ассоциативными умножениями $*$ и $\circ$, ассоциативна тогда и только тогда, когда выполнено следующее равенство: $(x\circ y)*z+(x*y)\circ z = x*(y\circ z)+x\circ(y*z)$.*

Доказательство
$(x\bullet y)\bullet z = (x*y+\lambda x\circ y)*z+\lambda(x*y+\lambda x\circ y)\circ z = x*y*z+\lambda(x\circ y)*z+\lambda(x*y)\circ z+\lambda^2 x\circ y\circ z$
$x\bullet(y\bullet z) = x*(y*z+\lambda y\circ z)+\lambda x\circ(y*z+\lambda y\circ z) = x*y*z+\lambda x\circ(y*z)+\lambda x*(y\circ z)+\lambda^2 x\circ y\circ z$
Таким образом получаем, что $(x\bullet y)\bullet z = x\bullet(y\bullet z) \Leftrightarrow (x\circ y)*z+(x*y)\circ z = x*(y\circ z)+x\circ(y*z)$.
$\blacksquare$
Из ассоциативности умножений $*$ и $\circ$ следует, что операции $[x, y]_* = x * y - y * x$ и $[x, y]_\circ = x \circ y - y \circ x$ представляют собой скобки Ли.
Пара скобок Ли называются **согласованными**, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Ли. Значит из согласованности ассоциативных алгебр следует согласованность $[x, y]_*$ и $[x, y]_\circ$.
Хочется понять какие линейные операторы порождают согласованные скобки. Будем называть линейный оператор R **согласованным**, если скобки Ли $[x, y]_*$ и $[x, y]_R$ согласованы, где $[x, y]_R = [R(x), y] + [x, R(y)] - R[x, y]$.
Достаточным условием согласованности оператора является ассоциативность операции $\circ$, удовлетворяющей (3). Это следует из того, что равенство в лемме 1 выполнено для любого оператора R.
Простейшим примером согласованного оператора является умножение слева на произвольный элемент $a \in V$.
Таким образом, на пространстве V определено семейство алгебр Ли $\mathfrak{g}_\lambda$,скобки Ли которых имеют вид: $[x, y]_\lambda = [x, y]_R + \lambda[x, y]_*$. Алгебру Ли с коммутатором $[,]_*$ обозначим через $\mathfrak{g}$
Замечание. Скобку Ли $[,]_*$ в дальнейшем будем называть исходной или стандартной, а $[,]_\lambda$ - деформированной.

3 Пример согласованного оператора на алгебре $\mathfrak{gl}(2)$.

Пусть $V = \mathfrak{gl}(2)$, а умножение $*$ есть обычное матричное умножение. В работе [1] приведен пример согласованного оператора $R : \mathfrak{gl}(2) \longrightarrow \mathfrak{gl}(2)$. Он задается следующей формулой: $R(X) = AXB - ABX$, где $A, B \in \mathfrak{gl}(2)$.

Определение 2 *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_\lambda$ называется особой, если она не изоморфна $\mathfrak{g}$.*

Возникает естественная задача определить все особые алгебры Ли. Предположим,что выполнены следующие условия:
1.Все рассматриваемые алгебры Ли заданы над полем $\mathbb{R}$
2.Матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b \end{pmatrix}$$

3.Матрица $BA - AB$ в некотором базисе диагональна, с различными элементами на диагонали. С учетом условия 2, получаем:
$BA - AB = \begin{pmatrix} a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,2}b_{2,1} & 0 \\ 0 & a_{1,2}b_{2,1} - a_{2,1}b_{1,2} \end{pmatrix}$
Отсюда следует, что условие 3 выполнено $\Leftrightarrow a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,2}b_{2,1} \neq 0$.
Замечание. Смысл условия 3 будет пояснен в разделе 8.
Для определения типа особых алгебр Ли будем пользоваться классификацией четырехмерных вещественных алгебр Ли, которая приведена в работе [6].
Обозначение. Для удобства, в дальнейшем под $\{e_i\}_{i=1}^4$ будем предполагать базис матричного пространства, составленный из матричных единиц $E_{i,j}$ следующим образом:
$e_1 = E_{1,1} + E_{2,2}, e_2 = E_{1,2}, e_3 = E_{2,1}, e_4 = E_{1,1,} - E_{2,2}$.
Выпишем все ненулевые коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}_\lambda$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$:
$[e_2, e_3]_\lambda = k_4e_1 + \lambda e_4$
$[e_2, e_4]_\lambda = -2(\lambda - k_1)e_2 - 2k_2e_3$
$[e_3, e_4]_\lambda = -2k_3e_2 + 2(\lambda - k_1)e_3$
$k_1 = a_{1,2}b_{2,1} + a_{2,1}b_{1,2}$, $k_2 = -2a_{2,1}b_{2,1}$, $k_3 = 2a_{1,2}b_{1,2}$, $k_4 = a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,2}b_{2,1}$
Замечание. В дальнейшем будем выписывать только ненулевые коммутационные соотношения.
Заметим, что при $\lambda = 0$ алгебра становится разрешимой, в то время как $\mathfrak{g}$ редуктивна.

Предложение 1 *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ изоморфна неразложимой, разрешимой алгебре $A_{4,8}$(см.таблицу 2 в [6]).*

Доказательство. Пусть переход от $\{e_i\}_{i=1}^4$ к новому базису $\{e'_i\}_{i=1}^4$ задается следующим образом:
$e'_1 = \alpha_1e_1$
$e'_2 = \alpha_2e_2 + \beta_2e_3$
$e'_3 = \alpha_3e_2 + \beta_3e_3$
$e'_4 = \alpha_4e_4$
Необходимо подобрать такие параметры α_i, β_i, чтобы выполнялись следующие коммутационные соотношения:
$[e'_2, e'_3]_0 = e'_1$
$[e'_2, e'_4]_0 = e'_2$
$[e'_3, e'_4]_0 = -e'_3$
(это коммутационные соотношения для $A_{4,8}$)
Таким образом, система уравнений имеет вид:
$$\begin{cases} (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)k_4 = \alpha_1 \\ k_3\beta_2^2 - 2k_1\alpha_2\beta_2 - k_2\alpha_2^2 = 0 \\ k_3\beta_3^2 - 2k_1\alpha_3\beta_3 - k_2\alpha_3^2 = 0 \\ 2\alpha_4(k_1(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + k_2\alpha_2\alpha_3 - k_3\beta_2\beta_3) = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \end{cases}$$
Случай, когда $k_3 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$.

Учитывая $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$, из второго и третьего уравнения следует, что $\beta_3 = (\frac{k_1+|k_4|}{k_3})\alpha_3$, $\beta_2 = (\frac{k_1-|k_4|}{k_3})\alpha_2$.
Положим $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, тогда из первого и четвертого уравнения системы получаем, что $\alpha_1 = \frac{2k_4|k_4|}{k_3}$, $\alpha_4 = \frac{1}{2|k_4|}$
Случай, когда $k_3 = 0$ и $k_2 \neq 0$.
Тогда одним из решений системы является такое:
$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_3 = \frac{k_2}{2k_1}$, $\alpha_1 = k_4$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2k_1}$
Случай, когда $k_2 = 0$ и $k_3 \neq 0$.
Тогда одним из решений системы является такое:
$\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{k_3}{2k_1}$, $\beta_3 = 1$, $\alpha_1 = k_4$, $\alpha_4 = \frac{1}{2k_1}$
Случай, когда $k_2 = 0$ и $k_3 = 0$.
В данном случае возьмём решение $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 1$, $\alpha_1 = k_4$, $\alpha_4 = \frac{1}{2k_1}$
Таким образом, в каждом из случаев был явно построен базис, в котором коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ совпадают с коммутационными соотношениями $A_{4,8}$. ■
Замечание. Под неразложимой алгеброй понимается алгебра, которая не может быть представлена в виде прямой суммы алгебр.

Пусть теперь $\underline{\lambda \neq 0}$. Тогда коммутационные соотношения для $\mathfrak{g}_\lambda$ можно представить в следующем виде:
$[\widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3]_\lambda = \widetilde{e}_1$
$[\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2]_\lambda = 2\lambda((\lambda - k_1)\widetilde{e}_2 + k_2\widetilde{e}_3)$
$[\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_3]_\lambda = 2\lambda(k_3\widetilde{e}_2 - (\lambda - k_1)\widetilde{e}_3)$
Если элементы $v_1 = (\lambda - k_1)\widetilde{e}_2 + k_2\widetilde{e}_3$ и $v_2 = k_3\widetilde{e}_2 - (\lambda - k_1)\widetilde{e}_3$ линейно зависимы, то нетрудно видеть, что тогда $\mathfrak{g}_\lambda$ разрешимая или нильпотентная алгебра Ли. Исследуем этот случай. Условие линейной зависимости v_1 и v_2 равносильно тому, что $(\lambda - k_1)^2 + k_2k_3 = 0$

Предложение 2 *Пусть $k_2k_3 \leqslant 0$ и $(\lambda - k_1)^2 + k_2k_3 = 0$. Тогда для алгебры Ли $\mathfrak{g}_\lambda$ верны следующие утверждения:*
1)если $k_3 = 0$, тогда:

- $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,21}$ *при* $k_1k_2 > 0$
- $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,19}$ *при* $k_1k_2 < 0$

2) если $k_2 = 0$, тогда:

- $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,19}$ *при* $k_1k_3 > 0$
- $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,21}$ *при* $k_1k_3 < 0$

3) если $k_2 = 0$ и $k_3 = 0$, тогда $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,16}$
4) если $k_2k_3 \neq 0$, тогда:

- $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,21}$ *при* $\lambda k_2 > 0$
- $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,19}$ *при* $\lambda k_2 < 0$

$A_{4,19}$ *и* $A_{4,21}$ *-это разрешимые, разложимые алгебры Ли, которые в некотором базисе имеют следующие коммутационные соотношения:*
$A_{4,19}$*:* $[e'_1, e'_3] = e'_1, [e'_2, e'_3] = -e'_2$
$A_{4,21}$*:* $[e'_1, e'_3] = -e'_2, [e'_2, e'_3] = e'_1$
$A_{4,16}$ *- нильпотентная, разложимая алгебра Ли:* $[e'_2, e'_3] = e'_1$

Доказательство В пуктах1)-3)$\lambda = k_1$
В пункте 1) коммутационные соотношения имеют вид: $[e_2, e_3]_{k_1} = k_4 e_1 + k_1 e_4$, $[e_2, e_4]_{k_1} = -2k_2 e_3$
Изоморфизм с алгеброй $A_{4,21}$ устанавливается, если перейти к следующему базису:
$e'_1 = \frac{k_4}{k_1} e_1 + e_4$
$e'_2 = -\frac{2k_2}{\sqrt{2k_1 k_2}} e_3$
$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2k_1 k_2}} e_2$
$e'_4 = e_1$
Изоморфизм с алгеброй $A_{4,19}$ устанавливается, если перейти к базису:
$e'_1 = k_4 e_1 + k_1 e_4 + \sqrt{-2k_1 k_2} e_3$
$e'_2 = k_4 e_1 + k_1 e_4 - \sqrt{-2k_1 k_2} e_3$
$e'_3 = -\sqrt{-2k_1 k_2} e_2$
$e'_4 = e_1$
2) сводится к 1) с помощью замены:$e'_1 = -e'_1, e'_2 = e'_3, e'_3 = e'_2, e'_4 = -e'_4$. Тогда $[e'_2, e'_3]_{k_1} = k_4 e'_1 + k_1 e'_4$, $[e'_2, e'_4]_{k_1} = 2k_3 e_3$.
Дальнейшие выкладки аналогичны, как и в случае 1) с заменой k_2 на $-k_3$.
3)В этом случае единственной ненулевой скобкой будет $[e_2, e_3]_{k_1} = k_4 e_1 + k_1 e_4$. В результате замены $e'_1 = k_4 e_1 + k_1 e_4, e'_i = e_i, i = 2, 3, 4$ получаем: $[e'_2, e'_3]_{k_1} = e'_1$. А это, согласно [6], есть нильпотентная алгебра Ли $A_{4,16}$.
4)Этот случай опять сводится к 1) при помощи замены: $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = e_3 + \frac{\lambda - k_1}{k_2} e_2$, $e'_4 = e_4$. В новом базисе коммутационные соотношения выглядят так: $[e'_2, e'_3] = k_4 e'_1 + \lambda e'_4$, $[e'_2, e'_4] = -2k_2 e'_2$. ■

Пусть $\underline{(\lambda - k_1)^2 + k_2 k_3 > 0 \ \textbf{и} \ \lambda \neq 0}$.Докажем, что в этом случае $\mathfrak{g}_\lambda$ изоморфно $\mathfrak{g}$. Рассмотрим замену базиса:
$e'_1 = e_1$
$e'_2 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 e_3$
$e'_3 = \alpha_3 e_2 + \beta_3 e_3$
$e'_4 = \alpha_1 e_1 + \beta_4 e_4$
Необходимо найти такие α_i, β_i, при которых верны следующие коммутационные соотношения:
$[e'_2, e'_3] = e'_4$
$[e'_2, e'_4] = -2e'_2$
$[e'_3, e'_4] = 2e'_3$
(это коммутационные соотношения $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$). Система уравнений на α_i, β_i выглядит так:
$$\begin{cases} k_4 = \lambda \ \frac{\alpha_4}{\beta_4} \\ \lambda(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)k_4 = \beta_4 \\ k_3\beta_2^2 + 2(\lambda - k_1)\alpha_2\beta_2 - k_2\alpha_2^2 = 0 \\ k_3\beta_3^2 + 2(\lambda - k_1)\alpha_3\beta_3 - k_2\alpha_3^2 = 0 \\ \beta_4((\lambda - k_1)(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) - k_2\alpha_2\alpha_3 + k_3\beta_2\beta_3) = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \end{cases}$$
Третье и четвертое уравнения квадратные и имеют одинаковый дискриминант $(\lambda - k_1)^2 + k_2 k3 > 0$. Так как $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$, то $\beta_i = \frac{-(\lambda - k_1) \pm (-1)^i \sqrt{(\lambda - k_1)^2 + k_2 k_3)}}{k_3} \alpha_i$ (при $k_3 \neq 0$). Тогда пятое уравнение примет вид $-2\alpha_2\alpha_3\lambda((\lambda - k_1)^2 + k_2 k3) = k_3 \Rightarrow$ решение существует.
Если $k_2 \neq 0$, то $\alpha_i = \frac{(\lambda - k_1) \pm (-1)^i \sqrt{(\lambda - k_1)^2 + k_2 k_3)}}{k_2} \beta_i$ и $2\beta_2\beta_3\lambda((\lambda - k_1)^2 + k_2 k3) = k_2$
Если же $k_2 = k_3 = 0$, то $\alpha_2 = \beta_3 = 0$ (либо $\alpha_3 = \beta_2 = 0$). И тогда $\alpha_2\beta_3 = \frac{1}{\lambda((\lambda - k_1)}$ (либо $\alpha_3\beta_2 = -\frac{1}{\lambda((\lambda - k_1)}$)

Остался случай $\underline{(\lambda - k_1)^2 + k_2 k_3 < 0}$.
Существуют всего две вещественные четырехмерные редуктивные алгебры Ли, одна из которых $\mathfrak{gl}(2)$(в работе [6] она обозначена как $A_{4,23}$). Вторая обозначена как $A_{4,24}$, и в некотором базисе $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^4$ имеет следующие коммутационные соотношения: $[\widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3] = \widetilde{e}_1$, $[\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2] = \widetilde{e}_2$, $[\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_3] = -\widetilde{e}_3$
Найден единственный пример, когда $\mathfrak{g}_\lambda \cong A_{4,24}$. Он соответствует $\lambda = k_1$, при условии, что $k_2 > 0$. В базисе $e_1' = k_4 e_1 + k_1 e_4$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2k_2}} e_2$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{-2k_3}} e_3$, $e_4' = e_1$ коммутационные соотношения $\mathfrak{g}_{k_1}$ совпадают с приведенными для $A_{4,24}$.
Возможно ещё существует такие λ, что $\mathfrak{g}_\lambda$ особая, но тогда она обязательно изоморфна $A_{4,24}$.

4 Операторы Нийенхейса на конечномерных алгебрах Ли.

Целый класс согласованных операторов образуют так называемые операторы Нийенхейса. Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g} = (V, [,])$ над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{C}$(или $\mathbb{R}$).

Определение 3 *Линейный оператор $N : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется **оператором Нийенхейса,** если выполнено **тождество Нийенхейса***

$$N[Nx, y] + N[x, Ny] - N^2[x, y] - [Nx, Ny] \equiv 0. \quad (4)$$

Если $N : V \to V$-произвольный линейный оператор, то новая операция $[x, y]_N = [Nx, y] + [x, Ny] - N[x, y]$ билинейна и кососкоммутативна, но для неё не всегда выполнено тождество Якоби.

Лемма 2 *Пусть N-оператор Нийенхейса. Тогда операция $[x, y]_N$ удовлетворяет тождеству Якоби.*

Доказательство. Нужно доказать, что $[[x, y]_N, z]_N + [[z, x]_N, y]_N + [[y, z]_N, x]_N \equiv 0$. Воспользуемся тождеством (4). Тогда $[[x, y]_N, z]_N = [[Nx, Ny], z] + [[x, y]_N, Nz] - N[[x, y]_N, z]$
Из определения операции $[,]_N$ следует:
$[[x, y]_N, Nz]+$(циклическая перестановка) $=$

$$= -([[Nx, Ny], z] + [[Nz, Nx], y] + [[Ny, Nz], x] + [N[x, y], Nz] + [N[z, x], Ny] + [N[y, z], Nx]) \quad (5)$$

$N[[x, y]_N, z]+$ (циклическая перестановка)$=$

$$= N([Nx, [y, z]] + [Nz, [x, y]]] + [Ny, [z, x]] - [N[x, y], z] - [N[z, x], y] - [N[y, z], x]) \quad (6)$$

Из (4) следует, что $[N[x, y], Nz] = N[N[x, y], z] + N[[x, y], Nz] - N^2[[x, y], z]$. Подставляя это в (5), получаем:
$[[x, y]_N, z]_N+$ (циклическая перестановка) $=N^2([x, [y, z]] + z, [x, y]] + [y, [z, x]]) \equiv 0$ в силу выполнения тождества Якоби для скобки $[,]$ ■

Лемма 3 *Если N-оператор Нийенхейса, тогда скобка Ли $[,]_N$ согласована состандартной скобкой $[,]$.*

Доказательство. Пусть $[x, y]_\lambda = [x, y]_N - \lambda[x, y]$. Проверим выполнение тождества Якоби для введенной операции.
$[[x, y]_\lambda, z]_\lambda = [[x, y]_N, z]_N$ - $\lambda([[x, y]_N, z] + [[x, y], z]_N) + \lambda^2[[x, y], z]$.

Отсюда следует, что $[[x,y]_\lambda, z]_\lambda +$ (циклическая перестановка) = -$\lambda([[x,y],z]_N + [[x,y]_N, z]$ + (циклическая перестановка)) = $-\lambda([[x,y],Nz] + [[Nx,y],z] + [[x,Ny].z])$ + (циклическая перестановка)$\equiv 0$, так как $[[x,y],Nz] + [[Nz,x],y] + [[y,Nz],x] \equiv 0$ ■
Как и в разделе 1, полученное семейство алгебр Ли на V будем обозначать через $\mathfrak{g}_\lambda := (V,[,]_\lambda)$.Для удобства определим $[x,y]_\lambda = [x,y]_N - \lambda[x,y]$. Тождество Нийенхейса можно переписать в виде $[Nx,Ny] = N([x,y]_N)$. Рассмотрим оператор $N-\lambda Id$. Для него выполнено тождество Нийенхейса, и значит он будет также оператором Нийенхейса. В этом случае тождество (4) примет вид $[(N-\lambda Id)x,(N-\lambda Id)y] = (N-\lambda Id)([x,y]_\lambda)$ (см. [8]). Как видно для операторов Нийенхейса легче ищутся значения параметра λ, при которых $\mathfrak{g}(\lambda)$ будет особой алгеброй Ли. Для этого достаточно найти собственные значения оператора. В ином случае получаем изоморфизм $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_\lambda$.

5 Свойства диагонализуемых операторов Нийенхейса.

Пусть R - диагонализуемый оператор Нийенхейса. Обозначим через V_λ - собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ оператора R, $\hat{V}_\lambda$ - дополнение к V_λ, а Pr_λ - проекция на подпространство V_λ.

Лемма 4 *Пусть $x \in V_\theta$, $y \in V_\mu$, тогда $[x,y] \subset V_\theta \oplus V_\mu$.*

Доказательство. Для x, y тождество (4) примет следующий вид $\theta R[x,y] + \mu R[x,y] - R^2[x,y] - \theta\mu[x,y] = (\theta - R)(\mu - R)[x,y] = 0$, следовательно, так как R - диагонализуемый, $[x,y] \in V_\theta \oplus V_\mu$.

Лемма 5 *Пусть $x \in V_\theta$, $y \in V_\mu$, тогда $[x,y]_\lambda = ((\mu-\lambda)Pr_\theta + (\theta-\lambda)Pr_\mu)[x,y]$.*

Доказательство. По Лемме 1, $[x,y] = Pr_\theta[x,y] + Pr_\mu[x,y]$, следовательно $[x,y]_\lambda = (\theta + \mu - \lambda)[x,y] - \theta Pr_\theta[x,y] - \mu Pr_\mu[x,y] = (\mu-\lambda)Pr_\theta[x,y] + (\theta-\lambda)Pr_\mu[x,y]$.

Теорема 1 *Пусть λ, θ, μ есть собственные значения оператора R, причем $\theta, \mu \neq \lambda$. Тогда существует автоморфизм ψ векторного пространства V, такой что*

- *Если $x, y \in V_\lambda$, то $[\psi(x), \psi(y)]_\lambda = 0$.*
- *Если $x \in V_\theta, y \in V_\lambda$, то $[\psi(x), \psi(y)]_\lambda = \psi(Pr_\lambda[x,y])$.*
- *Если $x \in V_\theta, y \in V_\mu$, то $[\psi(x), \psi(y)]_\lambda = \psi([x,y])$.*

Доказательство. Зададим $\psi(v) = (\theta-\lambda)^{-1}v$, если $v \in \hat{V}_\lambda$, и $\psi(v) = v$, если $v \in V_\lambda$. Тогда по Лемме 6, если $x, y \in V_\lambda$, то $[\psi(x), \psi(y)]_\lambda = [x,y]_\lambda = 0$. Если $x \in V_\theta, y \in V_\lambda$, то $[\psi(x), \psi(y)]_\lambda = (\theta-\lambda)Pr_\lambda[\psi(x), \psi(y)] = \psi(Pr_\lambda[x,y])$. Если $x \in V_\theta, y \in V_\mu$, то $[\psi(x), \psi(y)]_\lambda = ((\theta-\lambda)Pr_\mu + (\mu-\lambda)Pr_\theta[\psi(x), \psi(y)] = ((\mu-\lambda)^{-1}Pr_\mu + (\theta-\lambda)^{-1}Pr_\theta)[x,y] = \psi([x,y])$.

Следствие 1 *V_λ является коммутативным идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}_\lambda$*

Следствие 2 *Подалгеба $\hat{\mathfrak{g}}_\lambda := (\hat{V}_\lambda, [,]_\lambda)$ изоморфна подалгебре $\hat{\mathfrak{g}} := (\hat{V}_\lambda, [,])$*

6 Пример диагонализуемого оператора Нийенхейса.

Для алгебры $\mathfrak{gl}(m)$ в работе [2] был найден оператор, удовлетворяющий тождеству (4). Он определяется следующим образом: $R(X) = AXB + BAX - XB + BX$, где $A^2 = B^2 = 1$. Наложим на него дополнительное условие $A = B^T$.

Теорема 2 *Пусть A и B - вещественные матрицы, такие что $A^2 = B^2 = 1$ и $A = B^T$. Тогда существует базис, в котором они представляются в виде*

$$A = \begin{pmatrix} E & D \\ 0 & -E \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ D^T & -E \end{pmatrix}$$

где $E_{ij} = \delta_{ij}$, $D_{ij} = u_i\delta_{ij}$.

Пусть m - размерность матрицы A, а n - размерность матрицы E. Обозначим $r = min(n, m-n)$. Тогда оператор R задается дискретными параметрами $m, n \in \mathbb{N}$ и непрерывными $u_1 \dots u_r \in \mathbb{R}$.

Теорема 3 *Пусть A и B - вещественные матрицы, такие что $A^2 = B^2 = 1$ и $A = B^T$, тогда оператор $R(X) = AXB + BAX - XB + BX$ - диагонализуемый с собственными значениями 2, -2, $2+(u_i)^2$. При этом $dimV_2 = (m-r)^2$, $dimV_{-2} = r(m-r)$, $dimV_{2+(u_i)^2} = m$, $i = 1 \dots r$.*

Доказательство. **Рассмотрим случай m=2n**. Будем использовать блочную запись матриц A, B, X для того, чтобы вычислить матрицу $R(X)$.

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} E & D \\ 0 & -E \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ D & -E \end{pmatrix}$$

$$R(X) = \begin{pmatrix} 2X_{11} + 2DX_{21} + DX_{22}D & 2X_{12} \\ 2DX_{11} + (D^2-2)X_{21} - 2X_{22}D & 2DX_{12} + (D^2+2)X_{22} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Поскольку каждый блок представляет из себя диагональную матрицу, мы можем естественным образом разбить пространство V в прямую сумму n^2 четырехмерных собственных подпространств $B_{i,j}$, представляющих из себя линейную оболочку четырех матричных единиц: $E_{i,j}$, $E_{i,j+n}$, $E_{i+n,j}$, $E_{i+n,j+n}$. Ограничим действие оператора R на подпространство $B_{i,j}$ и запишем его в базисе из соответствующих матричных единиц.Так как $D = diag\{u_1 \dots u_k\}$, то из (7) получаем:

$$R(E_{i,j}) = 2E_{i,j} + 2u_iE_{n+i,j},\ R(E_{i,j+n}) = 2E_{i,j+n} + 2u_iE_{i+n,j+n},$$
$$R(E_{i+n,j}) = 2u_iE_{i,j} + (u_i^2-2)E_{i+n,j},\ R(E_{i+n,j+n}) = u_iu_jE_{i,j} - 2u_jE_{i+n,j} + (u_i^2+2)E_{i+n,j+n}.$$

Характеристический многочлен оператора R равен $(\lambda^2-4)(\lambda-(2+u_i^2))^2$. Значит он диагонализуемый на $B_{i,j}$, а следовательно и на всей алгебре $\mathfrak{gl}(m)$ с собственными значениями 2,-2,$2+(u_k)^2$, где $k = 1 \dots r$. Базис из собственных векторов в пространстве V можно записать в блочном виде:

$$W_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}DY & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}DYD & -\frac{1}{2}DY \\ -\frac{1}{2}YD & Y \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}YD & Y \end{pmatrix},$$
$$W_4 = \begin{pmatrix} D^{-1}YD & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

где Y - одна из n^2 матричных единиц. Легко проверить, что $R(W_1) = -2W_1$, $R(W_2) = 2W_2$, $R(W_3) = (2 + D^2)W_3$, $R(W_4) = (2 + D^2)W_4$. Размерности собственных подпространств будут: $dimV_2 = (n)^2$, $dimV_{-2} = n^2$, $dimV_{2+(u_i)^2} = 2n$, $i = 1 \ldots r$.

Рассмотрим случай m>2n. Здесь $U = diag\{u_1, \ldots, u_r\}$.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \\ X_7 & X_8 & X_9 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E & U & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ U & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

$$R(X) = \begin{pmatrix} 2X_1 + 2UX_4 + UX_5U & 2X_2 & 2X_3 \\ 2UX_1 + U^2X_4 - 2X_4 - 2X_5U & 2UX_2 + U^2X_5 + 2X_5 & 2UX_3 + U^2X_6 + 2X_6 \\ -2X_7 - 2X_8U & 2X_8 & 2X_9 \end{pmatrix}$$

Разобьём пространство V на четыре собственных подпространства B^1, B^2, B^3, B^4 , каждое из которых, в свою очередь, разлагается на собственные подпространства размерностей 4, 2, 1:

$$B^1 = \bigoplus B^1_{i,j}, 1 \le i, j \le n \text{ , где } B^1_{i,j} =< E_{i,j}, E_{i,j+n}, E_{i+n,j}, E_{i+n,j+n} >$$
$$B^2 = \bigoplus B^2_{i,j}, 1 \le i \le n, 2n \le j \le m \text{ , где } B^2_{i,j} =< E_{i,j}, E_{i+n,j} >$$
$$B^3 = \bigoplus B^3_{i,j}, 2n \le i \le m, 1 \le j \le n \text{ , где } B^3_{i,j} =< E_{i,j}, E_{i,j+n} >$$
$$B^4 = \bigoplus B^4_{i,j}, 2n \le i, j \le m \text{ , где } B^4_{i,j} = E_{i,j}$$

Ограничение оператора R на $B^1_{i,j}$ совпадает с ограничением на $B_{i,j}$ в случае $m = 2n$, следовательно на нём R диагонализуем. Базис из собственных векторов в B^1 будет выглядеть следующим образом:

$$W_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}UY & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}UYU & -\frac{1}{2}UY & 0 \\ -\frac{1}{2}YU & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}YU & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$W_4 = \begin{pmatrix} U^{-1}YU & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничим оператор R на $B^2_{i,j}$. Тогда $R(E_{i,j}) = 2E_{i,j}, R(E_{i+n,j}) = (u_i^2 + 2)E_{i+n,j}$, и характеристический многочлен равен $(\lambda - 2)(\lambda - (2 + u_i^2))$. Базис из собственных векторов в B^2 будет выглядеть следующим образом:

$$W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}UY \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничим оператор R на $B^3_{i,j}$. Тогда $R(E_{i,j}) = -2E_{i,j}, R(E_{i,j+n}) = -2u_jE_{i,j} + 2E_{i,j+n}$, и характеристический многочлен равен $(\lambda - 2)(\lambda + 2)$. Базис из собственных векторов в B^3 будет выглядеть следующим образом:

$$W_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}YU & Y & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничение оператора на $B^4_{i,j}$ является скалярным оператором с собственным значением 2. Тогда собственные вектора имеют вид:

$$W_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $R(W_1) = -2W_1$, $R(W_2) = 2W_2$, $R(W_3) = (2+U^2)W_3$, $R(W_4) = (2+U^2)W_4$, $R(W_5) = 2W_5$, $R(W_6) = (2+U^2)W_6$, $R(W_7) = -2W_7$, $R(W_8) = 2W_8$, $R(W_9) = 2W_9$. Таким образом мы доказали, что оператор R диагонализуем на каждом из подпространств B^k, $k = 1\dots 4$, а значит и на всей алгебре, причём с теми же собственными значениями, что и в случае $m = 2n$. Размерности собственных подпространств будут: $dimV_2 = (m-n)^2$, $dimV_{-2} = n(m-n)$, $dimV_{2+(u_i)^2} = m$.

Рассмотрим случай m<2n. Снова $U = diag\{u_1, \dots, u_r\}$.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \\ X_7 & X_8 & X_9 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E & 0 & U \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ U & 0 & -E \end{pmatrix}$$

$$R(X) = \begin{pmatrix} 2X_1 + 2UX_7 + UX_9U & 2X_2 + 2UX_8 & 2X_3 \\ 2X_4 & 2X_5 & 2X_6 \\ 2UX_1 + U^2X_7 - 2X_7 - 2X_9U & 2UX_2 + U^2X_8 - 2X_8 & 2X_9 + 2UX_3 + U^2X_9 \end{pmatrix}$$

Разобьём пространство V на четыре собственных подпространства B^1, B^2, B^3, B^4 , каждое из которых, в свою очередь, разлагается на собственные подпространства размерностей 4, 2, 1:

$$B^1 = \bigoplus B^1_{i,j}, 1 \le i,j \le m-n \text{ , где } B^1_{i,j} =< E_{i,j}, E_{i,j+n}, E_{i+n,j}, E_{i+n,j+n} >$$
$$B^2 = \bigoplus B^2_{i,j}, 1 \le i \le m-n, m-n \le j \le n \text{ , где } B^2_{i,j} =< E_{i,j}, E_{i+n,j} >$$
$$B^3 = \bigoplus B^3_{i,j}, m-n \le i \le n, 1 \le j \le m-n \text{ , где } B^3_{i,j} =< E_{i,j}, E_{i,j+n} >$$
$$B^4 = \bigoplus B^4_{i,j}, m-n \le i,j \le n \text{ , где } B^4_{i,j} = E_{i,j}$$

Ограничение оператора R на $B^1_{i,j}$ совпадает с ограничением на $B_{i,j}$ в случае $m = 2n$, следовательно на нём R диагонализуем. Базис из собственных векторов в B^1 будет выглядеть следующим образом:

$$W_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}UY & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}UYU & 0 & -\frac{1}{2}UY \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}YU & 0 & Y \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}YU & 0 & Y \end{pmatrix},$$
$$W_4 = \begin{pmatrix} U^{-1}YU & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$$

Ограничим оператор R на $B^2_{i,j}$. Тогда $R(E_{i,j}) = 2E_{i,j} + 2u_iE_{i+n,j}, R(E_{i+n,j}) = 2u_iE_{i,j} + (u_i^2 - 2)E_{i+n,j}$, и характеристический многочлен равен $(\lambda+2)(\lambda - (2+u_i^2))$. Базис из собственных векторов в B^2 будет выглядеть следующим образом:

$$W_5 = \begin{pmatrix} 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}UY & 0 \end{pmatrix}, W_6 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}UY & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничим оператор R на $B^3_{i,j}$. Тогда $R(E_{i,j}) = 2E_{i,j}, R(E_{i,j+n}) = 2E_{i,j+n}$, и характеристический многочлен равен $(\lambda-2)^2$. Базис из собственных векторов в B^3 будет выглядеть следующим образом:

$$W_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничение оператора на $B^4_{i,j}$ является скалярным оператором с собственным значением 2. Тогда собственные вектора имеют вид:

$$W_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $R(W_1) = -2W_1$, $R(W_2) = 2W_2$, $R(W_3) = (2+U^2)W_3$, $R(W_4) = (2+U^2)W_4$, $R(W_5) = -2W_5$, $R(W_6) = (2+U^2)W_6$, $R(W_7) = 2W_7$, $R(W_8) = 2W_8$, $R(W_9) = 2W_9$. Таким образом мы доказали, что оператор R диагонализуем на каждом из подпространств B^k, $k = 1 \dots 4$, а значит и на всей алгебре, причём с теми же собственными значениями, что и в случае $m = 2n$. Размерности собственных подпространств будут: $dimV_2 = (m-n)^2$, $dimV_{-2} = n(m-n)$, $dimV_{2+(u_i)^2} = m$. ■

7 Особые алгебры оператора Нийенхейса на $\mathfrak{gl}(2)$.

В разделе 5 было показано, что для всех λ, не принадлежащих множеству собственных значений оператора Нийенхейса R, алгебры Ли $\mathfrak{g}_\lambda$ изоморфны $\mathfrak{g}$. В этом разделе будет рассмотрен оператор Нийенхейса R на $\mathfrak{gl}(2)$, удовлетворяющий условиям теоремы 3. В общем случае, когда размерность матриц равна m, в разделе 5 удалось получить лишь некоторые свойства особых алгебр. Для $m = 2$ будут найдены все особые алгебры Ли, основываясь на существующей классификации для вещественного случая.
Из теоремы 2 следует, что $A = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда получаем 2 случая:

1. $u_1 = 0 \Rightarrow$ существуют 2 собственных значения $\lambda = \pm 2$.

2. $u_1 \neq 0 \Rightarrow$ существуют 3 собственных значения $\lambda = 2, -2, 2+u_1^2$.

Предложение 3 *Особые алгебры Ли на $\mathfrak{gl}(2)$ изоморфны следующим алгебрам:*
1)если $u_1 \neq 0$, тогда

- $\mathfrak{g}_{2+u_1^2} \cong A_{4,8}$
- $\mathfrak{g}_2 \cong A_{4,19}$
- $\mathfrak{g}_{-2} \cong A_{4,19}$

2)если $u_1 = 0$, тогда

- $\mathfrak{g}_2 \cong A_{4,16}$
- $\mathfrak{g}_{-2} \cong A_{4,19}$

Доказательство 1)Рассмотрим базис в $\mathfrak{gl}(2)$, состоящий из собственных векторов оператора R:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_1^2 & -\frac{1}{2}u_1 \\ -\frac{1}{2}u_1 & 1 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}u_1 & 1 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R(e_1) = -2e_1,\ R(e_2) = 2e_2,\ R(e_1) = (2+u_1^2)e_3,\ R(e_4) = (2+u_1^2)e_4$$

$\underline{\boldsymbol{\lambda = 2 + u_1^2}}$. Коммутационные выражения для $\mathfrak{g}_{2+u_1^2}$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^4$ выглядят так:
$[e_1, e_2]_{2+u_1^2} = \frac{1}{2}u_1(4+u_1^2)(\frac{1}{2}u_1e_1 + e_2)$
$[e_1, e_3]_{2+u_1^2} = \frac{1}{2}u_1(4+u_1^2)(e_4 - e_3)$
$[e_2, e_3]_{2+u_1^2} = \frac{1}{4}u_1^2(4+u_1^2)e_3$
Сделаем замену базиса: $e_1' = \frac{4}{u_1^2(u_1^2+4)}e_4$, $e_2' = \frac{1}{2}u_1e_1 + e_2$, $e_3' = e_3$, $e_4' = \frac{4}{u_1^2(u_1^2+4)}e_2$
Тогда справедливы следующие соотношения:
$[e_2', e_3']_{2+u_1^2} = e_1'$
$[e_2', e_4']_{2+u_1^2} = e_2'$
$[e_3', e_4']_{2+u_1^2} = -e_3'$
А это и есть коммутационные соотношения для $A_{4,8}$
Если $\underline{\lambda = \mathbf{-2}}$, то $[e_1, e_2]_{-2} = -(4+u_1^2)e_1$, $[e_1, e_3]_{-2} = -(4+u_1^2)e_1$, $[e_2, e_3]_{-2} = (4+u_1^2)(e_2 - e_3)$
Замена базиса, доказывающая изоморфизм $\mathfrak{g}_{-2}$ и $A_{4,19}$, имеет вид:
$e_1' = e_1$
$e_2' = e_2 - e_3$
$e_3' = -\frac{1}{4+u_1^2}e_3$
$e_4' = -e_4$
Если $\underline{\lambda = \mathbf{2}}$, то $[e_1, e_2]_2 = 2u_1e_2$, $[e_1, e_3]_2 = -u_1^2)e_1 - 2u_1(e_3 - e_4)$, $[e_2, e_3]_2 = u_1^2e_2$
Замена базиса выглядит так:
$e_1' = -u_1^3e_1 - 2u_1^2e_3 + 2u_1^2e_4$
$e_2' = e_2$
$e_3' = -\frac{1}{u_1^2}e_3$
$e_4' = e_4$
2) В этом случае базисом из собственных векторов являются матричные единицы $E_{i,j}$. Для удобства в дальнейшем будем рассматривать базис $\{e_i\}_{i=1}^4$ такой, что $e_1 = E_{1,1} - E_{2,2}, e_2 = E_{1,2}, e_3 = E_{2,1}, e_4 = E_{1,1}, + E_{2,2}$.
Коммутационные выражения для $\mathfrak{g}_2$ в этом базисе выглядят так: $[e_2, e_3]_2 = -4e_1$.
Можно нормировать так, что в правой части коэффициент при e_1 будет равен 1. Таким образом, установлен изоморфизм с $A_{4,16}$.
Для $\mathfrak{g}_{-2}$ справедливы следующие равенства:
$[e_1, e_2]_{-2} = 8e_2$
$[e_1, e_3]_{-2} = -8e_3$
Тогда в базисе $e_1' = e_3, e_2' = e_2, e_3' = \frac{1}{8}e_1, e_4' = e_4$ коммутационные соотношения для $\mathfrak{g}_{-2}$ совпадут с коммутационные соотношениями $A_{4,19}$. ■

8 Достаточное условие полноты коммутативного набора.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{gl}(m)$ над полем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть $R : \mathfrak{gl}(m) \to \mathfrak{gl}(m)$ произвольный линейный оператор. Покажем,что он может быть представлен в виде $R(X) = A_1XB_1 + A_2XB_2 + \ldots + A_kXB_k$, где $A_i, B_i \in \mathfrak{gl}(m)$. Любой оператор однозначно определяется своими значениями на базисных векторах. Возьмём в качестве базиса матричные единицы $E_{i,j}$,

$i, j = 1, \dots, m$. Заметим, что $E_{i,j} X E_{k,l} = x_{j,k} E_{i,l}$, где $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,m} \end{pmatrix}$

Таким образом, семейство $R_{i,j,k,l}(X) = E_{i,j} X E_{k,l}$ можно рассматривать как базис в пространстве операторов на $\mathfrak{gl}(m)$. Что и требовалось доказать.

Пусть G- произвольная конечномерная алгебра Ли, а G^*-соответствующая ей коалгебра. Тогда на G^* определена скобка Пуассона-Ли. Если взять произвольные гладкие функции f, g на коалгебре, то их дифференциалы $d_x f, d_x g \in G$. Поэтому корректно следующее определение.

Определение 4 *Скобкой Пуассона-Ли двух гладких функций на G^* называется функция $\{f, g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle$, где $[,]$-скобка Ли на G, а $\langle ., . \rangle$-значение ковектора на векторе.*

Вернёмся к пространству $\mathfrak{gl}(m)$. Используя инвариантную невырожденную форму $Tr(XY)$, отождествим $\mathfrak{gl}(m)$ и $\mathfrak{gl}^*(m)$. Тогда скобка Пуассона-Ли примет вид:

$$\{f, g\}(X) = Tr(X[d_X f, d_X g]), \text{ где } X \in \mathfrak{gl}^*(m) = \mathfrak{gl}(m)$$

Определение 5 *Пусть G - алгебра Ли, а G^*-дуальное пространство. Элемент $x \in G^*$ называется* ***регулярным****, если $dim Ann(x) = ind G$, т.е минимально возможный.*

В силу того, что $\mathfrak{gl}^*(m) = \mathfrak{gl}(m)$, коприсоединенное представление совпадает с присоединенным. Следовательно $y \in Ann(x) \Leftrightarrow y$ коммутирует с x.Следовательно регулярность элемента в $\mathfrak{gl}(m)$ означает, что размерность централизатора этого элемента минимальна.

Регулярными элементами являются, например, диагонализуемые матрицы с различными элементами на диагонали.

Предположим, что на $\mathfrak{gl}(m)$ задан линейный согласованный оператор R. Тогда существуют такие A_i, B_i, что $R(X) = A_1 X B_1 + A_2 X B_2 + \ldots + A_k X B_k$ (k считаем наименьшим возможным). Оператор на матричном пространстве порождает семейство алгебр Ли $\mathfrak{g}_\lambda$. Как и в предыдущих разделах $\mathfrak{g} = (\mathfrak{gl}(m), [,])$. Следующая лемма дает достаточное условие совпадения индексов всех алгебр Ли из семейства.

Лемма 6 *Если матрица $M = A_1 X B_1 + A_2 X B_2 + \ldots + A_k X B_k$ регулярна, тогда $ind \mathfrak{g}_\lambda = ind \mathfrak{g} = m$, $\forall\ \lambda$.*

Доказательство. Так как на $\mathfrak{gl}(m)$ задано семейство согласованных скобок Ли, то на $\mathfrak{gl}^*(m)$ естественным образом возникает семейство согласованных скобок Пуассона-Ли $\{f, g\}_\lambda(X) = Tr(X[d_X f, d_X g]_\lambda)$. Для начала из регулярности M докажем, что их ранг равен $m^2 - m$. Т.к $\mathfrak{gl}(m) = \mathfrak{gl}^*(m)$, то возьмём $X = E$. Тогда $\{f, g\}_\lambda(E) = Tr(E[df(E), dg(E)])_\lambda = Tr([df(E), dg(E)])_\lambda$. Обозначим $df(E), dg(E) \in \mathfrak{gl}(m)$ через Y, Z соответственно. Тогда $Tr([df(E), dg(E)]_\lambda) = Tr([Y, Z]_\lambda) = Tr([RY, Z] + [Y, RZ] - R[Y, Z] - \lambda[Y, Z]) = Tr(R[Y, Z]) = Tr(A_1[Y, Z]B_1 + A_2[Y, Z]B_2 + \ldots + A_k[Y, Z]B_k) = Tr(M[Y, Z]) = Tr([M, Y]Z)$. Следовательно $Tr(E[Y, Z]_\lambda) = 0$ $\forall Z \iff [M, Y] = 0$. Так как M регулярна,то $dim\{Y | [M, Y] = 0\} = m$. Учитывая жесткость алгебры Ли $\mathfrak{gl}(m)$, а также, что ранг стандартной скобки Пуассона-Ли равен $m^2 - m$, можно сделать следующий вывод: ранг деформированных скобок Пуассона-Ли равен $m^2 - m$. Размерность алгебры Ли равна разности между рангом скобки Пуассона и ее индексом, отсюда и получаем искомое утверждение. ■

Пример. Пусть R- оператор Нийенхейса, удовлетворяющий теореме 3. Тогда, согласно лемме 6, равенство индексов алгебр Ли будет следовать из регулярности матрицы BA. Найдем достаточные условия, при которых она регулярна.

Рассмотрим случай m=2n. Тогда $m-2r=0$.

$$A=\begin{pmatrix} E & D \\ 0 & -E \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} E & 0 \\ D & -E \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} E & D \\ D & D^2+E \end{pmatrix}$$

Так как $\det(BA-\lambda E)=\prod_{1\leq i\leq n}(\lambda^2-\lambda(2+u_i^2)+1)$, то при выполнении $1)\forall i\neq j\ u_i\neq u_j$ и $2)\forall j\ u_j\neq 0$ матрица BA будет регулярной.
Рассмотрим случай m $>$ 2n. Тогда $m-2r=m-2n$.

$$A=\begin{pmatrix} E & U & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ U & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} E & U & 0 \\ U & U^2+E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

Тогда $\det(BA-\lambda E)=(1-\lambda)^{m-2n}\prod_{1\leq i\leq n}(\lambda^2-\lambda(2+u_i^2)+1)$. Если выполнены 1),2) из предыдущего случая матрица и $3)m-2r=0;1$, тогда BA регулярна .
Рассмотрим случай m $<$ 2n. Тогда $m-2r=2n-m$.

$$A=\begin{pmatrix} E & 0 & U \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ U & 0 & -E \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} E & 0 & U \\ 0 & E & 0 \\ U & 0 & U^2+E \end{pmatrix}$$

Тогда $\det(BA-\lambda E)=(1-\lambda)^{2n-m}\prod_{1\leq i\leq m-n}(\lambda^2-\lambda(2+u_i^2)+1)$.Если выполнены условия 1)-3), тогда матрица BA регулярна.

Определение 6 *Набор функций $f_1,\ldots,f_k$ на коалгебре Ли G^* называется полным коммутативным набором, если выполнены следующие свойства:*
1)функции $f_1,\ldots,f_k$ попарно коммутируют относительно скобки Пуассона-Ли, $\{f_i,f_j\}=0$, для $i,j=1,\ldots,k$
2)$f_1,\ldots,f_k$ почти всюду функционально независимы на G^*
3)$f_1,\ldots,f_k$ состоит из максимально возможного числа функций: $k=\frac{1}{2}(dimG+indG)$

Пусть J-семейство пуассоновых структур скобок Пуассона-Ли,порожденных согласованным оператором.Рассмотрим $J_0\subseteq J$ - скобки общего положения, т.е $\forall A\in J_0$ выполнено $rkA=R_0=\max_{C\in J}rkC$. Строим $F_{J_0}=\bigcup_{A\in J_0}\mathbf{Z_A}$, где $\mathbf{Z_A}$ - пространство центральных функций пуассоновой структуры A.
В работе [3] представлен эффективный критерий А.В. Болсинова полноты коммутативного набора, порожденного парой согласованных скобок.
Следствие к лемме 6 (**Достаточное условие полноты коммутативного набора**)
Если выполнены условия леммы 6, тогда семейство F_{J_0} образует полный коммутативный набор на $\mathfrak{gl}^*(m)$ относительно стандартной скобки Пуассона- Ли $\{,\}$
Доказательство Так как R согласованный оператор и $\mathfrak{gl}(m)$ жесткая, тогда почти все скобки Пуассона-Ли из семейства являются скобками общего положения. Из леммы 6 следует, что существует точка X из коалгебры, такая что $\forall\ \lambda\ rkC_\lambda(X)=m^2-m$, где C_λ пуассонова структура, соответствующая $\{,\}_\lambda$. Тогда будут выполнены условия критерия Болсинова.Следовательно коммутативный набор F_{J_0} полный. ■
Для оператора R, удовлетворяющего условиям теоремы 3 центральные функции для скобки общего положения $\{,\}_\lambda$ представляют собой коэффициенты при λ разложения в ряд функций $Tr((R-\lambda Id)^{-1}x)^k$, где $k=1,\ldots,m$. Приведём несколько примеров таких функций:
$H_{1,1}=Tr(BAX)$
$H_{1,2}=Tr((BABA+BAB-A)X)$
$H_{2,1}=Tr(XAXB+BAX^2)$

$H_{2,2} = Tr(AXBAXB + AXAX + ABAXBX + ABXBX + BABAX^2 + BABX^2 - AX^2 - BAXBX)$

Список литературы

[1] *A. Odesskii and V. Sokolov* Algebraic structures connected with pairs of compatible associative algebras. International Mathematics Research Notices, 2006. pp. 1-35. ISSN 1073-7928.

[2] *A.V. Odesskii, V.V. Sokolov* Integrable matrix equations related to pairs of compatible associative algebras. J.Phys., A:Math.Gen., №39(2006), p.12447-12456.

[3] *В.В Трофимов, А.Т. Фоменко* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых уравнений.

[4] *А.В. Болсинов* Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции, Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:1 (1991), 68–92 .

[5] *А.В. Болсинов, А.В. Борисов* Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли, Матем. заметки, 72:1 (2002), 11–34

[6] *А. А. Короткевич* Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности, Матем. сб., 200:12 (2009), 3–40

[7] *Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F.* Poisson-Nijenhuis structures, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 53 (1990), 35-81.

[8] A. Panasyuk Algebraic Nijenhuis operators and Kronecker Poisson pencils, Differential Geom. Appl. 24 (2006), 482–491