

1 Введение.

В данной работе изучаются минимальные заполнения конечного метрического пространства, представляющего собой вершины правильного N -угольника на евклидовой плоскости.

Эта задача встаёт в ряд геометрических оптимизационных задач с разветвлёнными экстремалами, среди которых наиболее известными являются задачи о поиске кратчайшей сети, а также локально-минимальных сетей, соединяющих конечный набор точек в некотором метрическом пространстве. Для границ, являющихся вершинами правильного N -угольника, кратчайшие деревья описаны полностью. При $N \geq 6$ кратчайшее дерево представляет собой все стороны правильного многоугольника, кроме одной. Много результатов было получено для локально-минимальных сетей, стягивающих вершины правильного N -угольника, однако их исчерпывающего описания пока нет.

Общая задача о минимальном заполнении метрического пространства известна как проблема Громова и формулируется следующим образом. Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, на котором задана функция расстояния ρ . Рассмотрим всевозможные плёнки W , стягивающие M , т.е. компактные многообразия с краем, диффеоморфным M . Рассмотрим на многообразии W функцию расстояния d , не уменьшающую расстояния между точками из M . Такое метрическое пространство $\mathcal{W} = (W, d)$ называется *заполнением* метрического пространства $\mathcal{M} = (M, \rho)$. Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объёмов заполнений, а также описании тех пространств \mathcal{W} , на которых эта нижняя грань достигается.

Для конечных метрических пространств минимальное заполнение определяется следующим образом.

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное метрическое пространство, $V \supset M$ — конечное множество, $G = (V, E)$ — связный граф, $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа. Таким образом, $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — взвешенный связный граф. Функция ω задаёт на V псевдометрику d_ω , а именно, расстоянием между вершинами графа \mathcal{G} назовём наименьший вес путей, соединяющих эти вершины. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p, q) \leq d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф \mathcal{G} называется *заполнением* пространства \mathcal{M} . Число $g(\mathcal{M})$, равное $\inf \omega(\mathcal{G})$ по всем заполнениям \mathcal{G} пространства \mathcal{M} , назовём *весом минимального заполнения*, а заполнение \mathcal{G} , для которого $\omega(\mathcal{G}) = g(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением*.

2 Формулировка задачи.

На единичной окружности равномерно расположены N точек, $N \geq 3$:

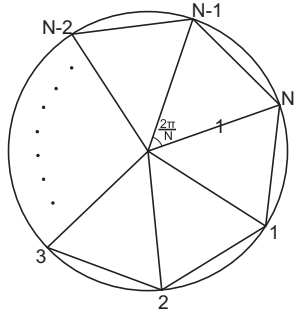


Рис. 1

Обозначим эти точки $1, 2, \dots, N-1, N$ в том порядке, в каком они последовательно расположены на окружности. Расстояние между точками i и j , $j > i$, находится как диагональ равнобедренного треугольника с боковыми сторонами, равными 1 и углом при вершине, равным $\min\{\frac{2(j-i)\pi}{N}, \frac{2(N-j+i)\pi}{N}\}$. Таким образом,

$$\rho_N(i, j) = 2 \sin \frac{|j-i|\pi}{N}.$$

Обозначим $M_N = \{1, 2, \dots, N-1, N\}$, тогда $\mathcal{M}_N = (M_N, \rho_N)$ — конечное метрическое пространство, т.к. является подмножеством \mathbb{R}^2 . Цель этой работы заключается в построении минимального заполнения для метрического пространства \mathcal{M}_N .

3 Анализ одной из топологий.

Напомним некоторые определения и известные результаты.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{M} = (M, \rho)$ — конечное метрическое пространство, $V \supset M$ — конечное множество и $G = (V, E)$ — произвольный связный граф. Тогда число $g_G(\mathcal{M})$, равное $\inf \omega(G)$ по всем весовым функциям ω на E , для которых $\mathcal{G} = (G, \omega)$ является заполнением пространства \mathcal{M} , назовём *весом минимального параметрического заполнения типа G* пространства \mathcal{M} , а заполнение \mathcal{G} , для которого $\omega(\mathcal{G}) = g_G(\mathcal{M})$, — *минимальным параметрическим заполнением типа G* .

Утверждение 3.1 (Иванов, Тужилин). *Для любого конечного метрического пространства \mathcal{M} существует минимальное заполнение, являющееся бинарным деревом.*

Определение 3.2. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф. Рассмотрим некоторое подмножество M множества V и назовём его *границей графа G* . При этом, вершины графа G , попавшие в M , назовём *граничными*, а все остальные — *внутренними*. Границу графа G будем обозначать через ∂G . В дальнейшем будем предполагать, что у каждого графа задана некоторая граница. В случае, если G — бинарное дерево, то границей ∂G будем обозначать подмножество вершин из V степени 1. В случае, если

речь идёт о заполнении (G, ω) метрического пространства (M, ρ) , граница ∂G всегда полагается равной M .

Определение 3.3. Пусть $M = (M, \rho)$ — произвольное конечное метрическое пространство, и $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — некоторое его заполнение. Путь, соединяющий граничные вершины дерева \mathcal{G} , будем называть *граничным*, а граничный путь, вес которого равен расстоянию между его концевыми вершинами, — *точным*.

Определение 3.4. Пусть $G = (V, E)$ — произвольное дерево. Пусть $v \in V$ — внутренняя вершина степени $(k + 1) \geq 3$, смежная с k вершинами w_1, \dots, w_k из ∂G . Тогда множество вершин $\{w_1, \dots, w_k\}$, а также множество рёбер $\{vw_1, \dots, vw_k\}$, называются *усами*. Число k назовём *степенью*, а v — *общей вершиной* этих усов. Инцидентное v ребро, не входящее в $\{vw_1, \dots, vw_k\}$, назовём *корневым* для рассматриваемых усов.

Утверждение 3.2 (Иванов, Тужилин). Пусть $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — минимальное параметрическое заполнение метрического пространства $M = (M, \rho)$. Тогда для каждой пары усов $\{w_1, w_2\} \subset V$ с общей вершиной v выполняется

$$\rho(w_1, w_2) = \omega(vw_1) + \omega(vw_2).$$

Рассмотрим бинарное дерево, последовательно соединяющее вершины $1, 2, \dots, N - 1, N$ и имеющее лишь двое усов:

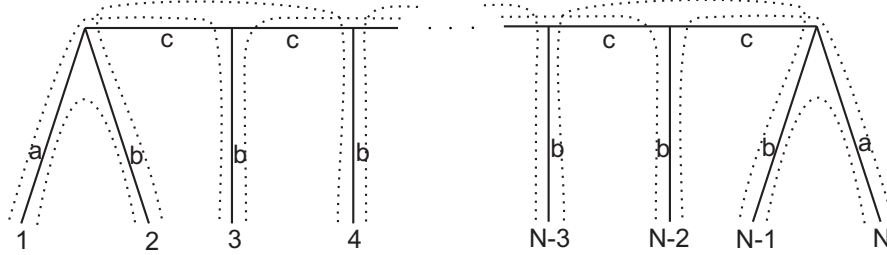


Рис. 2

Обозначим данное дерево $G_0 = (V_0, E_0)$. Найдём минимальное параметрическое заполнение типа G_0 пространства \mathcal{M}_N , то есть такую весовую функцию ω_0 на E_0 и соответствующее дерево $\mathcal{G}_0 = (G_0, \omega_0)$, что $\omega_0(G_0) = \inf \omega(G_0)$ в классе заполнений метрического пространства \mathcal{M}_N .

Рассмотрим обход дерева G_0 , проходящий по обоим усам, а также идущий от каждой вершины к вершине через одну от неё (как показано пунктиром на рисунке). Исходя из неравенства из определения заполнения $d_{\omega_0}(i, j) \geq \rho_N(i, j)$ (обращающееся в равенство для вершин одних усов), а также расстояний между последовательными вершинами обхода в метрическом пространстве \mathcal{M}_N , мы получим следующие ограничения на весовую функцию ω_0 :

$$d_{\omega_0}(1, 2) = d_{\omega_0}(N - 1, N) = 2 \sin \frac{\pi}{N},$$

$$d_{\omega_0}(i, i+2) \geq 2 \sin \frac{2\pi}{N}, \quad 1 \leq i \leq N-2.$$

Этот обход содержит 2 пути длины $2 \sin \frac{\pi}{N}$ и $(N-2)$ пути длины не менее $2 \sin \frac{2\pi}{N}$. Заметим также, что в результате такого обхода каждое ребро дерева G_0 проходится 2 раза. Получаем

$$2\omega_0(\mathcal{G}_0) \geq 2 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N-2) \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{N},$$

откуда

$$\omega_0(\mathcal{G}_0) \geq 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N-2) \sin \frac{2\pi}{N}. \quad (1)$$

То есть, мы показали, что длина минимального параметрического заполнения типа G_0 метрического пространства \mathcal{M}_N не может быть меньше вышеуказанной величины. Присвоим теперь каждому ребру $e \in E_0$ вес $\omega(e)$, равный a , b или c так, как указано на рисунке, где

$$\begin{aligned} a &= \sin \frac{2\pi}{N}, \\ b &= 2 \sin \frac{\pi}{N} - \sin \frac{2\pi}{N}, \\ c &= a - b = 2 \sin \frac{2\pi}{N} - 2 \sin \frac{\pi}{N}. \end{aligned}$$

Выясним, является ли $\mathcal{G} = (G_0, \omega)$ заполнением метрического пространства \mathcal{M}_N , то есть выполнены ли неравенства $d_{\omega}(i, j) \geq \rho_N(i, j)$. Возьмём вершину 1 и рассмотрим путь от неё до вершины $k < N$:

$$\begin{aligned} d_{\omega}(1, k) &= a + b + (k-2) \cdot c = \sin \frac{2\pi}{N} + 2 \sin \frac{\pi}{N} - \sin \frac{2\pi}{N} + (k-2) \cdot \\ &\cdot (2 \sin \frac{2\pi}{N} - 2 \sin \frac{\pi}{N}) = 2(k-2) \cdot (\sin \frac{2\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N}) + 2 \sin \frac{\pi}{N} \\ d_{\omega}(1, k) - \rho_N(1, k) &= 2(k-2) \cdot (\sin \frac{2\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N}) + 2 \sin \frac{\pi}{N} - 2 \sin \frac{(k-1)\pi}{N} = \\ &= 2(k-2) \cdot (\sin \frac{2\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N}) - 2(\sin \frac{(k-1)\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N}) = 2(k-2) \cdot \\ &\cdot (\sin \frac{2\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N}) - 2 \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sin \frac{(i+1)\pi}{N} - \sin \frac{i\pi}{N} \right) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{k-2} \left((\sin \frac{2\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N}) - (\sin \frac{(i+1)\pi}{N} - \sin \frac{i\pi}{N}) \right) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{k-2} \left(2 \sin \frac{\pi}{2N} \cos \frac{3\pi}{2N} - 2 \sin \frac{\pi}{2N} \cos \frac{(2i+1)\pi}{2N} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{2N} \cdot \\ &\cdot \sum_{i=1}^{k-2} \left(\cos \frac{3\pi}{2N} - \cos \frac{(2i+1)\pi}{2N} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{2N} \cdot \sum_{i=1}^{k-2} 2 \sin \frac{(i-1)\pi}{2N} \sin \frac{(i+2)\pi}{2N}. \end{aligned}$$

Каждый из синусов в последнем выражении неотрицателен, поэтому и всё выражение неотрицательно. Таким образом, $d_\omega(1, k) \geq \rho_N(1, k)$. При $k = N$ получаем $d_\omega(1, N) > 2a = 2 \sin \frac{2\pi}{N} > 2 \sin \frac{\pi}{N} = \rho_N(1, N)$. Так как $b + c = a$, то для любых двух вершин i и j , где $i < j$, следует $d_\omega(i, j) = d_\omega(1, j - i + 1) \geq \rho_N(1, j - i + 1) = \rho_N(i, j)$. Значит, \mathcal{G} является заполнением метрического пространства \mathcal{M}_N . Вес взвешенного дерева \mathcal{G} равен

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{G}) &= 2a + (N - 2)b + (N - 3)c = 2 \sin \frac{2\pi}{N} + (N - 2) \cdot (2 \sin \frac{\pi}{N} - \sin \frac{2\pi}{N}) + \\ &+ (N - 3) \cdot (2 \sin \frac{2\pi}{N} - 2 \sin \frac{\pi}{N}) = 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}. \end{aligned}$$

Учитывая оценку (1) и определение минимального параметрического заполнения, получаем

$$2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N} = \omega(\mathcal{G}) \geq \omega_0(\mathcal{G}_0) \geq 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Значит, \mathcal{G} является минимальным параметрическим заполнением типа \mathcal{G}_0 метрического пространства \mathcal{M} . Обозначим найденную нами весовую функцию через ω_0 , а соответствующее взвешенное дерево — через \mathcal{G}_0 .

4 Обходы в бинарных деревьях.

Определение 4.1. Пусть G — произвольное бинарное дерево, $|\partial G| = n$. Вложим G в плоскость и занумеруем вершины из ∂G в соответствии с обходом результирующего плоского дерева G' , получив тем самым порядок (p_1, \dots, p_n) . Каждый такой порядок, а также соответствующий циклический порядок на ∂G , будем называть *планарным порядком на ∂G* . Дерево G' назовём *2-укладкой дерева G* , порождающей этот порядок. Множество всех планарных порядков, порождённых на ∂G всевозможными 2-укладками дерева G , обозначим через $\mathcal{O}(G)$.

Определение 4.2. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, $|\partial G| = n$, $\pi = (p_1, \dots, p_n)$ — некоторый планарный порядок из $\mathcal{O}(G)$. *Планарным расстоянием* между вершинами $s, t \in \partial G$ *относительно порядка π* будем называть **минимальное** число вершин, которые нужно пройти от вершины s к вершине t (включая последнюю), двигаясь последовательно по вершинам из планарного порядка π . Обозначим его через $z_\pi(s, t)$. Если γ_{st} — граничный путь в G , соединяющий вершины s и t , то *планарной длиной граничного пути γ_{st} относительно порядка π* будем называть ту же величину и обозначать через $z_\pi(\gamma_{st})$. Таким образом,

$$z_\pi(\gamma_{st}) = z_\pi(s, t) = \min\{|j - i|, n - |j - i|\}, \quad i, j: p_i = s, p_j = t.$$

Определение 4.3. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево. *Обходом дерева G* будем называть некоторый набор попарно различных граничных путей

$\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$, такой что каждая вершина из ∂G содержится ровно в двух путях из Γ . Если речь идёт о взвешенном дереве $\mathcal{G} = (G, \omega)$, то *весом обхода* будем называть сумму весов всех входящих в него путей: $\omega(\Gamma) = \sum \omega(\gamma_{ij})$. Очевидно, что $|\Gamma| = |\partial G|$ и объединение всех путей обхода Γ содержит дерево G .

Определение 4.4. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, $|\partial G| = n$, $\pi = (p_1, \dots, p_n)$ — некоторый планарный порядок из $\mathcal{O}(G)$, и $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ — некоторый обход дерева G . Через $z_\pi(\Gamma)$ обозначим набор (не обязательно упорядоченный) планарных длин граничных путей γ_{ij} относительно порядка π , т.е. $z_\pi(\Gamma) = \{z_\pi(\gamma_{ij})\}$.

На множестве последовательностей (c_1, \dots, c_n) можно рассмотреть отношение частичного порядка. Пусть $c = (c_1, \dots, c_n)$ и $d = (d_1, \dots, d_n)$ — последовательности натуральных чисел, $c' = (c'_1, \dots, c'_n)$ и $d' = (d'_1, \dots, d'_n)$ — соответственно упорядоченные по неубыванию последовательности c и d . Тогда будем обозначать $c \geq d$, если $c'_i \geq d'_i$ для любого $1 \leq i \leq n$.

В любом планарном порядке бинарного дерева вершины одних усов всегда присутствуют парами. При этом очевидно также, что планарные порядки (p_1, \dots, p_n) и (p_n, \dots, p_1) некоторого дерева совпадают с точностью до ориентации. Поэтому там, где это важно, мы будем фиксировать ориентацию планарного порядка в дереве заданием её на каких-нибудь усах.

В этой работе мы будем изучать такие обходы бинарных деревьев, в результате которых каждое ребро дерева проходится ровно 2 раза. Назовём такие обходы *двойными*.

Утверждение 4.1. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, $v, w_1, w_2 \in V$, причём $\{w_1, w_2\}, \{vw_1, vw_2\}$ — усы в G . Пусть $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ — некоторый двойной обход дерева G . Тогда $\gamma_{w_1w_2} \in \Gamma$.

Доказательство. Обозначим $e \in E$ — корневое ребро усов. Предположим, что $\gamma_{w_1w_2} \notin \Gamma$. Тогда каждый путь, выходящий из вершин w_1 и w_2 , проходит через ребро e . По определению обхода каждая граничная вершина принадлежит ровно двум путям из обхода. Тогда через ребро e проходит 4 пути, что противоречит тому, что обход двойной. Утверждение доказано.

Утверждение 4.2. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, $|\partial G| = n$, $v, w_1, w_2 \in V$, $\{w_1, w_2\}, \{vw_1, vw_2\}$ — усы в дереве G , $e \in E$ — корневое ребро этих усов. Пусть бинарное дерево $G' = (V', E')$ получено из дерева G добавлением на ребро e вершины r , а также добавлением вершины q и ребра $\{qr\}$. Таким образом, $\partial G' = \partial G \cup \{q\}$. Пусть π и π' — планарные порядки соответственно из $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}(G')$, причём ориентация на π' такова (допустим для определённости), что $(w_1, w_2, q) \subset \pi'$ (входит в той же последовательности), а порядок π получается из порядка π' удалением вершины q . Пусть $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ — планарный обход дерева G . Тогда существует $\Gamma' = \{\gamma'_{ij}\}$ — планарный обход дерева G' , такой что $z_{\pi'}(\Gamma') = (2, c_1, \dots, c_n)$, где $(c_1, \dots, c_n) \geq z_\pi(\Gamma)$.

Доказательство. Иными словами, в обходе Γ' есть путь планарной длины 2, а планарные длины остальных путей не меньше планарных длин соответствующих путей в обходе Γ .

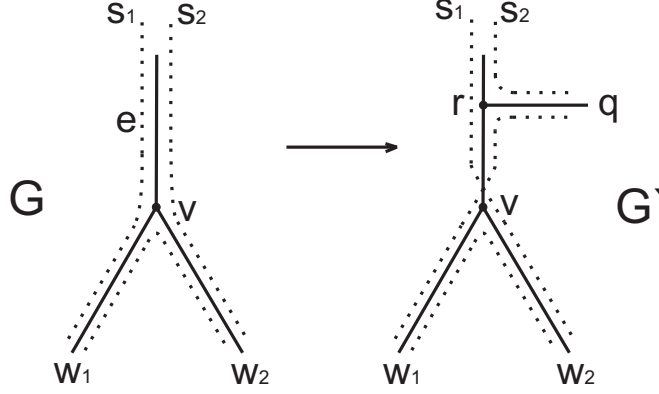


Рис. 3

Определим $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\gamma_{s_1 w_1}, \gamma_{s_2 w_2}\} \cup \{\gamma_{w_1 q}, \gamma_{s_1 w_2}, \gamma_{s_2 q}\}$. При этом $z_{\pi'}(\gamma_{w_1 q}) = 2$, $z_{\pi'}(\gamma_{s_1 w_2}) \geq z_{\pi}(\gamma_{s_1 w_1})$, $z_{\pi'}(\gamma_{s_2 q}) \geq z_{\pi}(\gamma_{s_2 w_2})$ в силу определения планарной длины пути, а в связи с увеличением числа граничных вершин планарные длины остальных путей (которые остались неизменными) по крайней мере не уменьшились, т.е. $z_{\pi'}(\gamma_{ij}) \geq z_{\pi}(\gamma_{ij})$, если $\gamma_{ij} \in \Gamma \setminus \{\gamma_{s_1 w_1}, \gamma_{s_2 w_2}\}$. Утверждение доказано.

Утверждение 4.3. Пусть $G = (V, E)$ – бинарное дерево, $|\partial G| = n$, $v, w_1, w_2 \in V$, $\{w_1, w_2\}$ и $\{vw_1, vw_2\}$ – усы в дереве G , $e \in E$ – корневое ребро этих усов. Пусть бинарное дерево $G' = (V', E')$ получено из дерева G добавлением на ребро e вершины r , а также добавлением усов $\{w_3, w_4\}$, $\{uw_3, uw_4\}$ с корневым ребром $\{ur\}$. Таким образом, $\partial G' = \partial G \cup \{w_3, w_4\}$. Пусть π и π' – планарные порядки соответственно из $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}(G')$, причём ориентация на π' такова (допустим для определённости), что $(w_1, w_2, w_3, w_4) \subset \pi'$ (входит в той же последовательности), а порядок π получается из порядка π' удалением вершин w_3, w_4 . Пусть $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ – планарный обход дерева G . Тогда существует $\Gamma' = \{\gamma'_{ij}\}$ – планарный обход дерева G' , такой что $z_{\pi}(\Gamma)$ и $z_{\pi'}(\Gamma')$ можно представить в следующем виде:

$$z_{\pi}(\Gamma) = (\alpha, \beta, c_1, \dots, c_{n-2}),$$

$$z_{\pi'}(\Gamma') = (1, 3, \alpha', \beta', c'_1, \dots, c'_{n-2}),$$

где $\alpha' \geq \alpha + 1$, $\beta' \geq \beta + 1$, а $(c'_1, \dots, c'_{n-2}) \geq (c_1, \dots, c_{n-2})$.

Доказательство. Иными словами, в обходе Γ' по сравнению с обходом Γ появляются два новых пути планарной длины 1 и 3, два пути из обхода Γ увеличиваются в планарной длине по меньшей мере на 1, а планарная длина всех остальных путей обхода Γ по крайней мере не уменьшится.

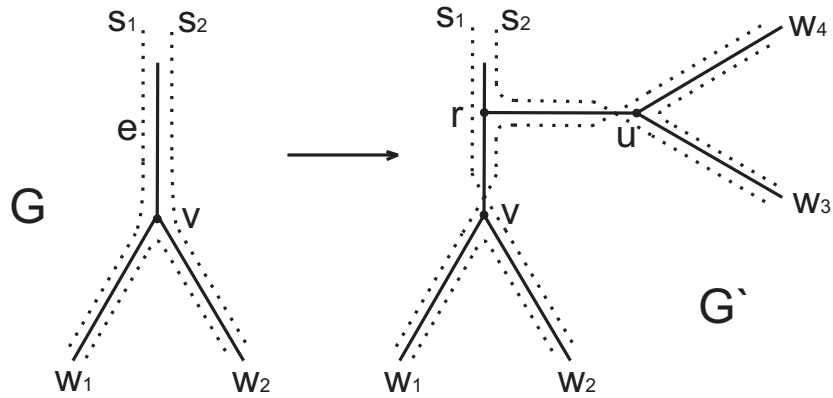


Рис. 4

Определим $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\gamma_{s_1 w_1}, \gamma_{s_2 w_2}\} \cup \{\gamma_{s_1 w_2}, \gamma_{s_2 w_3}, \gamma_{w_3 w_4}, \gamma_{w_4 w_1}\}$. При этом $z_{\pi'}(\gamma_{w_3 w_4}) = 1$, $z_{\pi'}(\gamma_{w_1 w_4}) = 3$, $z_{\pi'}(\gamma_{s_1 w_2}) \geq z_{\pi}(\gamma_{s_1 w_1}) + 1$, $z_{\pi'}(\gamma_{s_2 w_3}) \geq z_{\pi}(\gamma_{s_2 w_2}) + 1$ в силу определения планарной длины пути, а в связи с увеличением числа граничных вершин планарные длины остальных путей (которые остались неизменными) по крайней мере не уменьшились, т.е. $z_{\pi'}(\gamma_{ij}) \geq z_{\pi}(\gamma_{ij})$, если $\gamma_{ij} \in \Gamma \setminus \{\gamma_{s_1 w_1}, \gamma_{s_2 w_2}\}$. Утверждение доказано.

5 Индуктивное построение бинарных деревьев.

В прошлой главе мы описали процедуру модификации двойного обхода дерева в двух специфических случаях модификации самого дерева: 1) когда добавляется одна граничная вершина, смежная с внутренней вершиной, разделившей корневое ребро некоторых усов дерева; 2) когда добавляются усы, состоящие из двух граничных вершин и корневое ребро которых инцидентно вершине, разделившей корневое ребро некоторых усов дерева.

Обозначим через $T_4(p)$ и $T_5(p)$ следующие деревья с одной помеченной вершиной p :

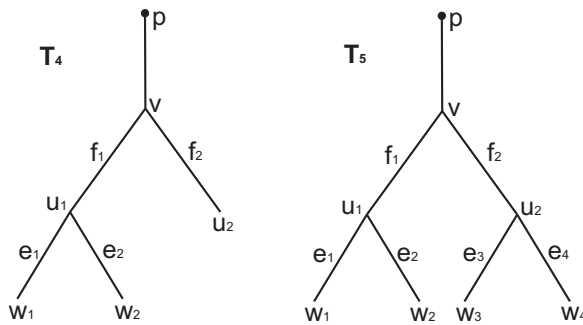


Рис. 5

Утверждение 5.1. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, $|\partial G| > 4$. Тогда в G существует поддереву вида $T_4(p)$ или $T_5(p)$, в котором все вершины степени 1, кроме быть может p , принадлежат ∂G .

Доказательство. Возьмём произвольную вершину $r \in \partial G$, назовём её корнем, и представим дерево G в виде корневого с корнем r . Тогда каждой вершине $v \in V$ соответствует величина $h(v)$, равная количеству рёбер в (v, r) -пути и называемая *уровнем* вершины v .

Пусть $w_1 \in V$ — вершина максимального уровня. $w_1 \in \partial G$, так как иначе можно было бы подняться на уровень выше по одному из двух инцидентных рёбер, не содержащихся в (w_1, r) -пути. Пусть u_1 — смежная с w_1 вершина, $e_1 = \{u_1 w_1\} \in E$. Вершина u_1 — внутренняя, значит ей инцидентны ещё 2 ребра, отличные от e_1 . Обозначим через $f_1 = \{u_1 v\}$ то из них, которое принадлежит $(u_1 r)$ -пути, а через $e_2 = \{u_1 w_2\}$ — другое. $h(w_2) = h(u_1) + 1 = h(w_1)$, тогда w_2 — вершина максимального уровня. Значит, $w_2 \in \partial G$ и $\{w_1 w_2\}, \{u_1 w_1, u_1 w_2\}$ — усы. Пусть $\{vp\}$ — ребро, принадлежащее (vr) -пути, а $f_2 = \{v u_2\}$ — ребро, отличное от f_1 и такое, что $h(u_2) = h(u_1)$. Возможны 2 случая:

1) $u_2 \in \partial G$. Пусть $V' = \{w_1, w_2, u_1, v, u_2, p\}$, $E' = \{e_1, e_2, f_1, \{vp\}, f_2\}$. Тогда дерево (V', E') совпадает с T_4 (рис. 5).

2) u_2 — внутренняя вершина. Обозначим $e_3 = \{u_2 w_3\}, e_4 = \{u_2 w_4\} \in E$ — инцидентные ей рёбра, отличные от f_2 . Тогда $h(w_3) = h(w_4) = h(u_2) + 1 = h(u_1) + 1 = h(w_1)$, значит $w_3, w_4 \in \partial G$ и $\{w_3, w_4\}, \{u_2 w_3, u_2 w_4\}$ — усы. Пусть $V' = \{w_1, w_2, u_1, v, u_2, w_3, w_4, p\}$, $E' = \{e_1, e_2, f_1, \{vp\}, f_2, e_3, e_4\}$. Тогда дерево (V', E') совпадает с T_5 (рис. 5).

Утверждение доказано.

Пусть теперь дано некоторое бинарное дерево G с $|\partial G| > 4$. Сократим его следующим образом. Если $|\partial G| = 5$, удалим из G вершину степени 1, а также смежную ей вершину и инцидентное ей ребро (что попадает под первый из далее описанных двух случаев). Если $|\partial G| > 5$, найдём в G поддерево из утверждения (5.1):

— Если это поддерево совпадает с $T_4(p)$, удалим из дерева G вершины u_2, v и ребро f_2 . При этом, в получившемся дереве G' ребро $\{u_1 p\}$ является корневым для усов $\{w_1, w_2\}, \{e_1, e_2\}$.

— Если это поддерево совпадает с $T_5(p)$, удалим из дерева G усы $\{w_3, w_4\}, \{e_3, e_4\}$, а также вершину v и ребро f_2 . При этом, в получившемся дереве G' ребро $\{u_1 p\}$ является, как и в первом случае, корневым для усов $\{w_1, w_2\}, \{e_1, e_2\}$.

Обозначим через T_0 бинарное дерево с четырьмя вершинами степени 1. Его топология единственна: дерево содержит двое усов с общим корневым ребром. Теперь, если имеется некоторое бинарное дерево G , то последовательно применяя описанное выше действие, сократим его до T_0 . Значит, идя обратным ходом и применяя обратные действия, можно из T_0 получить дерево G :

Утверждение 5.2. Пусть G — бинарное дерево, $|\partial G| > 4$. Тогда G можно получить из T_0 как результат последовательного применения на каждом шаге одной из двух операций:

(1) добавления одной граничной вершины, а также разделения корневого ребра некоторых усов дерева с помощью вершины, соединяемой ребром с новой граничной вершиной;

(2) добавления двух граничных вершин, соединённых усами, корневое ребро которых инцидентно вершине, разделившей корневое ребро некоторых усов дерева.

6 Основная оценка.

Заметим, что в утверждении 4.2 описан способ перестроения двойного обхода некоторого бинарного дерева, когда к этому дереву применена в точности операция (1) из утверждения 5.2, а в утверждении 4.3 — соответственно операция (2). Эти утверждения лежат в основе доказательства основной оценки на вес параметрического заполнения метрического пространства \mathcal{M}_N , имеющего тип бинарного вложенного в плоскость дерева. Идея заключается в том, что для данного бинарного дерева G строится последовательность бинарных деревьев, начиная с T_0 и заканчивая G , где каждое последующее дерево получается из предыдущего применением операции (1) или (2) из утверждения 5.2. Двойной обход каждого дерева (кроме T_0 , где мы его определим) получается из двойного обхода предыдущего описанным в утверждениях 4.2 и 4.3 перестроением, за счёт чего будут справедливы соответствующие оценки на планарные длины некоторых путей обхода. В конечном итоге мы построим таким образом двойной обход для дерева G , а оценка планарных длин его путей позволит оценить вес самого обхода в случае, когда (G, ω) является заполнением метрического пространства \mathcal{M}_N . Вес любого двойного обхода бинарного дерева равен удвоенному весу дерева, таким образом мы получим оценку веса минимального заполнения типа G пространства \mathcal{M}_N .

Утверждение 6.1. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — параметрическое заполнение типа G метрического пространства \mathcal{M}_N , $N \geq 4$, причём G вложено в плоскость, т.е. $(1, \dots, N)$ — планарный порядок на G . Тогда

$$\omega(G) \geq 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $T_0 = G_0, G_1, \dots, G_n = G$ и $\pi_0, \dots, \pi_n = (1, \dots, N)$ — последовательности соответственно бинарных деревьев и планарных порядков на них, таких что G_{i-1} получено из G_i применением одной из двух операций сокращения, описанных в предыдущей главе, а π_{i-1} получен из π_i удалением соответствующих граничных вершин. Построим для дерева G_i двойной обход Γ_i следующим индуктивным способом. В Γ_0 два пути

соединяют вершины одних усов, а два других пути соединяют вершины через одну (рис. 6):

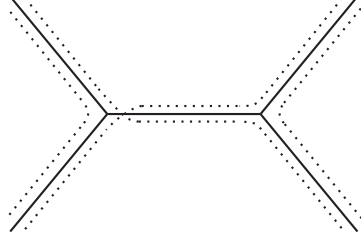


Рис. 6

Пусть $k_i = |\partial G_i|$. Обозначим $z_{\pi_i}(\Gamma_i) = (d_1^i, \dots, d_{k_i}^i)$. Таким образом, $z_{\pi_0}(\Gamma_0) = (1, 1, 2, 2)$. Обход Γ_{i+1} получается из Γ_i согласно преобразованиям, описанным в утверждениях 4.2 и 4.3, а именно:

(1) если при переходе от G_i к G_{i+1} имело место добавление одной граничной вершины q^{i+1} , разделение корневого ребра e^i усов $\{w_1^i, w_2^i\}, \{v^i w_1^i, v^i w_2^i\}$ с помощью вершины r^{i+1} и добавление ребра $\{q^{i+1}, r^{i+1}\}$ (рис. 3), то для Γ_{i+1} справедливо следующее

$$\begin{aligned} z_{\pi_{i+1}}(\Gamma_{i+1}) &= (2, c_1^{i+1}, \dots, c_{k_i}^{i+1}), \\ (c_1^{i+1}, \dots, c_{k_i}^{i+1}) &\geq z_{\pi_i}(\Gamma_i); \end{aligned} \quad (3)$$

(2) если при переходе от G_i к G_{i+1} имело место разделение корневого ребра e^i усов $\{w_1^i, w_2^i\}, \{v^i w_1^i, v^i w_2^i\}$ с помощью вершины r^{i+1} , добавление усов $\{w_3^{i+1}, w_4^{i+1}\}, \{u^{i+1} w_3^{i+1}, u^{i+1} w_4^{i+1}\}$ (w_3^{i+1}, w_4^{i+1} — граничные вершины) с корневым ребром $\{u^{i+1}, r^{i+1}\}$ (рис. 4), то справедливо следующее

$$\begin{aligned} z_{\pi_{i+1}}(\Gamma_{i+1}) &= (1, 3, \alpha^{i+1}, \beta^{i+1}, c_1^{i+1}, \dots, c_{k_i-2}^{i+1}), \\ z_{\pi_i}(\Gamma_i) &= (\alpha^i, \beta^i, c_1^i, \dots, c_{k_i-2}^i), \\ \alpha^{i+1} &\geq \alpha^i + 1, \beta^{i+1} \geq \beta^i + 1, (c_1^{i+1}, \dots, c_{k_i-2}^{i+1}) \geq (c_1^i, \dots, c_{k_i-2}^i). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что

$$d_j^i \leq \left\lceil \frac{k_i}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \leq \frac{N}{2} \quad \text{для любых } 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i,$$

где первое неравенство справедливо в силу определения $z_{\pi_i}(\gamma_{st})$ как минимального количества вершин в планарном порядке π_i , разделяющих вершины s и t (минимального из двух возможных вариантов: один обходит вершины согласно ориентации обхода, другой — в противоположном направлении). Тогда

$$\frac{d_j^i \pi}{N} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{для любых } 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i,$$

и в силу возрастания синуса на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ следует, что если $\gamma_{s_1 t_1} \in \Gamma_i$, $\gamma_{s_2 t_2} \in \Gamma_{i+1}$, то

$$\sin \frac{z_{\pi_{i+1}}(\gamma_{s_2 t_2})\pi}{N} \geq \sin \frac{z_{\pi_i}(\gamma_{s_1 t_1})\pi}{N}, \quad \text{при } z_{\pi_{i+1}}(\gamma_{s_2 t_2}) \geq z_{\pi_i}(\gamma_{s_1 t_1}). \quad (5)$$

Определим для Γ_i величину

$$m_i = \sum_{j=1}^{k_i} \sin \frac{d_j^i \pi}{N}.$$

Тогда при переходе от G_i к G_{i+1} с помощью операции (1) в силу оценок (3), (5) справедливо соотношение

$$m_{i+1} \geq m_i + \sin \frac{2\pi}{N}, \quad \text{при применении операции (1),} \quad (6)$$

а при переходе в случае операции (2) в силу оценок (4), (5)

$$m_{i+1} \geq m_i + \sin \frac{\pi}{N} + \sin \frac{3\pi}{N} + \left(\sin \frac{(l+1)\pi}{N} - \sin \frac{l\pi}{N} \right) + \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{N} - \sin \frac{j\pi}{N} \right),$$

где разности синусов, стоящие в скобках, соответствуют увеличению планарных длин двух путей по меньшей мере на 1. Рассмотрим следующую величину

$$\begin{aligned} \delta &= \sin \frac{\pi}{N} + \sin \frac{3\pi}{N} + \left(\sin \frac{(l+1)\pi}{N} - \sin \frac{l\pi}{N} \right) + \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{N} - \sin \frac{j\pi}{N} \right) - \\ &- 2 \sin \frac{2\pi}{N} = \left(\sin \frac{3\pi}{N} - \sin \frac{2\pi}{N} \right) - \left(\sin \frac{2\pi}{N} - \sin \frac{\pi}{N} \right) + \left(\sin \frac{(l+1)\pi}{N} - \right. \\ &- \left. \sin \frac{l\pi}{N} \right) + \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{N} - \sin \frac{j\pi}{N} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{2N} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{2N} - \cos \frac{3\pi}{2N} + \right. \\ &+ \left. \cos \frac{(2l+1)\pi}{2N} + \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{2N} \cdot \left(\cos \frac{(2l+1)\pi}{2N} + \right. \\ &+ \left. \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N} - 2 \sin \frac{\pi}{2N} \sin \frac{2\pi}{N} \right). \end{aligned}$$

Так как на текущем шаге количество граничных вершин было увеличено на 2, то $k \leq N - 2$, и тогда $l, j \leq [\frac{k}{2}] \leq [\frac{N}{2}] - 1 \leq \frac{N}{2} - 1$. В силу убывания косинуса на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ справедливо

$$\cos \frac{(2l+1)\pi}{2N} + \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N} \geq 2 \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} = 2 \sin \frac{\pi}{2N}.$$

Тогда

$$\delta \geq 2 \sin \frac{\pi}{2N} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{2N} - 2 \sin \frac{\pi}{2N} \sin \frac{2\pi}{N} \right) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2N} \cdot \left(1 - \sin \frac{2\pi}{N} \right) > 0.$$

Значит,

$$\sin \frac{\pi}{N} + \sin \frac{3\pi}{N} + \left(\sin \frac{(l+1)\pi}{N} - \sin \frac{l\pi}{N} \right) + \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{N} - \sin \frac{j\pi}{N} \right) > 2 \sin \frac{2\pi}{N},$$

и тогда

$$m_{i+1} > m_i + 2 \sin \frac{2\pi}{N}, \quad \text{при применении операции (2)}. \quad (7)$$

При последовательном применении операций (1) или (2) мы получили из дерева T_0 дерево G , увеличив тем самым число граничных вершин на $(N - 4)$. Применяя на каждом шаге неравенство (6) для операции (1) и неравенство (7) для операции (2), мы приходим к следующей оценке

$$m_n \geq m_0 + (N - 4) \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Учитывая, что $m_0 = 2 \sin \frac{\pi}{N} + 2 \sin \frac{2\pi}{N}$, мы получаем нижнюю оценку для m_n :

$$m_n \geq 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}. \quad (8)$$

Заметим теперь, что так как $\pi_n = (1, \dots, N)$ — планарный порядок на G , то $z_{\pi_n}(\gamma_{ij}) = \min\{|i - j|, N - |i - j|\}$, где γ_{ij} — путь в G , соединяющий вершины i и j метрического пространства \mathcal{M} . Тогда

$$2m_n = \sum_{\gamma_{ij} \in \Gamma} 2 \sin \frac{z_{\pi_n} \cdot \pi}{N} = \sum_{\gamma_{ij} \in \Gamma} \rho_N(i, j). \quad (9)$$

Из определения параметрического заполнения типа G метрического пространства \mathcal{M}_N следует $\omega(\gamma_{ij}) \geq \rho_N(i, j)$. Просуммируем это неравенство по всем путям обхода Γ_n и, учитывая равенство (9), получим

$$\omega(\Gamma_n) \geq 2m_n. \quad (10)$$

Обход Γ_n двойной по построению, значит его вес равен удвоенному весу дерева G :

$$2\omega(G) = \omega(\Gamma_n), \quad (11)$$

откуда, используя неравенство (10), получим $\omega(G) \geq m_n$. Учитывая оценку (8), заключаем

$$\omega(G) \geq 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Утверждение доказано.

Замечание 1. Если $N = 3$, то тип минимального заполнения \mathcal{M}_3 представляет собой звезду с внутренней вершиной степени 3. При этом любой

двойной обход на \mathcal{M}_3 совпадает с обходом $(1, 2, 3)$. Пространство \mathcal{M}_3 является аддитивным, его минимальное заполнение совпадает с порождающим деревом. Тогда

$$g(\mathcal{M}_3) = \frac{1}{2}(\rho_3(1, 2) + \rho_3(1, 3) + \rho_3(2, 3)) = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

что совпадает с величиной $2 \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}$. Значит, утверждение 6.1 справедливо при $N \geq 3$.

Замечание 2. В случае, если на каком-то шаге была применена операция (2), то в силу неравенства (7) неравенство (2) будет строгим. А условие возникновения операции (2) эквивалентно тому, что число усов в дереве G больше двух. Отсюда следует, что в неравенстве (2) равенство может быть достигнуто только если дерево G содержит двое усов.

7 Экстремальность G_0 в случае вложенности деревьев в плоскость.

Из последнего замечания предыдущей главы следует, что минимальные параметрические заполнения пространства \mathcal{M}_N типа бинарного вложенного в плоскость дерева следует искать среди тех, типом которых является дерево с двумя усами. В главе 3 было рассмотрено одно из таких деревьев, обозначенное нами G_0 (рис. 2). Длина минимального параметрического заполнения типа G_0 пространства \mathcal{M}_N равна $2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}$. Из оценки (2) следует, что на G_0 достигается вес минимального заполнения. Среди всех вложенных в плоскость бинарных деревьев с двумя усами его особенностью является то, что граничные вершины, не содержащиеся в усах, обходятся последовательно при планарном обходе $(1, \dots, N)$, или, что эквивалентно, в нём нет двух граничных вершин, каждая из которых не принадлежит никаким усам, таких что они лежат по разные стороны от некоторых усов при планарном обходе $(1, \dots, N)$.

Покажем далее, что если G содержит двое усов и $G \neq G_0$, то в случае вложенности G в плоскость любое заполнение типа G метрического пространства \mathcal{M}_N не будет являться минимальным.

Утверждение 7.1. Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево, содержащее двое усов, $\mathcal{G} = (G, \omega)$ — параметрическое заполнение типа G метрического пространства \mathcal{M}_N , $N \geq 6$, причём G вложено в плоскость, т.е. $(1, \dots, N)$ — планарный порядок на G . Предположим, что существует i , такое что вершины $i + 1, i + 2$ принадлежат одним усам, а каждая из вершин i и $i + 3$ не принадлежит никаким усам (вершина $N + j =$ вершина j). Тогда

$$\omega(G) > 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Доказательство. Подобно тому, как это делалось в доказательстве утверждения 6.1, мы будем постепенно сокращать дерево до T_0 , однако удаляя только одиночные граничные вершины (не принадлежащие усам) в силу наличия в G лишь двух усов (меньшее число усов бинарное дерево содержать не может). На каких-то двух шагах мы последовательно удалим граничные вершины, лежащие по разные стороны от усов. Запомним это место и продолжим сокращать дерево до T_0 . Построим двойной обход для T_0 как на рис. 6. Далее таким же образом, как мы сокращали дерево G до дерева T_0 , мы будем в обратном порядке восстанавливать из дерева T_0 дерево G , при этом двойной обход будем перестраивать на каждом шагу так, как мы это делали в доказательстве утверждения 6.1. При этом все неравенства вида (6) останутся в силе. Когда мы дойдём до того места, где мы последовательно удаляли две вершины, лежащие по разные стороны от усов (пусть этот шаг имеет номер k), добавим к дереву сразу обе эти вершины и перестроим обход следующим образом (рис. 7):

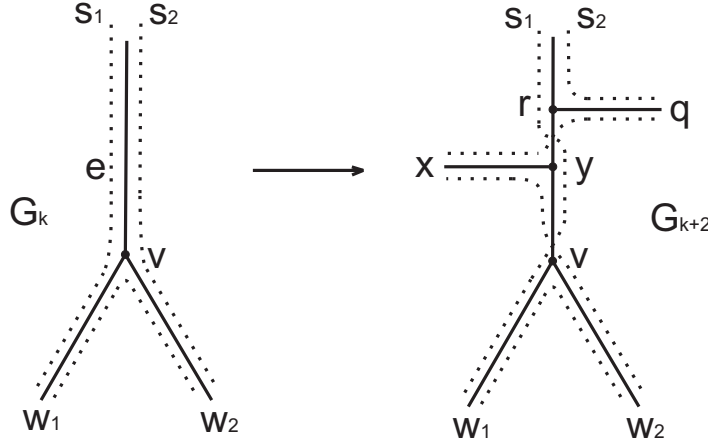


Рис. 7

Таким образом, $\Gamma_{k+2} = \Gamma_k \setminus \{\gamma_{s_2 w_2}\} \cup \{\gamma_{s_2 q}, \gamma_{q x}, \gamma_{w_2 x}\}$. При этом

$$\begin{aligned} z_{\pi_{k+2}}(\gamma_{s_1 w_1}) &> z_{\pi_k}(\gamma_{s_1 w_1}), & z_{\pi_{k+2}}(\gamma_{s_2 q}) &\geq z_{\pi_k}(\gamma_{s_2 w_2}), \\ z_{\pi_{k+2}}(\gamma_{w_2 x}) &= 2, & z_{\pi_{k+2}}(\gamma_{q x}) &= 3, \end{aligned}$$

а планарные длины остальных путей Γ_k после добавления вершин q, x по крайней мере не уменьшились. Значит,

$$m_{k+2} > m_k + \sin \frac{2\pi}{N} + \sin \frac{3\pi}{N} > m_k + 2 \sin \frac{2\pi}{N}, \quad (12)$$

т.е. мы имеем строгую оценку. После этого шага продолжим восстанавливать дерево G и перестраивать двойной обход как в доказательстве утверждения 6.1, получая нестрогие оценки вида (6). В результате, когда мы полностью восстановим дерево $G = G_n$ и построим для него двойной обход

Γ_n , мы за счёт строгой оценки (12) получим строгую оценку

$$m_n > 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N},$$

откуда в силу неравенства (10) и равенства (11) следует

$$\omega(G) > 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Утверждение доказано.

Таким образом, мы показали, что среди всех вложенных в плоскость бинарных деревьев минимальное заполнение метрического пространства \mathcal{M}_N реализуется на дереве G_0 и его вес равен $2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}$.

8 Заключение.

Если в дальнейшем будет доказана формула $g(\mathcal{M}_N) = 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N}$, что означало бы справедливость оценки (2) для всех типов заполнений метрического пространства \mathcal{M}_N , а не только для вложенных в плоскость деревьев, то из этого будет следовать интересное наблюдение:

$$g(\mathcal{M}_N) = 2 \sin \frac{\pi}{N} + (N - 2) \sin \frac{2\pi}{N} \rightarrow 2\pi, \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

т.е. длина минимального заполнения \mathcal{M}_N стремится к длине описанной около правильного N -угольника единичной окружности. Заметим также, что к тому же пределу будет стремиться длина кратчайшего дерева, соединяющего вершины правильного N -угольника:

$$\rho(SMT(\mathcal{M}_N)) = 2(N - 1) \sin \frac{\pi}{N} \rightarrow 2\pi, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Список литературы

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, готовится к печати.