

Московский Государственный Университет  
Механико-математический факультет

**Замкнутые локально минимальные сети на выпуклых  
многогранниках**

Дипломная работа студентки 507 группы Стрелковой Наталии Павловны  
Научный руководитель: Тужилин Алексей Августинovich

Москва, 2010 год

## Содержание

1	Введение	1
2	Определения и предварительные результаты	3
3	Общие свойства минимальных сетей на многогранниках	11
4	Накрывающие комплексы	12
5	Реализация плоских графов как минимальных сетей на выпуклых многогранниках	17
6	Принципиальное сведение задачи к изучению минимальных сетей в простом положении	20
7	Минимальные сети на двухсторонних треугольниках	23
8	Минимальные сети на неравногранных тетраэдрах	30

## 1 Введение

Точное определение сети как геометрической реализации графа мы дадим ниже, а сейчас, во введении, назовём *сетью в метрическом пространстве*  $X$  всякое связное непустое множество  $N \subset X$ , представимое в виде объединения конечного числа спрямляемых вложенных кривых, внутренности которых попарно не пересекаются. Здесь вложенной кривой мы называем образ отрезка при непрерывном и взаимно-однозначном на внутренности отрезка отображении. Длиной сети назовём сумму длин кривых, объединением которых она является. Ясно, что длина сети определена корректно, т.е. не зависит от выбора разбиения сети на кривые. Пусть  $D$  – конечное подмножество точек в  $X$ . Сеть  $N_0$  назовём *кратчайшей сетью с границей  $D$  в  $X$* , если  $D \subset N_0$  и любая сеть  $N'$  в  $X$  такая, что  $D \subset N'$ , имеет длину не меньшую, чем длина  $N_0$ . Сеть  $N_0$  назовём *локально минимальной сетью с границей  $D$  в  $X$* , если  $D \subset N_0$  и для любой точки  $P \in N_0$  и любой её достаточно малой замкнутой окрестности  $B_P$  такой, что множество  $N_0 \cap B_P$  связно, это множество  $N_0 \cap B_P$  является кратчайшей сетью с границей  $(D \cap B_P) \cup (\partial B_P \cap N_0)$ , где через  $\partial B_P$  обозначена граница окрестности  $B_P$ .

Всякая кратчайшая геодезическая является кратчайшей сетью с границей, состоящей из её концов. Таким образом, кратчайшие сети – это обобщение кратчайших геодезических для случая, когда нужно «соединить» более двух точек. Локально минимальные сети, в свою очередь, являются обобщением произвольных, не обязательно кратчайших, геодезических. Локально минимальную сеть, не являющуюся геодезической, будем называть *нетривиальной*. Нас будут интересовать только нетривиальные локально минимальные сети с пустой границей, которые мы и называем *замкнутыми локально минимальными сетями*, или, кратко, *минимальными сетями*.

На плоскости замкнутых локально минимальных сетей нет; на сфере всего 9 различных замкнутых локально минимальных сетей, с точностью до изометрий сферы; на плоских торах, плоских бутылках Клейна и равногранных тетраэдрах существенно различных замкнутых локально минимальных сетей бесконечно много и они хорошо изучены; имеются результаты, касающиеся замкнутых локально минимальных сетей на двумерных поверхностях постоянной отрицательной кривизны и поверхностях правильных многогранников (см. [1]).

Мы рассматриваем замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников. Такие сети имеют простую локальную структуру: они представляют собой несколько точек, соединённых геодезическими так, что из каждой точки выходит три геодезические, образуя между собой три угла по  $120^\circ$ .

## Основные задачи.

**Задача 1.** *Изучение множества многогранников с минимальными сетями.*

Хочется понять, что отличает многогранники, на которых можно построить хотя бы одну минимальную сеть, от всех остальных многогранников. Хочется понять, что можно сказать о топологических свойствах подмножества многогранников с минимальными сетями, например, ответить на вопрос, является ли это подмножество замкнутым в каком-нибудь смысле.

В этом направлении известно пока очень мало. В разделе 3 даны простейшие необходимые условия существования минимальной сети на многограннике. Доказано, что эти необходимые условия (теоремы 5 и 6) уже в случае тетраэдров не являются достаточными (теорема 21 из раздела 8). Таким образом, множество обладающих минимальной сетью многогранников устроено не так просто, как можно было бы ожидать. Это всё, что пока что известно.

Стоит отметить, что в случае замкнутых несамопересекающихся геодезических на выпуклых многогранниках ситуация похожая: необходимое условие на кривизны вершин многогранника, аналогичное условию из теоремы 5, не является достаточным (см. [3]), и, насколько мне известно, нет ни одного критерия, определяющего, есть ли на данном выпуклом многограннике замкнутая несамопересекающаяся геодезическая.

**Задача 2.** *Описание минимальных сетей на конкретных выпуклых многогранниках.*

В работе [2] описаны минимальные сети на равногранных тетраэдрах. В настоящей работе мы рассмотрим вырожденные выпуклые многогранники с тремя вершинами – мы называем их двухсторонними треугольниками. Оказывается, что с точностью до преобразования подобия существует всего три двухсторонних треугольника, обладающих минимальными сетями. Для двух из этих трёх двухсторонних треугольников мы дадим полную классификацию минимальных сетей, см. раздел 7. Кроме того, мы докажем целый ряд фактов, касающихся минимальных сетей на неравногранных тетраэдрах, см. раздел 8.

**Задача 3.** *Дан плоский граф. Выяснить, может ли он быть реализован как минимальная сеть на каком-нибудь выпуклом многограннике.*

Рассмотрим вложенный граф  $G$  на сфере, точнее, геометрическую реализацию на сфере какого-нибудь планарного графа. Возникает вопрос: существует ли гомеоморфизм, переводящий сферу в выпуклый многогранник, а граф  $G$  – в замкнутую локально минимальную сеть на этом многограннике? Если да, то какими могут получиться длины рёбер этой сети? Ответ на первый вопрос даёт следствие к теореме 7, и этот ответ очень прост. Плоский граф может быть реализован как минимальная сеть на выпуклом многограннике тогда и только тогда, когда все его вершины имеют степень три, а все грани не более чем шестиугольны. Более того, для каждого плоского графа можно описать и возможные длины рёбер реализующей его минимальной сети, см. теоремы 7 и 8 в разделе 5.

Попытки решить первую и вторую задачу привели к построению накрывающих комплексов для многогранников, обладающих минимальными сетями, см. раздел 4. В этом разделе мы строим покрытие произвольного выпуклого многогранника с минимальной сетью некоторым плоским комплексом и доказываем некоторые свойства таких комплексов. Минимальные сети всегда поднимаются с многогранника на соответствующий накрывающий комплекс, и задача теоретически сводится к описанию минимальных сетей на этих комплексах. Однако такое описание пока известно лишь для комплексов, являющихся плоскими торами (классификация сетей на плоских торах дана в [6]). В тех редких случаях, когда накрывающим комплексом для многогранника оказывается плоский тор, эта конструкция позволяет спроецировать классификацию минимальных сетей с плоского тора на многогранник, см. раздел 7.

В разделе 5 показано, что любая минимальная сеть, реализующаяся на каком-нибудь многограннике, может быть реализована с той же топологией и теми же длинами рёбер на некотором новом многограннике *в простом положении* – т.е. так, что каждая вершина нового многогранника содержится в *отдельной* ячейке сети. Это существенно, так как класс многогранников, имеющих минимальные сети в простом положении, в некотором смысле гораздо уже класса всех

многогранников, имеющих минимальные сети. В разделе 6 показано, как осуществить переход от многогранника с минимальными сетями к соответствующему многограннику, имеющему те же минимальные сети, но в простом положении, см. теорему 9.

Я пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку этой задачи и постоянное внимание к моей работе. Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-3224.2010.1, гранта РФФИ, проект 10-01-00748-а, программы Развитие научного потенциала высшей школы, проект РНП 2.1.1.3704\*\*.

## 2 Определения и предварительные результаты

### Многогранники.

*Простым плоским многоугольником* будем называть подмножество плоскости, ограниченное замкнутой несамопересекающейся ломаной с конечным числом звеньев. По умолчанию все плоские многоугольники предполагаются открытыми, однако в разных ситуациях мы будем включать в плоский многоугольник его границу или её часть – некоторые стороны.

*Невырожденным замкнутым выпуклым многогранником* будем называть граничную поверхность пересечения конечного числа замкнутых полупространств трёхмерного пространства, если это пересечение ограничено и содержит хотя бы один трёхмерный шар.

*Вырожденным замкнутым выпуклым многогранником* будем называть граничную поверхность этого пересечения в случае, если оно не содержит ни одного трёхмерного шара, но ограничено и содержит хотя бы один двумерный шар. Такой многогранник состоит из двух равных выпуклых плоских многоугольников, склеенных по соответственным сторонам.

Плоскости, ограничивающие многогранник, пересекаются с ним по плоским многоугольникам, которые мы будем называть *гранями* многогранника.

*Незамкнутым выпуклым многогранником* будем называть любое множество  $M$ , представимое как часть некоторого замкнутого выпуклого многогранника и ограниченное на этом многограннике конечным числом ломаных так, что внутренность множества  $M$  связна.

Везде ниже под словами «*выпуклый многогранник*» или просто «*многогранник*» мы будем понимать замкнутый, возможно, вырожденный выпуклый многогранник. В тех случаях, когда многогранник является обязательно невырожденным, или обязательно вырожденным, или является или может являться незамкнутым, мы будем оговаривать это особо. Подчеркнём ещё раз, что многогранником мы называем именно поверхность, а не ограниченную ею часть пространства.

Нас будет интересовать только внутренняя геометрия многогранников, и не будет интересовать их расположение в трёхмерном пространстве. Всюду, где речь идёт о единственности многогранника, подразумевается единственность с точностью до движения в  $\mathbb{R}^3$ .

### Развёртки.

*Развёрткой* будем называть топологическое пространство, склеенное из конечного числа простых плоских многоугольников. Каждое приклеивающее отображение, переводящее точки одной стороны в склеиваемые с ними точки другой стороны, должно быть изометрией этих двух сторон; никакая сторона не должна склеиваться более, чем с одной другой стороной; развёртка должна быть линейно связна и ориентируема. На всякой развёртке имеется естественная локально евклидова метрика с конечным числом особенностей.

Мы будем всегда предполагать, что на развёртке фиксирована ориентация. Некоторые стороны многоугольников могут ни с чем не склеиваться – их точки составляют *границу развёртки*. *Замкнутой* будем называть развёртку с пустой границей, остальные развёртки будем называть *незамкнутыми*.

**Замечание.** По умолчанию плоские многоугольники, из которых склеивается развёртка, замкнутые (содержат свою границу), и потому развёртка тоже содержит свою границу. Но иногда

мы не будем включать в развёртку все или некоторые стороны многоугольников, составляющие её границу, и тогда будем оговаривать это особо.

*Длиной кривой* на развёртке будем называть сумму длин её связных фрагментов, каждый из которых содержится только в одном многоугольнике развёртки.

### **Внутреннее расстояние.**

Во всяком множестве, где любые две точки соединимы кривой, лежащей в этом множестве и имеющей определённую конечную длину, определяется внутреннее расстояние между точками этого множества: *внутренним расстоянием множества  $M$*  между точками  $A, B \in M$  называется точная нижняя грань длин кривых, лежащих в  $M$ , соединяющих  $A$  и  $B$  и имеющих определённую длину.

У нас часто будет возникать внутреннее расстояние развёртки, многогранника, плоских многоугольников, многоугольников на развёртке и на многограннике (которые будут определены ниже). Всегда по умолчанию все эти объекты рассматриваются как метрические пространства относительно своего внутреннего расстояния. О реализации внутреннего расстояния как длины конкретной кривой см. ниже определение кратчайшей и лемму 3. Две развёртки будем называть *изометричными*, если они изометричны в смысле внутреннего расстояния.

### **Кривизна.**

*Полный угол*  $\circ A$  вокруг точки  $A$  развёртки по определению равен  $2\pi$ , если это внутренняя точка одного из многоугольников развёртки или внутренняя точка одной из сторон многоугольников, не принадлежащая границе развёртки; равен  $\pi$ , если это внутренняя точка стороны многоугольника, принадлежащая границе развёртки; равен сумме углов многоугольников развёртки при этой вершине, если это вершина хотя бы одного многоугольника развёртки.

*Кривизной* точки  $A$  развёртки будем называть величину  $(2\pi - \circ A)$ . Как легко заметить, всякая развёртка имеет конечное (возможно нулевое) число точек ненулевой кривизны. Эти точки мы будем называть *вершинами развёртки*. Развёртку, не имеющую точек отрицательной кривизны, будем называть *развёрткой положительной кривизны*.

Замкнутая развёртка с выброшенными вершинами обладает естественной структурой риманова многообразия с плоской метрикой, а саму развёртку можно рассматривать как плоское риманово многообразие с особенностями.

### **Развёртки и выпуклые многогранники.**

С точки зрения внутренней геометрии всякий многогранник можно рассматривать как развёртку, склеенную из граней многогранника по их рёбрам. Поэтому определение всякого объекта на развёртках, инвариантное по отношению к изометриям развёрток, может быть прямо перенесено на многогранник. В частности, *полный угол вокруг точки многогранника и кривизна точки многогранника* определяются точно так же, как на развёртке.

Очевидно, что для всякого выпуклого многогранника существует развёртка положительной кривизны, изометричная ему в смысле внутреннего расстояния. Следующая теорема отвечает на обратный вопрос в случае развёрток положительной кривизны, гомеоморфных сфере.

**Теорема 1.** *(О существовании многогранника с данной развёрткой) [4]*

*Для всякой гомеоморфной сфере развёртки положительной кривизны существует и единственен изометричный ей выпуклый многогранник.*

Итак, каждой гомеоморфной сфере развёртке положительной кривизны можно поставить в соответствие тот единственный выпуклый многогранник (возможно, вырожденный), который ей изометричен.

### **Ломаные, геодезические, многоугольники.**

Следующие объекты мы определим на развёртках. Рассматривая изометричные им объекты на многогранниках, мы будем пользоваться теми же названиями.

*Ломаной* на развёртке назовём кривую, пересечение которой с каждым многоугольником представляет собой объединение конечного числа конечнозвенных плоских ломаных. *Узлами ломаной* будем называть узлы составляющих её плоских ломаных, а *звеньями* – их звенья.

*Кругом* радиуса  $r$  с центром в точке  $O$  (или *круговой окрестностью* точки  $O$  радиуса  $r$ ) будем называть геометрическое место точек, удалённых от точки  $O$  на внутреннее расстояние не больше  $r$ . Очевидно, что при достаточно малых  $r$  круг с центром в данной точке будет представлять собой объединение конечного числа обычных плоских круговых секторов, лежащих в многоугольниках развёртки.

Для каждой точки ломаной круговая окрестность этой точки с радиусом меньше некоторой величины разбивается ломаной на две части, каждая из которых является объединением конечного числа плоских круговых секторов (это может быть и один сектор, в том числе сектор с нулевым центральным углом – отрезок). Для данной точки данной ломаной круговую окрестность с таким свойством будем называть окрестностью малого радиуса.

Выберем для каждой точки ломаной и каждого круга малого радиуса одну из двух его частей так, чтобы выбранная часть непрерывно зависела от радиуса и от точки ломаной (точнее, от параметра, которым параметризована ломаная). Такой выбор частей будем называть *выбором стороны* ломаной. Для каждой ломаной есть два способа выбрать сторону.

*Углом ломаной* в данной её точке с данной стороны будем называть сумму центральных углов плоских секторов, составляющих выбранную часть круговой окрестности малого радиуса данной точки. Ясно, что сумма углов ломаной в данной точке с двух сторон равна полному углу развёртки вокруг этой точки.

*Кратчайшей с данными концами в данной развёртке* будем называть кривую, имеющую наименьшую длину среди всех кривых на этой развёртке с этими концами.

Часто полезно рассматривать *локально кратчайшую* кривую, т.е. кривую, для любых двух достаточно близких точек которой её часть, соединяющая эти точки, является кратчайшей в развёртке, соединяющей эти точки.

*Геодезической* на развёртке будем называть ломаную, у которой углы во всех точках с обеих сторон равны  $\pi$ . В случае замкнутой развёртки положительной кривизны (в том числе в случае замкнутого выпуклого многогранника) введённое понятие геодезической совпадает с понятием локально кратчайшей кривой. На незамкнутой развёртке и на развёртках, имеющих точки отрицательной кривизны, локально кратчайшая кривая может иметь в некоторых своих точках с некоторых сторон угол, отличный от  $\pi$ , и не быть геодезической в смысле нашего определения.

**Замечание.** Нам будет удобно пользоваться нашим определением геодезической, поскольку мы, во-первых, нигде не встречаемся с точками отрицательной кривизны, и, во-вторых, незамкнутую развёртку мы часто будем расширять и рассматривать как часть другой развёртки, и хочется называть геодезическими те кривые, которые гарантированно и в новой, большой развёртке будут локально кратчайшими.

*Геодезической ломаной* на многограннике будем называть путь, который можно разбить на конечное число путей, каждый из которых является геодезической. Минимальное количество путей в таком разбиении будем называть *числом звеньев* геодезической ломаной, а пути, составляющие разбиение с минимальным их числом, будем называть *звеньями* геодезической ломаной. Иногда мы будем рассматривать геодезическую ломаную как множество точек, т.е. вместо отображения рассматривать его образ. Но часто нам будет важно именно отображение.

Рассмотрим непрерывное отображение плоского замкнутого круга в многогранник, ограничение которого на внутренность круга является гомеоморфизмом. Граничная окружность плоского круга перейдёт при этом в некоторую непрерывную замкнутую кривую на многограннике. Если эта кривая является геодезической ломаной, то образ на многограннике внутренности круга будем называть *геодезическим многоугольником* (или просто *многоугольником*), а образ окружности – его *границей*. Если границу нельзя представить как замкнутую геодезическую ломаную меньше, чем с  $n$  звеньями, а с  $n$  звеньями – можно, то многоугольник будем называть  $n$ -угольником, а узлы этой ломаной – *вершинами* многоугольника.

Итак, многоугольник на многограннике – открытое множество, гомеоморфное открытому двумерному диску. Если граница многоугольника не имеет самопересечений, то многоугольник с добавленной к нему границей будем называть *замкнутым геодезическим многоугольником*. Но граница многоугольника может иметь самопересечения, и в таком случае замыкание многоуголь-

ника на многограннике не обязательно гомеоморфно замкнутому кругу.

**Лемма 1.** [4]

*Всякий геодезический многоугольник изометричен некоторой развёртке.*

**Замечание.** Суть этого утверждения в том, что число компонент связности пересечения геодезического многоугольника с каждой гранью многогранника *конечно*. Это следует, например, из того, что всякая геодезическая либо является частью ребра многогранника, либо пересекает ребра многогранника в конечном числе точек.

Рассмотрим любую развёртку, изометричную нашему геодезическому многоугольнику. Так как наш многоугольник открыт (не содержит свою границу), то и многоугольники изометричной ему развёртки не содержат свои стороны, входящие в границу развёртки. Однако мы можем рассмотреть развёртку из тех же многоугольников с тем же правилом склейки, в которой все многоугольники содержат все свои стороны. Эта развёртка будет естественным замыканием нашего многоугольника как метрического пространства со своей внутренней метрикой.

**Правильным замыканием** многоугольника будем называть изометричную ему развёртку с добавленной к ней границей. Правильное замыкание всякого многоугольника гомеоморфно замкнутому двумерному диску.

*Величиной угла* в вершине многоугольника будем называть величину угла в соответствующей вершине изометричной ему развёртки.

**Пример.** Многогранник с выброшенным ребром  $AB$  – это двуугольник с углами  $\circ A$  и  $\circ B$ .

**Теорема 2.** (*О сумме углов многоугольника*) [4]

*Пусть на гомеоморфной сфере развёртке дан  $n$ -угольник с углами  $\alpha_i$ . Пусть этот  $n$ -угольник содержит вершины многогранника с гауссовыми кривизнами  $K_j$ . Тогда*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n-2) + \sum_j K_j.$$

*Погружённым плоским многоугольником* будем называть развёртку, в которой составляющие её многоугольники можно расположить на плоскости так, что их склеиваемые точки совпадают. Иначе говоря, погружённый плоский многоугольник – это развёртка вместе с отображением её на плоскость, являющимся изометрией при ограничении его на любой из составляющих её многоугольников. Простой плоский многоугольник, разумеется, является частным случаем погружённого. Если погружённый плоский многоугольник не изометричен никакому простому плоскому многоугольнику, то мы будем говорить, что он *перекрывается сам с собой*.

Пусть на многограннике дан геодезический многоугольник, не содержащий вершин многогранника. Нам пригодится утверждение о его «разворачивании» на плоскость.

**Лемма 2.** [4]

*Геодезический многоугольник, не имеющий внутри себя точек ненулевой кривизны, изометричен плоскому погружённому многоугольнику, возможно, перекрывающемуся с самим собой.*

### **Выпуклость многоугольников.**

*Геодезически выпуклым* будем называть подмножество многогранника или развёртки, если любые две его точки можно соединить геодезической, лежащей целиком в этом множестве.

**Лемма 3.** [4]

*В любой развёртке положительной кривизны каждые две точки можно соединить кратчайшей. Эта кратчайшая является геодезической ломаной. Причём преломляться (иметь с какой-то стороны угол, отличный от  $\pi$ ) кратчайшая может только в вершинах границы развёртки, угол развёртки в которых больше  $\pi$ .*

**Следствие.** *Если все внутренние углы геодезического многоугольника меньше или равны  $\pi$ , то он является геодезически выпуклым.*

**Лемма 4.** [4]

Если все внутренние углы геодезического многоугольника меньше или равны  $\pi$ , то любая геодезическая с концами в этом многоугольнике, содержащаяся в его правильном замыкании, целиком содержится и в самом многоугольнике.

Таким образом, если все внутренние углы многоугольника меньше или равны  $\pi$ , то любые две его точки можно соединить геодезической. Нам понадобится внутри такого многоугольника «соединять геодезическими» больше, чем две точки. Этому посвящена следующая лемма.

Пусть дано подмножество  $U$  некоторого многогранника, и множество  $X \subset U$ . Множество  $D$  назовём *охватывающим* для  $X$  в  $U$ , если  $X \subset D \subset U$  и для любых точек  $D_1, D_2 \in D$  любая  $D_1$ - $D_2$ -геодезическая  $\gamma$ , содержащаяся в  $U$ , содержится и в  $D$ . Примером охватывающего множества служит само  $U$ . Для данных  $X$  и  $U$  рассмотрим пересечение  $D_0$  всех охватывающих множеств – несложно проверить, что оно снова будет охватывающим множеством для  $X$  в  $U$ . Мы будем называть это пересечение **выпуклой оболочкой** множества  $X$  в  $U$  и обозначать  $C(X, U)$ .

Итак, *выпуклой оболочкой*  $C = C(X, U)$  множества  $X \subset U$  в множестве  $U$  будем называть наименьшее по включению множество  $C$  такое, что  $X \subset C \subset U$  и любая содержащаяся в  $U$  геодезическая с концами в  $C$  целиком содержится в  $C$ .

**Лемма 5.** (О выпуклой оболочке нескольких точек в многоугольнике с углами  $\leq \pi$ )

Пусть на выпуклом многограннике внутри многоугольника  $U$ , все углы которого меньше или равны  $\pi$ , дано конечное множество точек  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $n \geq 3$ . Тогда выпуклая оболочка  $C = C(X, U)$  либо представляет собой замкнутый геодезический многоугольник со всеми углами меньше или равными  $\pi$ , все вершины которого содержатся в  $X$ , либо является геодезической с концами из  $X$ .

**Доказательство.** Рассмотрим правильное замыкание  $\bar{U}$  многоугольника  $U$  (напомним, что тогда  $\bar{U}$  – это развёртка с включённой границей, внутренность которой изометрична многоугольнику  $U$ ). Далее будем рассматривать на  $\bar{U}$  множество, изометричное множеству  $X$ , обозначая его той же буквой.

Охватывающие множества для  $X$  в  $\bar{U}$  (см. определение охватывающих множеств выше) будем называть для краткости просто *охватывающими*. Рассмотрим пересечение всех замкнутых охватывающих множеств и обозначим его через  $D_0$  (примером замкнутого охватывающего множества служит само  $\bar{U}$ ). Ясно, что  $D_0$  – замкнутое охватывающее множество. Заметим, что лемма будет доказана, если мы покажем, что внутренность  $D_0$  является геодезическим многоугольником, все углы которого меньше или равны  $\pi$ , а все вершины содержатся в  $X$ . Ведь тогда по лемме 4 вся граница многоугольника  $D_0$  содержится во внутренней  $\bar{U}$ , а эта внутренность изометрична нашему многоугольнику  $U$ . Таким образом, имеем множество  $C \subset U$ , изометричное  $D_0 \subset \bar{U}$ . Внутренность  $C$  обладает всеми требуемыми свойствами.

Итак, покажем, что  $D_0$  – геодезический многоугольник с вершинами в  $X$  и углами, не превосходящими  $\pi$ . Рассмотрим на границе  $D_0$  точку  $A \notin X$ . Все дальнейшие рассуждения формально подходят только для точек  $A$ , соприкасающихся с внутренностью  $D_0$ , но на самом деле легко понять, что при правильной интерпретации доказывают всё и в остальных случаях (в частности, в случае, если  $D_0$  – геодезическая, можно считать, что это двуугольник с двумя нулевыми углами).

У точки  $A$ , как и у всякой точки развёртки  $\bar{U}$ , любая её достаточно малая открытая круговая окрестность в  $\bar{U}$  изометрична либо открытому плоскому кругу, либо конусу с положительной кривизной вершины, либо сектору круга с углом при вершине не больше  $\pi$ . В любом случае любая достаточно малая круговая окрестность в  $\bar{U}$  точки  $A$  геодезически выпукла, обозначаем её через  $B_\varepsilon(A, \bar{U})$ . Поскольку все геодезические в  $\bar{U}$  с концами в  $D_0$  лежат в  $D_0$ , получаем, что пересечение  $D_0 \cap B_\varepsilon(A, \bar{U})$  геодезически выпукло.

Пусть  $A_1$  и  $A_2$ , – точки пересечения границы  $D_0$  с границей  $B_\varepsilon(A, \bar{U})$ . Рассмотрим хорду  $A_1 A_2$  круга (или сектора круга, или *кратчайшую* хорду конуса)  $B_\varepsilon(A, \bar{U})$ , она обязательно содержится внутри  $D_0$ . Предположим, что эта хорда не совпадает с участком границы  $D_0$  и рассмотрим область  $\Delta$ , ограниченную хордой  $A_1 A_2$  и участком  $A_1 A_2$  границы  $D_0$ . Заметим, что при достаточно малом  $\varepsilon$  область  $\Delta$  не содержит точек из  $X$  и, более того, множество  $D_0 \setminus \Delta$  является



охватывающим. Докажем это от противного.

Предположим, две точки из  $D_0 \setminus \Delta$  соединены геодезической  $\gamma \subset U$ , не содержащейся в  $D_0 \setminus \Delta$ . Но концы  $\gamma$  содержатся и в  $D_0$ , следовательно,  $\gamma \subset D_0$ . Значит,  $\gamma \cap \Delta$  непусто, значит,  $\gamma$  пересекается с хордой  $A_1A_2$ , но не может выходить за пределы  $D_0$ . Следовательно, геодезическая  $\gamma$  входит внутрь  $\Delta$  в некоторой точке хорды  $A_1A_2$  и выходит из  $\Delta$  в некоторой точке той же хорды. Но тогда соответствующий участок  $\gamma$  и участок хорды  $A_1A_2$  ограничивают двуугольник, лежащий внутри  $\Delta$ . Но внутри  $\Delta$  нет точек ненулевой кривизны, т.е. это плоский двуугольник – а таких не бывает (см. например теорему 2 о сумме углов многоугольника).

Итак, предположив, что хорда  $A_1A_2$  не совпадает с участком границы множества  $D_0$ , мы нашли меньшее, чем  $D_0$ , охватывающее множество, что противоречит определению  $D_0$ . Значит,  $A_1A_2$  совпадает с участком границы  $D_0$ .

Если точка  $A$  точка имеет нулевую кривизну, то это означает, что в её малой окрестности граница  $D_0$  является геодезической.

Предположим, что окрестность в  $\bar{U}$  точки  $A$  изометрична конусу, получается, что кратчайшая хорда этого конуса проходит через его вершину – значит, кривизна вершины конуса нулевая, и это снова круг.

Если же окрестность  $B_\varepsilon(A, \bar{U})$  изометрична сектору, то угол при его вершине должен быть равен  $\pi$ . Получаем, что участок границы  $D_0$  совпадает с участком границы  $\bar{U}$ . Но это невозможно, т.к.  $D_0$  не сможет оторваться от границы  $\bar{U}$  вплоть до вершины  $\bar{U}$ , а в вершине угол сектора-окрестности будет меньше  $\pi$ , противоречие. Если у  $\bar{U}$  нет внутренних углов, отличных от  $\pi$ , то  $D_0$  может совпасть с  $\bar{U}$ , но тогда существует охватывающее множество, строго вложенное в  $D_0$  и ограниченное замкнутой геодезической, «параллельной» границе  $\bar{U}$ .

Итак, граница  $D_0$  всюду, кроме, возможно, принадлежащих ей точек из  $X$ , является геодезической. Кроме того,  $D_0$  – охватывающее множество для не менее чем трёхточечного множества  $X$  внутри многоугольника  $\bar{U}$ , все углы которого не превосходят  $\pi$ . Легко видеть из определения охватывающего множества и односвязности  $\bar{U}$ , что любое охватывающее множество односвязно.

Заметим, что  $D_0$  содержит как минимум один геодезический треугольник  $X_iX_jX_k$  для каждой  $X_i \in X$ , поэтому  $D_0$  гомеоморфно кругу. Значит, внутренность  $D_0$  – геодезический многоугольник с существенными вершинами в  $X$ , а  $D_0$  – его замыкание.

Если на границе  $D_0$  нет точек из  $X$ , то граница  $D_0$  – замкнутая геодезическая  $\delta$ . Тогда легко показать, что существует строго вложенное в  $D_0$  охватывающее множество, ограниченное замкнутой геодезической, «параллельной» геодезической  $\delta$ .

Рассмотрим любую точку  $X_1 \in X$ , лежащую на границе  $D_0$ . Предположим, что угол  $D_0$  в точке  $X_1$  больше  $\pi$ . Тогда граничные точки  $D_0$ , близкие к  $X_1$  и лежащие по разные стороны от неё, соединимы в  $U$  кратчайшей геодезической, не лежащей в  $D_0$  – противоречие.

**Доказательство леммы окончено.**

### Двухсторонние треугольники и тетраэдры.

Полная кривизна (сумма кривизн всех её вершин) всякой гомеоморфной сфере развёртки равна  $4\pi$  ([4]). Но кривизна всякой точки по определению меньше  $2\pi$ . Поэтому всякая гомеоморфная сфере развёртка имеет как минимум три вершины. Всякий замкнутый выпуклый многогранник изометричен развёртке положительной кривизны, гомеоморфной сфере. Поэтому у выпуклого многогранника не меньше трёх вершин.

Выпуклый многогранник с тремя вершинами, очевидно, обязан быть вырожденным и представляет собой пару равных треугольников, склеенных по соответственным сторонам. Мы будем называть такие вырожденные многогранники *двухсторонними треугольниками*.

*Тетраэдром* будем называть выпуклый многогранник с четырьмя вершинами. Напомним, что под вершиной мы понимаем точку ненулевой кривизны. Тетраэдры бывают невырожденными и вырожденными многогранниками. Тетраэдр будем называть *равногранным*, если все его грани равны между собой. Существует много условий, эквивалентных равногранности тетраэдра. Нам понадобится следующий несложный факт.

**Лемма 6.** [5, задача 2.32]

*Все полные углы тетраэдра равны  $\pi$  тогда и только тогда, когда он равногранный.*

### Сети.

Сетью топологии  $G$  в метрическом пространстве  $X$  будем называть геометрическую реализацию связного графа  $G$  в пространстве  $X$ , т.е. пару отображений  $f_v$  и  $f_e$  со следующими свойствами. Отображение  $f_v$  отображает множество  $V$  вершин графа  $G$  в пространство  $X$ , отображение  $f_e$  отображает множество  $E$  рёбер графа  $G$  в пространство кривых в  $X$ , причём так, что для любых двух вершин  $v_1, v_2 \in V$ , соединённых ребром (которое мы обозначим через  $v_1v_2$ ), кривая  $f_e(v_1v_2)$  соединяет точки  $f_v(v_1)$  и  $f_v(v_2)$ .

Соответствующие точки и кривые в  $X$  будем называть *вершинами сети* и *рёбрами сети*.

Мы будем рассматривать сети, в которых все рёбра реализованы как спрямляемые кривые. *Длиной ребра сети* будем называть длину соответствующей кривой, *длиной сети* – сумму длин всех её рёбер.

Под словом «сеть» мы будем иногда понимать не сами отображения, а их образ как подмножество точек в  $X$ . В частности, под словами *точки сети* мы будем понимать точки из  $X$ , являющиеся вершинами сети или принадлежащие рёбрам сети.

Сеть будем называть *вложенной*, если соответствие  $f_v$  между вершинами графа и вершинами сети взаимно-однозначно, а различные рёбра сети не имеют общих точек, кроме общих вершин.

Если дана сеть  $N = (f_v, f_e)$  топологии  $G$  в пространстве  $X$ , и  $\varphi : X \rightarrow Y$  – некоторое непрерывное отображение, то можно рассмотреть сеть-образ  $N_\varphi = (f_{\varphi,v}, f_{\varphi,e})$  топологии  $G$  в  $Y$ , положив  $f_{\varphi,v} = \varphi \circ f_v$ ,  $f_{\varphi,e}(v_1v_2) = \varphi \circ f_e(v_1v_2)$ . Здесь подразумевается, что кривая  $f_e(v_1v_2)$  – это отображение  $f_e(v_1v_2) : I \rightarrow X$  некоторого отрезка  $I$  в  $X$ , а кривая  $\varphi \circ f_e(v_1v_2)$  – это отображение того же отрезка  $I$ , но уже в  $Y$ .

*Гомеоморфными* будем называть сети  $N$  и  $N'$  в пространствах  $X$  и  $Y$ , если существует гомеоморфизм  $\varphi$  пространств  $X$  и  $Y$  такой, что  $N' = N_\varphi$ . *Изометричными* будем называть гомеоморфные сети, если длины их соответственных рёбер равны.

### Минимальные сети.

*Замкнутой локально минимальной сетью* на выпуклом многограннике будем называть вложенную сеть на выпуклом многограннике, если

- (1) рёбра сети являются геодезическими;
- (2) степень каждой вершины сети равна трём и рёбра, сходящиеся в вершине, образуют три угла по  $2\pi/3$ .

**Замечание.** Это определение согласовано с тем общим определением замкнутой локально минимальной сети, которое мы дали во введении. Подробности можно посмотреть в [1]. Мы будем везде ниже для краткости называть замкнутые локально минимальные сети просто *минимальными сетями*.

### Плоские графы, реализация плоских взвешенных графов как минимальных сетей на выпуклых многогранниках.

*Плоским графом* будем называть вложенную сеть на сфере. *Гранью* плоского графа будем называть связную открытую область на сфере, не содержащую точек плоского графа, граница которой полностью состоит из точек плоского графа. Грань будем называть  *$n$ -угольной*, если её граница представима в виде замкнутой кривой, состоящей из  $n$  частей, являющихся рёбрами плоского графа.

Если плоский граф представляет собой минимальную сеть, то его грани мы будем называть *ячейками*.

*Взвешенным графом*  $(G, w)$  будем называть пару, состоящую из графа  $G = (V, E)$  и положительной весовой функции на множестве его рёбер  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , т.е.  $w(e) > 0$  всегда.

Будем говорить, что *плоский граф на сфере  $S$  реализуется на многограннике  $M$  как замкнутая локально минимальная сеть*, если существует гомеоморфизм сферы  $S$  и многогранника  $M$ , переводящий плоский граф в некоторую минимальную сеть на  $M$ .

Будем говорить, что *плоский взвешенный граф*  $(G, w)$  на сфере  $S$  реализуется на многограннике  $M$  как замкнутая локально минимальная сеть с длинами рёбер, заданными весом  $w$ , если существует гомеоморфизм сферы  $S$  и многогранника  $M$ , переводящий данный плоский граф в замкнутую локально минимальную сеть на многограннике  $M$  такую, что длина каждого ребра этой сети равна весу соответствующего ребра графа  $(G, w)$ .

### Склеивание многогранников из развёрток с границей.

Пусть даны два набора чисел  $w = (w_1, \dots, w_n), \varphi = (\varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , причём  $w_j > 0, j = 1, \dots, n; 0 \leq \varphi_j < 2\pi, j = 2, \dots, n$ . Ломаной с параметрами  $w$  и  $\varphi$  будем называть плоскую  $n$ -звенную ломаную  $A_1 \dots A_{n+1}$  такую, что длина её звена  $A_j A_{j+1}$  равна  $w_j$  для  $j = 1, \dots, n$ , а левый угол  $\angle(A_{j-1} A_j A_{j+1}) = \varphi_j, j = 2, \dots, n$ .

Если дана геодезическая ломаная  $C = C_1 \dots C_{n+1}$  на многограннике или на развёртке, и выбрана одна из сторон относительно ломаной, то плоскую ломаную с параметрами  $w_j = |C_j C_{j+1}|, j = 1, \dots, n, \varphi_j = \angle(C_{j-1} C_j C_{j+1}), j = 2, \dots, n$  (угол ломаной с выбранной стороны) называют плоской ломаной, полученной разворачиванием данной ломаной  $C$ . Если ломаная  $C$  замкнута, т.е.  $C_1 = C_{n+1}$ , то определённую выше ломаную будем называть *плоской ломаной, полученной разворачиванием замкнутой ломаной  $C$  с разрывом в вершине  $C_1$* .

Если дана грань взвешенного плоского графа  $(G, w)$ , ограниченная циклом  $v_1 v_2 \dots v_n v_{n+1}$ , где  $v_{n+1} = v_1$ , то ломаную с параметрами  $w_j = w(v_j v_{j+1}), j = 1, \dots, n$  и  $\varphi_j = 2\pi/3, j = 2, \dots, n$  будем называть *плоской ломаной, полученной правильным разворачиванием границы этой грани с разрывом в вершине  $v_1$* .

Дополнением до конуса плоской ломаной  $A_1 \dots A_{n+1}$  будем называть всякую плоскую замкнутую ломаную  $A_1 \dots A_{n+1} X A_1$ , у которой  $|A_{n+1} X| = |X A_1|$ . Вершину  $X$  будем называть *добавленной вершиной конуса*. Если некоторое дополнение до конуса данной ломаной является несамопересекающейся замкнутой ломаной, ограничивающей, следовательно, некоторый плоский многоугольник, и если угол этого многоугольника при добавленной вершине конуса равен  $\alpha$ , то будем говорить, что ломаная *допускает правильное дополнение до конуса с углом  $\alpha$  при вершине*.

Следующая теорема является простым следствием теоремы из книги [4] и приведённого там же её доказательства (см. [4, гл. 5, параграф 1, теорема 9]).

#### **Теорема 3.** (О склеивании многогранников из развёрток с границей) [4]

Пусть дана развёртка с границей, изометричная части  $P$  некоторого замкнутого выпуклого многогранника  $M$ , причём  $M$  не имеет вершин на границе  $P$ . Пусть граница развёртки представляется в виде конечного объединения непересекающихся простых замкнутых ломаных, каждая точка границы развёртки имеет кривизну не больше  $\pi$  и на каждом из граничных контуров есть хотя бы одна точка кривизны строго меньше  $\pi$ .

Тогда существует и единственен замкнутый выпуклый многогранник  $M_1$ , содержащий подмножество  $P_1$ , изометричное нашей развёртке, и такое, что каждая компонента связности  $M_1 \setminus P_1$  содержит ровно одну вершину многогранника  $M_1$ , а на границе  $P_1$  нет вершин многогранника  $M_1$ .

Кроме того, для каждой ломаной  $C_1 \dots C_n C_{n+1}$  (где  $C_{n+1} = C_1$ ) из простых замкнутых ломаных, ограничивающих развёртку, плоская ломаная, полученная разворачиванием ломаной  $C_1 \dots C_n C_{n+1}$ , допускает правильное дополнение до конуса с углом  $(\sum_{j=1}^n \beta_j) - \pi n$  при вершине, где  $\beta_j$  – внутренние углы развёртки в вершинах этой граничной ломаной (соответственно кривизны этих вершин  $2\pi - \beta_j$ ).

**Замечание.** Многогранник  $M_1$  можно явно построить. Изометричная ему развёртка строится совсем просто – достаточно добавить к исходной незамкнутой развёртке многоугольники, ограниченные дополнениями до конусов ломаных, полученных разворачиванием граничных ломаных, о которых идёт речь в последнем абзаце теоремы, и задать естественные правила склейки.

Затем возникает задача построения выпуклого многогранника, изометричного данной развёртке. Существование такого многогранника гарантирует теорема 1. Его рёбрами будут кратчайшие в развёртке, соединяющие вершины. Задача состоит в том, чтобы провести все кратчайшие и выбрать из них рёбра так, чтобы выполнялись неравенства треугольника для многогранного

угла. Эта задача принципиально может быть решена алгоритмически, хотя число возможных структур многогранника быстро растёт с числом вершин.

Но, на самом деле, нас мало интересует явное построение этого многогранника. Ведь мы занимаемся внутренней геометрией многогранников, а все свойства внутренней геометрии одинаковы для многогранника и изометричной ему развёртки. Изучить минимальные сети на многограннике – это то же самое, что и изучить минимальные сети на любой изометричной ему развёртке.

### 3 Общие свойства минимальных сетей на многогранниках

**Теорема 4.** *(Простейшие свойства минимальных сетей на выпуклых многогранниках)*

*Ячейка минимальной сети на выпуклом многограннике не более, чем шестиугольная.*

*Шестиугольная ячейка минимальной сети не содержит внутри себя вершин многогранника.*

*Внутри всякой нешестиугольной ячейки минимальной сети есть хотя бы одна вершина многогранника. Причём если внутри  $n$ -угольной ячейки минимальной сети содержится  $l$  вершин многогранника с кривизнами  $K_j, j = 1, \dots, l$ , то*

$$\sum_{j=1}^l K_j = 2\pi - \frac{\pi n}{3}.$$

*Каждая вершина многогранника лежит в некоторой нешестиугольной ячейке сети.*

**Доказательство.** Непосредственно вытекает из теоремы 2 о сумме углов многоугольника, условия положительности кривизны ( $K_j > 0$ , следует из выпуклости многогранника) и условия на внутренние углы ячейки минимальной сети ( $\alpha_i = 2\pi/3$ , следует из определения минимальной сети).

Доказательство теоремы окончено.

**Теорема 5.** *(Необходимое условие на кривизны вершин многогранника)*

*Если на выпуклом многограннике есть минимальная сеть, то множество  $V$  вершин многогранника можно представить в виде  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_m$ , где различные  $V_i$  не пересекаются и для каждого  $i$  сумма кривизн вершин многогранника, входящих в  $V_i$ , равна одному из пяти чисел  $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ .*

**Доказательство.** По условию на нашем многограннике существуют минимальные сети, рассмотрим одну из них. Достаточно рассмотреть все нешестиугольные ячейки минимальной сети, и обозначить через  $V_i$  множество вершин многогранника, попавших в  $i$ -ую нешестиугольную ячейку сети. Очевидно, что  $V_i$  не пересекаются между собой и в объединении дают всё  $V$ . По теореме 5 для каждого  $i$  сумма кривизн вершин, входящих в  $V_i$ , как раз равна одному из чисел  $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ .

Доказательство теоремы окончено.

**Теорема 6.**

*Если на выпуклом многограннике есть минимальная сеть, то должно существовать разбиение его множества вершин  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_m$ , удовлетворяющее не только условию теоремы 5 на суммы кривизн, но и следующему геометрическому условию.*

*Должна существовать система попарно непересекающихся множеств  $M_i, i = 1, \dots, m$ , каждое из которых является либо геодезическим многоугольником с углами, не превосходящими  $\pi$ , либо геодезической, либо одной точкой. Причём если  $V_i$  состоит только из одной вершины многогранника, то множество  $M_i$  тоже состоит только из одной точки – этой вершины; если  $V_i$  состоит из двух вершин, то  $M_i$  – геодезическая, соединяющая эти две вершины; если  $|V_i| \geq 3$ , то  $M_i$  – геодезический многоугольник, все вершины которого являются вершинами многогранника, лежащими в  $V_i$ , и замыкание которого содержит все вершины из  $V_i$  и не содержит других вершин многогранника.*

**Доказательство.** Как и при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим любую из минимальных сетей на нашем многограннике, и рассмотрим её ячейку  $U_i$ , содержащую вершины

многогранника из множества  $V_i$ . Если  $V_i = \{A\}$ , то положим  $M_i = A$ . Если  $V_i = \{A, B\}$ , то найдём в соответствии с леммой 3  $A$ - $B$ -геодезическую  $\gamma$ , лежащую в нашей ячейке, и положим  $M_i := \gamma$ . Если же  $|V_i| \geq 3$ , воспользуемся леммой 5 – рассмотрим выпуклую оболочку  $C(V_i, U_i)$  множества  $V_i$  в многоугольнике  $U_i$ , и положим  $M_i := C(V_i, U_i)$ . Все необходимые нам свойства  $M_i$  следуют из определения выпуклой оболочки и леммы 5. Такое разбиение вершин и система множеств  $(\{V_i\}, \{M_i\})$  очевидно будет удовлетворять условиям нашей теоремы.

**Доказательство теоремы окончено.**

*Положением* на выпуклом многограннике будем называть разбиение его множества вершин  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_m$  и систему попарно непересекающихся подмножеств многогранника  $\{M_i\}_{i=1}^m$ , если они удовлетворяют условиям теорем 5 и 6, а именно, если для каждого  $i = 1, \dots, m$  сумма кривизн вершин, входящих в  $V_i$ , равна одному из чисел  $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ ;  $V_i \subset M_i$  и множество  $M_i$  является либо точкой из  $V_i$ , либо геодезической с концами в  $V_i$ , либо геодезическим многоугольником с вершинами в  $V_i$ , все углы которого не превосходят  $\pi$ .

Таким образом, теорему 6 можно сформулировать так: *если на выпуклом многограннике есть минимальная сеть, то на этом многограннике есть положение.*

Будем говорить, что минимальная сеть с шестигонными ячейками  $U_i, i = 1, \dots, m$  на многограннике с множеством вершин  $V$  находится в положении  $\{V_i, M_i\}_{i=1}^m$ , если  $V_i = V \cap U_i$  и  $M_i = C(V_i, U_i)$  (здесь  $C(X, U)$  – выпуклая оболочка множества  $X$  в множестве  $U$ , см. определения выше в разделе 2).

*Простым положением* будем называть положение, в котором все  $V_i$  содержат только по одной вершине (и тогда все  $M_i$  одноточечны). Такое положение существует на тех и только тех выпуклых многогранниках, у которых кривизна каждой вершины делится на  $\pi/3$ . Будем говорить, что многогранник относится к типу  $\{k_5, k_4, k_3, k_2, k_1\}$ , если он имеет ровно  $k_j$  вершин с кривизной  $(2\pi - \frac{j\pi}{3})$ ,  $j = 1, \dots, 5$  и не имеет вершин другой кривизны.

## 4 Накрывающие комплексы

Договоримся, что в этом разделе под словом *кривая* понимается несамопересекающаяся ломаная с конечным числом звеньев, а под словом *область* – односвязное открытое подмножество многогранника, граница которого – ломаная с конечным числом звеньев. *Разумным* будем называть всякое множество на многограннике, представимое в виде объединения конечного числа кривых, точек и областей. Кроме того, пустое множество разумно. Класс разумных множеств замкнут относительно операций дополнения, конечного пересечения и конечного объединения. Мы будем в этом разделе иметь дело только с разумными множествами.

### Комплекс-развёртка.

Пусть на многограннике (обозначаем его через  $M$ ) выделено замкнутое разумное множество  $J$  (*дырки*) и отмечено несколько кривых (*разрезов*), объединение которых мы будем обозначать через  $L$ . Причём кривых-разрезов конечное число, возможно, ноль; всякая точка, попавшая в пересечение двух кривых-разрезов, обязательно является концом и первой, и второй кривой; все вершины многогранника содержатся в множестве  $J$ .

Мы собираемся *разрезать* поверхность многогранника по кривым из  $L$ , *вырезать* из поверхности множество  $J$  и *развернуть* на плоскость то, что осталось. При этом у нас может получиться не вложенная в плоскость «развёртка», а «погружённая». Сейчас мы подробно опишем, что всё это означает.

Сразу скажем, что выделение части кривых в отдельное множество «разрезов»  $L$  и невключение в это множество кривых из множества  $J$  не имеет никакого значения для построения комплекса-развёртки. Это будет играть роль дальше, когда мы по разрезам из  $L$  будем склеивать развёртки, а по множеству  $J$  – не будем.

Пусть  $W = M \setminus J \setminus L$ . Мы уже предположили, что все вершины многогранника лежат в  $J$ , поэтому  $W$  не содержит вершин многогранника. Предположим ещё, что  $W$  односвязно. Это необходимо для построения комплекса-развёртки.

Будем называть *следом* замыкание внутри  $W$  компоненты связности пересечения  $W$  с гранью многогранника  $M$ . (Грань многогранника считаем открытой, т.е. рёбра многогранника в неё не включаем.) *Чертой* будем называть компоненту связности пересечения следа с ребром многогранника. Достаточно хорошие  $W$  имеют конечное число следов. Доказывается, что если мы считаем областями и кривыми то, что мы считаем (см. выше), то  $W$  получится как раз достаточно хорошим, и будет иметь конечное число – обозначим через  $n$  – следов.

Ещё раз подчеркнём, что и всякий след, и всякая черта содержатся в  $W$ .

[Можно представлять себе, что мы путешествуем по множеству  $W$  и одновременно изображаем наш путь на плоскости, «выпрямляя» переход с грани на грань. Причём мы рисуем не только наш путь, но и весь след, на котором мы в данный момент находимся. Но если мы будем рисовать всё это на плоскости, то очень возможно, что вскоре и нарисованные следы, и сам путь будут перекрываться и самопересекаться. Поэтому мы для каждого нового следа заводим новую плоскость, параллельную нашей *основной плоскости*. Можно сказать, мы рисуем не *на* основной плоскости, а *над* ней.]

Строго говоря, мы делаем следующее. Рассматриваем параллельные плоскости  $\pi_1, \dots, \pi_n$  в  $\mathbb{R}^3$ . Фиксируем ориентацию в  $\mathbb{R}^3$ , считаем многогранник вложенным в  $\mathbb{R}^3$  и индуцируем ориентацию из  $\mathbb{R}^3$  на поверхность многогранника и на плоскости (так, чтобы ориентация на разных плоскостях совпадала при проекции). Далее две плоских фигуры будем называть *равными*, если одна есть образ другой при движении  $\mathbb{R}^3$  и с сохранением плоской ориентации. [Грани многогранника покрашены снаружи в оранжевый цвет и все многоугольники на плоскостях должны лежать оранжевой стороной вверх.]

Удобно представлять себе *дерево следов*. Рассмотрим граф, множество вершин которого состоит из следов  $W$  и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие следы имеют общую черту. Утверждение: если  $W$  пригодно для разворачивания на плоскость (т.е. односвязно и не содержит вершин многогранника), то этот граф является деревом. *Деревом следов*.

На плоскости  $\pi_1$  рассматриваем плоскую фигуру  $F_1$ , равную следу  $\alpha_1$ . Рассматриваем следы  $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ , соседние со следом  $\alpha_1$  по черте  $x_2, \dots, x_k$  соответственно. Для каждого следа  $\alpha_i$  из этих следов рассматриваем в плоскости  $\pi_i$  фигуру  $F_i$ , равную  $\alpha_i$ . Причём  $F_i$  расположена так, что при ортогональной проекции на плоскость  $\pi_1$  её участок границы, соответствующий черте  $x_i$ , совпадает с соответствующим этой же черте участком границы фигуры  $F_1$ , а проекция  $F_i$  уходит от проекции черты в другую полуплоскость, чем  $F_1$ . Далее для каждого из следов  $\alpha_2, \dots, \alpha_k$  рассматриваем соседние с ним по черте следы, кроме  $\alpha_1$ , и делаем то же самое, и т.д. – движемся по ветвям нашего дерева следов. Две фигуры  $F_i$  и  $F_j$  будем называть *соседними*, если они соответствуют соседним по черте следам на многограннике.

Результат этого процесса – семейство многоугольников  $\{F_i\}$  в пространстве. Рассмотрим комплекс, получающийся из объединения всех фигур  $F_i$  отождествлением у каждой пары соседних фигур их участков границы, соответствующих одной и той же черте. Этот комплекс и назовём комплексом-развёрткой множества  $W$ . Это будет плоское многообразие с краем, причём край, по нашему построению, в комплекс-развёртку не включается.

### Универсальный накрывающий комплекс.

[Дальнейшие рассуждения можно представлять так. Мы путешествуем по множеству  $W \cup L$  и, как и при построении комплекса-развёртки множества  $W$ , изображаем наш путь в пространстве *над* основной плоскостью. Причём каждый раз, когда наш путь на многограннике пересекает какую-то из кривых из  $L$ , мы заводим новую развёртку в пространстве и подклеиваем к той развёртке, с которой мы только что пришли, по соответствующему участку границы.]

Итак, у нас есть комплекс-развёртка множества  $W$ . Мы всё время будем представлять себе её как совокупность фигур, каждая из которых лежит описанным образом в своей плоскости и у нужных пар фигур отмечены отождествляемые участки границ. Рассмотрим границу развёртки. Есть естественное соответствие между её точками и точками границы множества  $W$ . Часть границы множества  $W$  состояла из точек кривых-разрезов из множества  $L$ . При этом каждой точке кривой соответствуют две точки границы развёртки. Пусть всего в  $L$  было  $l$  кривых. Отметим

для каждой кривой два участка границы развёртки, соответствующие этой кривой. Обозначим эти участки через  $a_1, a'_1, \dots, a_l, a'_l$ . При этом часть границы развёртки, соответствующая вырезанному множеству  $J$ , останется неотмеченной.

Теперь будем подклеивать копии развёрток друг к другу. Подклеить к комплексу-развёртке его копию по участку  $a_j$  – значит завести дополнительно  $n$  новых плоскостей, параллельных тем, где реализован первый комплекс-развёртка, и расположить в них комплекс, равный исходному, так, чтобы его участок  $a'_j$  при ортогональной проекции совпадал с участком  $a_j$  исходного комплекса, а сам новый комплекс уходил от этого участка в другую сторону, чем исходный комплекс.

Возьмём одну развёртку. По каждому выделенному участку границы этой развёртки подклеим копию развёртки, т.е. всего подклеим  $2l$  развёрток. Они составляют второй уровень развёрток. К каждой развёртке нового уровня подклеим таким же образом  $2l - 1$  развёрток (одна развёртка – самая первая – уже подклеена), и т.д. Каждый раз для новой подклеиваемой развёртки будем заводить новые плоскости. В результате бесконечного (счётного) числа таких подклеиваний мы получим некоторый бесконечный комплекс. Он похож на ветвящееся во все стороны дерево.

Существует естественное бесконечнолистное накрытие этим комплексом множества  $M \setminus J = W \cup L$ .

### Лемма 7.

*Всякая петля на построенном комплексе стягиваема.*

**Доказательство.**

Это очевидно, так как этот комплекс гомотопен дереву.

[Рассмотрим какую-нибудь петлю. Она компактна, следовательно, пересекается лишь с конечным числом комплексов-развёрток. Зафиксируем одну из этих развёрток, назовём первой, и найдём среди этих развёрток самую дальнюю от первой (одну из самых дальних, в смысле уровней соседства). Петля входит на эту развёртку через некоторую кривую-склейку и выходит через эту же кривую-склейку, не переходя через остальную границу дальней развёртки. (Иначе бы дальняя развёртка уже не была бы одной из самых дальних.) Возможно, петля входит в дальнюю развёртку и выходит из неё несколько раз, но в любом случае существует непрерывная деформация, переводящая нашу петлю в петлю, не заходящую на эту дальнюю развёртку. Теперь петля пересекается уже с меньшим числом развёрток, и повторив эту операцию несколько раз, мы продеформируем исходную петлю в петлю, целиком содержащуюся в первой развёртке. А развёртка односвязна.]

**Доказательство леммы окончено.**

Таким образом, это накрытие универсально, поэтому мы называем этот бесконечный комплекс *универсальным накрывающим комплексом*, или *УН-комплексом*.

### Лемма 8.

*Универсальный накрывающий комплекс можно построить для любого открытого, разумного и не содержащего вершин многогранника множества  $M \setminus J$ .*

*При этом результат построения (комплекс и накрытие) не зависят от способа построения, т.е. от выбора кривых-разрезов, составляющих множество  $L$ .*

**Доказательство.**

При нашем построении мы требовали только разумность всех множеств, замкнутость  $J$ , односвязность множества  $M \setminus J \setminus L$  и отсутствие вершин многогранника в  $M \setminus J$ . Поэтому для доказательства первого утверждения достаточно построить систему кривых-разрезов  $L$  так, что  $M \setminus J \setminus L$  окажется односвязным.

Это легко сделать. Топологически  $M \setminus J$  представляет собой сферу с несколькими замкнутыми дырками – компонентами связности множества  $J$ . Возьмём любую точку  $X \in \int(M \setminus J)$ . Соединим её кривой  $\gamma_1$  с первой дыркой так, что её второй конец – единственная точка, в которой она касается множества  $J$ . Это можно сделать, так как множество  $M \setminus J$  открыто и связно. И легко доказать, так как оно к тому же разумно (можно представить его в виде объединения конечного числа плоских треугольников, и всё получится). И внутренность множества  $(M \setminus J \setminus \gamma_1)$  открыто, связно и разумно, и потому очевидно, что внутри этого множества можно найти кривую  $\gamma_2$  с концами на его границе в точке  $X$  и в некоторой точке на границе второй компоненты связности

множества  $J$ . И так далее – мы соединим все компоненты связности  $J$  между собой, соединив их непересекающимися во внутренних точках кривыми с точкой  $X$ . Обозначим через  $L$  объединение этих кривых, и тогда  $J \cup L$  связно и односвязно и потому  $M \setminus J \setminus L$  односвязно, что и требовалось.

Теперь покажем, что выбор системы разрезов не меняет комплекс. Пусть по множеству  $J$  и системе разрезов  $L$  построен комплекс  $K = K(M, J, L)$ . Рассмотрим любую другую систему разрезов  $L'$ , подходящую для построения комплекса. Рассмотрим полный прообраз кривых из  $L'$  на накрывающем комплексе  $K$ . Это будет система кривых, разбивающая весь комплекс на кусочки, и каждый кусочек будет комплексом-развёрткой множества  $M \setminus J \setminus L'$ , и эти развёртки будут склеены ровно так, как они должны были бы быть склеены в комплексе  $K(M, J, L')$ . В этом можно убедиться, разбив множество  $M \setminus J \setminus L \setminus L'$  на следы и проверив последовательно, как поднимается на покрытие каждый след.

**Доказательство леммы окончено.**

В частности, универсальный накрывающий комплекс строится над всяким многогранником с выброшенными вершинами. Если потом добавить вершины – получится разветвлённое накрытие над многогранником. Любой УН-комплекс, построенный по нашей схеме над подмножеством многогранника, может быть вырезан из УН-комплекса, построенного над этим многогранником без вершин, т.е. имеет место

**Лемма 9.**

*Пусть дан многогранник  $M$ , множество  $J$  и построен универсальный накрывающий комплекс  $K$  над  $M \setminus J$ . Тогда  $K$  изометрично вкладывается в универсальный накрывающий комплекс над этим многогранником без вершин.*

**Доказательство.** Аналогично доказательству второй части леммы 8.

Одну из плоскостей, в которых мы реализуем наши развёртки и на которую мы всё проецируем, будем называть *основной* плоскостью. Параллельные ей плоскости и прямые и вектора будем называть *горизонтальными*, а перпендикулярные ей – *вертикальными*. *Деформацией по вертикали* будем называть преобразование  $\mathbb{R}^3$  вида  $x' = x, y' = y, z' = f(z)$ , где  $f$  – произвольная функция,  $x$  и  $y$  – декартовы координаты в основной плоскости,  $z$  – вертикальная координата.

Предположим, что многогранник и множество  $J$  обладают дополнительным *хорошим свойством*: для каждой компоненты связности множества  $J$  сумма гауссовых кривизн в вершинах многогранника, содержащихся в этой компоненте связности, делится на  $\pi/3$ .

**Лемма 10.**

*Если многогранник  $M$  и множество  $J$  обладают хорошим свойством, то копии комплекса-развёртки, входящие в состав универсального накрывающего комплекса, разбиваются на конечное (не большее шести) число классов таким образом, что внутри класса любые две развёртки совмещаются параллельным переносом на горизонтальный вектор и деформацией по вертикали.*

**Доказательство.**

Рассмотрим комплекс-развёртку нашего многогранника, пусть  $a$  – любой из разрезов,  $a'$  и  $a''$  – участки границы развёртки, соответствующие этому разрезу.  $A \in a$  – любая точка,  $A'$  и  $A''$  – соответствующие точки на  $a'$  и  $a''$ . Рассмотрим любую кривую на развёртке, соединяющую  $a'$  и  $a''$  (и ни в каких других точках не касающуюся границы развёртки). Прообраз этой кривой на многограннике – замкнутая кривая, разбивающая многогранник на два диска. Вспомним, что все вершины находятся в компонентах связности  $J$ , сумма гауссовых кривизн вершин в каждой компоненте делится на  $\pi/3$  и диск содержит несколько таких компонент целиком, ведь кривая не пересекает  $J$ . Поэтому сумма гауссовых кривизн в вершинах, попавших в первый диск, делится на  $\pi/3$ . Тогда и сумма углов поворота нашей кривой (ломаной – у нас все кривые являются ломаными) делится на  $\pi/3$ , включая последний поворот в точке, где находятся её концы. Это следует из теоремы 2 о сумме углов многоугольника на многограннике. Значит, кривая  $a''$  получается из кривой  $a'$  поворотом на угол, кратный  $\pi/3$ , и параллельным переносом в горизонтальной плоскости, и деформацией по вертикали. И вообще таким преобразованием можно любую пару развёрток в нашем комплексе перевести одну в другую. Осталось сказать, что в класс номер  $j$



мы поместим развёртки, получающиеся из фиксированной с помощью поворота на угол  $j\pi/3$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Доказательство леммы окончено.

Итак, при выполнении хорошего свойства в универсальном накрывающем комплексе все развёртки разбиваются на 6 классов, некоторые из них могут быть пустыми. Ясно, что любое движение, переводящее одну развёртку комплекса в другую, переводит весь комплекс в себя (с точностью до вертикальной деформации). Поэтому любой перенос, переводящий какую-то развёртку в какую-то другую развёртку комплекса, переводит все развёртки комплекса в развёртки комплекса.

Дальше, отметим у какой-нибудь развёртки точку – «центр» этой развёртки, и отметим соответствующие точки на всех остальных развёртках. Любые две развёртки совмещаются параллельным переносом одной из них на вектор, соединяющий их центры, и последующим поворотом вокруг центра (и деформацией по вертикали). Рассмотрим развёртки, подклеенные к данной. Пусть  $v_1, \dots, v_f$  – вектора, соединяющие центр данной развёртки с центрами подклеенных к ней. Пусть  $v_1, \dots, v_m$  – вектора, полученные из  $v_1, \dots, v_f$  всевозможными поворотами на углы, кратные  $\pi/3$ . Тогда ясно, что всякий вектор, соединяющий центры двух развёрток, представляется в виде линейной комбинации векторов  $v_1, \dots, v_m$  с целыми (даже неотрицательными) коэффициентами. В том числе этим свойством обладает любой вектор, переводящий наш комплекс в себя. Поэтому ясно, что в множестве векторов, переводящих наш комплекс в себя, можно выбрать целочисленный базис из не более чем  $m$  векторов. Таким образом, доказана

**Лемма 11.**

*При выполнении хорошего свойства существует конечный набор горизонтальных векторов  $v_1, \dots, v_m$  такой, что для любых двух развёрток из одного класса вектор, необходимый для их совмещения, представляется в виде  $n_1v_1 + \dots + n_mv_m$ , где  $n_1, \dots, n_m$  – некоторые целые числа.*

Спроецируем все центры развёрток первого класса на основную плоскость. Из леммы 11 вытекает, что мы получим на плоскости  $m$ -решётку.

Спроецируем центры всех развёрток на основную плоскость. Ясно, что полученную на плоскости картину можно представить как объединение шести (или меньше) одинаковых  $m$ -решёток, сдвинутых и повернутых друг относительно друга.

**Минимальный накрывающий комплекс.**

[Ещё одно усовершенствование изображения наших путешествий по многограннику состоит в том, чтобы рисовать только по одной развёртке каждого класса. Если мы приходим к какой-нибудь границе и должны подклеить развёртку класса, развёртку из которого мы уже изображали, мы не подклеиваем новую развёртку, а отождествляем нужные участки границы у текущей и уже изображённой развёртки и переходим на неё.]

Отождествим в УН-комплексе все пары развёрток, совмещающиеся параллельным переносом на горизонтальный вектор и деформацией по вертикали, если такие пары имеются. Иначе говоря, отождествим развёртки, попавшие в один класс. Полученный комплекс назовём *минимальным накрывающим комплексом*, или *МН-комплексом*, для многогранника  $M$  с дырками  $J$ .

Имеется естественное покрытие множества  $M \setminus J$  МН-комплексом.

*Полным МН-комплексом для многогранника* мы будем называть МН-комплекс над этим многогранником без вершин, дополненный до замкнутого комплекса, разветвлённо накрывающего весь многогранник. Полный МН-комплекс имеет смысл рассматривать в том случае, если кривизны всех вершин многогранника делятся на  $\frac{\pi}{3}$ . Часто в таком случае мы будем опускать слово «полный» и говорить просто о МН-комплексе для этого многогранника.

Из леммы 10 вытекает очевидное

**Следствие.** *Если множество  $M \setminus J$  обладает хорошим свойством, то МН-комплекс состоит из не более чем шести комплекс-развёрток, иначе говоря, покрытие множества  $M \setminus J$  МН-комплексом не более чем шестилისტное.*

**Многогранник с сетью.**

Всё это нам интересно потому, что всякий многогранник с замкнутой локально минимальной сетью на нём обладает всеми необходимыми свойствами для построения этих конструкций.

Достаточно рассмотреть положение  $\{V_i, M_i\}$ , в котором находится минимальная сеть, и в качестве  $J$  взять  $\cup M_i$ , см. раздел 3. Кроме того, ясно, что в таком случае минимальная сеть содержится в  $M \setminus J$  и поднимается до минимальной сети на МН-комплексе и на УН-комплексе. С УН-комплекса сеть проецируется на плоскость, правда, при этом часто появляются самопересечения, а симметрии могут быть устроены сложнее, чем хотелось бы. Успех в случаях равногранных тетраэдров и двух двухсторонних треугольников обусловлен тем, что их МН-комплексы оказываются плоскими торами.

**Род МН-комплексов.**

Рассмотрим многогранник типа  $\{k_5, k_4, k_3, k_2, k_1\}$ , т.е. многогранник с простым положением, имеющий  $k_j$  вершин с полным углом  $\frac{j\pi}{3}$ , т.е. кривизной  $2\pi - \frac{j\pi}{3}$ . Такой многогранник существует для любого набора неотрицательных  $k_j$ , удовлетворяющих соотношению  $5k_1 + 4k_2 + 3k_3 + 2k_4 + k_5 = 12$ . Таких наборов 47. Задача: определить, что топологически представляет собой полный МН-комплекс  $K$  для этого многогранника.

**Лемма 12.**

*Для многогранника типа  $k = \{k_5, k_4, k_3, k_2, k_1\}$  род МН-комплекса  $g = 1$ , если  $k = \{0, 0, 4, 0, 0\}$ , и тогда накрытие многогранника комплексом двулиственное;  $g = -2 + k_2 + k_4$ , если  $k = \{0, k_4, 0, k_2, 0\}$ , и тогда накрытие трёхлистное;  $g = 1 + k_4 + 2k_5$  для остальных  $k$ , накрытие шестилистное.*

**Доказательство.** Посчитаем эйлерову характеристику комплекса  $K$ . Для этого воспользуемся имеющимся разветвлённым накрытием многогранника этим комплексом. Рассмотрим правильную триангуляцию многогранника, пусть в ней  $B$  вершин,  $P$  рёбер и  $\Gamma$  граней. Тогда  $B - P + \Gamma = 2$ , т.к. многогранник гомеоморфен сфере.

Поднимем триангуляцию на комплекс  $K$  с помощью нашего накрытия. Пусть накрытие шестилистное. Тогда  $P_K = 6P$ ,  $\Gamma_K = 6\Gamma$ ,  $B_K = 6B - 5k_1 - 5k_5 - 4k_2 - 4k_4 - 3k_3$ . Значит,  $2 - 2g = B_K - P_K + \Gamma_K = 6 \cdot 2 - 5k_1 - 5k_5 - 4k_2 - 4k_4 - 3k_3 = -2k_4 - 4k_5$ , поскольку  $5k_1 + 4k_2 + 3k_3 + 2k_4 + k_5 = 12$ , и  $g = 1 + k_4 + 2k_5$ .

Пусть теперь накрытие трёхлистное, т.е.  $k_1 = k_3 = k_5 = 0$ . Тогда  $P_K = 3P$ ,  $\Gamma_K = 3\Gamma$ ,  $B_K = 3B - 2k_2 - 2k_4$ . Значит,  $2 - 2g = B_K - P_K + \Gamma_K = 3 \cdot 2 - 2k_2 - 2k_4$ , и  $g = -2 + k_2 + k_4$ .

Если накрытие двулистное, то все  $k_j = 0$ , кроме  $k_3 = 4$ , и тогда  $P_K = 2P$ ,  $\Gamma_K = 2\Gamma$ ,  $B_K = 2B - k_3$ . Значит,  $2 - 2g = B_K - P_K + \Gamma_K = 2 \cdot 2 - k_3$ , и  $g = -1 + \frac{1}{2}k_3 = 1$ .

**Доказательство леммы окончено.**

Ниже в разделе 6 приведён список типов таких многогранников с указанием рода МН-комплекса и других свойств.

## 5 Реализация плоских графов как минимальных сетей на выпуклых многогранниках

Сначала мы сформулируем ряд утверждений, касающихся возможности реализовать плоский взвешенный граф как минимальную сеть на выпуклом многограннике, а затем докажем их.

**Теорема 7.**

*Для взвешенного плоского графа  $(G, w)$  существует выпуклый многогранник, на котором  $(G, w)$  реализуется как минимальная сеть с длинами рёбер, заданными весом  $w$ , тогда и только тогда, когда  $(G, w)$  обладает следующими свойствами.*

- (1) степень каждой вершины равна трём;
- (2) всякая грань является не более чем шестиугольной;
- (3) для каждой из шестиугольных граней ломаная, полученная правильным разворачиванием границы грани, замкнута;

(4) для каждой из четырёхугольных и пятиугольных граней плоская ломаная, полученная правильным разворачиванием границы этой грани, допускает правильное дополнение до конуса с углом  $\pi/3$  при вершине, где  $n = 4$  или  $n = 5$  – число вершин данной грани.

Более того, при выполнении этих свойств всегда существует невырожденный выпуклый многогранник, на котором  $(G, w)$  реализуется как минимальная сеть с длинами рёбер, заданными весом  $w$ .

**Замечание.** Свойства (3) и (4) достаточно проверить для каждой грани только один раз, т.е. для одного (любого) выбора вершины разрыва  $v_1$ , т.к. такое свойство либо выполняется для всех  $n$  способов выбора вершины разрыва, либо не выполняется ни для одного из них.

**Следствие.** Для всякого плоского графа  $G$ , степень всех вершин которого равна трём и все грани которого не более чем шестиугольные, существует невырожденный выпуклый многогранник, на котором  $G$  реализуется как минимальная сеть.

### Теорема 8.

Для всякого взвешенного плоского графа  $(G, w)$ , обладающего свойствами (1) – (4) из теоремы 7, существует единственный (с точностью до расположения в трёхмерном пространстве) выпуклый, возможно, вырожденный, многогранник, на котором  $(G, w)$  реализуется как минимальная сеть с длинами рёбер, заданными весом  $w$ , содержащая в каждой своей нешестиугольной грани ровно одну вершину многогранника (иначе говоря, находящаяся в простом положении, см. определения ниже).

**Доказательство.**

Докажем сформулированные теоремы в удобном нам порядке.

Начнём с доказательства необходимости в теореме 7. Пусть существует выпуклый многогранник  $M$ , на котором плоский взвешенный граф  $(G, w)$  реализован как минимальная сеть. Условие (1) необходимо в силу определения минимальной сети, условие (2) следует из простейших свойств минимальных сетей на выпуклых многогранниках (теорема 4). Условие (3) следует из существования плоского многоугольника, изометричного шестиугольной ячейке сети, поскольку она не содержит внутри себя вершин многогранника (лемма 2). Для доказательства условия (4) достаточно рассмотреть незамкнутый многогранник  $P$ , получающийся из  $M$  удалением всех нешестиугольных ячеек минимальной сети, и применить к нему теорему 3, учитывая, что все  $\beta_j$  – внутренние углы многогранника  $P$  на его границе – равны  $4\pi/3$ .

Докажем теперь существование в теореме 8, откуда сразу будет следовать и достаточность в теореме 7.

Рассмотрим наш взвешенный плоский граф. Для каждой его грани произвольно выберем вершину разрыва и построим плоскую ломаную, полученную правильным разворачиванием границы грани на плоскость.

В силу условия (3) для каждой шестиугольной грани мы получим замкнутую шестизвенную ломаную. Поскольку пять её углов равны  $2\pi/3$  (с одной стороны), то она ограничивает плоский шестиугольник, все углы которого равны  $2\pi/3$ . Поставим в соответствие каждой шестиугольной грани такой плоский шестиугольник.

Каждой нешестиугольной грани  $v_1 \dots v_k v_1$  поставим в соответствие плоский многоугольник, ограниченный ломаной  $A_1 \dots A_k A_{k+1} X A_1$ , полученной правильным разворачиванием границы грани и правильным дополнением до конуса с углом  $\pi k/3$  при добавленной вершине  $X$ . Условие (4) гарантирует существование такого правильного дополнения в случае четырёх- и пятиугольных граней, а для граней с меньшим числом вершин ломаная, полученная правильным разворачиванием их границы, не может иметь самопересечений и, кроме того, всегда может быть дополнена до конуса с нужным нам углом при вершине без появления самопересечений, т.е. в наших терминах *правильно* дополнена.

Теперь рассмотрим развёртку, составленную из всех многоугольников, соответствующих граням нашего плоского графа. Для каждого многоугольника, полученного из нешестиугольной грани, отождествим его стороны, сходящиеся в добавленной вершине конуса:  $A_1 X = X A_{k+1}$ . Кроме того, во всех случаях, когда какие-то две стороны многоугольников соответствуют одно-

му и тому же ребру графа, мы отождествим эти стороны (так, чтобы отождествлялись вершины многоугольников, соответствующие одной и той же вершине графа; эти стороны по построению имеют одинаковую длину).

Множество многоугольников с таким образом заданным правилом склеивания сторон – это развёртка, гомеоморфная сфере, т.к. она гомеоморфна исходной сфере, на которой был реализован наш плоский граф.

Кроме того, ненулевую кривизну будут иметь только вершины развёртки, которые мы называли добавленными вершинами конуса и обозначали через  $X$  (такая вершина ровно одна для каждой шестигульной грани плоского графа, и для каждой шестигульной грани такая вершина – своя). Кривизна этих вершин по построению положительна – она равна  $(2\pi - \pi k/3)$ , где  $1 \leq k \leq 5$  – число вершин соответствующей шестигульной грани.

Граница многоугольников нашей развёртки, не включая стороны, инцидентные добавленным вершинам конуса, представляет собой образ минимальной сети, гомеоморфной нашему плоскому графу и имеющей нужные нам длины рёбер.

Осталось воспользоваться теоремой 1, гарантирующей существование (и даже единственность) выпуклого многогранника  $P$ , изометричного такой развёртке. Изометрия, очевидно, сохраняет свойство сети быть минимальной и реализовывать данный плоский взвешенный граф. Кроме того, ясно, что каждая шестигульная ячейка сети содержит ровно одну вершину многогранника  $P$ .

Существование из теоремы 8 доказано. Докажем теперь единственность многогранника из той же теоремы. Рассмотрим выпуклый многогранник, на котором данный плоский взвешенный граф реализуется как минимальная сеть, содержащая в каждой своей ячейке ровно одну вершину многогранника. На границе каждой шестигульной ячейки  $S_j$  выберем произвольный узел сети  $U_j$  и соединим его кратчайшей  $U_j A_j$  с лежащей в этой ячейке вершиной многогранника  $A_j$  (кратчайшей в этой ячейке, лемма 3). Рассмотрим его развёртку, состоящую из плоских шестигульников, изометричных её шестигульным ячейкам, и плоских многоугольников, изометричных геодезическим  $S_j \setminus U_j A_j$  (лемма 2, в нашем случае легко проверить, что все плоские многоугольники будут вложенными – грубо говоря, из-за того, что у них почти все углы равны  $2\pi/3$ ).

Эта развёртка однозначно определяется классом эквивалентности гомеоморфных плоских графов на сфере, которому принадлежит наша минимальная сеть, длинами рёбер сети и выбором узлов  $U_j$ , именно эту развёртку мы строили при доказательстве существования и мы видели, что построение однозначно (другой выбор узлов разрыва  $U_j$  приводит к изометричной развёртке).

Осталось вспомнить теорему 1, утверждающую, что такая развёртка однозначно определяет изометричный ей выпуклый многогранник. Единственность в теореме 8 доказана.

Осталось доказать существование невырожденного многогранника в теореме 7. Рассмотрим любой многогранник с минимальной сетью данной взвешенной топологии. Предположим, что этот многогранник оказался вырожденным. Тогда он по определению изометричен развёртке, состоящей из двух равных плоских выпуклых многоугольников, склеенных по соответственным сторонам.

Рассмотрим один из этих выпуклых многоугольников, обозначим его через  $A_1 \dots A_n$ . Зафиксируем маленькое положительное  $\varepsilon$  и для каждой вершины  $A_k$  найдём внутри многоугольника  $A_1 \dots A_n$  точку  $B_k$  такую, что расстояние от неё до каждой из двух прямых  $A_k A_{k-1}$  и  $A_k A_{k+1}$  равно  $\varepsilon$ . Обозначим через  $H_k^-$  и  $H_k^+$  основания перпендикуляров из точки  $B_k$  на эти две прямые.

$\varepsilon$  будем считать настолько маленьким, что  $B_1 \dots B_n B_1$  – вложенная замкнутая ломаная с невырожденными рёбрами. Выбросим из многоугольника  $A_1 \dots A_n$  все четырёхугольники  $A_k H_k^- B_k H_k^+$ . То есть рассмотрим многоугольник  $H_1^- B_1 H_1^+ H_2^- B_2 \dots B_n H_n^+$ . Прделаем то же самое со вторым многоугольником развёртки.

Из двух получившихся многоугольников склеим новую развёртку. Оставшийся кусок  $H_k^+ H_{k+1}^-$  каждой стороны  $A_k A_{k+1}$  склеим с тем же отрезком, с которым он склеивался до перестройки многоугольников. Получилась развёртка с границей (состоящей из  $n$  компонент связности). Склеим

теперь всякий отрезок  $B_k H_k^-$  с отрезком  $B_k H_k^+$ , и точно так же во втором многоугольнике.

Полученная развёртка, как легко понять, будет изометрична прямой призме с высотой длины  $2\varepsilon$  и многоугольником  $B_1 \dots B_n$  в основании.

Осталось сказать, что, поскольку минимальная сеть не проходит через вершины многогранника,  $\varepsilon$  можно выбрать настолько малым, что минимальная сеть «целиком помещается» в новой развёртке, вырезанной из старой. И таким образом автоматически на новом многограннике получается «точно такая же» минимальная сеть, т.е. минимальная сеть с той же взвешенной плоской топологией.

Следствие к теореме 7 доказывается совсем просто. У нас нет ограничений на длины рёбер, а дан только плоский граф. Определим вес на рёбрах данного плоского графа: объявим вес каждого ребра равным единице. Легко проверить, что полученный взвешенный плоский граф всегда удовлетворяет всем условиям (1) – (4) из теоремы 7.

Доказательство окончено.

## 6 Принципиальное сведение задачи к изучению минимальных сетей в простом положении

Одна из наших задач состоит в поиске методов для изучения минимальных сетей на конкретных выпуклых многогранниках. Теоремы 5 и 6 из раздела 3 дают необходимые условия существования минимальной сети на выпуклом многограннике. Предположим, что наш многогранник удовлетворяет этим необходимым условиям. В таком случае существует разбиение его множества вершин  $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_m$  и система подмножеств многогранника  $\{M_i\}_{i=1}^m$ , обладающие необходимыми свойствами. Однако для данного многогранника может существовать несколько подходящих разбиений множества вершин, и для данного разбиения вершин может существовать несколько подходящих систем множеств  $\{M_i\}$ .

Подчеркнём, что наличие на многограннике положения ещё не означает, что в этом положении на этом многограннике есть минимальная сеть. Примером служит тетраэдр из теоремы 21.

**Гипотеза 1.** *Если на многограннике есть простое положение, то на этом многограннике есть минимальная сеть.*

**Гипотеза 2.** *Если на многограннике есть простое положение, то на этом многограннике есть минимальная сеть в этом простом положении.*

Гипотеза 1 верна для тетраэдров, как будет показано ниже (теорема 18). И обе гипотезы верны для двухсторонних треугольников – для них уже необходимое условие теоремы 5 является достаточным (теорема 10), и все минимальные сети находятся в простом положении, поскольку вершин у многогранника всего три.

Но ничего больше об этих гипотезах мне пока не известно.

Напомним (см. аккуратное определение в части «Сети» раздела 2), что две сети на двух многогранниках называются *изометричными*, если существует гомеоморфизм многогранников, переводящий эти сети друг в друга, и при этом длины соответственных рёбер сетей одинаковы.

### Теорема 9.

*Для всякой минимальной сети  $N$  на выпуклом многограннике  $S$  существует единственный выпуклый многогранник  $S_1(N)$ , на котором существует минимальная сеть  $N_1(N)$ , изометричная сети  $N$ , но в простом положении.*

*Более того, для всех минимальных сетей  $N$  на многограннике  $S$ , находящихся в одинаковом положении, многогранник  $S_1(N)$  будет одним и тем же.*

**Доказательство.** Пусть дано положение  $\{V_i, M_i\}$ . Рассмотрим незамкнутый многогранник  $Q$ , получающийся из  $S$  выбрасыванием всех неодноточечных  $M_i$ . Углы многогранника  $Q$  во всех граничных вершинах равны  $4\pi/3$  и на его границе нет вершин многогранника  $S$ , поэтому любая изометричная ему развёртка подходит под условие теоремы 3. Поэтому существует замкнутый

многогранник  $S_1$ , содержащий незамкнутый многогранник  $Q_1$ , изометричный  $Q$  и такой, что всякая компонента связности  $S_1 \setminus Q_1$  содержит ровно по одной вершине многогранника  $S_1$ .

Если минимальная сеть  $N$  на многограннике  $S$  находится в данном положении  $\{V_i, M_i\}$ , то она содержится в многограннике  $Q$  (по определению положения сети и многогранника  $Q$ ). Поскольку многогранник  $Q_1$  изометричен  $Q$ , на нём имеется сеть  $N_1$ , изометричная (как множество, в смысле внутренней метрики многогранников  $Q$  и  $Q_1$ ) минимальной сети  $N$ . Очевидно, что в каждой шестигульной ячейке сети  $N_1$  содержится ровно одна компонента связности  $S_1 \setminus Q_1$  и, следовательно, ровно одна вершина многогранника  $S_1$ .

Итак, все минимальные сети, находящиеся на многограннике  $S$  в данном положении, могут быть реализованы на многограннике  $S_1$  в простом положении. С другой стороны, как было показано в теореме 8 раздела 5, для каждой плоского взвешенного графа существует не более одного многогранника, на котором он реализуется как минимальная сеть в простом положении.

Доказательство теоремы окончено.

**Замечание.** Развёртку, изометричную многограннику  $S_1$ , легко построить для каждого многогранника  $S$  с выбранным положением  $\{V_i, M_i\}$ , см. замечание к теореме 3 раздела 2.

**Гипотеза 3.** *Каждый выпуклый многогранник имеет не более чем конечное число положений, в которых есть минимальные сети.*

Таким образом, если у нас возникло желание изучить минимальные сети на данном многограннике  $S$ , можно действовать следующим образом. Рассмотреть всевозможные положения – т.е. всевозможные подходящие разбиения множества вершин, и для каждого разбиения всевозможные подходящие системы подмножеств многогранника. Для каждого положения построить соответствующий многогранник  $S_1$ , на котором все искомые минимальные сети реализуются в простом положении, и изучить минимальные сети в простом положении на этом многограннике. При этом можно воспользоваться накрытием этого многогранника соответствующим МН-комплексом. Затем перенести полученные результаты обратно на многогранник  $S$ , используя свойства изометрии. При этом надо учитывать, что, разумеется, не все минимальные сети, реализующиеся на  $S_1$  в простом положении, реализуются на  $S$ , верно только утверждение в обратном направлении.

Обладающий минимальной сетью многогранник может иметь совершенно произвольную структуру, в частности, может иметь любое число вершин. Однако рассматриваемый нами многогранник  $S_1$  уже не столь произволен – он имеет простое положение. Поэтому кривизна каждой из его вершин делится на  $\pi/3$  и, кроме того, сумма кривизн всех вершин всякого выпуклого многогранника равна  $4\pi$ . Поэтому у многогранника, имеющего простое положение, не более, чем 12 вершин. Можно посчитать, что всего есть ровно 47 различных вариантов для множества кривизн вершин многогранника, имеющего простое положение.

Различные многогранники с данным набором кривизн вершин образуют некоторое семейство. Если мы не различаем многогранники, совмещающиеся подобием и движением (а у нас нет никаких причин различать их), то каждое такое семейство имеет  $(2N - 6)$  свободных непрерывных параметров, где  $N$  – число вершин многогранника в простом положении, или, что то же самое, число шестигульных ячеек минимальной сети, которая могла бы реализоваться на этом многограннике. Указанное значение числа свободных непрерывных параметров легко проверить:  $2N - 6 = 3N - 6 - 1 - (N - 1)$ .

Таким образом, важной частью задачи изучения минимальных сетей на выпуклых многогранниках является изучение минимальных сетей в простом положении на многогранниках из 47-ми семейств, в каждом из которых объединены многогранники, имеющие определённое множество кривизн вершин. В следующем списке дана информация о 47-ми семействах многогранников, имеющих простое положение. За номером семейства следует набор из пяти чисел вида  $\{k_5, k_4, k_3, k_2, k_1\}$ , где  $k_j$  – число вершин многогранника с полным углом  $\frac{j\pi}{3}$ , т.е. с кривизной  $2\pi - \frac{j\pi}{3}$ , затем указано число  $n$  листов в накрытии многогранника минимальным накрывающим комплексом и род  $g$  минимального накрывающего комплекса (см. раздел 4 и лемму 12). Про некоторые из этих семейств известно, что на каждом входящем в них многограннике есть мини-

мальная сеть (необязательно в простом положении), см. теорему 19. Напротив этих семейств в таблице написано: «всегда есть минимальная сеть». Про остальные семейства ничего не известно, кроме отдельных примеров сетей.

### Семейства многогранников с простым положением.

3 вершинок у многогранника, 0-параметрические семейства:

3.1)  $\{0, 0, 0, 3, 0\}$ ,  $n = 3$ ,  $g = 1$ , всегда есть минимальная сеть

3.2)  $\{0, 0, 1, 1, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 1$ , всегда есть минимальная сеть

3.3)  $\{0, 1, 0, 0, 2\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 2$ , всегда есть минимальная сеть

4 вершинок у многогранника, 2-параметрические семейства:

4.1)  $\{0, 0, 4, 0, 0\}$ ,  $n = 2$ ,  $g = 1$ , всегда есть минимальная сеть, это равногранные тетраэдры

4.2)  $\{0, 1, 2, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 2$ , всегда есть минимальная сеть

4.3)  $\{0, 2, 0, 2, 0\}$ ,  $n = 3$ ,  $g = 2$ , всегда есть минимальная сеть

4.4)  $\{0, 2, 1, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 3$ , всегда есть минимальная сеть

4.5)  $\{1, 0, 1, 2, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 3$ , всегда есть минимальная сеть

4.6)  $\{1, 0, 2, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 3$ , всегда есть минимальная сеть

4.7)  $\{1, 1, 0, 1, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 4$ , всегда есть минимальная сеть

4.8)  $\{2, 0, 0, 0, 2\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 5$ , всегда есть минимальная сеть

5 вершинок у многогранника, 4-параметрические семейства:

5.1)  $\{0, 3, 2, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 4$

5.2)  $\{0, 4, 0, 1, 0\}$ ,  $n = 3$ ,  $g = 3$

5.3)  $\{1, 1, 3, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 4$

5.4)  $\{1, 2, 1, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 5$ , всегда есть минимальная сеть

5.5)  $\{1, 3, 0, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 6$

5.6)  $\{2, 0, 2, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 5$ , всегда есть минимальная сеть

5.7)  $\{2, 1, 0, 2, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 6$ , всегда есть минимальная сеть

5.8)  $\{2, 1, 1, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 6$ , всегда есть минимальная сеть

5.9)  $\{3, 0, 0, 1, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 7$ , всегда есть минимальная сеть

6 вершинок у многогранника, 6-параметрические семейства:

6.1)  $\{0, 6, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 3$ ,  $g = 4$ , сюда относится октаэдр

6.2)  $\{1, 4, 1, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 7$

6.3)  $\{2, 2, 2, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 7$

6.4)  $\{2, 3, 0, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 8$

6.5)  $\{3, 0, 3, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 7$

6.6)  $\{3, 1, 1, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 8$ , всегда есть минимальная сеть

6.7)  $\{3, 2, 0, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 9$

6.8)  $\{4, 0, 0, 2, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 9$ , всегда есть минимальная сеть

6.9)  $\{4, 0, 1, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 9$ , всегда есть минимальная сеть

7 вершинок у многогранника, 8-параметрические семейства:

7.1)  $\{2, 5, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 10$

7.2)  $\{3, 3, 1, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 10$

7.3)  $\{4, 1, 2, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 10$

7.4)  $\{4, 2, 0, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 11$

7.5)  $\{5, 0, 1, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 11$ , всегда есть минимальная сеть

7.6)  $\{5, 1, 0, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 12$

8 вершинок у многогранника, 10-параметрические семейства:

8.1)  $\{4, 4, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 13$

8.2)  $\{5, 2, 1, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 13$

8.3)  $\{6, 0, 2, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 13$

8.4)  $\{6, 1, 0, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 14$

8.5)  $\{7, 0, 0, 0, 1\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 15$

9 вершинок у многогранника, 12-параметрические семейства:

9.1)  $\{6, 3, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 16$

9.2)  $\{7, 1, 1, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 16$

9.3)  $\{8, 0, 0, 1, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 17$

10 вершинок у многогранника, 14-параметрические семейства:

10.1)  $\{8, 2, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 19$

10.2)  $\{9, 0, 1, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 19$

11 вершинок у многогранника, 16-параметрические семейства:

11.1)  $\{10, 1, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 22$

12 вершинок у многогранника, 18-параметрические семейства:

12.1)  $\{12, 0, 0, 0, 0\}$ ,  $n = 6$ ,  $g = 25$ , сюда относится икосаэдр

Теоретически, если мы изучили минимальные сети на многограннике  $S_1$  с простым положением до такой степени, что про каждую из них знаем явно кривую, реализующую каждое её ребро, и если мы знаем для данного многогранника  $S$  и его положения  $\{V_i, M_i\}$  явно вложение многогранника  $S \setminus \cup_i M_i$  в многогранник  $S$ , то нам ничего не стоит проверить, помещается ли конкретная минимальная сеть в части многогранника  $S_1$ , изометричной  $S \setminus \cup_i M_i$ , или не помещается, и таким образом создать список всех минимальных сетей на многограннике  $S$  в этом положении. Однако на практике этот переход оказывается не столь тривиальным, как мы увидим ниже в случае минимальных сетей на тетраэдре в непростом положении. В случае самого маленького числа шестигульных ячеек минимальной сети  $n = 3$  число свободных непрерывных параметров оказывается равным нулю. Многогранниками с простым положением в этом случае будут двухсторонние треугольники. Ниже мы изучим сети на двухсторонних треугольниках, а затем рассмотрим минимальные сети на неравногранных тетраэдрах. Причём в первую очередь мы изучим случай минимальных сетей на тетраэдре в непростом положении, т.е. случай положений, в которых минимальная сеть имеет ровно три шестигульные ячейки и четыре вершины тетраэдра разбиваются сетью на три группы, сумма кривизн в каждой из которых делится на  $\pi/3$ . В соответствии с нашей теорией, все такие минимальные сети на тетраэдрах реализуются на двухсторонних треугольниках, и для каждого тетраэдра и каждого непростого положения на нём можно рассмотреть соответствующий двухсторонний треугольник, и имеется вложение множества минимальных сетей в этом положении на тетраэдре в множество минимальных сетей на этом двухстороннем треугольнике.

## 7 Минимальные сети на двухсторонних треугольниках

Многогранники с тремя вершинами – двухсторонние треугольники – определяются всего тремя параметрами, а именно, длинами сторон треугольника. Если мы не будем различать подобные треугольники, то останется всего два параметра. Это очень мало, и потому уже простейшее необходимое условие наличия минимальной сети – теорема 5 – позволяет найти все двухсторонние треугольники, обладающие минимальной сетью. Таких двухсторонних треугольников всего три (с точностью до подобия).

### Теорема 10.

На двухстороннем треугольнике есть минимальная сеть тогда и только тогда, когда кривизны его вершин равны  $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ ,  $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi\}$  или  $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$ ; иначе говоря, такой двухсторонний треугольник склеен либо из двух равносторонних треугольников, либо из двух треугольников с углами  $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ , либо с углами  $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\}$ .

**Доказательство.** Теорема 5 в случае трёх вершин немедленно показывает, что только такие наборы кривизн могут быть у двухсторонних треугольников, обладающих минимальной сетью.

Построить примеры минимальных сетей на каждом из дважды покрытых треугольников нетрудно, см. рис. 1. Для каждого двустороннего треугольника изображена плоская топология сети и одна из двух сторон двухстороннего треугольника с минимальной сетью на ней, а вторая сторона и сеть на ней выглядят в приведённых здесь примерах точно так же.

**Доказательство теоремы окончено.**



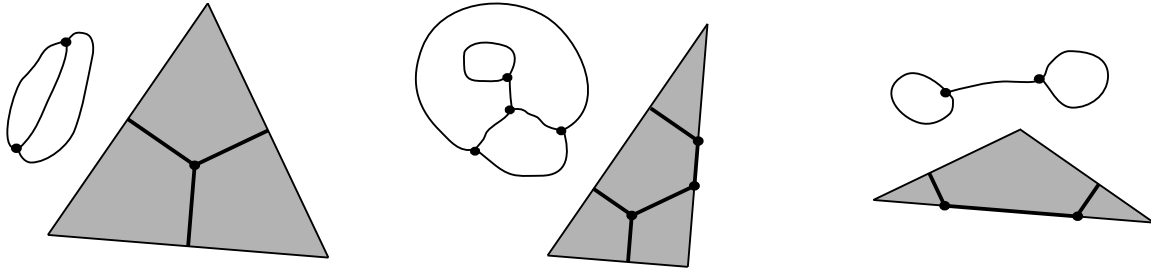


Рис. 1: Примеры минимальных сетей на двухсторонних треугольниках.

Итак, нам нужно изучить минимальные сети на трёх двухсторонних треугольниках. Один из них мы будем называть *равносторонним* (его грани – равносторонние треугольники), другой будем называть *прямоугольным* (его грани – треугольники с углами  $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ ), и третий будем называть *равнобедренным* (его грани – треугольники с углами  $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\}$ ).

Как уже было показано выше, см. таблицу в разделе 6, минимальные накрывающие комплексы для равностороннего и прямоугольного двухсторонних треугольников являются плоскими торами. Точнее, в обоих случаях МН-комплексом оказывается плоский тор, склеенный из ромба с углами  $\pi/3$  и  $2\pi/3$ . На рис. 2 и 3 показано, как устроены проекции в соответствующих разветвлённых накрытиях, треугольники двух цветов в каждом случае соответствуют двум граням двухстороннего треугольника.

Поскольку минимальные сети не проходят через вершины многогранника, а вне вершин многогранника упомянутые разветвлённые накрытия являются накрытиями, поднятие с двухстороннего треугольника на соответствующий плоский тор всякой минимальной сети является минимальной сетью на этом плоском торе. Как уже отмечалось, минимальные сети на плоских торах хорошо изучены, имеется их классификация (см. [6, 1]). Существование разветвлённого накрытия многогранника плоским тором всегда помогает изучать минимальные сети на этом многограннике: такое накрытие помогло в случае с равногранными тетраэдрами, см. [2], и поможет нам в случае с равносторонним и прямоугольным двухсторонними треугольниками. Описание минимальных сетей на этих двухсторонних треугольниках см. ниже в теоремах 14 и 15.

Третий интересующий нас двухсторонний треугольник, равнобедренный, не допускает разветвлённого накрытия плоским тором. Его МН-комплекс имеет род 2.

### Минимальные сети на плоских торах.

Введём необходимую нам терминологию, касающуюся минимальных сетей на плоских торах.

Под *плоским тором* мы понимаем двумерное многообразие с локально евклидовой метрикой, получающееся из некоторого плоского параллелограмма  $ABCD$  отождествлением его сторон  $AB = DC$  и  $BC = AD$ . В зависимости от выбора параллелограмма получаются, вообще говоря, различные (неизометричные) многообразия, хотя один и тот же тор можно склеить из разных параллелограммов.

Для каждого плоского тора будем рассматривать каноническое накрытие этого тора двумерной плоскостью  $\mathbb{R}^2$ . Пусть плоский тор  $T$  склеен из параллелограмма, натянутого на вектора  $e_1, e_2$ . Точки тора и точки параллелограмма с двумя выброшенными сторонами находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии, поэтому ниже мы будем строить отображение в этот параллелограмм, называя его отображением в тор. Зафиксируем на плоскости начало координат  $O$  и рассмотрим систему координат с базисными векторами  $e_1$  и  $e_2$ . Определим отображение  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  так:  $\pi(x, y) := (\{x\}, \{y\})$ , где через  $\{a\}$  обозначена дробная часть числа  $a$ . Легко проверить, что такая проекция действительно задаёт накрытие тора плоскостью, причём локально проекция является изометрией.

Это накрытие делает изучение минимальных сетей на плоском торе  $T = T(e_1, e_2)$  эквивалентным изучению на плоскости минимальных сетей, инвариантных относительно группы переносов

с порождающими векторами  $e_1$  и  $e_2$ . Такие сети на плоскости будем называть *периодическими*.

Ниже нам будет удобно говорить именно о периодических минимальных сетях на плоскости. Перечислим их простейшие свойства.

Рёбра минимальной сети на плоскости разбиваются на три класса параллельности. Всякая минимальная сеть разбивает плоскость на шестиугольные ячейки.

*Лучом сетевой геодезической* называется последовательность различных рёбер минимальной сети, принадлежащих только двум классам параллельности, такая, что конец  $k$ -го ребра является началом  $(k + 1)$ -го. *Сетевой геодезической* называется объединение двух лучей сетевых геодезических, пересекающихся по одной точке, если оно содержит рёбра только двух классов параллельности. Пару классов параллельности будем называть *направлением* сетевой геодезической. Различные сетевые геодезические одного направления будем называть *параллельными* (кстати, это эквивалентно определению параллельности как отсутствия общих точек). Минимальная сеть имеет сетевые геодезические ровно трёх различных направлений и лучи шести различных направлений, причём через каждый узел минимальной сети проходят сетевые геодезические и из каждого узла выходят лучи всех направлений.

Рассмотрим сетевую геодезическую  $\gamma$ , какой-нибудь её узел  $a$  и ребро сети  $ab$ , не входящее в  $\gamma$ . Рассмотрим сетевую геодезическую, параллельную  $\gamma$  и проходящую через  $b$ . Две получившиеся параллельные сетевые геодезические ограничивают некоторое множество ячеек сети, которое мы будем называть *прямой разбиения*. Иначе говоря, мы фиксируем направление ребра сети и ячейку сети и рассматриваем бесконечную в обе стороны последовательность ячеек сети, в которые можно попасть из данной, переходя из ячейки в другую ячейку только тогда, когда у них есть общее ребро выбранного направления.

Прямые разбиения, так же, как и сетевые геодезические, разбиваются на три класса параллельности, любые две непараллельные прямые разбиения пересекаются по одной общей ячейке, через каждую ячейку проходят три прямые разбиения. Если на прямой разбиения выбрана начальная ячейка и ориентация, то возникает естественная нумерация ячеек этой прямой целыми числами.

Пусть выбрана ячейка разбиения и две проходящие через неё ориентированные прямые разбиения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , пусть на каждой из них ячейки занумерованы так, что их общая ячейка в обоих случаях имеет номер 0. Возьмём произвольную ячейку и проведём через неё прямые разбиения  $l_1$  и  $l_2$ , параллельные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Через  $x_1$  обозначим номер на  $\gamma_1$  ячейки пересечения прямых  $\gamma_1$  и  $l_2$ , через  $x_2$  – наоборот. Пару  $(x_1, x_2)$  будем называть *координатами ячейки в базисе разбиения*  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . Легко видеть, что такое введение координат задаёт взаимно-однозначное соответствие между ячейками сети и элементами  $\mathbb{Z}^2$  (парами целых чисел).

Пусть фиксирована ячейка. Поставим в соответствие каждой проходящей через неё ориентированной прямой разбиения единичный вектор, перпендикулярный общему ребру нашей ячейки со следующей ячейкой этой прямой и направленный из ячейки с меньшим номером в ячейку с большим номером. Этот вектор будем называть *направляющим вектором* ориентированной прямой разбиения. Ясно, что систему координат разбиения можно задавать начальной ячейкой  $O$  и парой направляющих векторов  $(e_1, e_2)$ . Именно так мы и будем поступать, используя обозначение  $Oe_1e_2$  для системы координат и  $(e_1, e_2)$  для базиса.

Мы будем рассматривать **не любые системы координат разбиения  $Oe_1e_2$ , а только такие**, в которых вектора  $e_1$  и  $e_2$  образуют положительную пару (в выбранной фиксированной ориентации на плоскости) и угол между этими векторами равен  $\pi/3$  (а не  $2\pi/3$ , как могло бы быть). *Везде ниже под словами «базис разбиения» и «система координат разбиения» мы будем понимать базис и систему координат с таким условием.*

Для данного разбиения имеется всего шесть различных базисов.

**Лемма 13.** *(О связи между базисами разбиения на плоскости)*

*Зависимость  $(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2)A$  между любыми двумя базисами разбиения  $(e_1, e_2)$  и  $(e'_1, e'_2)$  осуществляется с помощью матрицы  $A$  из циклической группы  $Gr$  6-го порядка, порождённой матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .*

**Лемма 14.** *(О замене системы координат разбиения на плоскости)*

Пусть даны две системы координат разбиения  $Oe_1e_2$  и  $O'e_1'e_2'$ , причём  $(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2)A$ , а  $O'$  имеет координаты  $(x_0, y_0)$  в первой системе координат. Тогда координаты  $(x, y)$  произвольной ячейки в первой системе координат выражаются через её координаты  $(x', y')$  во второй системе по формуле:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .

Объясним коротко, как можно классифицировать минимальные сети на плоских торах, а потом сформулируем точные классификационные теоремы. Пусть дан плоский тор, склеенный из параллелограмма  $ABCD$ , и минимальная сеть на нём. Во-первых, мы не будем различать сети, совмещающиеся сдвигом на плоском торе, поэтому будем без ограничения общности считать, что точка на торе, в которую склеиваются четыре вершины параллелограмма, лежит внутри одной из ячеек сети. Рассмотрим поднятие минимальной сети на плоскость – периодическую минимальную сеть на плоскости и параллелограмм  $ABCD$ , его вершина  $A$  находится внутри некоторой ячейки  $O_A$ , и все его вершины находятся в некоторых ячейках минимальной сети на плоскости (а на торе это была одна и та же ячейка). Будем теперь всё время рассматривать именно плоскость, а не тор.

Выберем как-нибудь систему координат разбиения с началом в ячейке  $O$ . Запишем в этой системе координат координаты  $(x_b, y_b)$  и  $(x_d, y_d)$  ячеек  $O_B$  и  $O_D$ , содержащих точки  $B$  и  $D$ . Оказывается, эти координаты определяют минимальную сеть с точностью до деформационной эквивалентности на плоском торе. В этом заключается суть. Перейдём к подробностям.

Мы получили четыре целых числа, которые можно записать в виде целочисленной матрицы  $\begin{pmatrix} x_b & x_d \\ y_b & y_d \end{pmatrix}$ , которая, как несложно показать, является невырожденной, более того, имеет положительный определитель (если мы считаем, что вектора  $AB$  и  $AD$  образуют положительную пару, а мы так считаем). Если мы заменим систему координат разбиения, эта матрица как-то изменится, точнее, в соответствии с леммами 13 и 14, домножится на матрицу из группы  $Gr$ . Поэтому будет корректным поставить в соответствие каждой рассматриваемой минимальной сети элемент фактор-пространства  $M_2^+(\mathbb{Z})/Gr$ , который мы будем называть **типом** этой минимальной сети на плоском торе.

**Замечание.** В работе [1] типом (или, точнее,  $M$ -типом) сети называется матрица  $\begin{pmatrix} y_d & -x_d \\ -y_b & x_b \end{pmatrix}$  (с точностью до действия той же циклической группы). Нам для дальнейшего будет удобнее наши обозначения.

*Правильной сетью на плоском торе* будем называть минимальную сеть, все ячейки которой равны между собой.

*Характеристическим треугольником* типа  $\begin{pmatrix} x_b & x_d \\ y_b & y_d \end{pmatrix}$  для тора, склеенного из параллелограмма  $ABCD$ , будем называть треугольник  $AХУ$ , натянутый на вектора  $\overrightarrow{AX} = y_d\overrightarrow{AB} - y_b\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{AY} = -x_d\overrightarrow{AB} + x_b\overrightarrow{AD}$ .

**Теорема 11.** *(Классификация на плоском торе)* [1]

Две минимальные сети на плоском торе деформационно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

Для каждой минимальной сети на плоском торе существует единственная (с точностью до сдвига) деформационно эквивалентная ей правильная сеть.

Длины деформационно эквивалентных минимальных сетей на плоском торе равны.

**Теорема 12.** *(Реализация типов на плоском торе)* [1]

На торе, склеенном из параллелограмма  $ABCD$ , существует минимальная сеть типа  $\begin{pmatrix} x_b & x_d \\ y_b & y_d \end{pmatrix}$  тогда и только тогда, когда все углы характеристического соответствующего треугольника меньше  $120^\circ$ .

**Теорема 13.** [1]

Рёбра поднятия минимальной сети данного типа на данном торе на плоскость параллельны рёбрам кратчайшего дерева Штейнера, затягивающего вершины соответствующего характеристического треугольника. Правильная сеть состоит из центрально симметричных шестиугольников, длины различных сторон которых относятся друг к другу так же, как длины параллельных им рёбер кратчайшего дерева Штейнера, затягивающего вершины характеристи-

ческого треугольника.

**Следствие.** Если характеристический треугольник данной сети на данном плоском торе – равносторонний, то деформационно эквивалентная данной сети правильная сеть состоит из правильных шестиугольников.

### Классификация минимальных сетей на равностороннем двухстороннем треугольнике.

Рассмотрим разветвлённое накрытие равностороннего двухстороннего треугольника плоским тором, склеенным из ромба с углом  $60^\circ$  (см. рис. 2), а затем и накрытие двухстороннего треугольника плоскостью. Рассмотрим поднятие минимальной сети с двухстороннего треугольника на плоскость, рассмотрим базисный параллелограмм так, чтобы его вершина  $A$  была прообразом вершины  $A$  нашего треугольника. Пусть  $ABC$  треугольник на накрытии, проецирующийся на одну из граней нашего двухстороннего треугольника, и изометричный этой грани. Причём будем считать, что он ориентирован так, что  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  – положительная пара векторов.

Пусть  $(u, v)$  – координаты ячейки  $O_B$ , содержащей точку  $B$ , в некоторой системе координат разбиения с началом в ячейке  $O$ , содержащей точку  $A$ . Координаты ячейки  $O_B$  и будут определять минимальную сеть на нашем многограннике, как мы покажем ниже. При замене базиса разбиения эти координаты изменятся в соответствии с леммами 13 и 14.

**Типом** минимальной сети на равностороннем двухстороннем треугольнике будем называть пару целых чисел  $(u, v)$  с точностью до умножения (справа) на элемент циклической группы  $Gr^t = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ , т.е. орбиту строчки  $(u, v)$  под действием этой группы.

**Правильной** сетью на равностороннем двухстороннем треугольнике будем называть минимальную сеть, поднятие которой на плоский тор – правильная сеть на плоском торе.

#### Лемма 15.

Минимальная сеть на плоском торе, накрывающем равносторонний двухсторонний треугольник, проецируется в минимальную сеть на равностороннем двухстороннем треугольнике тогда и только тогда, когда она не проходит через узлы решётки, являющиеся поднятием вершин двухстороннего треугольника и инвариантна относительно поворотов на  $120^\circ$  вокруг этих узлов.

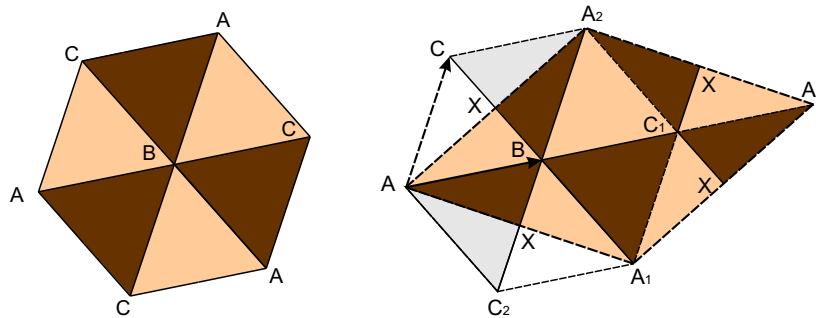


Рис. 2: Разветвлённое накрытие равностороннего двухстороннего треугольника плоским тором

#### Теорема 14. (Классификация на равностороннем двухстороннем треугольнике)

Две минимальные сети на равностороннем двухстороннем треугольнике деформационно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

Каждая пара целых чисел  $(u, v)$ , кроме пары  $(0, 0)$ , является типом (точнее, типом является её орбита под действием группы  $Gr^t$ ) некоторой минимальной сети на равностороннем двухстороннем треугольнике.

Для каждой минимальной сети на равностороннем двухстороннем треугольнике существует единственная деформационно эквивалентная ей правильная сеть.

Длины деформационно эквивалентных минимальных сетей на равностороннем двухстороннем треугольнике равны.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha = \overrightarrow{AB}$  и  $\beta = \overrightarrow{AC}$ . Решётка, натянутая на вектора  $\alpha$  и  $\beta$ , состоит из всех точек плоскости, проецирующихся в вершины двухстороннего треугольника. Будем обозначать узел  $U$  через  $[x, y]$ , если  $\overrightarrow{AU} = x\alpha + y\beta$ .

Поскольку каждая вершина двухстороннего треугольника содержалась в отдельной ячейке минимальной сети, каждый узел  $[x, y]$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$  содержится в отдельной шестиугольной ячейке на плоскости. Ячейку, содержащую узел  $[x, y]$ , мы будем обозначать через  $O[x, y]$ , а ячейку  $O[0, 0]$  просто через  $O$ .

Через  $J$  всюду обозначаем матрицу  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Заметим, что  $J$  – матрица перехода от базиса разбиения  $(k, l)$  к базису разбиения  $(k', l')$ , полученному из исходного поворотом на  $60^\circ$  по часовой стрелке, т.е.  $(k', l') = (k, l)J$ .

**Лемма 16.**

*Если в системе координат разбиения  $Oe_1e_2$  координаты ячейки  $O_B = O[1, 0]$  равны  $(u, v)$ , то координаты ячейки  $O_C = O[0, 1]$  равны  $(-v, u + v)$ .*

**Доказательство.** Заметим, что наша минимальная сеть инвариантна относительно поворота на  $120^\circ$  с центром в любом узле нашей решётки.

Рассмотрим поворот на  $120^\circ$  по часовой стрелке вокруг узла  $B$ . При этом повороте система координат  $Oe_1e_2$  перейдёт в систему координат  $O_{A_2}(-e_2)(-e_3)$ , и потому координаты ячейки  $O_B$  в системе  $O_{A_2}(-e_2)(-e_3)$  тоже равны  $(u, v)$ . Далее используем леммы 13 и 14,  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Получаем, что координаты ячейки  $O_{A_2}$  в системе  $O_{Be_2e_3}$  равны  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , в системе  $O_{Be_1e_2}$  равны  $J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , а в системе  $Oe_1e_2$  равны  $J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u-v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-v \\ u+2v \end{pmatrix}$ .

Аналогично, если мы обозначим через  $J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  координаты ячейки  $O_C$  в системе  $Oe_1e_2$  и рассмотрим поворот на  $120^\circ$  против часовой стрелки вокруг точки  $C$ , то получим, что координаты ячейки  $O_{A_2}$  в той же системе  $Oe_1e_2$  будут равны  $J^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$ .

Значит,  $\begin{pmatrix} u-v \\ u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$ , откуда  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u+v \end{pmatrix}$ , что и требовалось.

**Доказательство леммы окончено.**

- Следствие.** 1) Координаты ячейки  $O_{A_2}$  в системе  $O_{Ce_1e_2}$  тоже равны  $(u, v)$ .  
 2) Координаты ячейки  $O[x + 1, y]$  в системе  $O[x, y]e_1e_2$  равны  $(u, v)$ , а ячейки  $O[x, y + 1]$  в той же системе  $O[x, y]e_1e_2$  равны  $(-v, u + v)$  для любых  $x, y \in \mathbb{Z}$ .  
 3) Координаты ячейки  $O[x, y]$  в системе координат  $Oe_1e_2$  равны  $(xu - yv, xv + y(u + v))$ .

**Лемма 17. (Тип поднятия сети с равностороннего треугольника на тор)**

*Поднятие минимальной сети типа  $(u, v)$  с равностороннего двухстороннего треугольника на плоский тор является минимальной сетью типа  $\begin{pmatrix} 2u+v & u-v \\ v-u & u+2v \end{pmatrix}$ .*

**Доказательство.** Непосредственно следует из следствия к лемме 16 и нашего определения типа минимальной сети на плоском торе, с учётом того, что тип сети на торе будет задаваться координатами ячеек  $O_{A_1} = O[2, -1]$  и  $O_{A_2} = O[1, 1]$ .

**Доказательство леммы окончено.**

**Лемма 18. (характеристический треугольник)**

*На плоском торе, склеенном из ромба с углом  $60^\circ$ , типу  $\begin{pmatrix} 2u+v & u-v \\ v-u & u+2v \end{pmatrix}$  соответствует правильный характеристический треугольник.*

**Доказательство.** Пусть  $f$  и  $g$  – вектора единичной длины с углом в  $60^\circ$  между ними. Нам надо показать, что треугольник, натянутый на вектора  $a = (u+2v)f - (v-u)g$  и  $b = -(u-v)f + (2u+v)g$ , – равносторонний.

$|a|^2 = |(u+2v)f - (v-u)g|^2 = (u+2v)^2 + (v-u)^2 - (u+2v)(v-u) = (u-v)^2 + (u+2v)(u+2v - (v-u)) = (u-v)^2 + (u+2v)(2u+v) = 3(u^2 + v^2 + uv)$  – не зависит от порядка  $f$  и  $g$ ,  $u$  и  $v$ .

$b = -(u-v)f + (2u+v)g$  – получается из  $a$  перестановкой  $u$  и  $v$ ,  $f$  и  $g$ , поэтому  $|b| = |a|$ .

$(a, b) = ((u+2v)f - (v-u)g, -(u-v)f + (2u+v)g) = (u+2v)(v-u) + (u-v)(2u+v) - \frac{1}{2}(u-v)^2 + \frac{1}{2}(u+2v)(2u+v) = (v-u)^2 - \frac{1}{2}(u-v)^2 + (2u^2 + 2v^2 + 5uv)\frac{1}{2} = \frac{3}{2}(u^2 + v^2 - uv) = \frac{1}{2}|a||b|$  – ура.

**Доказательство леммы окончено.**

Теперь рассмотрим на торе правильную сеть типа  $\begin{pmatrix} 2u+v & u-v \\ v-u & u+2v \end{pmatrix}$ , деформационно эквивалентную на торе поднятию нашей минимальной сети и такую, что точка  $A$  – центр одной из её ячеек. Под-

нятие этой правильной сети на плоскость, по определению накрытия, обладает тем свойством, что каждый узел решётки, натянутой на вектора  $2\alpha - \beta$  и  $\alpha + \beta$  является центром некоторой ячейки правильной сети, в частности, точка  $A_3$  будет центром ячейки с координатами  $(3u, 3v)$ . Поскольку все шестиугольники правильной сети равны, ясно, что  $B$  и  $C_1$  будут центрами ячеек с координатами  $(u, v)$  и  $(2u, 2v)$  соответственно. Кроме того, в силу леммы 18 и следствия из теоремы 13, эта правильная сеть состоит из правильных шестиугольников. В силу симметрии сети из правильных шестиугольников всякий узел решётки, натянутой на  $\alpha$  и  $\beta$ , является центром некоторой ячейки, и такая правильная сеть обладает необходимыми симметриями, описанными в лемме 15, и потому проецируется в минимальную сеть на равностороннем двухстороннем треугольнике.

Итак, рассмотрим две минимальных сети на плоскости – поднятие нашей минимальной сети с двухстороннего треугольника  $\Gamma_0$  и деформационно эквивалентную ей правильную сеть  $\Gamma_1$ . Покажем, что эти сети можно продеформировать друг в друга в классе сетей, проецирующихся в минимальные сети на равностороннем двухстороннем треугольнике, т.е. в классе сетей, обладающих симметриями из леммы 15. Рассмотрим два соответственных ребра минимальных сетей  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , т.е. два параллельных отрезка на плоскости, параметризуем каждый из них от первого конца ко второму отрезком  $[0, 1]$  пропорционально натуральному параметру, получим два параметризованных отрезка  $\gamma_0(s)$  и  $\gamma_1(s)$ . Обозначим  $\gamma_t(s) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$ . При каждом фиксированном  $t \in [0, 1]$  кривая  $\gamma_t(s)$  – это невырожденный отрезок, лежащий на прямой, параллельной прямым, содержащим отрезки  $\gamma_0(s)$  и  $\gamma_1(s)$ , и проходящей между этими прямыми. Легко видеть, что при каждом фиксированном  $t$  отрезки  $\gamma_t$ , соответствующие различным рёбрам наших сетей, образуют в объединении минимальную сеть  $\Gamma_t$  на плоскости, обладающую теми же симметриями, что и две исходные минимальные сети. Это и будет искомая деформация. Проекция сетей  $\Gamma_t$  на равносторонний двухсторонний треугольник образуют деформацию минимальной сети на равностороннем двухстороннем треугольнике в правильную сеть.

Единственность правильной сети на двухстороннем равностороннем треугольнике, деформационно эквивалентной данной, следует из единственности такой сети на плоском торе, и отсюда следует равенство длин деформационно эквивалентных минимальных сетей.

Существование минимальной сети типа  $(u, v)$  для всякой ненулевой пары целых чисел следует из существования на плоском торе, склеенном из ромба с углом  $60^\circ$ , минимальной сети типа  $\begin{pmatrix} 2u+v & u-v \\ v-u & u+2v \end{pmatrix}$  из правильных шестиугольников. Последний факт связан с тем, что для такого тора сети такого типа всегда соответствует равносторонний характеристический треугольник, и условия теорем 12 и 13 выполнены.

Доказательство теоремы окончено.

### Классификация минимальных сетей на прямоугольном двухстороннем треугольнике.

Для классификации минимальных сетей на прямоугольном двухстороннем треугольнике воспользуемся разветвлённым накрытием этого многогранника равносторонним двухсторонним треугольником и плоским тором, а также уже имеющейся классификацией минимальных сетей на равностороннем двухстороннем треугольнике.

Итак, рассматриваем двулистное разветвлённое накрытие прямоугольного двухстороннего треугольника равносторонним двухсторонним треугольником и разветвлённое накрытие последнего плоским тором, а затем и плоскостью, см. рис. 3 справа. Поднимаем минимальную сеть с прямоугольного двухстороннего треугольника на плоскость. Рассматриваем какую-нибудь систему координат разбиения с началом в ячейке  $O_A$ , и пусть  $(u, v)$  – координаты ячейки  $O_D$  в этой системе. **Типом** минимальной сети на равностороннем двухстороннем треугольнике будем называть пару целых чисел  $(u, v)$  с точностью до умножения (справа) на элемент циклической группы  $Gr^t = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ , т.е. тип – это орбита строчки  $(u, v)$  под действием этой группы. Точно так же, как в случае равносторонних треугольников, показывается, что так определённый тип не зависит от выбора базиса разбиения.

Определение правильной сети на прямоугольном треугольнике повторяет соответствующее определение для равностороннего двухстороннего треугольника.

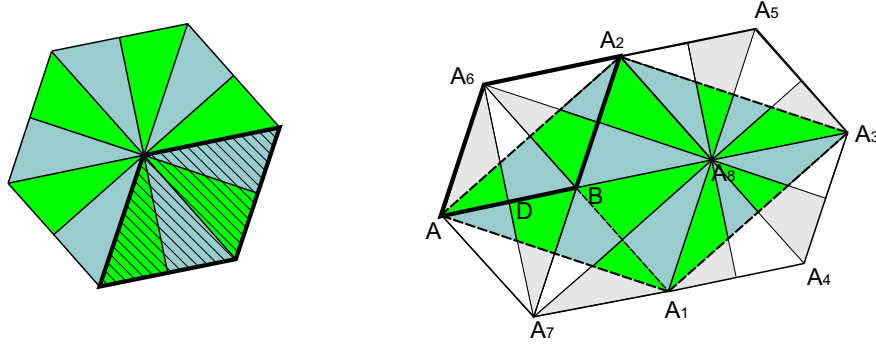


Рис. 3: Разветвлённые накрытия прямоугольного двухстороннего треугольника равносторонним двухсторонним треугольником и плоским тором

**Теорема 15. (Классификация на прямоугольном двухстороннем треугольнике)**

Две минимальные сети на прямоугольном двухстороннем треугольнике деформационно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

Каждая пара целых чисел  $(u, v)$ , кроме пары  $(0, 0)$ , является типом (точнее, типом является её орбита под действием группы  $Gr^t$ ) некоторой минимальной сети на прямоугольном двухстороннем треугольнике.

Для каждой минимальной сети на прямоугольном двухстороннем треугольнике существует единственная деформационно эквивалентная ей правильная сеть.

Длины деформационно эквивалентных минимальных сетей на прямоугольном двухстороннем треугольнике равны.

**Доказательство.**

Доказательство в целом полностью аналогично доказательству соответствующей теоремы в случае равностороннего двухстороннего треугольника, мы приведём только основные леммы. Рассмотрим на плоскости минимальную сеть  $\Gamma$  – поднятие с прямоугольного двухстороннего треугольника некоторой минимальной сети. Далее будем всюду говорить о сети  $\Gamma$ .

**Лемма 19.**

Если координаты ячейки  $OD$  в системе  $O_A e_1 e_2$  равны  $(u, v)$ , то координаты ячейки  $OB$  в этой системе равны  $(2u, 2v)$ .

**Доказательство.** Воспользуемся инвариантностью  $\Gamma$  относительно поворота на  $180^\circ$  вокруг точки  $D$ . При таком повороте система координат  $O_A e_1 e_2$  переходит в систему  $O_B(-e_1)(-e_2)$ , и потому координаты  $D$  в  $O_B(-e_1)(-e_2)$  равны тоже  $(u, v)$ , далее, координаты  $B$  в  $O_D e_1 e_2$  равны  $(u, v)$  и, следовательно, координаты  $B$  в  $O_A e_1 e_2$  равны  $(2u, 2v)$ , что и требовалось.

**Доказательство леммы окончено.**

**Лемма 20. (Тип поднятия сети с прямоугольного двухстороннего треугольника на тор)**

Поднятие минимальной сети типа  $(u, v)$  с прямоугольного двухстороннего треугольника на равносторонний двухсторонний треугольник является минимальной сетью типа  $(2u, 2v)$ , а на плоский тор – минимальной сетью типа  $\begin{pmatrix} 4u+2v & 2u-2v \\ 2v-2u & 2u+4v \end{pmatrix}$ .

**Доказательство.** Непосредственно следует из лемм 19 и 17.

**Доказательство леммы окончено.**

**Доказательство теоремы окончено.**

## 8 Минимальные сети на неравногранных тетраэдрах

В случае тетраэдров теорему 4 можно сформулировать в виде следующей леммы.

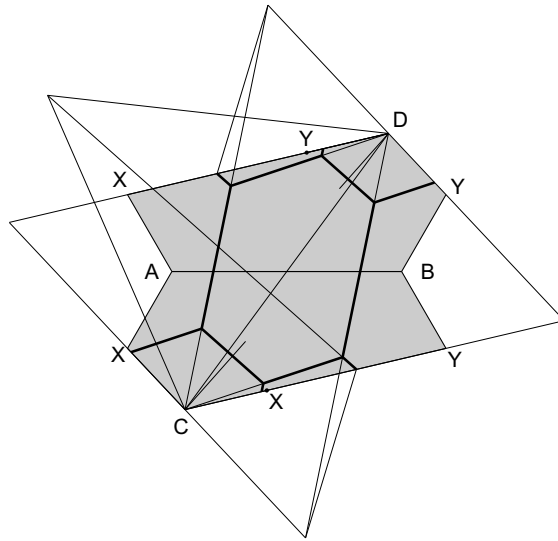


Рис. 4: Минимальная сеть в простом положении на тетраэдре с полными углами  $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ .

### Лемма 21.

Если ячейка минимальной сети не содержит внутри себя вершин тетраэдра, то эта ячейка — шестиугольник.

Если ячейка, представляющая собой  $n$ -угольник, содержит одну вершину тетраэдра, то полный угол при этой вершине равен  $\pi n/3$ .

Если ячейка, представляющая собой  $n$ -угольник, содержит две вершины тетраэдра, то сумма полных углов при этих вершинах равна  $2\pi + \pi n/3$ .

Три или четыре вершины тетраэдра ячейка минимальной сети содержать не может.

### Теорема 16.

Если на поверхности неравногранного тетраэдра существует минимальная сеть, то набор полных углов тетраэдра имеет один из шести видов:

$$(1-1) \{ \pi/3, \pi/3, \alpha, \beta \}$$

$$(1-2) \{ \pi/3, 2\pi/3, \alpha, \beta \}$$

$$(1-3) \{ \pi/3, \pi, \alpha, \beta \}$$

$$(1-4) \{ \pi/3, 4\pi/3, \alpha, \beta \}$$

$$(2-2) \{ 2\pi/3, 2\pi/3, \alpha, \beta \}$$

$$(2-3) \{ 2\pi/3, \pi, \alpha, \beta \}$$

**Замечание.** Здесь  $\alpha, \beta$  — полные углы вершин, про которые в теореме ничего не утверждается. Написанное в круглых скобках сочетание цифр будем называть *типом* соответствующего тетраэдра. Один и тот же тетраэдр может принадлежать нескольким типам.

**Доказательство.**

Рассмотрим два случая.

(1) Пусть нашлась  $n$ -угольная ячейка, содержащая две вершины тетраэдра (пусть это вершины  $A$  и  $B$ ). Тогда сумма полных углов при этих вершинах  $\circ A + \circ B = 2\pi + \pi n/3$ , т.е. больше, чем  $2\pi$ . Поскольку сумма всех полных углов тетраэдра равна  $4\pi$ , сумма полных углов при вершинах  $C$  и  $D$  меньше  $2\pi$ . Это означает, что вершины  $C$  и  $D$  не могут содержаться в общей ячейке сети, т.е. каждая из вершин  $C$  и  $D$  содержится в отдельной ячейке, и по лемме 21 полные углы при каждой из них делятся на  $\pi/3$ . Простой перебор даёт приведённый в теореме список.

(2) Если же в минимальной сети нет ячеек, содержащих две вершины тетраэдра, то каждая вершина тетраэдра содержится в отдельной ячейке сети. И по лемме 21 полный угол при каждой из вершин тетраэдра делится на  $\pi/3$ . Если сумма полных углов при любых двух вершинах тетраэдра равна  $2\pi$ , то очевидно, что полный угол при каждой из его вершин равен  $\pi$ , и тогда



это равногранный тетраэдр (лемма 6). Иначе существуют две вершины, сумма полных углов при которых меньше  $2\pi$ , и мы фактически получаем набор полных углов из варианта (1). Доказательство теоремы окончено.

Итак, отметим, что топологически минимальные сети на тетраэдрах бывают двух видов. Некоторые из них содержат ровно четыре шестигуольных ячейки, каждая из которых обходит ровно одну вершину тетраэдра, иначе говоря, это сети, находящиеся в простом положении. Например, именно такие (и только такие) минимальные сети реализуются на правильном тетраэдре. Остальные минимальные сети содержат ровно три шестигуольных ячейки, т.е. какие-то две вершины лежат в общей ячейке, а две другие – в отдельных ячейках. Это сети, находящиеся в непростом положении.

Целый ряд задач связан с минимальными сетями в простом положении на тетраэдрах – изучить такие минимальные сети, найти множество тетраэдров, обладающих сетью в простом положении, и т.д. Мы не будем здесь обсуждать эти задачи, и ограничимся только одним примером. На рис. 4 приведён пример развёртки тетраэдра, кривизны всех четырёх вершин которого делятся на  $\pi/3$ , и минимальной сети в простом положении на этом тетраэдре.

Ниже мы будем пытаться ответить только на один вопрос: на каких тетраэдрах существуют минимальные сети. Оказывается (следствие к теореме 18), что этот вопрос эквивалентен следующему: на каких тетраэдрах существует минимальная сеть в непростом положении.

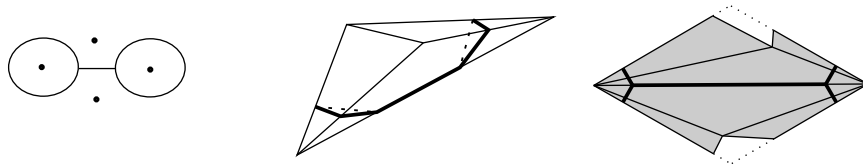


Рис. 5: Минимальная сеть на тетраэдре типа (1-1).

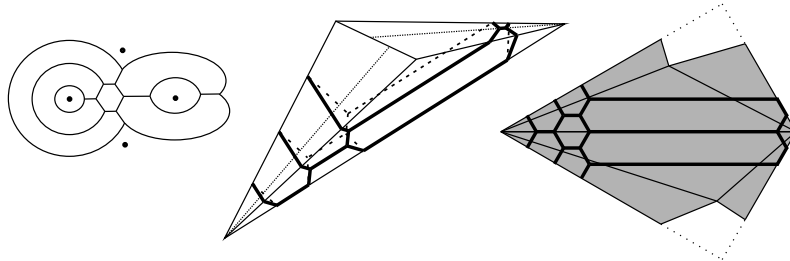


Рис. 6: Минимальная сеть на тетраэдре типа (1-2).

### Теорема 17.

На любом тетраэдре любого из перечисленных в теореме 16 типов, кроме типа (1-4), существует минимальная сеть в непростом положении.

**Доказательство.** Для каждого типа тетраэдров, кроме (1-4), построен свой граф. Граф, соответствующий типу, может быть реализован на любом тетраэдре этого типа как минимальная сеть. Для описания этой реализации удобно использовать специальные развёртки тетраэдра, которые мы будем называть *симметричными развёртками*.

Объясним, как устроена *симметричная развёртка относительно ребра  $AB$  тетраэдра  $ABCD$* , см. рис. 7. Найдём на поверхности трёхгранного угла  $A$  луч, который при разрезе по ребру  $AB$  и последующей развёртке трёхгранного угла будет биссектрисой получившегося плоского угла. Такой луч будем называть *биссектрисой угла  $A$  относительно ребра  $AB$* . Биссектриса угла  $A$  относительно  $AB$  лежит в грани  $ACD$  – это следует из неравенства треугольника для трёхгранного

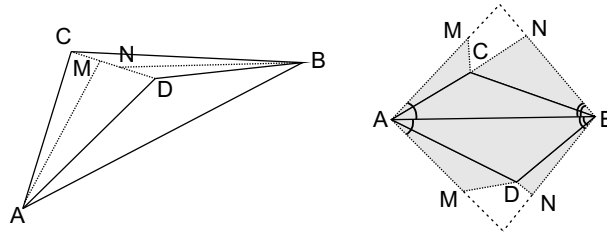


Рис. 7: Симметричная развёртка относительно ребра  $AB$ .

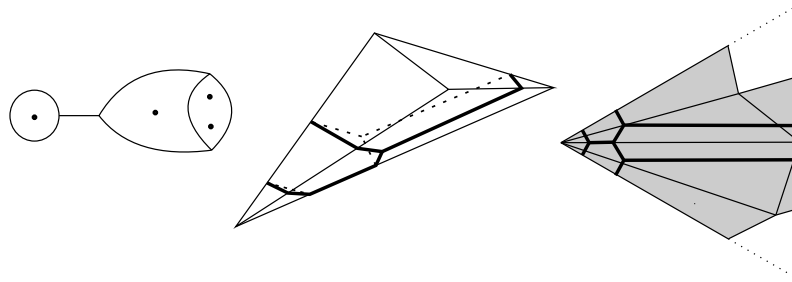


Рис. 8: Минимальная сеть на тетраэдре типа (1-3).

угла. Пусть биссектриса угла  $A$  относительно  $AB$  пересекает  $CD$  в точке  $M$ , а биссектриса угла  $B$  относительно  $BA$  пересекает  $CD$  в точке  $N$ . Сделаем три разреза поверхности тетраэдра: вдоль ребра  $CD$ , вдоль отрезка  $AM$  и вдоль отрезка  $BN$ . Теперь развернём тетраэдр на плоскость. Получится плоский вложенный многоугольник, причём диагональ  $AB$  у него – внутренняя и лежит на биссектрисах его углов  $A$  и  $B$ . Ясно, что такая развёртка существует для любого тетраэдра.

Для построения примеров рассмотрим симметричные развёртки тетраэдров относительно ребра, соединяющего те две вершины тетраэдра, полные углы которых по определению типа делятся на  $\pi/3$ . На рисунках 5, 6, 8 – 10 для каждого типа тетраэдров изображён граф реализуемой сети, вид сети на тетраэдре и её построение на соответствующей симметричной развёртке. Рассуждение, доказывающее, что построение указанных сетей на симметричных развёртках можно провести для всех тетраэдров данного типа, очень простое, мы его приводить не будем. Доказательство теоремы окончено.

**Теорема 18.**

*Если кривизна каждой из четырёх вершин неравногранного тетраэдра делится на  $\pi/3$ , то на этом тетраэдре существует минимальная сеть в непростом положении.*

*Следствие. Если на тетраэдре существует минимальная сеть в простом положении, то на этом тетраэдре существует минимальная сеть и в непростом положении.*

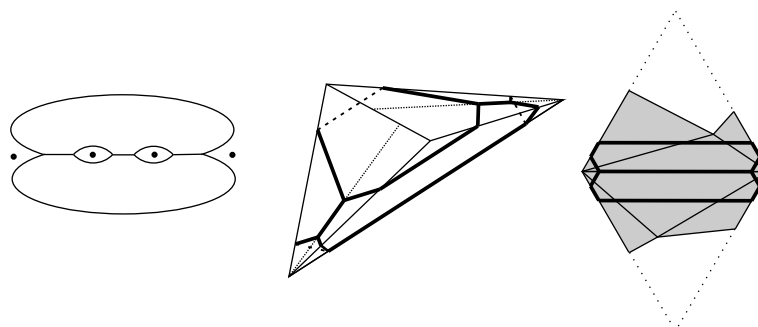


Рис. 9: Минимальная сеть на тетраэдре типа (2-2).

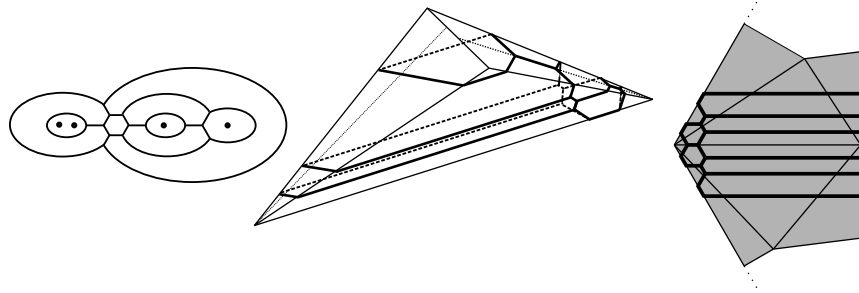


Рис. 10: Минимальная сеть на тетраэдре типа (2-3).

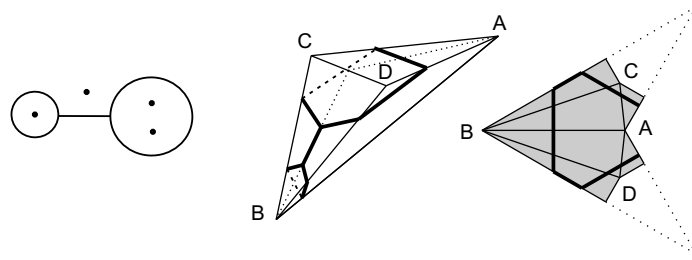


Рис. 11: Тетраэдр типа (1-4): пример с минимальной сетью.

**Доказательство.** Легко проверить, что если кривизны при всех вершинах тетраэдра делятся на  $\pi/3$  (или, эквивалентно, полные углы делятся на  $\pi/3$ ), то тетраэдр обязательно принадлежит хотя бы одному из пяти типов, для которых в теореме 17 доказано существование минимальной сети в непротом положении.

**Доказательство теоремы окончено.**

#### Теорема 19.

*Если у выпуклого многогранника есть пара вершин с кривизнами  $\frac{5\pi}{3}$  и  $\frac{5\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$  и  $\pi$ ,  $\frac{4\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$  или  $\frac{4\pi}{3}$  и  $\pi$ , то на этом многограннике существует минимальная сеть.*

**Доказательство.** Пусть вершины  $A$  и  $B$  многогранника имеют такие кривизны. Рассмотрим любую  $A$ - $B$ -геодезическую  $\gamma$ , например,  $A$ - $B$ -кратчайшую (она всегда существует, см. лемму 3). Рассмотрим на многограннике малую  $\varepsilon$ -окрестность этой геодезической  $\gamma$ . В этой окрестности можно построить минимальную сеть одного из пяти типов, описанных в теореме 17, точно так же, как было сделано при её доказательстве (можно сделать симметричную развёртку этой окрестности вдоль геодезической  $\gamma$ ).

**Доказательство теоремы окончено.**

#### Теорема 20.

*Существуют тетраэдры типа (1-4), не принадлежащие другим типам, на которых есть минимальная сеть.*

**Доказательство.** Пусть в тетраэдре  $ABCD$  полные углы при вершинах  $B$  и  $A$  равны  $\pi/3$  и  $4\pi/3$  и выполняется следующее условие: ребро  $AB$  составляет с рёбрами  $AC$  и  $AD$  углы, большие  $\pi/6$ . Тогда на этом тетраэдре существует сеть со структурой, изображённой на рис. 11. Там же на симметричной развёртке показано, как эта сеть реализуется на тетраэдре. И одновременно по этому рисунку видно, что тетраэдры типа (1-4), обладающие указанным условием, существуют. **Доказательство теоремы окончено.**

#### Теорема 21.

*Существуют тетраэдры типа (1-4), на которых нет минимальной сети.*

**Доказательство.** Мы докажем отсутствие минимальных сетей на всяком тетраэдре  $ABCD$ , обладающем свойствами:

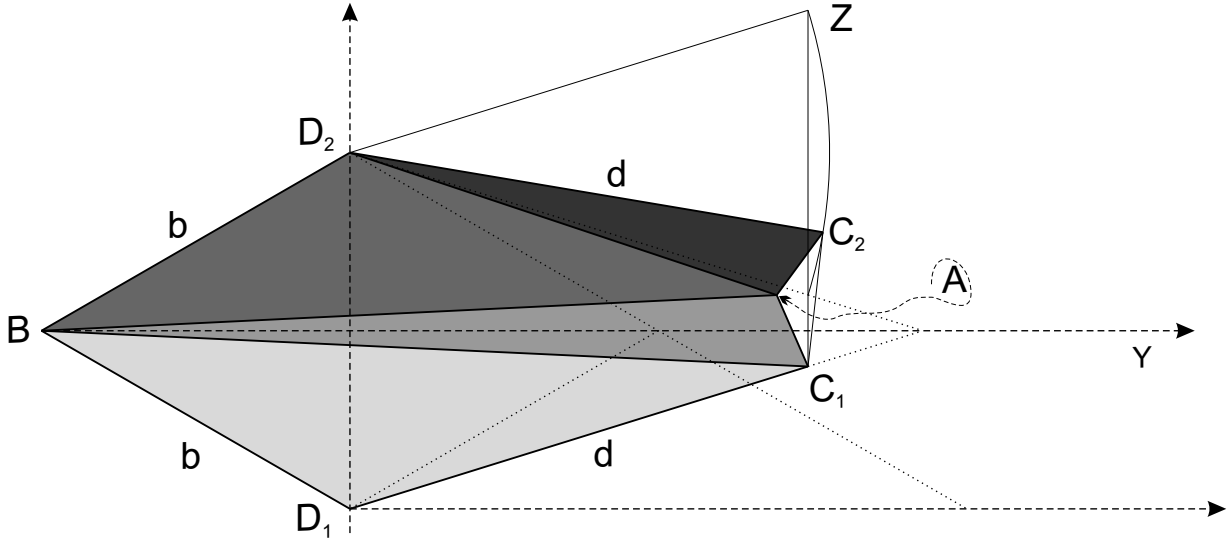


Рис. 12: Тетраэдр типа (1-4): пример без минимальных сетей. Схема построения.

- 1)  $\circ A = 4\pi/3, \circ B = \pi/3, 4\pi/3 < \circ D < 5\pi/3, 2\pi/3 < \circ C < \pi;$
- 2)  $|AC|/|CD| < \varepsilon = \frac{1}{24}$  и  $|BD|/|CD| < \varepsilon$ , где  $|AC|, |BD|$  и  $|CD|$  – длины соответствующих рёбер.

**Лемма 22.**

*Существует тетраэдр, обладающий свойствами 1) и 2).*

**Доказательство.** Построим рёберную развёртку такого тетраэдра, см. рис. 12.

Рассмотрим правильный треугольник  $BD_1D_2$  со стороной  $b$ . Проведём биссектрису угла  $D_1BD_2$  – луч  $BY$ . Будем называть этот луч *горизонтальным* и по отношению к этому горизонтальному направлению будем говорить, что одна точка лежит *ниже* другой и *правее* другой, договорившись, что точка  $D_1$  лежит *ниже* этого луча  $BY$  и точка  $Y$  находится *правее* точки  $B$ . Зададим некоторое расстояние  $d > b/\varepsilon$ . Точку  $C_1$  выберем так, что  $D_1C_1 = d$  и при этом  $C_1$  лежит ниже  $BY$ , но выше  $D_1$ .

Теперь выберем точку  $C_2$  так, чтобы  $\angle BD_1C_1 < \angle BD_2C_2 < 5\pi/3 - \angle BD_1C_1$  и  $D_2C_2 = d$ . Иначе говоря, точка  $C_2$  – это любая точка дуги окружности радиуса  $d$  с центром в  $D_2$ , ограниченная лучом  $D_2Z$ , сонаправленным с лучом  $D_1C_1$ , и лучом, симметричным лучу  $D_1C_1$  относительно прямой  $BY$ .

Построим ранобедренный треугольник с основанием  $C_1C_2$ , углом  $\pi/6$  при основании и вершиной  $A$ , лежащей в той же полуплоскости относительно  $C_1C_2$ , что и точка  $D_1$ . Ясно, что  $C_2$  находится выше  $BY$  и, более того,  $C_2$  дальше от  $BY$ , чем  $C_1$ , поэтому середина отрезка  $C_1C_2$  лежит выше  $BY$ . Кроме того, точка  $C_2$  лежит правее точки  $C_1$ , т.е. проекция отрезка  $D_2C_2$  на  $BY$  длиннее проекции  $D_1C_1$ , поэтому точка  $A$  лежит выше середины отрезка  $C_1C_2$  и, как следствие, выше  $BY$ .

Несложно проверить, что  $5\pi/6 > \angle D_1C_1C_2 > \angle C_1C_2D_2 > \angle D_2D_1C_1 > \pi/3$ . Из этих неравенств, в частности, следует, что точка  $A$  находится внутри пятиугольника  $C_1D_1BD_2C_2$ .

Проводим отрезки  $AB, D_2A, BC_1$ . Образовавшиеся треугольники – грани нашего будущего тетраэдра, в котором будут склеены стороны  $BD_1$  и  $BD_2, D_1C_1$  и  $D_2C_2, C_1A$  и  $C_2A$ . Для того, чтобы показать, что эта развёртка изометрична некоторому вложенному в трёхмерное пространство тетраэдру, достаточно проверить неравенство треугольника для углов при вершине  $B$ . Проверяем.  $\angle D_2BA + \angle ABC_1 > \angle C_1BD_1$  и  $\angle C_1BD_1 + \angle D_1BA > \angle ABD_2$  в силу выбора точек  $A$  и  $C_1$  выше и ниже биссектрисы угла  $B$ , а  $\angle ABC_1 < \pi/6$  при всяком  $d > b$ , поэтому  $\angle ABC_1 < \angle ABD_2 + \angle D_1BC_1$ .

Проверяем свойство 1). Первые три соотношения в нём выполняются просто по нашему построению, и из них следуют неравенства для  $\circ C$  (так как сумма полных углов любого тетраэдра

равна  $4\pi$ ). Свойство 2):  $|BD|/|CD| = b/d < \varepsilon$  по построению, а  $|AC| = AC_1 < C_1C_2 < C_1Z = D_1D_2 = |BD| < \varepsilon \cdot |CD|$ , поэтому  $|AC|/|CD| < \varepsilon$ .

Таким образом, тетраэдры, удовлетворяющие указанным свойствам, существуют.

**Доказательство леммы окончено.**

**Идея доказательства теоремы.** Пусть на некотором тетраэдре со свойствами 1) и 2) существует минимальная сеть. Будем изучать эту сеть и придём к противоречию, которое покажет, что наше предположение неверно.

Поскольку полные углы при вершинах  $C$  и  $D$  не кратны  $\pi/3$ , никакая ячейка минимальной сети не может содержать только одну из этих вершин, значит, существует ячейка минимальной сети, содержащая внутри себя обе вершины  $C$  и  $D$ .

Поскольку у нас малы отношения  $|AC|/|CD|$  и  $|BD|/|CD|$ , развёртка нашего тетраэдра, подобная изображённой на рис. 12, будет очень "узкой и длинной". Если бы было известно, что минимальная сеть на тетраэдре не пересекает ребро  $CD$ , то получалось бы, что на очень "вытянутой" рёберной развёртке, подобной изображённой на рис. 12, имеется минимальная сеть, не пересекающая "длинные" рёбра  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$ . Можно показать, и мы это сделаем позже, что при "достаточно сильной вытянутости" на такой развёртке не может быть минимальной сети.

Но дополнительная трудность заключается в том, что, вообще говоря, ни откуда не следует, что минимальная сеть не пересекает ребро  $CD$  нашего тетраэдра. Мы знаем только, что внутри соответствующей ячейки минимальной сети содержится *какая-то*  $C$ - $D$ -геодезическая (следствие к лемме 3), и эта геодезическая совсем не обязана быть ребром. Можно показать, что при наших условиях на тетраэдре обязательно есть хотя бы одна  $C$ - $D$ -геодезическая, отличная от ребра  $CD$ , и таких геодезических даже может быть в зависимости от выбора тетраэдра сколь угодно много. Таким образом, вообще говоря, может оказаться, что на рёберной развёртке, подобной изображённой на рис. 12, имеется минимальная сеть, во многих местах пересекающая "длинные" стороны  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$ . В таком случае, в отличие от ситуации, когда сеть не пересекает "длинные" стороны, не удаётся просто объяснить, почему минимальной сети не может быть.

Поэтому в общем случае мы сделаем нерёберную развёртку, которая будет напоминать рёберную развёртку из леммы 22, так, чтобы роль "длинных сторон" играла та  $C$ - $D$ -геодезическая, с которой минимальная сеть не пересекается. Мы покажем, что при наших предположениях всякая такая развёртка будет "достаточно вытянутой" и потому на всякой такой развёртке не сможет находиться минимальная сеть.

**Обозначение.** Через  $T$  будем обозначать поверхность тетраэдра.

### Лемма 23.

*Пусть дана  $C$ - $D$ -геодезическая  $\gamma$ . Тогда можно найти на  $\gamma$  две точки  $X$  и  $Y$ , отличные от точек  $C$  и  $D$ , и провести две геодезические  $A-X$  и  $B-Y$  так, что  $T \setminus (\gamma \cup A-X \cup B-Y)$  – геодезический многоугольник, не содержащий вершин тетраэдра. Причём для любого  $\delta > 0$  это можно сделать так, чтобы  $|A-X| < |AC| + \delta$  и  $|B-Y| < |BD| + \delta$ , где  $|A-X|, |B-Y|$  – длины геодезических,  $|AC|, |BD|$  – длины рёбер.*

**Доказательство.** Рассмотрим на ребре  $AC$  точку геодезической  $\gamma$ , ближайшую к вершине  $A$ , и назовём её  $X$ . Этой точкой может оказаться и сама вершина  $C$ . На ребре  $BD$  рассмотрим точку геодезической  $\gamma$ , ближайшую к вершине  $B$ , и назовём её  $Y$ . Участки  $AX$  и  $BY$  рёбер  $AC$  и  $BD$  будут искомыми геодезическими. Ясно, что геодезические  $AX$  и  $BY$  не пересекаются между собой и не имеют с  $\gamma$  общих точек, кроме своих концов  $X$  и  $Y$ . Поэтому ясно, что  $T \setminus (\gamma \cup AX \cup BY)$  – геодезический многоугольник, не содержащий внутри себя вершин тетраэдра.

Приведённые в формулировке теоремы неравенства выполняются для любого  $\delta > 0$ , поскольку выбранные нами геодезические  $AX$  и  $BY$  – это части соответствующих рёбер. Правда, построенная нами точка  $X$  вполне может совпадать с  $C$ . В таком случае возьмём в качестве  $X$  точку на геодезической  $\gamma$ , близкую к  $C$ , и рассмотрим  $A$ - $X$ -кратчайшую  $A-X$ . Аналогично поступим в случае  $Y = D$ . При выборе новых точек достаточно близко к концам геодезической,  $T \setminus (\gamma \cup A-X \cup B-Y)$  по-прежнему будет гомеоморфно диску и неравенства на длины  $|A-X|$  и  $|B-Y|$  останутся верными.

Доказательство леммы окончено.

**Следствие.** Выбором  $\delta > 0$  можно добиться, чтобы для длин  $|A-X|$  и  $|B-Y|$  выполнялись те же оценки, что и для  $|AC|$  и  $|BD|$  в свойстве 2) нашего тетраэдра, а именно:  $|A-X| < \varepsilon|CD|$  и  $|B-Y| < \varepsilon|CD|$ .

Итак, в соответствии со следствием к лемме 3 и леммой 23 проведём в ячейке, содержащей вершины  $C$  и  $D$  тетраэдра,  $C-D$ -геодезическую  $\gamma$ , проведём геодезические  $A-X$  и  $B-Y$  (выбираем  $\delta$ , описанное в следствии к лемме 23). Сделаем изометрию геодезического многоугольника  $T \setminus (\gamma \cup A-X \cup B-Y)$  на плоский, необязательно вложенный, многоугольник  $M$  (лемма 2).

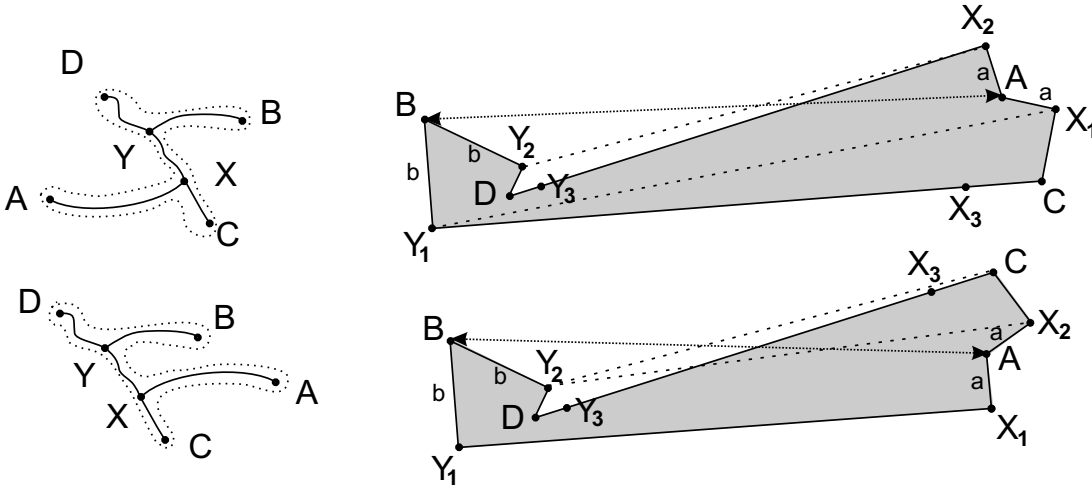


Рис. 13: Развёртка.

Рассмотрим границу многоугольника  $M$ . Вершины  $A$  и  $B$  разбивают её на две части. Возможны два случая: либо вершины  $C$  и  $D$  лежат в разных частях, либо они обе лежат в одной части границы. В первом случае получаем  $M = AX_1CY_1BY_2DX_2$ , во втором –  $M = AX_1Y_1BY_2DCX_2$ , см. рис. 13. Отметим простые свойства и введём *новые* обозначения:  $AX_1 = AX_2 = |A-X| =: a$ ,  $BY_1 = BY_2 = |B-Y| =: b$ ,  $\angle U = \circ U$  для  $U = A, B, C, D$ ,  $|\gamma| =: d$  и в первом случае  $CX_1 + X_2D = DY_2 + Y_1C = d$ , а во втором случае  $CD = d = DY_2 + Y_1X_1 + X_2C$ .

**Замечание.** Введённые только что длины  $b$  и  $d$  – это параметры новой развёртки тетраэдра, соответствующей некоторой минимальной сети. Они совсем не обязаны совпадать с параметрами  $b$  и  $d$ , которые мы вводили, когда строили развёртку в лемме 22.

**Лемма 24. (свойство вытянутости)**

Построенный нами многоугольник  $M$  обладает свойствами:  $a < \varepsilon d$ ,  $b < \varepsilon d$ ,  $AB > (1/4 - 2\varepsilon)d$ , где  $AB$  – длина отрезка  $AB$  на плоскости.

**Доказательство.** Первые два неравенства непосредственно следуют из нашего построения. Достаточно заметить, что кратчайшая  $C-D$ -геодезическая – это ребро  $CD$ . Поэтому  $|A-X| < \varepsilon|CD| \leq \varepsilon|\gamma| = \varepsilon d$  и, точно так же,  $|B-Y| < \varepsilon d$ .

Теперь оценим снизу расстояние (на плоскости) между вершинами  $A$  и  $B$  многоугольника. Ясно, что в любом случае  $AB \geq X_1Y_1 - a - b > X_1Y_1 - 2\varepsilon d$  и  $AB \geq X_2Y_2 - 2\varepsilon d$ . Достаточно показать, что либо  $X_1Y_1$ , либо  $X_2Y_2$  больше, чем  $d/4$ . Сделаем это.

Рассмотрим первый случай, изображённый на рис. 13 сверху.

Если  $X_1C \geq d/2$ , рассмотрим  $\triangle X_1CY_1$ . В этом треугольнике  $2\pi/3 < \angle C < \pi$ , поэтому сторона  $X_1Y_1$  – наибольшая и, значит,  $X_1Y_1 > d/2 > d/4$ .

Если же  $X_1C < d/2$ , то  $X_2D > d/2$  и мы рассмотрим  $\triangle X_2DY_2$ . Для его угла  $D$  верно  $\pi/3 < \angle D < 2\pi/3$ . Тогда  $X_2Y_2 \geq X_2D \cdot \sqrt{3}/2 \geq d/2 \cdot \sqrt{3}/2 > d/4$ .

Теперь рассмотрим второй случай, изображённый на рис. 13 внизу. Точно так же, как выше, из  $\triangle Y_2DC$  получаем оценку  $Y_2C > DC \cdot \sqrt{3}/2 > d/4$ . Кроме того, ясно, что  $DC > DY_2$ , и потому в  $\triangle Y_2DC$  верно:  $\angle DCY_2 < \pi/3$ . Далее,  $\pi + \pi/3 > \angle DCX_2 + \angle DCY_2 = \angle Y_2CX_2 > \angle DCX_2 > 2\pi/3$ .

Поэтому в  $\Delta Y_2 C X_2$  угол  $C$  больше  $2\pi/3$  и сторона  $Y_2 X_2$  – наибольшая. Итак,  $X_2 Y_2 > Y_2 C > d/4$ , что и требовалось.

Доказательство леммы окончено.

Рассмотрим на многоугольнике  $M$  образ нашей минимальной сети. Локальная структура этой сети внутри  $M$  будет такой же, как у всех замкнутых локально минимальных сетей на плоскости – рёбра будут отрезками, в каждой вершине будет сходиться по три ребра под равными углами. Кроме того, наша сеть будет иметь общие точки только со сторонами  $A X_1, A X_2, B Y_1, B Y_2$  многоугольника  $M$  в силу выбора  $C$ - $D$ -геодезической  $\gamma$  на тетраэдре. На сторонах  $A X_1$  и  $A X_2, B Y_1$  и  $B Y_2$  и в их окрестности сеть устроена таким образом, что при склейке соответствующих сторон наблюдается та же локальная структура плоской замкнутой локально минимальной сети.

**Лемма 25.**

Каждый узел сети расположен либо в круге с центром  $A$  радиуса  $2a$ , либо в круге с центром  $B$  радиуса  $2b$ .

Эти круги не пересекаются.

В каждом из кругов есть хотя бы один узел сети; существует хотя бы одно ребро, соединяющее узлы из разных кругов, и все такие рёбра параллельны друг другу.

Доказательство. Будем называть сетевой геодезической минимальной сети на плоскости путь, состоящий из рёбер сети только двух фиксированных направлений.

Рассмотрим произвольный узел  $U$  нашей сети, находящийся внутри многоугольника  $M$ . Через этот узел  $U$  проходит три сетевых геодезических, т.е. из этого узла выходит шесть лучей сетевых геодезических. Выберем три несоседних луча, назовём их  $x, y$  и  $z$ , см. рис. 14. Каждый из этих лучей сетевых геодезических должен оканчиваться на границе многоугольника, точнее, на сторонах  $A X_1, A X_2, B Y_1, B Y_2$ . Значит, либо найдутся два луча, оканчивающихся на паре сторон  $A X_1, A X_2$ , либо найдутся два луча, оканчивающихся на паре сторон  $B Y_1, B Y_2$ . Пусть эти два луча  $x$  и  $y$ , а  $X, Y$  – точки, в которых они выходят на границу многоугольника. Тогда  $\angle XUY > \pi/3$ , это следует из геометрии сети, см. рис. 14. Множество точек, где может располагаться  $U$ , учитывая эту оценку, изображено на рис. 14. Легко показать, что выполняется хотя бы одно из неравенств  $AU < 2a, BU < 2b$ .

Поскольку у нас выполняется *свойство вытянутости* (лемма 24), ясно, что для достаточно маленьких  $\varepsilon$  два круга, в которых расположены все узлы сети, не пересекаются, см. рис. 14. (Легко проверить, что выбранное выше  $\varepsilon = 1/24$  достаточно маленькое.)

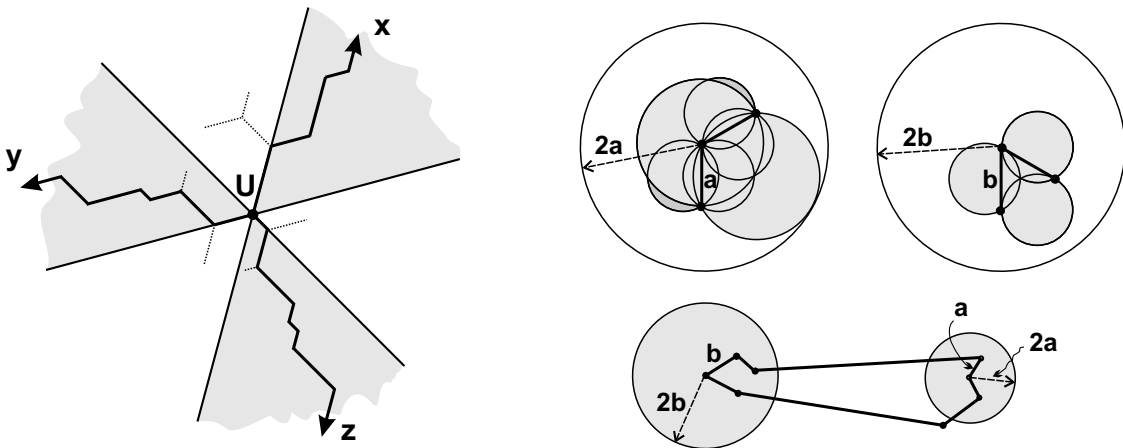


Рис. 14: Каждый узел сети "близок" либо к вершине  $A$ , либо к вершине  $B$ .

Очевидно, что сеть не может располагаться целиком в одном из кругов (ведь у исходной минимальной сети на тетраэдре была ячейка, содержащая ровно две вершины  $C$  и  $D$ ) и в силу связности существует ребро, пересекающееся с обоими кругами. Вообще говоря, отсюда ещё не следует наличие узлов сети в обоих кругах – ребро могло бы проходить через оба круга, хотя

его концы лежат в одном и том же круге, и именно так было в примерах минимальных сетей на тетраэдрах типа (1-3) и (2-3), см. рис. 8 и 10. Однако, в этих примерах ребро-геодезическая, обогнув вершину с полным углом  $\pi$ , "поворачивалась" на угол  $\pi$  и, таким образом, часть ребра от окрестности одной вершины тетраэдра к окрестности второй вершины и часть того же ребра от второй вершины к первой оказывались параллельны друг другу. Ясно, что это возможно только при обходе вершины с полным углом  $\pi$ . Сейчас мы докажем, что в нашем случае любые два отрезка сети с концами в разных кругах должны быть параллельны. Из этого будет, в частности, следовать, что никакое ребро с концами в одном круге не может пересекаться со вторым кругом. Под отрезком сети здесь понимается отрезок на плоскости, являющийся ребром или частью ребра.

Рассмотрим два отрезка сети, каждый из которых соединяет точки из разных кругов, и пусть продолжения этих отрезков пересекаются в некоторой точке  $P$  (сами отрезки, конечно, пересекаться не могут). Рассмотрим угол с вершиной  $P$ , стороны которого содержат наши отрезки. Тогда этот угол не меньше, чем  $\pi/3$  и, с другой стороны, легко показать, что его стороны пересекают в некоторых точках  $P_1, P_2$  либо пару сторон  $AX_1, AX_2$ , либо пару сторон  $BY_1, BY_2$ . Тогда по доказанному выше точка  $P$  и, следовательно, весь треугольник  $PP_1P_2$  лежат в соответствующем круге, что противоречит тому, что выбранные отрезки соединяли точки из разных кругов.

Итак, из-за *вытянутости* развёртки, все отрезки сети, идущие из одного круга в другой, параллельны друг другу, а из-за того, что полные углы вершин  $A$  и  $B$  не равны  $\pi$ , никакое ребро с концами в одном круге не может пересекать другой круг. Значит, в каждом круге есть хотя бы один узел сети.

Доказательство леммы окончено.

**Замечание.** В примере минимальной сети на тетраэдре рассматриваемого сейчас типа (1-4) (см. рис. 11) тетраэдр не обладал свойством вытянутости и потому, говоря неформально, отрезки сети, соединяющие точки окрестностей разных вершин, могли быть не параллельны, что и позволило построить минимальную сеть.

Теперь докажем, что *на таком многоугольнике не может располагаться образ минимальной сети*.

Рассмотрим часть сети, попавшую в окрестность вершины  $A$ . Покажем, что уже эта часть существовать не может при наших условиях. Точнее, при условии, что  $\angle A = 4\pi/3$ , что все рёбра сети, выходящие из окрестности, идут в одном направлении, и при условиях "согласованности при склейке".

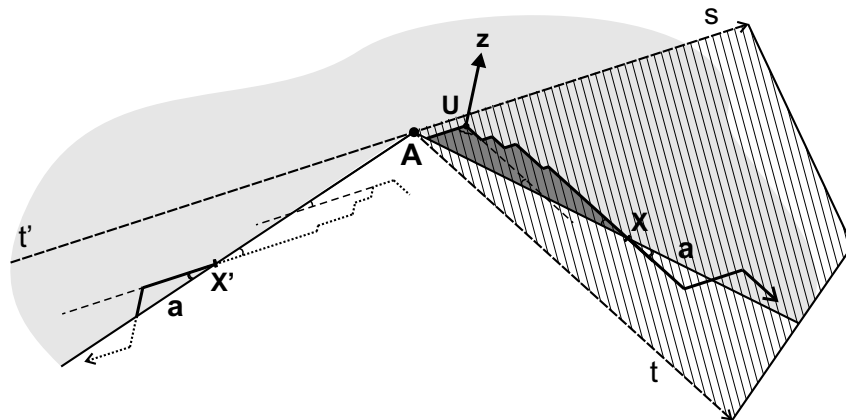


Рис. 15: Невозможность построить сеть в окрестности вершины  $A$ .

Рассмотрим узел  $U$  из окрестности точки  $A$  (лемма 25). Пусть ребро  $z$  выходит из него в направлении рёбер, соединяющих окрестности. Рассмотрим сетевую геодезическую, не содержащую рёбер этого направления и проходящую через  $U$ , см. рис. 15.



Эта сетевая геодезическая должна в двух каких-то точках выходить на стороны  $AX_1, AX_2$  (может быть, на одну, может быть, на обе) – ведь она не содержит рёбер направления  $z$  и потому не может "уйти" из окрестности вершины  $A$  и пересекать стороны  $BY_1, BY_2$ . Тогда эта сетевая геодезическая и стороны  $AX_1, AX_2$  ограничивают некоторый многоугольник. Углы этого многоугольника в точках выхода сетевой геодезической на границу будут острыми (это следует из того, что угол при вершине  $U$  равен  $2\pi/3$ ). Рассмотрим дальнюю от вершины  $A$  точку выхода сетевой геодезической на границу, назовём её точкой  $X$ .

Проведём через точку  $A$  лучи  $As$  и  $At$ , сонаправленные с рёбрами нашей сетевой геодезической, если идти по ней из  $U$  в  $X$  (речь идёт о сонаправленности лучей *на плоскости*). При этом один из лучей, пусть  $At$ , обязательно будет выходить из  $A$  во внешность многоугольника, а другой,  $As$ , будет выходить из  $A$  во внутренность многоугольника. Рассмотрим луч  $At'$ , дополнительный к лучу  $As$ . Заметим, что  $At'$  обязательно будет выходить из  $A$  во внутренность многоугольника. Из свойств нашего многоугольника следует, что лучи  $As$  и  $At'$  пересекут стороны, соответствующие геодезической  $\gamma$ . Для удобства перекроем наш многоугольник, разрезав по лучу  $At'$  и склеив по сторонам  $AX_1, AX_2$ . Теперь стороны многоугольника, выходящие из  $A$ , будут лежать на лучах  $At$  и  $At'$ . Ясно, что луч нашей сетевой геодезической в точке  $X$  находится в секторе с раствором  $\pi/3$ , ограниченном лучами  $As$  и  $At$  и ограниченном кусками сторон, соответствующих  $\gamma$ . При этом рёбра сетевой геодезической сонаправлены лучам сектора, поэтому луч сетевой геодезической не может выйти за пределы сектора через эти лучи, а на последний участок границы сектора он не может выйти, так как сеть не имела общих точек с  $\gamma$ . Но и заиклиться этот луч, очевидно, не может, так же, как и всякая сетевая геодезическая на плоскости. Получаем противоречие, ведь у нашей сети по определению конечное число вершин и сеть замкнута – сетевая геодезическая не может кончиться в какой-то внутренней точке многоугольника. Значит, на таком многоугольнике не может располагаться образ минимальной сети.  
Доказательство теоремы окончено.

**Замечание.** Последнее рассуждение существенно опирается на величину полного угла  $\circ A = 4\pi/3$ . В случае полных углов  $\pi/3$  и  $2\pi/3$  построение сети с узлом в окрестности вершины и с тем же условием выхода из окрестности рёбер только одного направления возможно – см. рис. 5, 6, 8 – 10, а в случае полного угла  $\pi$ , как уже отмечалось выше, возможно построение минимальной сети без узлов в окрестности вершины с этим полным углом.

## Список литературы

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.
- [2] И. В. Птицына, *Классификация замкнутых локально минимальных сетей на тетраэдрах*, Матем. сборник, **185**, No 5, стр. 119 – 138, 1994.
- [3] В. Ю. Протасов, *Замкнутые геодезические на поверхности симплекса*, Матем. сб., **198** : 2 (2007), 103-120.
- [4] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Москва-Ленинград, 1950.
- [5] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, М. Наука, 1989.
- [6] А. О. Иванов, И. В. Птицына, А. А. Тужилин, *Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах*, Матем. сб., **183** : 12 (1992), стр. 3–44.