Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Дипломная работа

Стетюхиной Ольги Михайловны

О соответствии случайных блужданий на ультраметрической дискретной решётке и p-адической прямой

Научный руководитель
д.ф.-м.н. проф.
Аветисов Владик Аванесович

Москва
2010

1 Введение

В последнее время модели ультраметрических случайных процессов активно используются для описания различных явлений в физике и биологии, в частности, в физике неупорядоченных конденсированных сред, физике белковых молекул и динамике биополимеров. При этом часто используются два подхода. Один из них основан на использовании p-адического уравнения ультраметрической диффузии, а другой на компьютерном моделировании случайного блуждания на ультраметрической дискретной решётке. В связи с этим возникает вопрос о соответствии случайных блужданий на ультраметрической дискретной решётке и p-адической прямой. В данной работе установлен математический смысл такого соответствия.

Процесс Огиельского-Штейна, описанный в статье "Динамика в ультраметрических пространствах"("Dynamics on Ultrametric Spaces") представляет собой случайное блуждание на конечном бинарном n-уровневом дереве. Это случайный процесс с непрерывным временем. Состояниями являются вершины-листья, образующие иерархическую структуру. Расстояние между ними определяется высотой соединяющей вершины, лежащей на пути из одного состояния в другое. Так задаётся ультраметрическое пространство. Чем больше расстояние, тем выше барьер, который нужно преодолеть для перемещения.

Состояния нумеруются естественным образом от 0 до $2^n - 1$. Можно считать, что в нулевой момент времени процесс находится в состоянии 0. Тогда определена вероятность $P_i(t)$ находиться в момент t в состоянии i. Вероятность перехода в единицу времени через i-ый барьер обозначается ϵ_i. Чем больше i (выше барьер), тем меньше ϵ_i.

Дифференциальное уравнение на плотность вероятности выглядит следующим образом:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \epsilon P(t),$$

где $P(t)$ – вектор, компонентами которого являются $P_i(t)$, а ϵ – матрица, где на месте элемента ϵ_{ij}, $i \neq j$ стоит вероятность перехода из i-го состояния в j-ое, а на диагонали $\epsilon_0 = -(\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 4\epsilon_3 + \cdots + 2^{n-1}\epsilon_n)$, то есть сумма недиагональных элементов столбца, взятых с обратным знаком.

2 Основные понятия

Введём некоторые общие понятия, используемые в этой работе. Это краткий обзор сведений, связанных с полем p-адических чисел и теорией случайных процессов.

Поле p-адических чисел. $\mathbb{Q}$– поле рациональных чисел. Введём на $\mathbb{Q}$ *p-адическую* норму $|\cdot|_p$, определив её следующим образом:

$$|x|_p = p^{-\gamma}, \qquad \text{где } x = p^{\gamma}\frac{m}{n},\ 0 \neq m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ (m,n)\,,\ p - \text{простое},$$

$$|0|_p = 0.$$

p-адическая норма удовлетворяет стандартным свойствам нормы:

1. $|x|_p \geq 0,$ и $\quad |x|_p = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$
2. $|xy|_p = |x|_p |y|_p,$
3. $|x + y|_p \leq \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$, причём если $|x|_p \neq |y|_p$, то достигается равенство. Заметим, что если данное неравенство выполнено, то неравенство треугольника $|x + y| \leq |x| + |y|$, обычно используемое в определении нормы, выполняется тем более. Поэтому оно называется *сильным неравенством треугольника.*

Пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической норме даёт *поле p-адических чисел* $\mathbb{Q}_p$. Каждое $0 \neq x \in \mathbb{Q}_p$ представляется в каноническом виде:

$$x = p^{\gamma}\left(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots\right),$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $\quad x_j = 0, 1, \dots, p-1$, $\quad j = 0, 1, \dots$; и $\quad x_0 \neq 0$. Ряд (1.1) сходится по p-адической норме, и p-адическая норма x равна $|x|_p = p^{-\gamma}$, где $(-\gamma)$ называется *порядком* числа x. Порядок нуля считается равным $-\infty$.

p-адическая норма принимает только счётное число значений. Она *неархимедова.* Это означает, что мы не сможем получить число x, $|x|_p = p^{\gamma}$, складывая числа с нормой меньшей p^{γ}. Благодаря этому, пространство разбивается на шары:

$$B_{\gamma}(a) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \mid\ |x - a|_p\ \leq\ p^{\gamma}\right\}.$$

Шары разбиваются на сферы:

$$S_{\gamma}(a) = \left\{x \in \mathbb{Q}_p \mid\ |x - a|_p\ =\ p^{\gamma}\right\},$$

$$B_{\gamma}(a) = \bigcup_{\gamma' \leq \gamma} S_{\gamma'}(a)\,.$$

Также каждый шар разбивается на p шаров меньшего радиуса. Это легко увидеть, если посмотреть на каноническую запись числа. Шар $B_0 = B_0(0)$ обозначается $\mathbf{Z}_p$, и является кольцом *целых* р-адических чисел, то есть чисел, норма которых меньше единицы.

Дробная часть $\{x\}_p$ числа $x \in \mathbb{Q}_p$ определяется из канонического разложения:

$$\{x\}_p = 0, \quad \text{если } \gamma(x) \geq 0,$$

$$\{x\}_p = p^{\gamma} \left(x_0 + x_1 p + \cdots + x_{-\gamma-1} p^{-\gamma-1} \right) , \quad \text{если } \gamma(x) < 0.$$

Определим *аддитивный характер поля* $\mathbb{Q}_p$. Это функция $\chi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$, обладающая свойствами

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}_p \qquad \chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y)\,, \quad |\,\chi(x)\,| = 1.$$

Аддитивный характер χ_p называется *стандартным* и определяет остальные характеры χ:

$$\chi_p(x) = e^{2\pi i\,\{x\}_p}.$$

$$\chi(x) = \chi_p(\xi x) = e^{2\pi i\,\{\xi x\}_p}, \quad \text{где } \xi \in \mathbb{Q}_p\,.$$

На пространстве $\mathbb{Q}_p$ можно ввести меру $d_p(\cdot)$, которая называется *мерой Хаара*. Она инвариантна относительно сдвигов и нормируется:

$$d_p x = d_p(x+a)\,,$$

$$\int_{\mathbf{Z}_p} d_p x \quad \text{(мера единичного шара)},$$

а значит определена для всех шаров в $\mathbb{Q}_p$, которые образуют полукольцо множеств. Таким образом, меру можно продолжить на σ-алгебру, порождённую шарами в $\mathbb{Q}_p$. Построенная мера позволяет производить замену переменных по формуле

$$d_p(ax) = |a|_p\, d_p x\,.$$

Теперь можно производить интегрирование по мере Хаара. Если $M \subset \mathbb{Q}_p$ — измеримое по мере Хаара множество, то интеграл функции $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ запишется в виде

$$\int_M f(x)\, d_p x\,.$$

Случайный процесс на $\mathbb{Q}_p$. Согласно аксиоматике Колмогорова, измеримым пространством называется пара $\{\Omega, \Sigma\}$, где Ω это некоторое множество, а Σ есть σ-алгебра подмножеств множества Ω. Вероятностным пространством называется тройка $\{\Omega, \Sigma, P\}$, где $\{\Omega, \Sigma\}$ — измеримое пространство, а P — счётно-аддитивная мера на Σ, удовлетворяющая условию $P(\Omega) = 1$. Элемент $A \in \Sigma$ называется событием, а мера $P(A)$ вероятностью события A. Пусть $\{Y, \mathcal{B}\}$ — некоторое измеримое пространство. Отображение $\xi : \Omega \to Y$ называют $\Sigma|\mathcal{B}$-измеримым, если $\xi^{-1}(\mathcal{B}) \subset \Sigma$. $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, называется случайной величиной.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольная σ-алгебра, содержащаяся в Σ, а ξ — случайная величина на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) с *математическим ожиданием* $\int_\Omega \xi(\omega) < \infty$. Тогда *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$ называется случайная величина $E\{\xi \mid \mathcal{F}\}$, $\mathcal{F}|\mathcal{B}$-измеримая и при произвольном B удовлетворяющая соотношению

$$\int_B E\{\xi \mid \mathcal{F}\}\, dP = \int_B \xi\, dP.$$

Условное математическое ожидание относительно случайной величины определяется $P\{\xi \mid \eta\} = P\{\xi \mid \mathcal{F}_\eta\}$, где $\mathcal{F}_\eta = \{\eta^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$. *Условная вероятность* $P\{A \mid \mathcal{F}\}$ является частным случаем условного математического ожидания и определяется как

$$P\{A \mid \mathcal{F}\} = E\{\chi_A \mid \mathcal{F}\},$$

где $\chi_A(\omega)$ — характеристическая функция множества A.

Пусть $T = [0, \infty)$ — множество, имеющее смысл времени. *Случайным процессом* называется отображение $\xi : T \times \Omega \to Y$, являющееся при фиксированном $t \in T$ случайной величиной $\xi_t : \Omega \to Y$, то есть $\Sigma|\mathcal{B}$-измеримым отображением из Ω в Y. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским если для любых $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ и $B \in \mathcal{B}$ выполняется соотношение

$$P\{\xi(t) \in B \mid \xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)\} = P\{\xi(t) \in B \mid \xi(t_n)\}.$$

Марковский процесс *однородный*, если существует фукция $P(t, x, B), t \in T, x \in \Omega, B \in \mathcal{B}$ которая:

1. $\Sigma|\mathcal{B}$-измерима по x при фиксированных t, B,
2. при фиксированных t, x является вероятностной мерой на $\{Y, \mathcal{B}\}$,
3. удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чепмена

$$P(t+s, x, B) = \int_Y P(s, x, dy)\, P(t, y, B),$$

4. с вероятностью 1 совпадает с условными вероятностями

$$P\left(t, x, B\right) = P\left\{\xi\left(t+s\right) \in B \mid \xi\left(s\right) = x\right\}.$$

3 Постановка задачи и решение задачи

Рассмотрим систему, имеющую p^r (p-простое) состояний. Сопоставим каждому состоянию индекс $i = 0, 1, \ldots, p^r - 1$ и назовём множество всех состояний шаром B_r. Поделим B_r на p шаров $B_{r-1}^{(k_1)}, k_1 = 0, \cdots, p-1$, каждый из которых содержит состояния $i = k_1 p^{r-1}, \ldots, \left(k_1+1\right) p^{r-1} - 1$. Аналогично будем делить каждый шар $B_{r-1}^{(k_1)}$ на p шаров $B_{r-2}^{(k_1 k_2)}, k_2 = 0, \ldots, p-1$. Продолжим процедуру до уровня B_0, на котором каждый шар содержит по одному состоянию. Вероятность перехода за единицу времени внутри шара B_s, $s = 1, \ldots, r$ между подшарами B_{s-1} равна q_s, причём, чем больше s, тем меньше q_s. Введём $q_0 = -\sum_{s=1}^{r}\left(p-1\right) p^{s-1} q_s$. Тогда можно написать кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{f}\left(t\right)}{\partial t} = \mathbf{Q}\mathbf{f}\left(t\right),$$

где $\mathbf{f}\left(t\right)$ – вектор плотностей вероятности $\mathbf{f}_i$ находиться в момент времени t в i-ом состоянии, при определённых начальных условиях, а $\mathbf{Q}$ – матрица Паризи (пример для $p = 3, r = 2$)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_1 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_1 & q_0 & q_1 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_1 & q_1 & q_0 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_0 & q_1 & q_1 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_1 & q_0 & q_1 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_1 & q_1 & q_0 & q_2 & q_2 & q_2 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_0 & q_1 & q_1 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_1 & q_0 & q_1 \\ q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_2 & q_1 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что матрица Паризи имеет иерархическую блочную структуру.

Построим отображение $x\left(i\right)$ множества натуральных чисел, параметризующих состояния, в рациональные числа:

$$i = \sum_{\gamma=0}^{r-1} x_\gamma^{(i)} p^\gamma \to \sum_{\gamma=0}^{r-1} x_\gamma^{(i)} p^{-\gamma+r-1} = x^{(i)},$$

где $x_\gamma^{(i)} = 0, 1, \ldots, p-1$, а $\mid x^{(i)}|_p \leq 1$. Тогда элементы матрицы Паризи $Q_{ij}, i \neq j$, определяются только p-адическими расстояниями $Q_{ij} =$

$\rho\left(|x^{(i)}-x^{(j)}|_p\right)$, где $\rho\left(p^{\gamma}\right)=q_{\gamma}$. Тогда кинетическое уравнение можно переписать в виде системы p^r уравнений

$$\frac{\partial f_k\left(t\right)}{\partial t}=\sum_{i=0}^{p^r-1}\rho\left(|x^{(i)}-x^{(k)}|_p\right)\left(f_i\left(t\right)-f_k\left(t\right)\right).$$

Устремляя $r\to\infty$, мы пополним множество $\{x\left(i\right)\}$ до $B_0=\{x\mid |x|_p\leq 1\}$. Теперь будем считать, что состояниями процесса являются все точки p-адического шара B_0. По аналогии с дискретным случаем запишем следующее уравнение:

$$\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial t}=\int_{B_0}\rho\left(\,|x-y|_p\right)\left(f\left(y,t\right)-f\left(x,t\right)\right)d_py,$$

где $f\left(x,t\right)$ имеет смысл плотности вероятности. которое называется уравнением ультраметрической диффузии. Тогда вероятность находиться в момент времени t в множестве B выражается $\int_B f\left(x,t\right)d_px$.

Введём фактор-пространство $B_0/B_{-\gamma}$, где $B_{-\gamma}=\{x\mid |x|_p\leq p^{-\gamma}\}$, проинтегрируем обе части кинетического уравнения ультра-метрической диффузии по $B_{-\gamma}$ и назовём полученное уравнение представлением p-адического уравнения ультраметрического случайного блуждания на $B_0/B_{-\gamma}$.

Теорема 1 *Представление p-адического уравнения ультраметрического случайного блуждания на $B_0/B_{-\gamma}$ эквивалентно уравнению случайного блуждания на ультраметрической дискретной решётке.*

Разобьём шар B_0 на p^{γ} шариков $B_{-\gamma}^{(i)}$. Проинтегрируем p-адическое уравнение ультраметрического случайного блуждания по некоторому шарику $B_{-\gamma}^{(k)}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B_{-\gamma}^{(k)}}f\left(x,t\right)d_px=\int_{B_{-\gamma}^{(k)}}d_px\int_{B_0}\rho\left(\,|x-y|_p\right)\left(f\left(y,t\right)-f\left(x,t\right)\right)d_py.$$

Введём обозначение $\int_{B_{-\gamma}^{(k)}}f\left(x,t\right)d_px=f_k$. На каждом таком шарике функция $\rho\left(\,|x-y|_p\right)$ постоянна. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_k\left(t\right)}{\partial t}=\int_{B_{-\gamma}^{(k)}}d_px\int_{B_{-\gamma}^{(k)}}\rho\left(\,|x-y|_p\right)\left(f\left(y,t\right)-f\left(x,t\right)\right)d_py+$$

$$+\int_{B_{-\gamma}^{(k)}}d_px\sum_{i\neq k}\rho\left(\,|x-y|_p\right)\int_{B_{-\gamma}^{(i)}}\left(f\left(y,t\right)-f\left(x,t\right)\right)d_py.$$

Первый интеграл обращается в ноль, поэтому уравнение перепишется

$$\frac{\partial f_k\left(t\right)}{\partial t}=\sum_{i\neq k}\rho\left(|x^{(k)}-x^{(i)}|_p\right)p^{-\gamma}\left(f_i\left(t\right)-f_k\left(t\right)\right)d_py,$$

где $x^{(k)}, x^{(i)}$ – представители соответствующий шаров, а $p^{-\gamma}$ – мера шара $B_{-\gamma}$. Таким образом получилось уравнению случайного блуждания на ультраметрической дискретной решётке

$$\frac{\partial f_k\left(t\right)}{\partial t}=\sum_{i}\rho'\left(|x^{(k)}-x^{(i)}|_p\right)\left(f_i\left(t\right)-f_k\left(t\right)\right)d_py,$$

где $\rho'\left(\cdot\right)=\rho\left(\cdot\right)p^{-\gamma}$.

Так установлено соответствие между p-адическим уравнением ультраметрического случайного блуждания на $B_0/B_{-\gamma}$ и уравнением случайного блуждания на ультраметрической дискретной решётке.

Список литературы

[1] В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов *p-адический анализ и математическая физика*, Физматлит 1994 г.

[2] Andrew T. Ogielski, D.L. Stein *Dynamics on Ultrametric Spaces*, 1985.

[3] V.A. Avetisov, A.H. Bikulov, S. V. Kozyrev *Application of p-adic analysis to models of breaking of replica symmetry*, 1999.