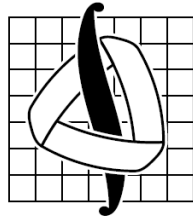


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет



## Дипломная работа

Лиувиллева классификация интегрируемого  
случая Ковалевской-Яхьи задачи о движении  
твёрдого тела.

студента 5 курса Андреянова П.П.

Научный руководитель: академик РАН А.Т.Фоменко

Москва 2009

# 1 Введение

Мы будем рассматривать задачу о движении тяжёлого гиростата с постоянным гиростатическим моментом, в постановке которой важные результаты принадлежат Н.Е.Жуковскому, П.В.Харламову и другим классикам отечественной и мировой механики. В настоящее время по-прежнему не ослабевает интерес к этой проблеме. Прежде всего это связано с современными методами явного интегрирования уравнений, с качественными исследованиями динамических систем, с интегрируемостью по Лиувиллю.

Гиростату С.В.Ковалевской посвящено не так много работ. П.В.Харламов предложил рассмотреть гиростат, распределение масс которого подчинено условиям С.В.Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Им указано инвариантное соотношение, позволяющее в эллиптических функциях проинтегрировать этот частный случай. Как показал Х.М.Яхья, интеграл С.В.Ковалевской может быть обобщён на гиростат при условиях, указанных П.В.Харламовым. Мы имеем двухпараметрическое семейство интегрируемых по Лиувиллю систем, первые интегралы которых гладко зависят от параметров  $(g, \lambda)$ , где  $g$  - постоянная площадей, а  $\lambda$  - гиростатический момент. Для произвольных значений параметров, П.Е.Рябовым в работе [2] было вычислено критическое множество отображения момента и получено дискриминантное множество  $D$ , в котором содержатся бифуркационные диаграммы. Также им было найдено множество  $\Theta$  значений параметров  $(g, \lambda)$ , при которых происходят бифуркации множества  $D$ . В случае  $g = 0$  полный топологический анализ был проведен в работе [3], а в случае  $\lambda = 0$  в работе [4]. Для общего случая, однако, подобной работы проведено не было.

В настоящей работе мы попытаемся, отталкиваясь от уже изученных частных случаев и некоторых численных исследований этой системы, получить ответ для общего случая. Идея заключается в том, что, если система удовлетворяет некоторым естественным требованиям: а) образ вырожденных точек ранга 1 содержится в особых точках бифуркационной диаграммы; б) образ точек ранга 0 содержится в особых точках бифуркационной диаграммы; в) образ вырожденных точек ранга 0 содержится в точках бифуркационной диаграммы, получившихся склейкой двух особых точек; то те части бифуркационных кривых, которые изменяются непрерывно при изменении этих параметров, сохраняют тип Лиувиллева слоения в своём прообразе. Для того чтобы использовать это свойство нам понадобится тщательное изучение множества  $\Theta$ , аккуратное описание диаграмм  $D$  и их перестроек, и построение классификации камер, стенок и особых точек этих диаграмм. Результат - классификация семейств торов Лиувилля, перестроек, вырожденных замкнутых траекторий, невырожденных точек положения равновесия, а также полный список круговых молекул особых точек диаграмм.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям - академику А. Т. Фоменко, доценту А. А. Ошемкову, кандидату ф/м наук П. Е. Рябову, кандидату ф/м наук П. В. Морозову за постоянное внимание к работе, множество ценных замечаний и консультаций.

## 2 Постановка задачи Ковалевской-Яхьи

Случай интегрируемости Ковалевской-Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиристата. Приведем два способа получения уравнений движения этой системы и их первых интегралов.

### 2.1 Переменные $(s, r)$

Рассмотрим алгебру Ли  $e(3)$  группы Ли  $E(3)$  движений трехмерного евклидова пространства. На линейном пространстве  $e(3)^*$  определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций  $f$  и  $g$ :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где  $x \in e(3)^*$ , а  $[, ]$  - коммутатор в алгебре Ли  $e(3)$ . В естественных координатах  $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$  на пространстве  $e(3)^*$  эта скобка записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \{s_i, s_j\} &= \varepsilon_{ijk} s_k, & \{r_i, s_j\} &= \varepsilon_{ijk} r_k, & \{r_i, r_j\} &= 0, \\ 1 \leq i, j, k \leq 3, & \varepsilon_{ijk} &= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i). \end{aligned}$$

Соответствующая матрица  $\Omega_{s,r}$  скобки Ли-Пуассона:

$$\Omega_{s,r} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 & 0 & r_3 & -r_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & 0 & r_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 & r_2 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

Гамильтонова система на пространстве  $e(3)^*$  со скобкой (2.1.1) имеют вид:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad (2.1.2)$$

где  $H(s, r)$  - гладкая функция на  $e(3)^*$ , называемая гамильтонианом.

Функции  $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$  и  $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$  лежат в ядре скобки Ли-Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (1.1.2). На совместных четырехмерных поверхностях уровня этих функций  $M_g^4 = \{(s, r) \mid f_1 = 1, f_2 = g\}$ , ограничение системы (2.1.2) представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности  $M_g^4$  являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в  $e(3)^*$ , диффеоморфными  $TS^2$ . Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли-Пуассона на  $TS^2$  из объемлющего пространства  $e(3)^*$ . Параметр  $g$  имеет физический смысл постоянной площадей.

Система будет интегрируемой на поверхности  $M_g^4$ , если на ней существует функционально независимая с  $H, f_1, f_2$  гладкая функция  $K(s, r)$ , такая что  $\{H, K\} = 0$ . Если такая функция существует глобально на всем  $e(3)^*$ , то для любого значения  $g$  на  $M_g^4$  возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы.

Обозначим  $s = (s_1, s_2, s_3)$  и  $r = (r_1, r_2, r_3)$ . Тогда уравнения (1.1.2) можно переписать в виде обобщенных уравнений Кирхгофа:

$$\dot{s} = \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right) \times s + \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right) \times r, \quad \dot{r} = \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right) \times r. \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана Ковалевской (движение гири в поле силы тяжести):

$$H = \frac{s_1^2}{2A} + \frac{s_2^2}{2A} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{A} + a_1 r_1 + a_2 r_2.$$

Запишем систему (2.1.3) для этого гамильтониана:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{s_2}{2}(s_3 - \lambda) + a_2 r_3, & \dot{r}_1 &= s_2 r_3 - \frac{r_2}{2}(s_3 + \lambda), \\ \dot{s}_2 &= -\frac{s_1}{2}(s_3 - \lambda) - a_1 r_3, & \dot{r}_2 &= -s_1 r_3 + \frac{r_1}{2}(s_3 + \lambda), \\ \dot{s}_3 &= a_1 r_2 - a_2 r_1, & \dot{r}_3 &= s_1 r_2 - s_2 r_1. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Как впервые указал Х.М.Яхья [5] [6], для него существует дополнительный интеграл четвертой степени:

$$K = \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2 r_2 - a_1 r_1 \right)^2 + \left( \frac{s_1 s_2}{A} - a_1 r_2 - a_2 r_1 \right)^2 - \frac{2\lambda}{A^2}(s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) + \frac{4\lambda r_3}{A}(a_1 s_1 + a_2 s_2).$$

Линейной заменой координат  $(s, r) \rightarrow (\tilde{s}, \tilde{r})$  на  $e(3)^*$ , избавимся от параметров  $A, a_1$  и  $a_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= \frac{1}{\gamma}(-a_1 s_1 - a_2 s_2) \cdot \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}, & \tilde{r}_1 &= \frac{1}{\gamma}(-a_1 r_1 - a_2 r_2), & \tilde{\lambda} &= \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}\lambda, \\ \tilde{s}_2 &= \frac{1}{\gamma}(a_2 s_1 - a_1 s_2) \cdot \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}, & \tilde{r}_2 &= \frac{1}{\gamma}(a_2 r_1 - a_1 r_2), & \tau &= \sqrt{\frac{2\gamma}{A}}t, \\ \tilde{s}_3 &= s_3 \cdot \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}, & \tilde{r}_3 &= r_3, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

где  $\gamma = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ,  $t$  - время в системе координат  $(s, r)$ , а  $\tau$  - время в системе координат  $(\tilde{s}, \tilde{r})$ .

Матрица  $\Omega_{\tilde{s}, \tilde{r}}$  скобки Ли-Пуассона, и функции  $f_1, f_2$ , будет иметь такую же, с точностью до коэффициента, запись:

$$\Omega_{\tilde{s}, \tilde{r}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{A}} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{s}_3 & -\tilde{s}_2 & 0 & \tilde{r}_3 & -\tilde{r}_2 \\ -\tilde{s}_3 & 0 & \tilde{s}_1 & -\tilde{r}_3 & 0 & \tilde{r}_1 \\ \tilde{s}_2 & -\tilde{s}_1 & 0 & \tilde{r}_2 & -\tilde{r}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{r}_3 & -\tilde{r}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{r}_3 & 0 & \tilde{r}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_2 & -\tilde{r}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \tilde{r}_1^2 + \tilde{r}_2^2 + \tilde{r}_3^2, \quad f_2 = \sqrt{\frac{A\gamma}{2}}(\tilde{s}_1 \tilde{r}_1 + \tilde{s}_2 \tilde{r}_2 + \tilde{s}_3 \tilde{r}_3). \quad (2.1.6)$$

Уравнения (2.1.4) с учетом дифференцирования по  $\tau$  примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{s}}_1 &= -\frac{\tilde{s}_2}{2}(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}), & \dot{\tilde{r}}_1 &= \frac{\tilde{s}_2 \tilde{r}_3}{2} - \tilde{r}_2(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), \\ \dot{\tilde{s}}_2 &= \frac{\tilde{s}_1}{2}(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}) + \tilde{r}_3, & \dot{\tilde{r}}_2 &= -\frac{\tilde{s}_1 \tilde{r}_3}{2} + \tilde{r}_1(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), \\ \dot{\tilde{s}}_3 &= -\tilde{r}_2, & \dot{\tilde{r}}_3 &= \frac{\tilde{s}_1 \tilde{r}_2}{2} - \frac{\tilde{s}_2 \tilde{r}_1}{2}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Гамильтониан и дополнительный интеграл  $K$  примут упрощенный вид:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{H}{\gamma} = \frac{\tilde{s}_1^2}{4} + \frac{\tilde{s}_2^2}{4} + \frac{(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda})^2}{2} - \tilde{r}_1, \\ \tilde{K} &= \frac{K}{\gamma^2} = \left( \frac{\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2}{4} + \tilde{r}_1 \right)^2 + \left( \frac{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2}{2} + \tilde{r}_2 \right)^2 - \\ &\quad - \frac{\tilde{\lambda}}{2} (\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2) - 2\tilde{\lambda} \tilde{r}_3 \tilde{s}_1.\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

## 2.2 Переменные $(\omega, \nu)$

Гиростатом называется твердое тело, в котором закреплен маховик. Классические уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие движение гиростата с закрепленной точкой в поле силы тяжести, в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}) \times \omega - \vec{a} \times \nu, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega. \end{cases}\quad (2.2.1)$$

Фазовые переменные здесь таковы:  $\omega$  - вектор угловой скорости,  $\nu$  - единичный вертикальный вектор (в неподвижной с.к.). Параметры системы:  $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  - диагональная матрица, задающая тензор инерции твердого тела,  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  - вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела, его модуль равен произведению веса тела на расстояние от центра масс до неподвижной точки. Вектор  $\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}$  имеет смысл кинетического момента гиростата. Гиростатический момент  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  - это постоянный (в подвижной, связанной с телом, с.к.) вектор, который направлен вдоль оси маховика. Первыми интегралами уравнений движения (2.2.1) будут:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{A}\omega \cdot \omega + \nu \times \vec{a}, \quad G = (\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}) \cdot \nu, \quad \Gamma = \nu \cdot \nu, \quad (2.2.2)$$

Задача Ковалевской-Яхьи накладывает на гиростат следующие ограничения: моменты инерции удовлетворяют соотношениям  $A_1 = A_2 = 2A_3 := A$ , гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda := \lambda_3 \neq 0$ ), центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции ( $a_3 = 0$ ). В этих условиях уравнения (2.2.1) и интегралы (2.2.2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}_1 &= \frac{A}{2}\omega_2\omega_3 - \lambda\omega_2 - a_2\nu_3, & \dot{\nu}_1 &= \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, \\ A\dot{\omega}_2 &= -\frac{A}{2}\omega_1\omega_3 + \lambda\omega_1 + a_1\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, \\ \frac{A}{2}\dot{\omega}_3 &= a_2\nu_1 - a_1\nu_2, & \dot{\nu}_3 &= \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1.\end{aligned}\quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned}H &= \frac{A}{2}\omega_1^2 + \frac{A}{2}\omega_2^2 + \frac{A}{4}\omega_3^2 + a_1\nu_1 + a_2\nu_2 \\ G &= A\omega_1\nu_1 + A\omega_2\nu_2 + \left( \frac{A\omega_3}{2} + \lambda \right) \nu_3, \\ \Gamma &= \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2.\end{aligned}\quad (2.2.4)$$

Дополнительный интеграл  $K$  будет иметь следующий вид:

$$K = \left( \frac{A}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) - a_1\nu_1 + a_2\nu_2 \right)^2 + (A\omega_1\omega_2 - a_1\nu_2 - a_2\nu_1)^2 +$$

$$+\lambda(A\omega_3 - 2\lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4\lambda\nu_3(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) \quad (2.2.5)$$

При помощи следующей замены избавимся от переменных  $A, a_1, a_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{\gamma}(-a_1\omega_1 - a_2\omega_2) \cdot \sqrt{\frac{A}{2\gamma}}, & \tilde{\nu}_1 &= \frac{1}{\gamma}(-a_1\nu_1 - a_2\nu_2), & \tilde{\lambda} &= \sqrt{\frac{2}{A\gamma}}\lambda, \\ \tilde{\omega}_2 &= \frac{1}{\gamma}(a_2\omega_1 - a_1\omega_2) \cdot \sqrt{\frac{A}{2\gamma}}, & \tilde{\nu}_2 &= \frac{1}{\gamma}(a_2\nu_1 - a_1\nu_2), & \tau &= \sqrt{\frac{2\gamma}{A}}t, \\ \tilde{\omega}_3 &= \omega_3 \cdot \sqrt{\frac{A}{2\gamma}}, & \tilde{\nu}_3 &= \nu_3, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

здесь  $\gamma = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ,  $t$  - время в системе координат  $(\omega, \nu)$ , а  $\tau$  - время в системе координат  $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$ . Смысл этой замены состоит в том, чтобы выбрать подвижные оси так, чтобы центр масс находился на первой из них, а расстояние от центра масс до неподвижной точки стало равным 1.

Первые интегралы (2.2.4), (2.2.5) примут вид:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2 \\ \tilde{G} &= \frac{G}{\sqrt{2A\gamma}} = \tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\nu}_2 + \frac{(\tilde{\omega}_3 + \tilde{\lambda})}{2}\tilde{\nu}_3 \\ \tilde{H} &= \frac{H}{\gamma} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \frac{\tilde{\omega}_3^2}{2} - \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{K} &= \frac{K}{\gamma^2} = (\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\nu}_1)^2 + (2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + \tilde{\nu}_2)^2 + 2\tilde{\lambda}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2) + 4\tilde{\lambda}\tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_3 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

С учетом дифференцирования по  $\tau$  система уравнений (2.2.2) примет вид:

$$\begin{aligned} 2\dot{\tilde{\omega}}_1 &= (\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})\tilde{\omega}_2, & \dot{\tilde{\nu}}_1 &= \tilde{\nu}_2\tilde{\omega}_3 - \tilde{\nu}_3\tilde{\omega}_2, \\ 2\dot{\tilde{\omega}}_2 &= -(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})\tilde{\omega}_1 - \tilde{\nu}_3, & \dot{\tilde{\nu}}_2 &= \tilde{\nu}_3\tilde{\omega}_1 - \tilde{\nu}_1\tilde{\omega}_3, \\ \dot{\tilde{\omega}}_3 &= \tilde{\nu}_2, & \dot{\tilde{\nu}}_3 &= \tilde{\nu}_1\tilde{\omega}_2 - \tilde{\nu}_2\tilde{\omega}_1. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

### 2.3 Связь между $(s, r)$ и $(\omega, \nu)$

Следующая лемма (см. [1]) устанавливает переход от системы, заданной в координатах  $(\omega, \nu)$  к системе, заданной в координатах  $(s, r)$ .

**Лемма. (Ошемков)** *Отображение  $\varphi : \mathbb{R}^6(\omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}^6(s, r)$ , заданное формулами*

$$s = -(\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}), \quad r = \nu, \quad (2.3.1)$$

*устанавливает изоморфизм системы*

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \vec{\lambda}) \times \omega + \nu \times \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega, \end{cases}$$

*и системы с гамильтонианом*

$$H = \frac{(s_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(s_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(s_3 + \lambda)^2}{2A_3} + U.$$

Легко видеть, что при  $U = \vec{a} \cdot r$  мы получим нужный переход.

Остается заметить, что  $f_1 = \Gamma, f_2 = -G = -\sqrt{2A\gamma}\tilde{G}$ . Теперь легко получить уравнения перехода от системы (2.1.6)-(2.1.8) к системе (2.2.7)-(2.2.8).

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= -2\tilde{\omega}_1, & \tilde{r}_1 &= \tilde{\nu}_1, \\ \tilde{s}_2 &= -2\tilde{\omega}_2, & \tilde{r}_2 &= \tilde{\nu}_2, \\ \tilde{s}_3 &= -\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda}, & \tilde{r}_3 &= \tilde{\nu}_3. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

**Утверждение 1.** *Следующая схема показывает связь между всеми упомянутыми системами координат.*

$$\begin{array}{ccc} (s, r, \lambda, t) & \xrightarrow{(2.1.5)} & (\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\lambda}, \tau) \\ (2.3.1) \uparrow & & \uparrow (2.3.2) \\ (\omega, \nu, \lambda, t) & \xrightarrow{(2.2.6)} & (\tilde{\omega}, \tilde{\nu}, \tilde{\lambda}, \tau) \end{array}$$

В работах, посвященных задаче Ковалевской-Яхьи, можно использовать разные системы. Будем рассматривать  $M_g^4 = \{(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) | \Gamma = 1, \tilde{G} = g\}$ . Для заданных значений  $\tilde{\lambda}, g$  мы получаем интегрируемую гамильтонову систему на  $M_g^4$  с двумя степенями свободы. Далее, работая с переменными  $\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\omega}, \tilde{\nu}$ , будем опускать знаки тильд.

### 3 Образ критического множества

Рассмотрим гамильтонову систему (2.2.7) – (2.2.8). Рассмотрим отображение

$$\tilde{H} \times \tilde{K} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k) \quad (3.1)$$

**Определение 1.**  $\Sigma_{h,k}^{g,\lambda}$  (в дальнейшем просто  $\Sigma$ ) - множество точек  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ , над которыми отображение (3.1) не является локально-тривиальным, т.е.  $\text{rank}(H \times K \times G \times \Gamma) < 4$ .

В работе [2] было доказано, что для  $g, \lambda > 0$  множество  $\Sigma$  принадлежит множеству  $D^{g,\lambda}$  (в дальнейшем просто  $D$ ), которое состоит из двух кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ . Они были получены как в параметрическом виде (3.4), так и в неявном, как равенства дискриминантов многочленов  $R(x)$  и  $F(x)$  нулю соответственно. Запишем соответствующие формулы, с учетом замены

$$\tilde{\lambda} = \hat{\lambda} \cdot \sqrt{2},$$

смысл которой станет ясен позднее (далее мы будем работать только с переменной  $\hat{\lambda}$ ).

$$R(x) = 1 - k + 4gx + 2(h - \hat{\lambda}^2)x^2 - x^4, \quad (3.2)$$

$$F(x) = -8\hat{\lambda}^2(-4g^2 + 2h + 2\hat{\lambda}^2) + (k + 4h\hat{\lambda}^2)^2 - 16\hat{\lambda}^2x - 2(k + 4h\hat{\lambda}^2)x^2 + x^4, \quad (3.3)$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} h = \omega^2 + \hat{\lambda}^2 - \frac{g}{\omega} \\ k = 1 + \omega^4 + 2g\omega, \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} h = 2g^2 - \hat{\lambda}^2 - s + \frac{\hat{\lambda}^2}{s^2} \\ k = -8\hat{\lambda}^2g^2 + (s + 2\hat{\lambda}^2)^2 - 4\frac{\hat{\lambda}^2(\hat{\lambda}^2+s)}{s^2}, \end{cases} \quad (3.4)$$

**Определение 2.** Дискриминант многочлена  $P(x) = \sum_{i=0}^n p_i(t)x^i$ ,  $t \in \mathbb{R}^k$  - это множество тех значений параметра  $t$ , при которых этот многочлен имеет кратные корни.

Дискриминант  $P(x)$  ищется следующим образом. Чтобы избавиться от кратных корней общего положения можно разделить  $P(x)$  на НОД( $P(x), P'(x)$ ). Затем необходимо решить систему  $P(x) = P'(x) = 0$ . Для наших многочленов получаются слишком громоздкие выражения, поэтому мы не будем их приводить в этой работе. Подставим  $\gamma_1$  в дискриминант  $F(x)$ , и  $\gamma_2$  в дискриминант  $R(x)$ . Домножим получившиеся многочлены на  $\omega^k$  и  $s^l$  так, чтобы минимальная степень переменных стала равна 0. Это приводит нас к следующим двум многочленам:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a \cdot \sum_{i=0}^{10} a_i \omega^i & B(s) &= b \cdot \sum_{i=0}^{10} b_i s^i & (3.5) \\ a &= \omega + 2g(2\hat{\lambda}^2 + \omega^2) & b &= 2\hat{\lambda}^2 + s + 4g^2s^2 \\ a_0 &= g^2 & b_0 &= -\hat{\lambda}^8 \\ a_1 &= 4g^3 - 2g\hat{\lambda}^2 & b_1 &= 0 \\ a_2 &= -1 + 4g^4 - 16g^2\hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}^4 & b_2 &= -6g^2\hat{\lambda}^6 + \hat{\lambda}^8 \\ a_3 &= -4g - 8g^3\hat{\lambda}^2 + 20g\hat{\lambda}^4 & b_3 &= -4\hat{\lambda}^6 \\ a_4 &= -2g^2 + 10\hat{\lambda}^2 + 4g^2\hat{\lambda}^4 - 8\hat{\lambda}^6 & b_4 &= -2\hat{\lambda}^4 - 12g^4\hat{\lambda}^4 + 4g^2\hat{\lambda}^6 \\ a_5 &= 4g^3 + 2g\hat{\lambda}^2 & b_5 &= 2g^2\hat{\lambda}^4 + 4\hat{\lambda}^6 \\ a_6 &= -2 + 4g^2\hat{\lambda}^2 - 12\hat{\lambda}^4 & b_6 &= 10g^2\hat{\lambda}^2 - 8g^2\hat{\lambda}^2 - 2\hat{\lambda}^4 + 4g^4\hat{\lambda}^4 \\ a_7 &= -4g & b_7 &= -4\hat{\lambda}^2 + 20g^4\hat{\lambda}^2 - 8g^2\hat{\lambda}^4 \\ a_8 &= g^2 - 6\hat{\lambda}^2 & b_8 &= -1 + g^4 - 16g^2\hat{\lambda}^2 + 4\hat{\lambda}^4 \\ a_9 &= 0 & b_9 &= -2g^2 + 4\hat{\lambda}^2 \\ a_{10} &= -1 & b_{10} &= 1 \end{aligned}$$



**Предложение.** Пусть в  $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$  заданы две кривые. Первая - неявно в виде  $U(x_1, x_2) = 0$ , а вторая в параметрическом виде  $x_i(t) = V_i(t)$ , где  $U, V_i$  - многочлены с целыми степенями. Подставив формулы второй кривой в многочлен для первой, мы получим многочлен  $W(t)$  с целыми степенями. Пусть  $t_0$  - корень  $W$ , тогда это равносильно тому, что точка  $(x_1(t_0), x_2(t_0))$  принадлежит двум кривым одновременно.

Поскольку кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  определены на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то те и только те значения параметров  $\omega, s$ , при которых они имеют общие точки, будут действительными корнями многочленов  $A, B$  соответственно.

**Теорема. (О неявной функции)** Пусть функция  $F(x, t)$  непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, t_0)$ ,  $F(x_0, t_0) = 0$  и  $\frac{\partial f(x_0, t_0)}{\partial x} \neq 0$ . Тогда существуют окрестности  $U(t_0)$  и  $V(x_0)$  и единственное отображение  $f : U \rightarrow V$ , такое что  $\forall x \in U$  выполнено  $F(f(t), t) = 0$ , причем  $f$  непрерывно дифференцируема в точке  $t_0$ .

Если  $F(x, t)$  - многочлен ненулевой степени от  $x(t)$ , то он непрерывно дифференцируем по  $x$ . Тогда условие  $F(x_0, t_0) = 0$  означает что многочлен имеет корень  $x = x_0$  при  $t = t_0$ , а условие  $\frac{\partial f(x_0, t_0)}{\partial x} \neq 0$  равносильно тому, что этот корень не является кратным.

Зафиксируем значения параметров  $(g_0, \hat{\lambda}_0)$  и рассмотрим точку на плоскости  $\mathbb{R}_2(h, k)$ , принадлежащую кривым  $\gamma_1, \gamma_2$  одновременно. Тогда она задается действительными корнями многочленов  $A, B$ . Если эти корни не являются кратными, то, по теореме о неявной функции, корни, а значит и координаты точек, непрерывно зависят от параметров, в окрестности  $(g_0, \hat{\lambda}_0)$ . Если же корни являются кратными, то соответствующие им точки на плоскости  $\mathbb{R}_2(h, k)$  склеиваются.

Далее будем называть точку, принадлежащую кривым  $\gamma_1, \gamma_2$  одновременно - общей точкой этих кривых. Особые точки кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  это две точки возврата и общие точки кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  (см. Раздел 5).

**Определение 3.**  $\Theta$  - множество параметров  $g, \hat{\lambda} > 0$ , при которых особые точки кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  склеиваются или исчезают (т.е. склеиваются с бесконечностью).

**Утверждение 2.**  $\Theta$  задается дискриминантами многочленов  $A, B$ .

*Доказательство.* Сначала рассмотрим склейки особых точек. Так как особые точки это точки возврата, точки пересечения и точки касания, нам достаточно рассмотреть 4 случая: склейку точек возврата, склейку точки возврата и точки касания, склейку точки возврата и точки пересечения и, склейку двух общих точек. Легко проверить (см. Раздел 5.3), что первые три случая соответствуют наличию у  $A, B$  кратных корней. Те значения параметров, при которых общие точки кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  склеиваются, очевидно, также соответствуют наличию у многочленов  $A, B$  кратных корней. Следовательно, склейкам особых точек соответствуют дискриминанты многочленов  $A, B$

Остается проверить случай исчезания особой точки. Пусть  $(g_0, \lambda_0)$  такое, что у многочленов  $A, B$  нет кратных корней, и существует особая точка, координаты которой стремятся к бесконечности при  $(g, \hat{\lambda}) \rightarrow (g_0, \hat{\lambda}_0)$ . Из формул (3.4) видно, что это возможно в одном из двух случаев:

1. Когда один из действительных корней стремится к бесконечности при  $(g, \hat{\lambda}) \rightarrow (g_0, \hat{\lambda}_0)$ . Но это невозможно, так как корни непрерывны в окрестности  $(g_0, \lambda_0)$ , следовательно ограничены.
2. Когда один из действительных корней стремится к нулю при  $(g, \hat{\lambda}) \rightarrow (g_0, \hat{\lambda}_0)$ . Свободные члены многочленов  $A, B$  равны  $4g^3\hat{\lambda}^2$  и  $-2\hat{\lambda}^{10}$  соответственно. Они строго положительны при  $g, \hat{\lambda} > 0$  и равны произведению всех, в том числе комплексных, корней соответствующих многочленов. Остается доказать, что у  $A, B$  нет также комплексных корней, стремящихся по модулю к бесконечности при  $(g, \hat{\lambda}) \rightarrow (g_0, \hat{\lambda}_0)$ .

**Лемма 1.** Рассмотрим многочлен  $x^n + \sum_{i=0}^{n-1} s_i x^i$ , где  $s_i = s_i(t)$  - непрерывно дифференцируемые функции в проколотой окрестности точки  $t = t_0$ . Рассмотрим все, в том числе комплексные, корни этого многочлена и пусть ни один из них не является кратным в этой окрестности. По теореме о неявной функции корни будут непрерывно зависеть от параметра  $t$  в этой проколотой окрестности. Пусть среди них  $k$  будут стремиться по модулю к бесконечности, а остальные  $n - k$  будут иметь конечный предел при  $t \rightarrow t_0$ . Тогда  $s_{n-k} \rightarrow \infty$ , при  $t \rightarrow t_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $r_i$ , где  $i = 1 \dots n$  - все корни многочлена при фиксированном  $t$  из нашей проколотой окрестности. Тогда  $s_{n-k}$  представляет собой  $k$ -й симметрический многочлен этих корней.

$$s_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < n} r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_k} = (-1)^k \sum_{j=1 \dots C_n^k} p_j$$

Одно из слагаемых  $p_{j^*}$  будет произведением наших  $k$  корней. Так как все остальные корни имеют конечный предел при  $t \rightarrow t_0$ , то  $\forall j \neq j^* \exists \delta > 0$ , такой что  $|t - t_0| < \delta \Rightarrow |p_{j^*}| > M|p_j|$ . Полагая  $M = C_n^k - 1$ , получаем:

$$|s_{n-k}| \geq |p_{j^*}| - 2 \sum_{j \neq j^*} |p_j| = \frac{|p_{j^*}|}{2} + 2 \sum_{j \neq j^*} \left( \frac{|p_{j^*}|}{4(C_n^k - 1)} - |p_j| \right) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_0$$

□

Так как коэффициенты многочленов  $A, B$  - непрерывные, а значит ограниченные, функции, мы получаем, что все, в том числе комплексные корни конечны при  $(g, \hat{\lambda}) \rightarrow (g_0, \hat{\lambda}_0)$ . Следовательно, множество, задаваемое дискриминантами  $A, B$  совпадает с  $\Theta$ . □

**Замечание.** Вместо этой леммы можно было бы использовать комплексный аналог теоремы о неявной функции.

Теперь, если взять дискриминанты многочленов  $A, B$ , то они оба дадут многочлен  $L(g, \hat{\lambda})$ . В этом нет ничего удивительного, так как кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  кусочно-гладкие и не самопересекаются (см. глава ?). Если одна общая точка  $\gamma_1, \gamma_2$  расщепляется на две, то эти две точки также являются общими для этих кривых. Поэтому наличие кратного корня у многочлена  $A$  влечет наличие кратного корня у многочлена  $B$  и наоборот.

$$L(g, \hat{\lambda}) = g \cdot \hat{\lambda} \cdot l_1(g, \hat{\lambda}) \cdot l_2(g, \hat{\lambda}) \cdot l_3(g, \hat{\lambda}) \cdot l_4(g, \hat{\lambda}) \cdot l_5(g, \hat{\lambda}) \quad (3.7)$$

$$l_1(g, \hat{\lambda}) = 32g^2\hat{\lambda}^2 - 1$$

$$l_2(g, \hat{\lambda}) = l_3(\hat{\lambda}, g) = -1 + 24g^2\hat{\lambda}^2 + 128g^6\hat{\lambda}^2 + 4\hat{\lambda}^4$$

$$l_4(g, \hat{\lambda}) = l_5(\hat{\lambda}, g) = -256 + 256g^{12} - 384g^{10}\hat{\lambda}^2 + 864\hat{\lambda}^4 - 729\hat{\lambda}^8 + g^4(768 - 9696\hat{\lambda}^4) + g^8(-768 + 192\hat{\lambda}^4) + g^6(7680\hat{\lambda}^2 - 32\hat{\lambda}^6) + g^2(6528\hat{\lambda}^2 + 4536\hat{\lambda}^6)$$

На плоскости  $g, \hat{\lambda} > 0$  мы получили множество тех значений параметров, при которых изменяется количество общих точек кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ . Это множество состоит из 5 кривых (см. Рис. 1, Приложение 1). Оно делит плоскость на области, в которых диаграмма  $D$  имеет качественно различный вид. В работе [Rya] эти кривые были найдены в параметрическом виде. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(g, \hat{\lambda}) &: \{1 - 4\sqrt{2}\hat{\lambda}g = 0\}, \\ \Gamma_2(t) &: \{g = \sqrt{-t^3/2}, \hat{\lambda} = \sqrt{(t^2 - 1)/4t}\}, \\ \Gamma_3(t) &: \{g = \sqrt{t^2 - 1/4t}, \hat{\lambda} = \sqrt{-t^3/2}\}, \\ \Gamma_4(t) &: \{g = -\sqrt{(3t^2 - 1)^2/4t^3}, \hat{\lambda} = \sqrt{(t^2 - 1)^3/2t^3}\}, \\ \Gamma_5(t) &: \{g = \sqrt{(t^2 - 1)^3/2t^3}, \hat{\lambda} = -\sqrt{(3t^2 - 1)^2/4t^3}\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $t \in [-1, 0)$  для кривых  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ .

**Утверждение 3.** Множество  $\Theta$  в области  $g, \hat{\lambda} > 0$  симметрично относительно прямой  $g = \hat{\lambda}$ .

*Доказательство.* Непосредственно из формул вытекает, что  $\Gamma_5(t)$  симметрична  $\Gamma_4(t)$ ,  $\Gamma_3(t)$  симметрична  $\Gamma_2(t)$ , а  $\Gamma_1$  симметрична самой себе.  $\square$

**Гипотеза 1.** Множество  $\Theta$  разбивает плоскость  $g, \hat{\lambda} > 0$  на области, в которых интегрируемые системы (2.2.7) – (2.2.8) Лиувиллево эквивалентны.

Для изучения этого вопроса нам сперва потребуется тщательно исследовать множество  $\Theta$  и множество  $D$ . В следующей главе мы найдем более компактную запись многочленов (3.7) и с помощью формул (3.8) попробуем найти общие точки кривых  $\Gamma_i$ .

## 4 Изучение множества $\Theta$

Здесь и далее мы будем, для удобства, использовать  $\lambda$  вместо  $\hat{\lambda}$ . Множество  $\Theta(g, \lambda)$  в области  $g, \lambda > 0$  состоит из 5 кривых, которые задаются неявно при помощи формул (3.7) или параметрически при помощи формулам (3.8).

### 4.1 Полиномиальная запись кривых $\Gamma_i$ .

**Лемма 2.** *Обозначим  $a = \sqrt[3]{2g^2}, b = \sqrt[3]{2\lambda^2}$ , тогда множество  $\Theta(g, \lambda)$  задается пятью многочленами:*

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : & \quad 2ab - 1 = 0, \\ \Gamma_2 : & \quad 2ab^3 + a^2 - 1 = 0, \\ \Gamma_3 : & \quad 2a^3b + b^2 - 1 = 0, \\ \Gamma_4 : & \quad -4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16 = 0, \\ \Gamma_5 : & \quad -4b^6 + 2b^3a^3 - 24b^3a + 9a^4 - 24a^2 + 16 = 0.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Для кривой  $\Gamma_1$  :

$$4\sqrt{2}g\lambda = 1 \Leftrightarrow 32g^2\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow 2ab = 1$$

Для кривой  $\Gamma_2$  :

$$g = -\sqrt{t^3/2} \Leftrightarrow 2g^2 = -t^3 \Leftrightarrow -t = a$$

Подставим в выражение для  $\lambda$  :

$$\lambda = \sqrt{(t^2 - 1)/4t} \Leftrightarrow \lambda^2 = -(a^2 - 1)/4a \Leftrightarrow b^3 = -(a^2 - 1)/2a \Leftrightarrow 2ab^3 + a^2 - 1 = 0.$$

Для кривой  $\Gamma_4$  :

$$\lambda = \sqrt{(t^2 - 1)^3/2t^3} \Leftrightarrow b = (t^2 - 1)/t \Leftrightarrow t^2 = 1 + bt \quad (4.1.1)$$

$$g = -\sqrt{(3t^2 - 1)^2/4t^3} \Leftrightarrow a^3 = -(3t^2 - 1)^2/2t^3. \quad (4.1.2)$$

Понижая степень  $t$  в выражении (4.1.2) при помощи (4.1.1) получаем:

$$\begin{aligned}t(2a^3 + 2a^3b^2 - 12b - 9b^2) &= 4 + 9b^2 - 2a^3b \Leftrightarrow \\ (t - \frac{b}{2})(2a^3 + 2a^3b^2 - 12b - 9b^2) &= 4 + 9b^2 - 2a^3b - a^3b - a^3b^3 + 6b^2 + \frac{9}{2}b^4\end{aligned}$$

Возводя в квадрат, заменяя  $(t - \frac{b}{2})^2$  на  $1 + \frac{b^2}{4}$ , согласно (4.1.1), и приводя подобные слагаемые получаем:

$$-4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16 = 0.$$

Из за симметричности многочлены для  $\Gamma_3, \Gamma_5$  получаются заменой  $a$  на  $b$ , в  $\Gamma_2, \Gamma_4$  соответственно.  $\square$

### 4.2 Свойства кривых $\Gamma_i$ .

Рассмотрим кривую  $\Gamma_1$ . Это гипербола. Отметим на ней точку  $A$  пересечения с прямой  $g = \lambda$ . Координаты точки  $A$  :  $(g = 2^{-5/4}, \lambda = 2^{-5/4})$ . Подстановкой проверяется, что точка  $A$  лежит на каждой из кривых  $\Gamma_i$  при значении параметра  $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  на каждой из них.

Рассмотрим кривую  $\Gamma_2$ . Непосредственно из формул получаем:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{3\sqrt{-t}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{(1+t^2)\sqrt{-t}}{4t^2\sqrt{1-t^2}}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial g} = -\frac{3\sqrt{2}t^2\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$$

- Кривая является гладкой при  $t \in (-1, 0)$
- Функция  $\hat{\lambda}(g)$ , реализующая кривую, монотонно убывает.
- При  $t \rightarrow 0$  она асимптотически стремится к прямой  $g = 0$ .
- При  $t = -1$  она пересекает ось  $g = 0$  в точке  $B_4 : (g = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = 0)$ , под прямым углом.

Рассмотрим кривую  $\Gamma_3$ . Она симметрична  $\Gamma_2$  относительно прямой  $g = \lambda$ . Точку пересечения с осью координат назовем  $C_4 : (g = 0, \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Рассмотрим кривую  $\Gamma_4$ . Непосредственно из формул получаем:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{3(1+t^2)\text{Sign}(1-3t^2)}{4t^2\sqrt{-t}}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{3(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}{2\sqrt{2}t^2\sqrt{-t}}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial g} = \frac{\text{Sign}(1-3t^2)}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}$$

- Кривая является гладкой при  $t \in (-1, -1/\sqrt{3})$  и при  $t \in (-1/\sqrt{3}, 0)$ .
- Функция  $\hat{\lambda}(g)$ , реализующая кривую при  $t \in (-1, -1/\sqrt{3})$ , монотонно убывает. Функция, реализующая кривую при  $t \in (-1/\sqrt{3}, 0)$  монотонно возрастает.
- При  $t \rightarrow 0$  она асимптотически стремится к прямой  $\lambda = \sqrt{2}g$ .
- Кривая имеет излом в точке  $C_5 : (g = 0, \lambda = \frac{2}{3^{3/4}})$ .
- При  $t = -1$  она касается абсциссы в точке  $B_6 : (g = 1, \lambda = 0)$ .

Рассмотрим кривую  $\Gamma_5$ . Она симметрична  $\Gamma_4$  относительно прямой  $g = \lambda$ . Точку касания с осью координат назовем  $C_6 : (g = 0, \lambda = 1)$ . Точку излома назовем  $B_5 : (g = \frac{2}{3^{3/4}}, \lambda = 0)$ .

**Лемма 3.** *Кривые  $\Gamma_i$  не самопересекаются.*

*Доказательство.* Это утверждение легко следует из свойств монотонности кривых  $\Gamma_i$ . □

### 4.3 Общие точки кривых $\Gamma_i$ .

Далее мы попытаемся найти точки пересечения кривых  $\Gamma_i$ , используя разные формы их записи. Там, где это не удастся сделать в явном виде, можно свести задачу к поиску корней некоторого многочлена. Если коэффициенты многочленов - вещественные, то для них можно найти количество корней на любом интервале при помощи следующей теоремы:

**Теорема. (Штурм)** Пусть  $f(x)$  — ненулевой многочлен с вещественными коэффициентами,  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)$  — некоторый ряд Штурма для него,  $[a, b]$  — промежуток вещественной прямой, причём  $f(a) \cdot f(b) \neq 0$ . Тогда число различных корней многочлена  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$  равно  $W(a) - W(b)$ , где  $W(c)$  — количество перемен знака в последовательности  $f_0(c), f_1(c), \dots, f_s(c)$ .

Теорема также верна для лучей  $(-\infty, a]$  или  $[b, +\infty)$ . Тогда знак  $f_i(\infty)$  определяется знаком старшего коэффициента в соответствующем многочлене. Ряд Штурма для  $f(x)$  всегда можно построить при помощи следующего алгоритма:

$$f_0(x) = \frac{f(x)}{\text{НОД}(f(x), f'(x))}, \quad f_1(x) = f'_0(x), \quad f_{i+1}(x) = -f_{i-1}(x) \bmod f_i(x), \quad i = 1 \dots \text{deg} f$$

В некоторых случаях можно воспользоваться другой теоремой:

**Теорема. (Декарт)** Пусть  $f(x)$  — ненулевой многочлен с вещественными коэффициентами. Тогда число его положительных корней равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов или на чётное число меньше этого числа (корни считаются с учётом кратности, нулевые коэффициенты при подсчёте числа перемен знаков не учитываются).

Благодаря симметричности некоторых кривых мы можем сэкономить на некоторых вычислениях.

**Лемма 4.** Кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  пересекаются только в точке  $A$  (см. Рис. 2 Приложение 1).

*Доказательство.* Подставляем параметрическую запись  $\Gamma_2$  в полиномиальную запись  $\Gamma_1$ .

$$4\sqrt{2}g\lambda = 1 \Leftrightarrow 32g^2\lambda^2 = 1$$

$$32\left(\frac{t^2-1}{4t}\right)\left(-\frac{t^3}{2}\right) = 4(t^2-1)(-t^2) = 1 \Leftrightarrow -4t^4 + 4t^2 - 1 = 0$$

Квадратное уравнение имеет корни  $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Поскольку  $t \in [-1, 0)$ , мы получаем единственное значение параметра  $t$ , соответствующее точке  $A$ . Кривая  $\Gamma_3$  симметрична  $\Gamma_2$ , следовательно пересекается с  $\Gamma_1$  только в точке  $A$ .  $\square$

**Лемма 5.** Кривые  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  пересекаются только в точке  $A$  (см. Рис. 3 Приложение 1).

*Доказательство.* Рассмотрим полиномиальные записи этих двух кривых.

$$2ab^3 + a^2 - 1 = 0, \quad 2a^3b + b^2 - 1 = 0$$

Вычтем из первой вторую. Мы получим многочлен, который обращается в ноль в точках пересечения  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ .

$$2a^3b - a^2 - 2b^3a + b^2 = (a-b)(2ab(a+b) - (a+b)) = (a-b)(a+b)(2ab-1) = 0.$$

Так как  $a, b > 0$ , то решениями будут  $a = b$  и  $ab = \frac{1}{2}$ . В первом случае  $2a^4 + a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(a^2+1)(a^2-\frac{1}{2}) \Rightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , что дает нам точку  $A$ . Во втором случае  $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , снова точка  $A$ . Следовательно, других точек пересечения, кроме  $A$  нет.  $\square$

**Лемма 6.** Кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_4$  пересекаются в двух точках, одна из которых  $A$ , кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_5$  пересекаются в двух точках, одна из которых  $A$  (см. Рис. 4 Приложение 1).

*Доказательство.* Подставляем параметрическую запись  $\Gamma_4$  в полиномиальную запись  $\Gamma_1$ .

$$-32(3t^2-1)^2(t^2-1)^3 = 8t^6.$$

Заменяя  $t^2 = u$ , и приводя подобные слагаемые получаем:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2(9u^3 - 24u^2 + 20u - 4) = 0.$$

Корню  $u = \frac{1}{2}$  соответствует точка  $A$ , а у многочлена третьей степени один действительный корень  $u = \frac{1}{q}(8 + q - \frac{4}{q})$ ,  $q = (2(23 - 3\sqrt{57}))^{\frac{1}{3}}$ , которому соответствует точка  $C_3$ . Кривая  $\Gamma_5$  симметрична  $\Gamma_4$ , следовательно пересекается с  $\Gamma_1$  только в двух точках, одна из которых  $A$ , а вторая  $B_3$ .  $\square$

**Лемма 7.** Кривые  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  пересекаются только в точке  $A$ , кривые  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_5$  пересекаются только в точке  $A$  (см. Рис. 5 Приложение 1).

*Доказательство.* Рассмотрим полиномиальные записи для  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ .

$$2a^3b + b^2 - 1 = 0$$

$$-4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16 = 0.$$

Выражая  $a^3$  из (1) и подставляя в (2) получаем следующий полином.

$$-1 + 6b^2 - 12b^4 + 8b^6 = 0 \Leftrightarrow 8\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^3 = 0$$

. Единственным положительным корнем является  $b = 1/\sqrt{2}$ , которому соответствует точка  $A$ . Кривая  $\Gamma_2$  симметрична  $\Gamma_3$ , а  $\Gamma_5$  симметрична  $\Gamma_4$ , значит  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_5$  пересекаются только в точке  $A$ .  $\square$

**Лемма 8.** Кривые  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_4$  пересекаются в двух точках, одна из которых  $A$ ,  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_5$  пересекаются в двух точках одна из которых  $A$  (см. Рис. 6 Приложение 1).

*Доказательство.* Выпишем полиномы для  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_4$ . Используя пакет символьных вычислений Wolfram Mathematica, исключим переменную  $b$ . Получим многочлен 22 степени, который упрощается следующим образом.

$$\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^3 P(a^2) = 0, \quad P(x) = \sum_{i=0}^8 p_i x^i$$

$$\vec{p} = (-144, 288, -312, -44, 663, -426, 208, 336, -288)$$

Количество корней на отрезке  $[0, 1]$  найдем при помощи Теоремы Штурма.

$x$	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$	$P_8(x)$
0	-	+	+	+	-	+	+	-	+
1	+	+	-	-	+	+	-	-	+

Будем искать корни на отрезке  $[0, 1]$ , так как  $x = a^2 > 0$ , и из  $2ab^3 + a^2 - 1 = 0$ ,  $a, b > 0$  следует  $a^2 - 1 < 0 \Rightarrow x = a^2 < 1$ . Так как разница количеств перемен знака в 0 и в 1 равна единице, то у  $P(x)$  ровно один вещественный корень на отрезке  $[0, 1]$ . Его приближенное значение:  $x_1 = 0.671797$ , и ему соответствует точка  $C_2$ . Кривая  $\Gamma_2$  симметрична  $\Gamma_3$ , а  $\Gamma_5$  симметрична  $\Gamma_4$ , значит  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_5$  пересекаются в двух точках, одна из которых  $A$ , а вторая будет называться  $B_2$ .  $\square$

**Лемма 9.** Кривые  $\Gamma_4$  и  $\Gamma_5$  пересекаются в трех точках, одна из которых  $A$  (см. Рис. 3 Приложение 1).

*Доказательство.* Выпишем полиномы для  $\Gamma_4$  и  $\Gamma_5$ .

$$-4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16 = 0$$

$$-4b^6 + 2b^3a^3 - 24b^3a + 9a^4 - 24a^2 + 16 = 0$$

Вычитая из первой второй, получим многочлен, который упрощается следующим образом:

$$(a - b)(a + b)(24 - 9a^2 - 4a^4 - 24ab - 9b^2 - 4a^2b^2 - 4b^4) = 0$$

Поскольку случай  $a = b$  приводит к точке  $A$ :  $(a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}})$ , можно использовать выражение в последней скобке и полином для  $\Gamma_4$  для поиска остальных точек пересечения. Используя пакет символьных вычислений Wolfram Mathematica, исключим переменную  $b$ . Получим полином 24 степени, который упрощается следующим образом.

$$\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 (a^2 + 4)^2 Q(a^2) = 0, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^8 q_i x^i$$

$$\vec{q} = (234256, -16981624, 4479457, 255132, 2747616, 169296, 312768, 6912, 9216)$$

По Теореме Декарта у  $Q(x)$  либо 0 либо 2 положительных корня. Но легко понять, что есть хотя бы один корень, так как  $\Gamma_4$  монотонно возрастает при  $t \in (-1/\sqrt{3}, 0)$ , а  $\Gamma_5$  монотонно убывает при  $t \in (-1, -1/\sqrt{3})$ . Следовательно у этого многочлена ровно два положительных корня, их приближительные значения  $x_1 = 0.01384, x_2 = 1.40073$ . Им соответствуют точки  $C_1, B_1$ .  $\square$

#### 4.4 Камеры множества $\Theta$

На эскизе множества  $\Theta$  (см. Рис. 1, Приложение 1) отчетливо видны 13 точек пересечения кривых  $\Gamma_i$  и осей координат (не считая начала координат), и 18 камер, образованных дугами этих кривых. Чтобы убедиться, что камер действительно столько, достаточно доказать, что нет других точек пересечения, не попавших на эскиз. В леммах 4-9 было установлено, что единственные точки пересечения это  $A, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3, B_4, C_4, B_5, C_5, B_6, C_6$ . Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Утверждение 4.** *Множество  $\Theta$  делит плоскость ( $g, \lambda > 0$ ) на 18 камер.*



## 5 Изучение множества $D$

Множество  $D$  при  $g, \lambda > 0$  состоит из двух кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ , заданных неявно при помощи дискриминантов многочленов (3.2),(3.3) или параметрически при помощи формул (3.4).

### 5.1 Свойства кривой $\gamma_1$

Рассмотрим кривую  $\gamma_1$ . Непосредственно из формул получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \frac{2\omega^3 + g}{\omega^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial \omega} = 2(2\omega^3 + g), \quad \frac{\partial h}{\partial k} = \frac{1}{2\omega^2} \quad (5.1.1)$$

Легко видеть что кривая гладкая всюду кроме точки разрыва  $\omega_0 = 0$  и точки возврата  $\omega_1 = -\sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ . Обозначим за  $\gamma_1^+$  - участок кривой с положительным, а за  $\gamma_1^-$  - с отрицательным значением параметра. Обозначим также за  $\gamma_1^<$  - участок кривой с параметром  $\omega \in (-\infty, \omega_1)$ , а за  $\gamma_1^>$  - участок кривой с параметром  $\omega \in (\omega_1, 0)$ . Таким образом мы имеем три куска гладкости  $\gamma_1^<, \gamma_1^>, \gamma_1^+$  (см. Рис. 7 Приложение 1). Перечислим основные свойства этих кривых.

- Участок кривой  $\gamma_1^<$  монотонно и неограниченно растет по  $h$ , с ростом параметра  $k$ .
- Участок кривой  $\gamma_1^>$  монотонно и неограниченно растет по  $h$ , с ростом параметра  $k$ . Он находится целиком левее прямой  $k = 1$  и асимптотически стремится к ней при  $\omega \rightarrow 0-$ .
- Участок кривой  $\gamma_1^+$  монотонно и неограниченно растет по  $h$ , с ростом параметра  $k$ . Он целиком находится правее прямой  $k = 1$  и асимптотически стремится к ней при  $\omega \rightarrow 0+$ .

Эти свойства вытекают непосредственно из формул (5.1.1). Так как каждый из участков  $\gamma_1^<, \gamma_1^>, \gamma_1^+$  монотонно изменяется по  $h$  с ростом параметра  $\omega$ , следовательно ни один из них не может пересекать сам себя.

**Лемма 10.** Участки кривых  $\gamma_1^+, \gamma_1^-$  не пересекаются.

*Доказательство.* Пусть  $\omega_+ \in \gamma_1^+, \omega_- \in \gamma_1^-$ , тогда  $\omega_+ - \omega_- > 0, \omega_+\omega_- < 0$ . Пусть  $h(\omega_+) = h(\omega_-)$ , тогда  $0 = h(\omega_+) - h(\omega_-) = (\omega_+^2 - \omega_-^2) - g(\frac{1}{\omega_+} - \frac{1}{\omega_-}) = (\omega_+ - \omega_-)(\omega_+ + \omega_- + \frac{g}{\omega_+\omega_-})$ , следовательно  $\omega_+ + \omega_- = -\frac{g}{\omega_+\omega_-} > 0$ . Тогда  $k(\omega_+) - k(\omega_-) = (\omega_+^4 - \omega_-^4) + 2g(\omega_+ - \omega_-) = (\omega_+ - \omega_-)((\omega_+^3 + \omega_-^3) + \omega_+\omega_-(\omega_+ + \omega_-) + 2g) = (\omega_+ - \omega_-)((\omega_+ + \omega_-)(\omega_+^2 + \omega_-^2) + 2g) = (\omega_+ - \omega_-)(-\frac{g}{\omega_+\omega_-}(\omega_+^2 + \omega_-^2) + 2g) > 0$ , т.к  $g > 0$ . Следовательно  $k(\omega_+) \neq k(\omega_-)$ .  $\square$

**Лемма 11.** Участки кривых  $\gamma_1^<, \gamma_1^>$  не пересекаются.

*Доказательство.* Непосредственно из выражения для первой производной видно, что угол наклона касательной к  $\gamma_1^-$  изменяется непрерывно и монотонно в интервале длиной меньше  $\pi$ . Следовательно это верно и для  $\gamma_1^<, \gamma_1^>$ . Проведем касательную к  $\gamma_1^-$  в точке возврата, она делит плоскость на две полуплоскости. Вектор скорости кривой  $\gamma_1^-$  будет всегда направлен в одну сторону от касательной, а вектор скорости кривой  $\gamma_1^<$  - в другую. Следовательно  $\gamma_1^<$  и  $\gamma_1^>$  лежат в разных полуплоскостях.  $\square$

### 5.2 Свойства кривой $\gamma_2$

Рассмотрим кривую  $\gamma_2$ . Непосредственно из формул получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{2\lambda^2 + s^3}{s^3}, \quad \frac{\partial k}{\partial s} = 2\frac{(2\lambda^2 + s)(2\lambda^2 + s^3)}{s^3}, \quad \frac{\partial h}{\partial k} = \frac{-1}{2(2\lambda^2 + s)} \quad (5.2.1)$$

Легко видеть что кривая гладкая всюду кроме точки разрыва  $s_0 = 0$  и точки возврата  $s_1 = -\sqrt[3]{2\lambda^2}$ . Обозначим за  $\gamma_2^+$  - участок кривой с положительным, а за  $\gamma_2^-$  - с отрицательным значением параметра. Обозначим также за  $\gamma_2^<$  - участок кривой с параметром  $s \in (-\infty, s_1)$ , а за

$\gamma_2^>$  - участок кривой с параметром  $s \in (s_1, 0)$ . Таким образом мы имеем три куска гладкости  $\gamma_2^<, \gamma_2^>, \gamma_2^+$ . В отличие от кривой  $\gamma_1$ , здесь  $\partial h/\partial k$  может обращаться в бесконечность в точке  $s_2 = -2\lambda^2$ , отличной от  $s_0$ . Сравнивая точки  $s_1, s_2$  получаем, что  $s_2 \in \gamma_2^>$ , когда  $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , и  $s_2 \in \gamma_2^<$ , когда  $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (см. Рис. 8 Приложение 1). Перечислим основные свойства этих кривых.

- При  $\lambda > 1/\sqrt{2}$  участок кривой  $\gamma_2^<$  монотонно и неограниченно возрастает по  $h$ , с ростом параметра  $k$ .
- При  $\lambda < 1/\sqrt{2}$  участок кривой  $\gamma_2^>$  монотонно и неограниченно возрастает по  $h$ , когда параметр  $k$  убывает.
- Участок кривой  $\gamma_2^+$  монотонно и неограниченно убывает по  $h$  с ростом параметра  $k$ . Он неограниченно возрастает по  $h$  при  $s \rightarrow 0$ .

Эти свойства вытекают непосредственно из формул (5.2.1). Так как каждый из участков  $\gamma_2^<, \gamma_2^>, \gamma_2^+$  монотонно изменяется по  $h$  с ростом параметра  $s$ , следовательно ни один из них не может пересекать сам себя.

**Лемма 12.** Участки кривых  $\gamma_2^+, \gamma_2^-$  не пересекаются.

*Доказательство.* Пусть  $s_+ \in \gamma_2^+, s_- \in \gamma_2^-$ , тогда  $s_+ - s_- > 0, s_+s_- < 0$ . Пусть  $h(s_+) = h(s_-)$ , тогда  $0 = h(s_+) - h(s_-) = \lambda^2(\frac{1}{s_+^2} - \frac{1}{s_-^2}) - (s_+ - s_-) = (s_+ - s_-)(-1 - \frac{\lambda^2(s_+ + s_-)}{s_+^2 s_-^2})$ , следовательно  $s_+ + s_- = -\frac{s_+^2 s_-^2}{\lambda^2} < 0$ . Тогда  $k(s_+) - k(s_-) = ((s_+^2 + 2\lambda^2)^2 - (s_-^2 + 2\lambda^2)^2) + 4\lambda^4(\frac{1}{s_+^2} - \frac{1}{s_-^2}) - 4\lambda^2(\frac{1}{s_+} - \frac{1}{s_-}) = (s_+ - s_-)((s_+ + s_- + 4\lambda^2) + \frac{4\lambda^4(s_+ + s_-)}{s_+^2 s_-^2} + \frac{4\lambda^2}{s_+ s_-}) = (s_+ - s_-)(-\frac{s_+^2 s_-^2}{\lambda^2} + \frac{4\lambda^2}{s_+ s_-}) < 0$ . Следовательно  $k(s_+) \neq k(s_-)$ .  $\square$

**Лемма 13.** Участки кривых  $\gamma_2^<, \gamma_2^>$  не пересекаются.

*Доказательство.* Рассуждения аналогичны проводимым в Утверждении 2.  $\square$

### 5.3 Особые точки диаграммы $D$

**Определение 4.** Особые точки диаграммы, состоящей из кусочно-гладких кривых, это точки касания, пересечения, возврата, излома, изолированные точки и точки, в которых кривые обрываются.

**Утверждение 5.** Особые точки диаграммы  $D$  - это точки возврата и общие точки кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

*Доказательство.* Так как в  $D$  нет изолированных точек, точек излома и точек обрыва, доказательство непосредственно следует из лемм 10-13.  $\square$

Общие точки кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  задаются многочленами (см. Раздел 3)

$$A(\omega) = a(\omega) \cdot \sum_{i=0}^{10} a_i \omega^i, \quad B(s) = b(s) \cdot \sum_{i=0}^{10} b_i s^i$$

Легко проверить, что корням многочленов  $a(\omega), b(s)$  соответствуют точки касания кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ .

**Лемма 14.** Корни многочленов  $\sum_{i=0}^{10} a_i \omega^i, \sum_{i=0}^{10} b_i s^i$  соответствуют точкам пересечения кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ , кроме случаев совпадения с корнями  $a(\omega), b(s)$ .

*Доказательство.* Пусть  $(h, k)$  - точка касания кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ . Тогда производные этих кривых должны совпадать

$$\frac{1}{2\omega^2} = -\frac{2}{2(2\lambda^2 + s)} \Leftrightarrow s = -2\lambda^2 - \omega^2$$

приравнивая значения координат в формулах (3.4) и выражая  $s$  через  $\omega$ , получаем следующие два уравнения:

$$-8g^2\lambda^4\omega - 8g^2\lambda^2\omega^3 - 2g^2\omega^5 - 4g\lambda^4 - 4g\lambda^2\omega^2 - g\omega^4 - \lambda^2\omega = 0$$

$$32g^2\lambda^6 + 32g^2\lambda^4\omega^2 + 8g^2\lambda^2\omega^4 + 8g\lambda^4\omega + 8g\lambda^2\omega^3 + 2g\omega^5 + \omega^4 = 0$$

Понижая степень  $\omega$ , получаем равенство

$$(256g^4\lambda^4 + 24g^2\lambda^2 - 1)(2g(2\lambda^2 + \omega^2) + \omega) = 0$$

Правая скобка это в точности многочлен  $a(\omega)$ , а левой скобке соответствует кривая  $\Gamma_1$ . Легко проверить, что при  $(g, \lambda) \in \Gamma_1$  других точек касания нет.  $\square$

Параметр на кривой  $\gamma_1$ , задающий точки касания определяется по формулам

$$\omega_{<} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 32g^2l^2}}{4g}, \quad \omega_{>} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 32g^2l^2}}{4g}$$

Параметр на кривой  $\gamma_2$ , задающий точки касания определяется по формулам

$$s_{<} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 32g^2l^2}}{8g^2}, \quad s_{>} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 32g^2l^2}}{8g^2}$$

**Лемма 15.** Пусть точки касания склеиваются между собой, тогда  $(g, \lambda) \in \Gamma_1$ .

*Доказательство.* Введем замену  $a = \sqrt[3]{2g^2}, b = \sqrt[3]{2\hat{\lambda}^2}$ . Легко понять, что точки касания склеиваются при условии  $2ab - 1 = 0$   $\square$

Координаты точек возврата для кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  задаются следующими формулами:

$$(k_1^0, h_1^0) = (1 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2g^2)^2}, \hat{\lambda}^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2g^2})$$

$$(k_2^0, h_2^0) = (-8\hat{\lambda}^2g^2 + 3\sqrt[3]{4\hat{\lambda}^4} - 3\sqrt[3]{16\hat{\lambda}^8} + 4\hat{\lambda}^4, 2g^2 - \hat{\lambda}^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2\hat{\lambda}^2})$$

**Лемма 16.** Пусть точки возврата склеиваются между собой, тогда  $g = \hat{\lambda} = 2^{-\frac{5}{4}}$  (т.е. это точка  $A$  множества  $\Theta$ ).

*Доказательство.* Используем замену  $a = \sqrt[3]{2g^2}, b = \sqrt[3]{2\hat{\lambda}^2}$ . Тогда условие совпадения точек возврата переписется в виде двух уравнений:

$$2a^3b^3 - \frac{3a^2}{4} - (b^2 - 1)^3 = 0 \text{ и } -a^3 + \frac{3a}{2} + b^3 - \frac{3b}{2} = 0$$

Используя пакет символьных вычислений Wolfram Mathematica исключаем переменную  $a$  и приходим к уравнению

$$(b^2 + 4)(2b^2 - 1)^7 = 0$$

Легко видеть, что единственным решением будет точка  $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Переходя к переменным  $g, \hat{\lambda}$  получаем точку  $g = \hat{\lambda} = 2^{-\frac{5}{4}}$ .  $\square$

**Лемма 17.** Пусть одна из точек возврата склеивается с точкой касания, тогда  $(g, \lambda) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

*Доказательство.* Рассмотрим многочлен  $a(\omega)$ , корни которого соответствуют точкам касания кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  и подставим в него значение  $\omega_1 = \sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ , соответствующее точке возврата кривой  $\gamma_1$ . Рассмотрим многочлен  $b(s)$ , корни которого соответствуют точкам касания кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  и подставим в него значение  $s_1 = -\sqrt[3]{2\lambda^2}$ , соответствующее точке возврата кривой  $\gamma_2$ . После перехода к переменным  $a = \sqrt[3]{2g^2}, b = \sqrt[3]{2\lambda^2}$  мы получаем многочлены

$$2ab^3 + a^2 - 1, \quad 2a^3b + b^2 - 1,$$

которые и задают кривые  $\Gamma_2, \Gamma_3$  □

**Замечание.** Более того,

**Лемма 18.** Пусть одна из точек возврата склеивается с точкой пересечения, тогда  $(g, \lambda) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$

*Доказательство.* Рассмотрим многочлен  $\sum_{i=0}^{10} a_i \omega^i$ , корни которого соответствуют точкам пересечения кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  и подставим в него значение  $\omega_1 = \sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ , соответствующее точке возврата кривой  $\gamma_1$ . Рассмотрим многочлен  $\sum_{i=0}^{10} b_i s^i$ , корни которого соответствуют точкам пересечения кривых  $\gamma_1, \gamma_2$  и подставим в него значение  $s_1 = -\sqrt[3]{2\lambda^2}$ , соответствующее точке возврата кривой  $\gamma_2$ . После перехода к переменным  $a = \sqrt[3]{2g^2}, b = \sqrt[3]{2\lambda^2}$  мы получаем многочлены

$$(2ab^3 + a^2 - 1) \cdot (-4b^6 + 2b^3a^3 - 24b^3a + 9a^4 - 24a^2 + 16),$$

$$(2ba^3 + b^2 - 1) \cdot (-4a^6 + 2a^3b^3 - 24a^3b + 9b^4 - 24b^2 + 16),$$

которые и задают кривые  $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  □

**Лемма 19.** Участки кривых  $\gamma_1^+, \gamma_2^+$  имеют единственную точку пересечения.

*Доказательство.* Поскольку  $\gamma_1^+$  монотонно убывает по  $h$  и  $k$  и асимптотически стремится к  $k = 1$  при  $\omega \rightarrow +0$ , а  $\gamma_2^+$  монотонно и неограниченно растет по  $k$ , и убывает по  $h$  при  $s \rightarrow +\infty$ , они всегда имеют точку пересечения и причем только одну. Эту точку будем в дальнейшем обозначать буквой  $M$ . □

Таким образом мы можем явно вычислить для точек возврата и касания как координаты, так и соответствующие значения параметров  $s, \omega$ . Для нахождения точек пересечения и соответствующих значений параметров  $s, \omega$ , мы можем воспользоваться численными методами. Для 18 точек внутри камер  $\Theta$  были построены диаграммы  $D$  (см. Приложение 3).

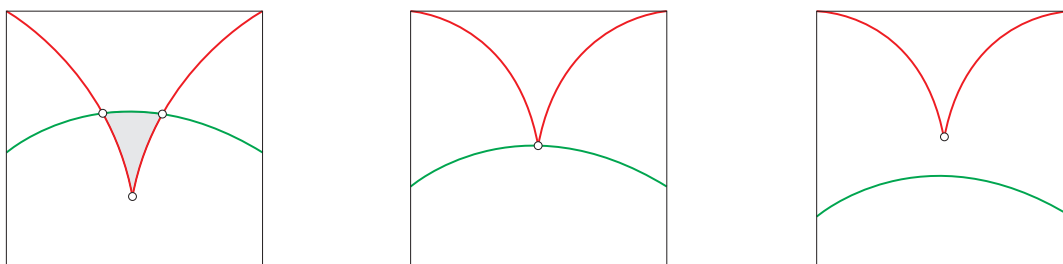
## 6 Перестройки диаграмм $D$

Зная, как выглядят диаграммы  $D$  в каждой из камер  $\Theta$ , постараемся понять, что происходит при переходе из одной камеры в другую.

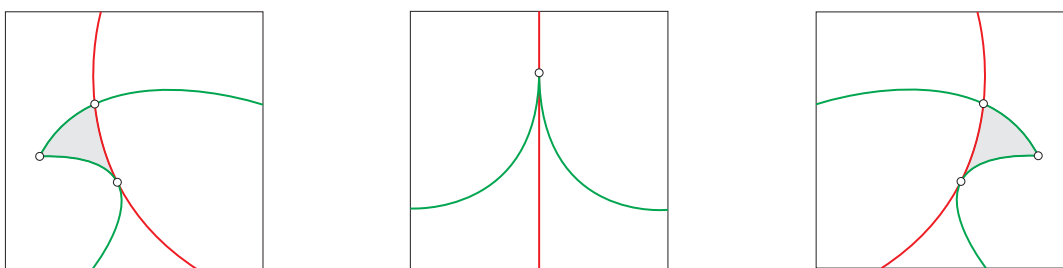
### 6.1 Случай $g \cdot \lambda \neq 0$

При  $g, \lambda > 0$  встречаются три типа перестроек диаграмм  $D$ . Два из них связаны с тем, что клюв одной из кривых  $\gamma_i$  либо а) "протыкает" дугу другой кривой, либо б) "переползает" из внутренности второго клюва в его внешнюю часть или наоборот. Третий тип в) связан с тем, что две точки касания сходятся в одну точку, которая потом исчезает, так как кривые перестают касаться. Опишем их более подробно.

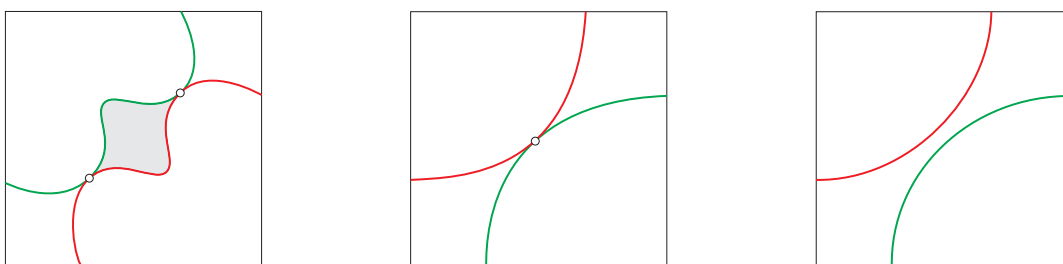
- а) На одной из кривых  $\gamma_i$  три точки: точка возврата, и ближайшие к ней, расположенные с разных сторон точки пересечения сходятся в одну. При этом камера, заключенная между этих трех точек исчезает, а две камеры, находившиеся по разные стороны от клюва сливаются в одну.



- б) На одной из кривых  $\gamma_i$  три точки: точка возврата, ближайшая к ней точка касания и, расположенная с другой стороны, ближайшая к ней точка пересечения, сходятся в одну, а потом расходятся, меняя порядок следования. Камера, заключенная между этих трех точек исчезает, а потом появляется, но при этом клюв смотрит уже в противоположную сторону.



- в) Две точки касания, соединенные двумя дугами, сходятся в одну, при этом камера, заключенная между этих дуг, стягивается в точку, после чего кривые, прежде касавшиеся в этой точке, отделяются друг от друга.



Для всех дуг, разделяющих камеры  $\Theta$  запишем перестройки, происходящие с  $D$  при их пересечении. Для этого будем использовать диаграммы (см. Рис 1,4,5 Приложение 2). Подразумевается, что при переходе из одной камеры в другую мы не проходим через точки пересечения дуг  $\Theta$ .

Перестройки типа а): 2-3, 2'-3', 3-4, 3'-4', 3-6, 3'-6', 6-7, 6'-7', 4-7, 4'-7', 5-8, 5'-8', 1'-9, 1'-9'.

Перестройки типа б): 1-2, 1'-2', 4-5, 4'-5', 7-8, 7'-8'.

Перестройки типа в): 8-9, 8'-9', 5-1', 5'-1'.

## 6.2 Случай $g \cdot \lambda = 0$

Множество  $D_{g,\lambda}$  в случае  $g, \lambda > 0$  состоит из двух кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ . Из формул (3.4) видно, что при  $g \rightarrow 0$  кривая  $\gamma_1$  вырождается, а при  $\lambda \rightarrow 0$  вырождается кривая  $\gamma_2$ . Это связано с тем, что формулы становятся квадратичными от параметра на кривой, в следствие чего происходит склейка отрицательного и положительного "хвостов". Далее мы предъявим множества  $D_{0,\lambda} = \bar{\gamma}_1 \cup \gamma_2$  и  $D_{g,0} = \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2$  и докажем, что они будут предельными для  $D$  при  $g \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow 0$  соответственно. Доказательство будет происходить в два этапа: сначала мы построим промежуточное множество  $\bar{\gamma}_1$ , зависящее от  $g, \lambda$  и содержащееся в  $\bar{\gamma}_1$ , с такой параметризацией, что  $\bar{\gamma}_1(x) - \gamma_1(x) \rightarrow 0$  при  $g \rightarrow 0$ ; затем докажем, что пределом  $\bar{\gamma}_1$  при  $g \rightarrow 0$  будет как раз  $\bar{\gamma}_1$  (см. Рис. 9, Приложение 1). Для случая  $\lambda \rightarrow 0$  доказательство проводится аналогично (см. Рис. 10, Приложение 1).

**Утверждение 6.** Рассмотрим  $D_{0,\lambda} = \bar{\gamma}_1 \cup \gamma_2$  - множество точек, к которому стремится диаграмма  $D$  при  $g \rightarrow 0$ . Тогда  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_{1,1} \cup \bar{\gamma}_{1,2} \cup \bar{\gamma}_{1,3}$  задаются следующими формулами

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{1,1} &: \{k = 1, h = \omega + \lambda^2\}, \omega \in (-\infty, 0) \\ \bar{\gamma}_{1,2} &: \{k = 1, h = \omega + \lambda^2\}, \omega \in (0, \infty) \\ \bar{\gamma}_{1,3} &: \{k = 1 + \omega^4, h = \omega^2 + \lambda^2\}, \omega \in (0, \infty)\end{aligned}$$

*Доказательство.* Фиксируем параметры  $g, \lambda$ , тогда  $\omega_1 = -\sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ . Кривая  $\gamma_1$  задается следующей формулой:

$$\gamma_1 : \{k = 1 + \omega^4 + 2g\omega, h = \omega^2 + \lambda^2 - g/\omega\}, \omega \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Разделим её на четыре части:

$$\begin{aligned}\gamma_{1,1} = \gamma_1, & \quad \omega \in (-\infty, \omega_1), & \gamma_{1,2} = \gamma_1, & \quad \omega \in (\omega_1, 0), \\ \gamma_{1,3} = \gamma_1, & \quad \omega \in (0, -\omega_1), & \gamma_{1,4} = \gamma_1, & \quad \omega \in (-\omega_1, \infty)\end{aligned}$$

Введем промежуточные множества  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_{1,1} \cup \bar{\gamma}_{1,2} \cup \bar{\gamma}_{1,3}$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{1,1} &: \{k = 1, h = \omega + \lambda^2 - g/\omega\}, \omega \in (0, -\omega_1) \\ \bar{\gamma}_{1,2} &: \{k = 1, h = \omega + \lambda^2 - g/\omega\}, \omega \in (\omega_1, 0) \\ \bar{\gamma}_{1,3} &: \{k = 1 + \omega^4, h = \omega^2 + \lambda^2\}, \omega \in (-\omega_1, \infty)\end{aligned}$$

**Лемма 20.** Пусть  $g \rightarrow 0$ , тогда следующие четыре выражения стремятся к нулю  $\forall \omega$  из области определения соответствующей кривой  $\bar{\gamma}_{i,j}$  в каждом из выражений.

$$\gamma_{1,1}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,3}(\omega), \quad \gamma_{1,2}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,2}(\omega), \quad \gamma_{1,3}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,2}(\omega), \quad \gamma_{1,4}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,3}(\omega).$$

*Доказательство.* Так как  $\omega_1 = -\sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ , то из  $|\omega| \leq -\omega_1$  следует  $\omega \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}\gamma_{1,1}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,3}(-\omega) &= \{2g\omega, -g/\omega\} \rightarrow \{0, 0\}, & \gamma_{1,2}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,2}(\omega) &= \{\omega^4 + 2g\omega, 0\} \rightarrow \{0, 0\}, \\ \gamma_{1,3}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,1}(\omega) &= \{\omega^4 + 2g\omega, 0\} \rightarrow \{0, 0\}, & \gamma_{1,4}(\omega) - \bar{\gamma}_{1,3}(\omega) &= \{2g\omega, -g/\omega\} \rightarrow \{0, 0\}.\end{aligned}$$

□

Из этой леммы следует, что множества  $\gamma_1$  и  $\bar{\gamma}_1$  будут иметь общий предел. Множество  $\bar{\gamma}_1$  содержится в  $\bar{\bar{\gamma}}_1$ . Точка  $A = \bar{\bar{\gamma}}_{1,1}(0) = \bar{\bar{\gamma}}_{1,2}(0) = \bar{\bar{\gamma}}_{1,3}(0)$ , является точкой примыкания параболы к прямой.

**Лемма 21.** Пусть  $g \rightarrow 0$ , тогда множество  $\bar{\gamma}_1$  будет предельным для множества  $\bar{\gamma}_1$ .

*Доказательство.* Рассмотрим точки, ограничивающие множество  $\bar{\gamma}_1$  в  $\bar{\bar{\gamma}}_1$ , это  $\bar{\gamma}_{1,1}(-\omega_1)$ ,  $\bar{\gamma}_{1,2}(\omega_1)$ ,  $\bar{\gamma}_{1,3}(-\omega_1)$ . Так как  $\omega_1 = -\sqrt[3]{\frac{g}{2}}$ , то каждая из этих точек стремится к точке  $A$ .  $\square$

Утверждение доказано  $\square$

**Утверждение 7.** Рассмотрим  $D_{g,0} = \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2$  - множество точек, к которому стремится диаграмма  $D$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тогда  $\bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_{2,1} \cup \bar{\gamma}_{2,2} \cup \bar{\gamma}_{2,3}$  задаются следующими формулами

$$\bar{\gamma}_{2,1} : \{k = s^2, h = 2g^2 - s\}, s \in (-\infty, 0)$$

$$\bar{\gamma}_{2,2} : \{k = s^2, h = 2g^2 - s\}, s \in (0, \infty)$$

$$\bar{\gamma}_{2,3} : \{k = 0, h = 2g^2 - s\}, s \in (-\infty, 0)$$

*Доказательство.* Фиксируем параметры  $g, \lambda$ , тогда  $s_1 = -\sqrt[3]{\lambda^2}$ . Кривая  $\gamma_2$  задается следующей формулой:

$$\gamma_2 : \{k = 8\lambda^2 g^2 + (s + 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + s^2)/s^2, h = 2g^2 - \lambda^2 - s + \lambda^2/s^2\}, s \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Разделим её на четыре части:

$$\gamma_{2,1} = \gamma_2, \quad \omega \in (-\infty, s_1),$$

$$\gamma_{2,2} = \gamma_2, \quad \omega \in (s_1, 0),$$

$$\gamma_{2,3} = \gamma_2, \quad \omega \in (0, -s_1),$$

$$\gamma_{2,4} = \gamma_2, \quad \omega \in (-s_1, \infty)$$

Введем промежуточные множества  $\bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_{2,1} \cup \bar{\gamma}_{2,2} \cup \bar{\gamma}_{2,3}$

$$\bar{\gamma}_{2,1} : \{k = s^2, h = 2g^2 - s\}, s \in (-\infty, s_1)$$

$$\bar{\gamma}_{1,2} : \{k = s^2, h = 2g^2 - s\}, s \in (-s_1, \infty)$$

$$\bar{\gamma}_{1,3} : \{k = 0, h = 2g^2 - \lambda^2 - s + \lambda^2/s^2\}, s \in (s_1, 0)$$

**Лемма 22.** Пусть  $\lambda \rightarrow 0$ , тогда следующие четыре выражения стремятся к нулю  $\forall s$  из области определения соответствующей кривой  $\bar{\gamma}_{i,j}$  в каждом из выражений.

$$\gamma_{2,1}(\omega) - \bar{\gamma}_{2,1}(\omega), \quad \gamma_{2,2}(\omega) - \bar{\gamma}_{2,3}(\omega), \quad \gamma_{2,3}(\omega) - \bar{\gamma}_{2,3}(\omega), \quad \gamma_{2,4}(\omega) - \bar{\gamma}_{2,4}(\omega) \quad .$$

*Доказательство.* Так как  $s_1 = -\sqrt[3]{2\lambda^2}$ , то из  $|s| \leq s_1$  следует  $s \rightarrow 0$ .

$$\gamma_{2,1}(s) - \bar{\gamma}_{2,1}(s) = \{-8\lambda^2 g^2 + 4\lambda^2 s + 4\lambda^4 - 4\lambda^2(\lambda^2 + s^2)/s^2, -\lambda^2 + \lambda^2/s^2\} \rightarrow \{0, 0\},$$

$$\gamma_{2,2}(s) - \bar{\gamma}_{2,3}(s) = \{-8\lambda^2 g^2 + (s + 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + s^2)/s^2, 0\} \rightarrow \{s^2, 0\} \rightarrow \{0, 0\},$$

$$\gamma_{2,3}(s) - \bar{\gamma}_{2,3}(-s) = \{-8\lambda^2 g^2 + (s + 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + s^2)/s^2, 0\} \rightarrow \{s^2, 0\} \rightarrow \{0, 0\},$$

$$\gamma_{2,4}(s) - \bar{\gamma}_{2,2}(s) = \{-8\lambda^2 g^2 + 4\lambda^2 s + 4\lambda^4 - 4\lambda^2(\lambda^2 + s^2)/s^2, -\lambda^2 + \lambda^2/s^2\} \rightarrow \{0, 0\}$$

$\square$

Из этой леммы следует, что множества  $\gamma_2$  и  $\bar{\gamma}_2$  будут иметь общий предел. Множество  $\bar{\gamma}_2$  содержится в  $\bar{\bar{\gamma}}_2$ . Точка  $B = \bar{\bar{\gamma}}_{2,1}(0) = \bar{\bar{\gamma}}_{2,2}(0) = \bar{\bar{\gamma}}_{2,3}(0)$ , является точкой примыкания прямой к параболе.

**Лемма 23.** Пусть  $\lambda \rightarrow 0$ , тогда множество  $\bar{\gamma}_1$  будет предельным для множества  $\bar{\gamma}_1$ .

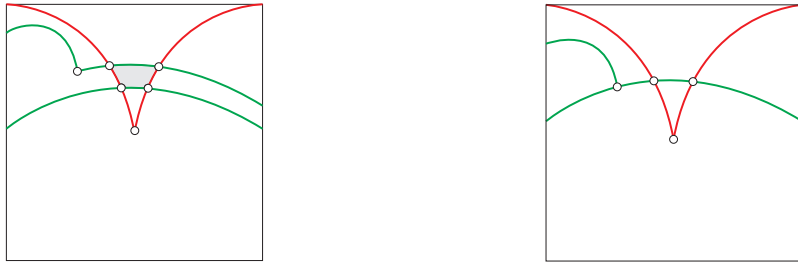
*Доказательство.* Рассмотрим точки, ограничивающие множество  $\bar{\gamma}_2$  в  $\bar{\bar{\gamma}}_2$ , это  $\bar{\gamma}_{2,1}(s_1), \bar{\gamma}_{2,2}(-s_1), \bar{\gamma}_{2,3}(s_1)$ . Так как  $s_1 = -\sqrt[3]{\lambda^2}$ , то каждая из этих точек стремится к точке  $B$ . □

Теорема доказана. □

При  $g \cdot \lambda = 0$  встречаются следующие перестройки диаграмм  $D$ .

При  $g \rightarrow 0$  стенки образованные участками кривых  $\gamma_1^+, \gamma_1^-$  склеиваются. Клюв кривой  $\gamma_2$  может находиться как а) во внешней части клюва кривой  $\gamma_1$ , так и в б) его внутренней части. Точка касания  $\omega_<$  в любом случае стремится к бесконечности, и, примыкающая к ней, камера исчезает - это в). Опишем эти перестройки более подробно.

а) Если клюв снаружи, то происходит склейка двух пар точек пересечения. Две камеры, заключенные между склеивающихся дуг, исчезают.



б) Если клюв внутри, то происходит склейка только одной пары точек пересечения. Камера, заключенная между склеивающихся дуг, исчезает



в) Точка касания, которая принадлежит обеим склеивающимся кривым уходит в бесконечность. Камера, прилегавшая к этой точке, исчезает. Эта перестройка происходит одновременно с а) и б).



При  $\lambda \rightarrow 0$  стенки, образованные участками кривых  $\gamma_2^+, \gamma_2^-$ , склеиваются. Клюв кривой  $\gamma_1$  может находиться как а) во внутренней части клюва кривой  $\gamma_2$ , так и в б) его внешней части. Точка касания  $s_>$  в любом случае стремится к бесконечности, и, примыкающая к ней, камера исчезает. Перестройки устроены так же как и при  $g \rightarrow 0$ , с точностью до симметрии.



# 7 Классификация диаграмм $D$

## 7.1 Классы эквивалентности диаграмм.

Рассмотрим диаграммы  $D$  при значениях параметров  $g, \lambda$  внутри камер  $\Theta$ . Легко понять, что при непрерывном изменении параметров, множество точек  $D$  на плоскости изменяется непрерывно. Однако "качественный вид" диаграмм может меняться скачкообразно. Например, если мы посчитаем количество камер, точек пересечения или касания в диаграммах  $D$ , то для разных значений параметров  $g, \lambda$  оно может не совпадать. Попробуем дать несколько определений эквивалентности диаграмм.

Рассмотрим замкнутое множество  $D \in \mathbb{R}$ , состоящее из конечного набора гладких дуг и изолированных точек. Тогда особые точки  $D$  это изолированные точки, общие точки дуг, точки возврата или излома и точки обрыва. В нашем случае из особых точек присутствуют точки возврата, касания и пересечения.  $D$  состоит из двух несамопересекающихся кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ . Для значений  $g, \lambda$  внутри камер  $\Theta$ , из каждой точки пересечения или касания выходят ровно 4 дуги, а из каждой точки возврата - ровно 2.

**Определение 5.** Поставим  $D$  в соответствие специальный граф  $G$  следующим образом:

- Особым точкам  $D$  соответствуют вершины графа  $G$ .
- Дугам  $D$  соответствуют ребра графа  $G$ .
- Два ребра графа  $G$  соединяются в вершине, если соответствующие дуги  $D$  соединяются в особой точке.
- Про любую вершину графа  $G$  можно сказать, к какому типу (пересечение/касание/возврат) относится соответствующая ей особая точка  $D$ .
- Рассмотрим особую точку  $x \in D$  и пусть это точка касания. Две дуги, выходящие из неё принадлежат кривой  $\gamma_1$ , а две - кривой  $\gamma_2$ . Тогда про любые два из четырех ребер графа  $G$ , соединяющихся в соответствующей вершине можно сказать, что соответствуют им дуги принадлежат одной или разным кривым.

Множество точек  $D$  на плоскости можно рассматривать как топологическое пространство с индуцированной топологией. Тогда можно говорить о гомеоморфизме диаграмм  $D$ . Гомеоморфизм плоскости на себя называется объемлющим гомеоморфизмом. Наличие объемлющий гомеоморфизм, переводящий одну диаграмму в другую - это более сильное условие, чем наличие просто гомеоморфизма.

**Определение 6.** Назовем диаграммы  $D_1, D_2$  I-эквивалентными, если  $\exists$  гомеоморфизм  $D_1 \rightarrow D_2$  такой, что соответствующие графы  $G_1, G_2$  изоморфны с сохранением типов вершин.

**Определение 7.** Назовем диаграммы  $D_1, D_2$  II-эквивалентными, если  $\exists$  объемлемый гомеоморфизм такой, что  $D_1 \rightarrow D_2$ , сохраняющий ориентацию, и такой, что соответствующие графы  $G_1, G_2$  изоморфны с сохранением типов вершин.

Множество точек  $D$  на плоскости можно рассматривать как вложение соответствующего графа  $G$ . Следующее определение будет сильнее двух предыдущих.

**Определение 8.** Рассмотрим непрерывный путь  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2(g, \lambda)$  и соответствующее ему семейство диаграмм  $D(t)$ . Пусть  $D(0) = D_1, D(1) = D_2$  и им соответствуют графы  $G_1, G_2$ . Пусть  $D(t)$  задает гладкую изотопию вложений  $D_1, D_2$  графов  $G_1, G_2$  в плоскость, тогда назовем диаграммы  $D_1, D_2$  III-эквивалентными.

**Гипотеза 2.** Рассмотрим две точки внутри любой из камер  $\Theta$ . Тогда соответствующие диаграммы будут III-эквивалентны.

Для каждой камеры  $\Theta$  мы выбрали внутреннюю точку и построили диаграммы (см. Приложение 3).

**Утверждение 8.** *Диаграммы, построенные для камер  $2 \dots 9, 1, 1'$  являются попарно неэквивалентными в смысле I. То же самое верно для камер  $2', \dots 9', 1, 1'$*

*Доказательство.* Чтобы доказать это утверждение выпишем для соответствующих графов количество вершин, количество ребер, соединяющих две точки касания, количество ребер, соединяющих точку возврата и точку касания, и количество ребер, соединяющих точку возврата и бесконечность. Те диаграммы, для которых эти наборы будут различаться, будут неэквивалентными.

Камера	вершины	касание-касание	касание-возврат	возврат-бесконечность
1	6	0	2	0
2, 2'	6	1	2	0
3, 3'	8	1	0	0
4, 4'	6	1	1	1
5, 5'	6	2	1	1
6, 6'	10	1	0	0
7, 7'	8	1	1	0
8, 8'	8	2	1	0
9, 9'	6	0	0	1
1'	6	0	0	0

□

Заметим, что в камерах  $(i, i')$ ,  $i = 2, \dots 9$  наборы совпадают. На (Рис 1 Приложение 2) можно заметить, что соответствующие диаграммы симметричны. В следующей части работы мы докажем, что эти диаграммы эквивалентны в смысле I.

**Утверждение 9.** *Диаграммы, построенные для камер  $(i, i')$ ,  $i = 2, \dots 9$  не являются эквивалентными в смысле II.*

*Доказательство.* Рассмотрим диаграмму  $D$  и соответствующий ей граф  $G$ . Возьмём некоторый цикл и запишем для него последовательность типов вершин. Причем для точки касания возможны два варианта: если цикл проходит через ребра, соответствующие дугам, которые выходят в разные полуплоскости, то будем называть её касание-1, если цикл проходит через ребра, соответствующие дугам, которые выходят в одну полуплоскость, то будем называть её касание-2. Последовательность вершин, содержащая бесконечность, также считается циклом. Если такой цикл можно определить для двух графов однозначно вместе с ориентацией, и эта ориентация будет разной - то соответствующие диаграммы не будут II-эквивалентными. Для камер  $(2, 2')$ ,  $(4, 4')$ ,  $(5, 5')$ ,  $(7, 7')$ ,  $(8, 8')$  таким циклом можно взять

$$(\text{касание-1} \rightarrow \text{возврат} \rightarrow \text{пересечение} \rightarrow \text{касание-1})$$

Для камер  $(3, 3')$  и  $(6, 6')$  таким циклом можно взять

$$(\text{касание-1} \rightarrow \text{пересечение} \rightarrow \text{касание-2} \rightarrow \text{касание-1})$$

Для камер  $(9, 9')$  таким циклом можно взять

$$(\text{бесконечность} \rightarrow \text{пересечение} \rightarrow \text{клюв} \rightarrow \text{бесконечность})$$

Соответствующие циклы определяются однозначно для диаграмм в камерах  $(i, i')$ ,  $i = 2, \dots 9$  (см. Рис. 2, Приложение 2), и с противоположной ориентацией. □

## 7.2 Классы эквивалентности камер, стенок и особых точек.

Далее будем считать, что верна Гипотеза 2. Тогда мы можем разбить диаграммы  $D$  на 18 классов эквивалентности, по одному на каждую камеру  $\Theta$ . Однако, при переходе из одной камеры в другую, меняется лишь небольшая часть диаграммы. Естественным будет отождествить те составляющие диаграмм (камеры, стенки, особые точки), которые, при таком переходе не меняются. Опишем формально эту операцию.

Рассмотрим непрерывный путь  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2(g, \lambda)$ ,  $g, \lambda \geq 0$ . При каждом значении параметра  $t$  мы имеем диаграмму  $D$  (множество точек на плоскости, непрерывно зависящее от этого параметра).

**Определение 9.**  $D^2$  - множество точек в  $\mathbb{R}^3(k, h, t)$ , такое что его сечение плоскостями  $t = t_0$  совпадает с диаграммами  $D$  при  $g(t_0)$  и  $\lambda(t_0)$ .

Можно рассматривать  $D^2$  как вложение в  $\mathbb{R}^3(k, h, t)$  некоторого клеточного комплекса. Его трехмерными клетками будут компоненты связности в  $\mathbb{R}^3$ , разделенные множеством точек  $D^2$ . Сечениям плоскостями  $t = Const$  ребер, будут соответствовать особые точки соответствующих диаграмм  $D$ . Тогда удобно будет ввести следующие множества.

**Определение 10.**  $D^1, D^0$  это соответственно 1-мерные и 0-мерные остовы комплекса  $D^2$ , вложенные в  $\mathbb{R}^3$ .

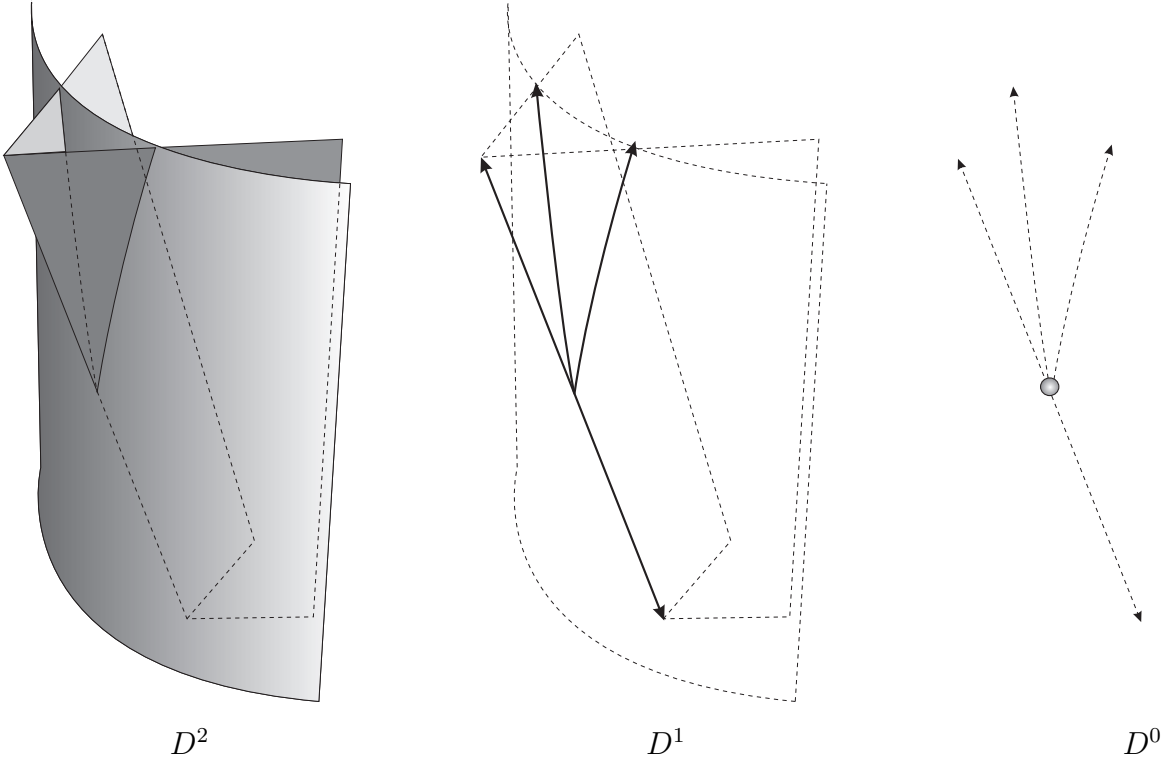


Рис. 1: Пример клеточного комплекса

При каждом значении  $t$  мы имеем диаграмму  $D(t)$ , в которой различаются три типа объектов: камеры, дуги и особые точки.

Рассмотрим непрерывный путь  $\delta(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3(k, h, t)$ . Тогда при каждом значении  $s$  мы имеем диаграмму  $D(t(s))$  и точку  $(k(s), h(s))$ , которая может принадлежать или не принадлежать ей. Скажем, что этот путь проходит через камеру, дугу или особую точку диаграммы  $D$  при значении параметра  $t = t_0$ , если  $\exists s = s_0$  такое что  $t(s_0) = t_0$  и точка  $(k(s_0), h(s_0))$  принадлежит соответственно этой камере, дуге или особой точке диаграммы  $D$ .

**Определение 11.** Пусть дан путь  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2(g, \lambda)$ . Для двух диаграмм  $D_0, D_1 \in D(t)$  будем считать эквивалентными

1. камеры  $a \in D_0$  и  $b \in D_1$ , если их соединяет путь  $\delta(s)$  т.ч.  $D(t(0)) = D_0$  и  $D(t(1)) = D_1$ , целиком лежащий в  $\mathbb{R}^3/D_2$
2. стенки  $\alpha \in D_0$  и  $\beta \in D_1$ , если их соединяет путь  $\delta(s)$ , целиком лежащий в  $D_2/D_1$
3. особые точки  $A \in D_0$  и  $B \in D_1$ , если их соединяет путь  $\delta(s)$ , целиком лежащий в  $D_1/D_0$

Чтобы определить классы эквивалентности для всех значений параметров  $g, \lambda \geq 0$ , достаточно чтобы путь  $\gamma(t)$  проходил через все стенки множества  $\Theta \cup g = 0 \cup \lambda = 0$ .

Можно также ввести эквивалентное определение, не зависящее от выбора пути  $\gamma(t)$ . Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^4(g, \lambda, h, k)$  множество, сечения которого плоскостями  $(g, \lambda)$  совпадает с диаграммами  $D$ , тогда оно образует в  $\mathbb{R}^4$  некоторый клеточный комплекс. Назовем его  $\tilde{D}^3$  и его соответствующие 2-мерный и 1-мерный остовы  $\tilde{D}^2$  и  $\tilde{D}^1$ .

**Определение 12.** Для двух диаграмм  $D_0, D_1$ , соответствующих значениям параметров  $(g_0, \lambda_0)$  и  $(g_1, \lambda_1)$ , будем считать эквивалентными

1. камеры  $a, b$  диаграмм  $D_0, D_1$ , если они лежат в одной компоненте связности  $\mathbb{R}^4 \setminus \tilde{D}^3$
2. стенки  $\alpha, \beta$  диаграмм  $D_0, D_1$ , если они лежат в одной компоненте связности  $\tilde{D}^3 \setminus \tilde{D}^2$
3. особые точки  $A, B$  диаграмм  $D_0, D_1$ , если они лежат в одной компоненте связности  $\tilde{D}^2 \setminus \tilde{D}^1$

**Утверждение 10.** Если верна Гипотеза 2, то для любых двух внутренних точек камеры  $\Theta$ , соответствующие диаграммы состоят из эквивалентных камер, дуг и особых точек.

Зная как устроены перестройки между 18 классами диаграмм, мы можем создать такую систему обозначений камер, дуг и особых точек, которая будет согласовываться с определением 12. Для этого достаточно рассмотреть путь, проходящий через все стенки множества  $\Theta$ . Можно также распространить эту систему обозначений на граничные случаи  $g = 0, \lambda = 0$ , в каждом из которых содержится по 5 классов, тогда путь должен также проходить через них.

- Камеры будем обозначать арабскими цифрами от 1 до 9, кроме тех, которые лежат ниже участков кривых  $\gamma_1^+, \gamma_2^+$ , потому что, в граничных случаях, в них отсутствует образ отображения момента. Такие камеры на диаграммах будут отмечены серым цветом, и не представляют интерес для исследования.
- Стенки камер будем обозначать греческими буквами  $\alpha, \gamma$  на кривой  $\gamma_1$  и  $\beta, \delta$  на кривой  $\gamma_2$ . Нижние индексы различают различные стенки между собой. Некоторые из стенок будут изображаться пунктирной линией, потому что в граничных случаях им соответствуют регулярные значения отображения момента, т.е. они не лежат в  $\Sigma$ , но лежат в  $D$ .
- Особые точки обозначаются латинскими буквами по следующим правилам: точки касания - буквами  $U, V$ ; точки возврата - буквами  $A, B$ ; точки пересечения - буквами  $X, Y, Z, M$ ; нижние индексы различают не тождественные точки между собой.
- Стенку камеры, образованную склейкой стенок  $x_i, x_j$  будем называть  $x_{i,j}$ . Особую точку образованную склейкой точек  $X_i, X_j$  будем называть  $X_{i,j}$ . Особые точки, образованные склейкой клюва  $X_i$  и стенки будем называть  $\tilde{X}_i$

Результат этой классификации представлен на эскизах диаграмм (см. Рис. 6-9, Приложение 2).

**Утверждение 11.** Рассмотрим 18 классов диаграмм, соответствующих внутренним точкам  $\Theta$ , 5 классов диаграмм, соответствующих  $g = 0$  и 5 классов диаграмм, соответствующих  $\lambda = 0$ . Тогда в граничных случаях присутствуют:

- Все камеры
- Все стенки, кроме  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$
- Все особые точки кроме  $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3, B_3, A_4, B_4, U_3, V_3, Z_2$

**Утверждение 12.** Диаграммы  $D$  в камерах  $(n, n')$ , при  $n \neq 1$  симметричны друг другу, а в камерах  $1, 1'$  симметричны самим себе.

*Доказательство.* Предъявим таблицу, в которой для диаграмм из камер  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  будет записана последовательность особых точек (в новых обозначениях) для кривой  $\gamma_1$  в порядке роста параметра  $\omega$ , потом для кривой  $\gamma_2$  в порядке роста параметра  $t = 1/s$ , а для диаграмм из камер  $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', 9'$  та же последовательность, но сначала для  $\gamma_2$ , а потом для  $\gamma_1$  с теми же направлениями роста параметров. То есть каждой диаграмме мы поставим в соответствие код, с помощью которого её можно однозначно восстановить. Симметричность заключается в том, что, при переходе в симметричную камеру, кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  меняются местами, с точки зрения записанных на них последовательностей особых точек (см. Рис. 6, 7 Приложение 2).

Камера $n$	$\gamma_1^<$	$\omega_1$	$\gamma_1^>$	$\gamma_1^+$	$\gamma_2^>$	$s_1$	$\gamma_2^<$	$\gamma_2^+$
Камера $n'$	$\gamma_2^>$	$s_1$	$\gamma_2^<$	$\gamma_2^+$	$\gamma_1^<$	$\omega_1$	$\gamma_1^>$	$\gamma_1^+$
1	$U_1$	$B_1$	$Z_1, V_1$	$M$	$V_1$	$A_1$	$Z_1, U_1$	$M$
1'	$A_3$	$Z_2$		$M$	$B_3$	$Z_2$		$M$
2	$X_1$	$B_2$	$U_2, V_1$	$M$	$V_1$	$A_1$	$X_1, U_2$	$M$
2'	$Y_1$	$A_2$	$V_2, U_1$	$M$	$U_1$	$B_1$	$Y_1, V_2$	$M$
3	$X_1, X_3$	$B_3$	$X_2, U_2, V_1$	$M$	$V_1, X_2, X_3$	$A_1$	$X_1, U_2$	$M$
3'	$Y_1, Y_3$	$A_3$	$Y_2, V_2, U_1$	$M$	$U_1, Y_2, Y_3$	$B_1$	$Y_1, V_2$	$M$
4		$B_3$	$X_2, U_2, V_1$	$M$	$V_1, X_2$	$A_4$	$U_2$	$M$
4'		$A_3$	$Y_2, V_2, U_1$	$M$	$U_1, Y_2$	$B_4$	$V_2$	$M$
5		$B_3$	$Z_2, V_3, V_1$	$M$	$V_1, V_3$	$A_3$	$Z_2$	$M$
5'		$A_3$	$Z_2, U_3, U_1$	$M$	$U_1, U_3$	$B_3$	$Z_2$	$M$
6	$X_1, X_3, X_5$	$B_5$	$X_4, X_2, U_2, V_1$	$M$	$V_1, X_2, X_3$	$A_1$	$X_1, U_2$	$M, X_5, X_4$
6'	$Y_1, Y_3, Y_5$	$A_5$	$Y_4, Y_2, V_2, U_1$	$M$	$U_1, Y_2, Y_3$	$B_1$	$Y_1, V_2$	$M, Y_5, Y_4$
7	$X_5$	$B_5$	$X_4, X_2, U_2, V_1$	$M$	$V_1, X_2$	$A_4$	$U_2$	$M, X_5, X_4$
7'	$Y_5$	$A_5$	$Y_4, Y_2, V_2, U_1$	$M$	$U_1, Y_2$	$B_4$	$V_2$	$M, Y_5, Y_4$
8	$X_5$	$B_5$	$X_4, Z_2, V_3, V_1$	$M$	$V_1, V_3$	$A_3$	$Z_2$	$M, X_5, X_4$
8'	$Y_5$	$A_5$	$Y_4, Z_2, U_3, U_1$	$M$	$U_1, U_3$	$B_3$	$Z_2$	$M, Y_5, Y_4$
9	$X_5$	$B_5$	$X_4, Z_2$	$M$		$A_3$	$Z_2$	$M, X_5, X_4$
9'	$Y_5$	$A_5$	$Y_4, Z_2$	$M$		$B_3$	$Z_2$	$M, Y_5, Y_4$

Легко видеть, что диаграммы в симметричных камерах переходят друг в друга при замене символов  $A$  на  $B$ ,  $U$  на  $V$ ,  $X$  на  $Y$ . □

**Следствие 1.** : Построенные в камерах  $i, i', i = 2, \dots, 9$  диаграммы эквивалентны в смысле  $I$ .

*Доказательство.* При гомеоморфизме, переводящем точки  $A$  в  $B$ ,  $U$  в  $V$ ,  $X$  в  $Y$  с теми же индексами, типы точек сохраняются, так как  $A, B$  - точки возврата,  $U, V$  - точки касания, а  $X, Y$  - точки пересечения. Так как при этом, кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  меняются местами, разделение дуг, выходящих из точек касания на пары, сохраняется. Следовательно диаграммы эквивалентны. □

# 8 Лиувиллева классификация интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи

Основной целью этой работы было понять, что можно сказать о системе при  $g, \lambda > 0$ , обладая при этом полностью исследованными случаями при  $g = 0$  и  $\lambda = 0$ .

## 8.1 Случай $g = 0$

Изложим результаты Лиувиллевой классификации случая  $g = 0$ , приведенную [3]. Напомним, что здесь  $\lambda$  отличается умножением на  $\sqrt{2}$ . Бифуркационные диаграммы будем рассматривать как подмножество  $D_{0,\lambda}$ . Те дуги, которые необходимо отсечь, будем отмечать пунктиром. В рассматриваемом случае следует различать пять типов диаграмм (см. Рис. 10 Приложение 1).

$$0) \lambda = 0, \quad 1м) 0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2м) \frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < \frac{2}{3^{3/4}}, \quad 6м) \frac{2}{3^{3/4}} < \lambda < 1, \quad 7м) \lambda > 1$$

Напомним, что бифуркационная диаграмма содержится в множестве  $D_{0,\lambda}$ , поэтому Гладкие дуги бифуркационных диаграмм обозначаются малыми греческими буквами с индексами. В их прообразах лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами. Их типы указаны ниже:

$$\begin{array}{ll} A : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12} & 2A : \alpha_3, \alpha_7, \alpha_8 \\ B : \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6 & 2B : \beta_4 \\ A^* : \delta_1, \delta_2 & C_2 : \gamma \end{array}$$

Регулярные точки отображения момента являются образами некоторого количества несвязных торов Лиувилля. Они разбиваются на семейства, которые обозначаются римскими цифрами. Количество торов в этих семействах указано ниже:

Семейство	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>	<i>VI</i>	<i>VII</i>
Число торов Лиувилля	1	2	1	1	1	1	2

Особые точки бифуркационной диаграммы обозначаются следующим набором символов  $M, N, P, Q, R, L, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ . Причем точки положения равновесия при некритических значениях  $\lambda \notin \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{3^{3/4}}, 1\}$  являются невырожденными, их типы и представления в виде полупрямого произведения указаны ниже:

точка	тип	п/п произведение
$M$	центр-центр	$A \times A$
$R$	центр-центр	$2(A \times A)$
$Q$	седло-центр	$A \times B$
$L$	седло-центр	$2(A \times B)$
$N$	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
$P$	седло-седло	$B \times B$

Остальные особые точки соответствуют вырожденным замкнутым траекториям различных типов.

точка	тип вырождения
$z_2$	седло-узел
$z_5$	седло-узел
$z_7$	элл. вилка
$z_1$	седло-узел
$z_6$	элл. вилка + элл. вилка
$z_3$	гип. удв. вилка + удвоение периода
$z_4$	гип. вилка + элл. вилка

Все круговые молекулы можно найти в *Таблице 1 Приложение 5*.

## 8.2 Случай $\lambda=0$

Изложим результаты Лиувиллевой классификации случая  $\lambda = 0$ , используя ту же систему обозначений, что и в [4]. Бифуркационные диаграммы будем рассматривать как подмножество  $D_{g,0}$ . Те дуги, которые необходимо отсечь, будем отмечать пунктиром. В рассматриваемом случае следует различать пять типов диаграмм (*см. Рис. 11 Приложение 1*).

$$0) \quad g = 0, \quad 1к) \quad 0 < g < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2к) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < g < \frac{2}{3^{3/4}}, \quad 6к) \quad \frac{2}{3^{3/4}} < g < 1, \quad 7к) \quad g > 1$$

Как и в предыдущем случае, в прообразах гладких дуг бифуркационной диаграммы лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются 3-атомами. Их типы указаны ниже:

$$\begin{array}{ll} A : \gamma_1, \gamma_4, \alpha_1 & 2A : \delta_1, \delta_2, \alpha_2, \gamma_7 \\ B : \gamma_5, \gamma_3, \beta_1 & 2B : \beta_3, \gamma_6 \\ 2A^* : \gamma_2 & C_2 : \beta_2 \end{array}$$

Семейства имеют следующее число торов:

Семейство	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Число торов Лиувилля	1	2	2	1	2

Особые точки бифуркационной диаграммы обозначаются следующим набором символов  $H, U_1, U_2, U_3, M_1, M_2, c_1, c_2, e_1, e_2, h_1, h_2, S_0$ . Точки положения равновесия при некритических значениях  $g \notin \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{3^{3/4}}, 1\}$  являются невырожденными, их типы и представления в виде прямого произведения указаны ниже:

точка	тип	п/п произведение
$H$	центр-центр	$A \times A$
$U_1$	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
$U_2$	седло-седло	$B \times B$
$U_3$	центр-седло	$A \times B$
$M_1$	центр-центр + центр-центр	$2(A \times A)$
$M_2$	центр-седло + центр-седло	$2(A \times B)$

Остальные особые точки соответствуют вырожденным замкнутым траекториям различных типов.

точка	тип вырождения
$S_0$	элл. вилка
$e_1$	элл. вилка
$e_2$	элл. вилка + элл. вилка
$c_1$	седло-узел
$c_2$	седло-узел + седло-узел
$h_1$	гип. вилка
$h_2$	гип. удв. вилка + гип. удв. вилка

Все круговые молекулы можно найти в *Таблице 2 Приложение 5*.

## 8.3 Общий случай

Гипотеза 1 говорит, что интегрируемые системы, соответствующие внутренним точкам  $\Theta$  разбиваются на 18 классов лиувиллевой эквивалентности. Гипотеза 2 накладывает дополнительное

условие эквивалентности диаграмм  $D$ , которое, в общем случае не следует из Гипотезы 1. В предыдущих главах мы разбили диаграммы  $D$  на 18 классов эквивалентности при  $g, \lambda > 0$  и, также, классифицировали камеры, стенки и особые точки этих диаграмм  $D$ , в соответствии с определением 11 (см. Раздел 7.2). Поскольку диаграммы  $D$  содержат в себе бифуркационную диаграмму  $\Sigma$ , они тесно связаны с соответствующими интегрируемыми системами.

В каждой из 18 камер можно зафиксировать точку  $(g, \lambda)$  и численно посчитать некоторые инварианты соответствующей интегрируемой системы.

**Утверждение 13.** *Для 18 фиксированных точек  $(g, \lambda)$  были (численно) вычислены точки положения равновесия и определен их тип. Образ точек равновесия содержится в точках пересечения кривых  $\gamma_1, \gamma_2$ .*

*Доказательство.* (см. Приложение 6) □

**Утверждение 14.** *Для 18 фиксированных точек  $(g, \lambda)$  были (численно) вычислены круговые молекулы некоторых особых точек.*

*Доказательство.* (см. Приложение 7, см. Видеофайлы) □

Рассмотрим в  $M^4$  только прообразы регулярных точек отображения момента. Они будут разделены на несколько компонент связности.

**Определение 13.** *Два тора Лиувилля принадлежат одному семейству, если они лежат в одной компоненте связности.*

**Утверждение 15.** *Рассмотрим две диаграммы  $D_0, D_1$ . Пусть камера  $a$  диаграммы  $D_0$  и камера  $b$  диаграммы  $D_1$  принадлежат одному классу эквивалентности камер. Тогда в прообразе любой внутренней точки этих камер лежат одни и те же семейства торов Лиувилля (по отношению к области значений параметров  $g, \lambda \geq 0$ ).*

*Доказательство.* Согласно определению 11 найдется путь  $\sigma(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3(g, \lambda, h, k)$ , такой что значениям параметров  $g(0), \lambda(0)$  соответствует диаграмма  $D_0$ , и точка  $(h(0), k(0))$  лежит внутри камеры  $a$ , а значениям параметров  $g(1), \lambda(1)$  соответствует диаграмма  $D_1$ , и точка  $(h(1), k(1))$  лежит внутри камеры  $b$ . При этом  $\forall s \in (0, 1)$  точка  $(h(s), k(s))$  не лежит на бифуркационной диаграмме, соответствующей  $(g(s), \lambda(s))$ , следовательно в её прообразе будет несколько торов Лиувилля. Следовательно, прообраз  $(h(0), k(0))$  и  $(h(1), k(1))$  лежат в одном семействе. □

Чтобы эффективно использовать полученную классификацию стенок и особых точек диаграмм  $D$  для Лиувиллевой классификации систем нам придется сделать несколько естественных предположений.

**Гипотеза 3.** *Все точки ранга 1, образ которых не является особой точкой диаграммы - невырождены при  $\forall \lambda, g > 0$ .*

Если это так, то в окрестности любой точки ранга 1 мы имеем либо эллиптическую, либо гиперболическую бифуркацию. В пользу этой гипотезы говорит то, что она верна для граничных случаев  $g = 0, \lambda = 0$ .

**Гипотеза 4.** *Образ точек ранга 0 содержится в особых точках диаграмм  $D$  при  $\forall \lambda, g > 0$*

Эта гипотеза была проверена для фиксированных значений  $(g, \lambda)$ , по одному для каждой из 18 камер  $\Theta$ , и она также верна для граничных случаев  $g = 0, \lambda = 0$ .

Если обе эти гипотезы верны, то прообраз гладкой дуги бифуркационной диаграммы состоит из нескольких компонент связности, причем каждая компонента состоит из точек одного типа. Это значит, что тип перестройки сохраняется на всей длине дуги, и, более того, при непрерывном изменении параметров  $g, \lambda$  (до тех пор пока эта дуга существует).



**Утверждение 16.** Рассмотрим две бифуркационные диаграммы  $D_0, D_1$ . Пусть верны гипотезы 3,4. Пусть стенка  $a$  диаграммы  $D_0$  и стенка  $b$  диаграммы  $D_1$  принадлежат одному классу эквивалентности. Тогда в прообразе любой точки этих стенок лежит одинаковое количество невырожденных критических окружностей каждого типа. окружностей.

*Доказательство.* Доказательство аналогично приведенному в утверждении 12. □

**Гипотеза 5.** Все точки ранга 0, кроме тех точек, образы которых склеиваются при  $g, \lambda \in \Theta$  - невырождены при  $\forall \lambda, g > 0$

Если это так, то тип точки положения равновесия сохраняется при непрерывном изменении параметров  $g, \lambda$ , до тех пор, пока её образ не склеится с образом другой точки. Это предположение также верно для граничных случаев  $g, \lambda = 0$ .

**Утверждение 17.** Рассмотрим две бифуркационные диаграммы  $D_0, D_1$ . Пусть верна гипотеза 5. Пусть особая точка  $a$  диаграммы  $D_0$  и особая точка  $b$  диаграммы  $D_1$  принадлежат одному классу эквивалентности. Тогда в прообразе этих точек лежит одинаковое количество невырожденных точек положений равновесия каждого типа.

*Доказательство.* Доказательство аналогично приведенному в утверждении 12. □

**Следствие 2.** Если верны гипотезы 3,4 то для любой дуги кроме  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ , (см. Рис. 3 Приложение 2) мы знаем тип перестройки, и для всех особых точек кроме  $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3, B_3, A_4, B_4, Z_2$  мы значем круговые молекулы.

**Следствие 3.** Остается заметить, что для оставшихся точек можно получить частичную круговую молекулу, в которой будут пропущены элементы, соответствующие проходу через одну из дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ . Круговые молекулы точек  $U_3, V_3$  не проходят через перечисленные дуги, поэтому их тоже можно вычислить. Для того, чтобы получить недостающие круговые молекулы, достаточно вычислить их для точек  $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3, B_3, A_4, B_4, Z_2$  при каких-нибудь фиксированных значениях  $g, \lambda$ , (см. Утверждение 14)

**Следствие 4.** Если верна гипотеза 5, то нам известны типы и количество точек положения равновесия, образы которых не содержатся в  $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3, B_3, A_4, B_4, Z_2$

**Следствие 5.** Если верна гипотеза 5, то из оставшихся точек только  $X_1, Y_1, X_5, Y_5, Z_2$  могут иметь в прообразе точки положения равновесия. Чтобы понять, какие еще точки являются образами точек положения равновесия, достаточно вычислить их и определить их тип при каких-нибудь фиксированных значениях  $g, \lambda$  (см. Утверждение 13)

Для недостающих точек, с помощью компьютера, были получены недостающие круговые молекулы, а для точек положений равновесия определен их тип. Оказывается, что  $\gamma_1, \delta_1$  имеют перестройку типа А, а  $\gamma_1, \delta_1$  - перестройку типа 2А, поэтому метки на недостающих элементах молекул расставляются автоматически.

Пусть Гипотезы 3,4,5 верны. Тогда для завершения классификации нам остается только корректно определить семейства торов Лиувилля по отношению ко всему семейству интегрируемых систем при  $g, \lambda \geq 0$ . Сделаем это в два этапа:

1. Сначала разделим торы на семейства так, будто в прообразах дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$  нет ни одного тора Лиувилля. Тогда разбиение на семейства в общем случае будет таким же, как и в граничных случаях. В одном граничном случае, некоторые торы могут принадлежать разным компонентам связности, при этом те же торы могут принадлежать одной компоненте связности в другом граничном случае. Некоторые торы могут быть не представлены в одном граничном случае, но тогда обязательно будут присутствовать во втором. Комбинируя семейства для двух граничных случаев, мы получаем новое, более мелкое разбиение. Обозначим эти семейства  $i$  (1 тор),  $ii$  (1 тор),  $iii$  (1 тор),  $iv$  (1 тор),  $v$  (1 тор),  $vi$  (1 тор),  $vii$  (2 тора),  $viii$  (2 тора).

	$\lambda = 0$	$g = 0$	
ii	$\times$	(2)	VI
i	(1)		I
iii	(4)		$\times$ II
iv	(3)		IV
v			V
vi	$\times$		III
vii	$\times$		VII
viii	(5)		$\times$

2. Теперь посмотрим на круговые молекулы точек  $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3, B_3, A_4, B_4, Z_2$ . В прообразе дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$  есть торы Лиувилля, поэтому некоторые семейства могут отождествиться, или часть одного семейства отождествится с другим семейством. В результате проверки этих круговых молекул (см. Приложение 7) оказалось, что семейство  $i, iv$  склеились, семейство  $v$  склеилось с половиной семейства  $viii$ , а семейство  $vi$  склеилось с половиной семейства  $vii$ . Вводя новые обозначения  $I = i = iv, II = ii, III = iii, V = v, VI = vi, VI + VII = vii, V + VIII = viii$ , мы получаем корректное разбиение (см. Таблица 4,5 Приложение 4).

**Теорема 1.** Пусть верны гипотезы 1,2,3,4,5. Тогда

1. Для каждого из 18 классов Лиувиллевой эквивалентности получены бифуркационные диаграммы (см. Рис. 1 Приложение 2; Приложение 8)
2. Вычислены типы перестроек (см. Рис 8,9 Приложение 2; Таблица 1 Приложение 4)
3. Вычислены типы невырожденных положений равновесий (см. Рис 6,7 Приложение 2; Таблица 2 Приложение 4)
4. Вычислены типы вырожденных круговых особенностей (см. Рис 6,7 Приложение 2; Таблица 3 Приложение 4)
5. Вычислены круговые молекулы особых точек (см. Рис 6,7 Приложение 2; Таблица 2,3 Приложение 4; Таблица 1,2 Приложение 5)
6. Вычислены семейства торов Лиувилля (см. Таблица 4,5 Приложение 4)

## 8.4 Завершение классификации

Пусть верны Гипотезы 2,3,4,5. Тогда верна Гипотеза 1, то есть во внутренних точках камер  $\Theta$  интегрируемые системы Лиувиллево эквивалентны. Соответствующая классификация для  $g, \lambda \geq 0$  устроена следующим образом. Перестройки обозначаются маленькими греческими буквами, их типы приведены ниже:

$$\begin{array}{ll}
 A : \alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3, \gamma_1, \delta_1 & 2A : \alpha_8, \beta_8, \alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_2, \delta_2, \alpha_1\alpha_3, \beta_1\beta_3, \beta_6 \\
 4A : \alpha_{10}\gamma_2, \beta_{10}\delta_2 & - : \alpha_6 \\
 B : \alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4, \beta_6 & 2B : \alpha_8, \beta_8, \alpha_9, \beta_9 \\
 2A^* : \beta_5 & C_2 : \alpha_5
 \end{array}$$

В каждом семействе торов Лиувилля - один тор.

Семейство	$I$	$II$	$III$	$IV$	$V$	$VI$	$VII$	$VIII$
Число торов Лиувилля	1	1	1	1	1	1	1	1

Точки положения равновесия при  $g, \lambda \notin \Theta$  являются невырожденными, их типы и представления в виде прямого произведения указаны ниже:

точка	тип	п/п произведение
$M$	центр-центр	$A \times A$
$Z_1$	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
$Z_2$	центр-центр	$A \times A$
$X_1, Y_1$	седло-седло	$B \times B$
$X_2, Y_2$	центр-центр	$A \times A$
$X_3, Y_3$	центр-седло	$A \times B$
$X_4, Y_4$	центр-центр	$A \times A$
$X_5, Y_5$	центр-седло	$A \times B$
$X_{2,4}, Y_{2,4}$	центр-центр	$2(A \times B)$
$X_{3,5}, Y_{3,5}$	центр-седло	$2(A \times B)$

Остальные особые точки соответствуют вырожденным замкнутым траекториям различных типов.

точка	тип вырождения
$A_1, B_1$	седло-узел
$A_2, B_2$	седло-узел
$A_3, B_3$	седло-узел
$A_4, B_4$	седло-узел + седло-узел
$\tilde{A}_1, \tilde{B}_1$	элл. вилка
$\tilde{A}_4, \tilde{B}_4$	элл. вилка + элл. вилка
$U_1$	гип. вилка
$V_1$	гип. удв. вилка + удвоение периода
$U_2$	гип. удв. вилка + гип. удв. вилка
$V_2$	гип. вилка + элл. вилка
$U_3$	гип. вилка
$V_3$	гип. удв. вилка + удвоение периода

## Список литературы

- [1] Болсинов А.В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. - Изд-во УдГУ 1999.
- [2] П.Е.Рябов “Бифуркационное множество задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи”.Дисс.Волгоград 1997.
- [3] П.В.Морозов “Лиувиллева классификация некоторых интегрируемых систем механики твердого тела” Москва - 2006.
- [4] Болсинов А.В., П.Рихтер, Фоменко А. Т. “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской” - Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42.
- [5] Yehia H.M. New integrable cases in dynamics of rigid bodies. - Mech. Res. Com., 1986, Vol. 13(3), pp.169-172.
- [6] Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата. Вестник МГУ сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88-90
- [7] А.А.Ошемков “Труды Семинара по векторному и тензорному анализу вып. 25 часть 2.” Издательство Московского Ун-та, 1993.
- [8] Харламов М.П, Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевско-Яхьи. - Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т.2, №2.
- [9] Г.Г.Апфельрот “Не вполне симметричные тяжёлые гироскопы // Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки.” М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940.С.61-155.
- [10] М.П.Харламов “Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела”. Л.:Изд-во Ленинградского ун-та, 1980.
- [11] Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075. Объем 0,3 п.л.
- [12] Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости// Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307. Объем 2 п.л.
- [13] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем// Известия АН СССР, 1988, т.52, No.2, с.378-407. Объем 2 п.л.
- [14] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю// Функци. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51. Объем 1 п.л.
- [15] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем// УМН, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173. Объем 2 п.л.
- [16] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. - Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.
- [17] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. - Матем. сборник, 1996, т. 187, И3, с. 143-160.