МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студентки 505 группы Пономаренко Юлии Игоревны

МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ. НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ

Научный руководитель - академик РАН Фоменко А.Т.

1 Введение.

В сентябре 2008 года в "Математическом сборнике" была опубликована статья Кудрявцевой Е.А., Никонова И.М., Фоменко А.Т. "Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия" [1]. Эта фундаментальная работа посвящена описанию классификации ориентируемых атомов на двумерных поверхностях.

Атом - понятие, возникающее в классификации функций Морса на двумерных многообразиях и описаниях симметрий интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы; однако у него существуют естественные описания на языке теории групп, графов, теории узлов и других разделов математики. В частности, атомы взаимно однозначно соответствуют клеточным разбиениям поверхности, а максимально симметричные атомы — правильным разбиениям, и следовательно их классификация даст естественную классификацию разбиений.

Статья [1] не затрагивает описания неориентируемых атомов, а также отображений ориентируемых атомов, не сохраняющих ориентацию. В своей работе я рассмотрела некоторые утверждения этой статьи, проверила их выполнимость либо переформулировала и передоказала так, чтобы они были верны для неориентируемого случая. Большая часть определений расширена; некоторые переопределены — в основном это касается отображений. Например, в [1] накрытием называется отображение, сохраняющее ориентацию. Для удобства употребления я называю эти отображения ориентируемыми накрытиями и распространяю понятие накрытия на отображения, не сохраняющие ориентацию. Все отличия оговариваются в каждом случае.

В работе я буду часто ссылаться на [1]. Всюду, где говорится об аналогичных утверждениях для ориентирумых симметрий, подразумеваются утверждения, приведенные в этой статье. Доказательства, дословно повторяющие доказательства в [1], будут опущены.

2 Понятие атома.

Рассмотрим двумерное гладкое компактное замкнутое многообразие без края M и некоторую функцию Морса $f\colon M \to \mathbb{R}$. Пусть $x \in M$ — критическая точка этой функции. Назовем $c = f(x)$ **критическим значением** функции f, а полный прообраз $f^{-1}(c) \subset M$ — **критическим уровнем** (или **слоем**) функции f на многообразии M.

Заметим, что полный прообраз любого регулярного значения является объединением непересекающихся окружностей, то есть устроен очень просто. Таким образом, изучение функции Морса сводится к изучению ее поведения в окрестности критических уровней.

Функции Морса мы рассматриваем с точностью до гладкой замены координат в образе и прообразе.

Пусть c — некоторое критическое значение, а ε — достаточно маленькое число, такое, что на интервале $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ нет других критических значений (так как функция морсовская, такое ε всегда существует).

Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, а точнее некоторую его компоненту связности P. Это гладкое компактное двумерное многообразие с краем, распадающимся на непересекающиеся окружности, в которое вложен граф $\Gamma = f^{-1}(c) \cap P$, обладающее следующими свойствами:

- граф Γ связен и либо состоит ровно из одной вершины, либо все вершины имеют степень 4;
- при выбрасывании графа из P многообразие распадается на кольца;
- кольца можно разбить на черные и белые так, чтобы к каждому ребру графа подходило одно черное и одно белое кольцо.

Определение 2.1. Пара $X = (P, \Gamma)^{\#}$ с фиксированной раскраской, удовлетворяющая этим свойствам, называется **атомом**. Атомы мы также рассматриваем с точностью до диффеоморфизмов, сохраняющих граф, раскраску и, возможно, ориентацию (см. ниже).

В дальнейшем мы будем рассматривать только **седловые** атомы, т.е. те, у которых степень всех вершин равна 4, не оговаривая этого особо.

Каждую из граничных окружностей атома X можно заклеить диском, раскрасив его в соответствующий цвет, и мы получим эквивалентное определение атома как поверхности без края $\tilde{X}$, при выбрасывании графа распадающейся на черные и белые диски — клетки (если атом понимается как поверхность с краем, проколотые диски мы также будем называть клетками). Две клетки одного цвета, имеющие общую вершину A, будем называть **смежными** по этой вершине; две клетки разных цветов, имеющие общее ребро, будем называть **смежными** по этому ребру. Атом называется **ориентируемым**, если ориентируема соответствующая поверхность; **родом** атома называется род этой поверхности. В данной работе род атома будет удобно вычислять по формуле $g = 2 - \chi/2$, т.е. считать род неориентируемого атома целым или полуцелым.

Ориентируемый атом, на котором введена некоторая ориентация, рассматриваемый с точностью до диффеоморфизмов, сохраняющих эту ориентацию, будем называть **ориентированным**; атом, на каждой клетке которого введена некоторая ориентация (необязательно согласованная с ориентациями на других клетках), рассматриваемый с точностью до диффеоморфизмов, сохраняющих эту ориентацию, будем называть **локально ориентированным**.

В дальнейшем мы будем считать, что на любом ориентируемом атоме введена некоторая ориентация, а на любом неориентируемом — некоторая локальная ориентация на каждой клетке.

Атом называется **простым**, если его критический слой содержит ровно одну критическую точку, и **сложным**, если больше. **Сложностью** атома называется количество его критических точек (вершин графа).

Атомом, **двойственным** к данному атому X называется атом, полученный из него заменой направления роста функции, или, что то же самое, с противоположной раскраской.

Определение 2.2. Атом называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его белых клеток на два подмножества, что любые две смежные белые клетки принадлежат разным подмножествам.

Определение 2.3. Атом называется **двудольно ориентируемым**, или **допускающим двудольную (альтернирующую) ориентацию**, если существует такой набор ориентаций белых клеток, что на любых двух смежных клетках ориентации не согласованы. Атом, на котором введена некоторая альтернирующая ориентация, будем называть **двудольно ориентированным**.

Замечание 2.4. Для ориентируемых атомов понятие двудольности совпадает с понятием двудольной ориентируемости. Для неориентируемых атомов это неверно - атом $\tilde{P}_2$ на проективной плоскости не двудолен, так как все его белые клетки попарно смежны, но двудольно ориентируем. Однако на любом двудольно ориентируемом атоме существуют ровно две альтернирующие ориентации белых клеток, причем они получаются друг из друга заменой ориентации на всех белых клетках одновременно.

Дадим еще одно определение.

Определение 2.5. Многогранником называется гладкое двумерное компактное многообразие без края с заданным на нем произвольным клеточным разбиением, содержащим хотя бы одно ребро.

Опишем процедуру построения многогранника по атому, приведенную в [2]. На атоме задан "старый" граф. Отметим центры белых клеток — это будут вершины нового графа — и соединим их с вершинами клетки — это будут полуребра новых ребер. Теперь новые вершины соединены ребрами, проходящими через старые вершины. Если некоторая клетка подходит к вершине A два раза, в новом графе соответствующей ей вершине будет инцидентна петля, проходящая через A. **Сложностью** многогранника для достижения единообразия обозначений назовем количество ребер разбиения.

Обратно, построим атом по многограннику. Отметим середину каждого ребра — это будут новые вершины — и соединим середины соседних по грани ребер — это будут новые ребра. Осталось раскрасить новые клетки, полностью лежащие внутри старых граней, в черный, а содержащие старые вершины — в белый цвет. Эта операция называется **усечением**.

Построенные операции взаимно обратны и задают биекцию между вершинами, белыми и черными клетками атома и ребрами, вершинами и гранями многогранника. Двойственные атомы соответствуют двойственным разбиениям. Следовательно, между седловыми атомами и многогранниками существует естественная биекция.

3 Накрытия атомов

Определение 3.1. Если атом рассматривается как поверхность с краем, то **накрытием** атома $Y = (P_2, \Gamma_2)^\#$ атомом $X = (P_1, \Gamma_1)^\#$ называется накрытие поверхностей $\pi\colon P_1 \to P_2$, переводящее граф Γ_1 в граф Γ_2 и сохраняющее цвета колец. Кроме того, **ориентированным** накрытием будем называть накрытие ориентированных атомов, сохраняющее ориентацию, а **отражающим** — меняющее ее.

Для атома как поверхности без края под **накрытием** понимается разветвленное накрытие поверхностей $\pi\colon \tilde{P}_1 \to \tilde{P}_2$ с ветвлениями в центрах двумерных клеток, переводящее граф в граф и сохраняющее цвета клеток.

Накрытия мы будем рассматривать с точностью до гомотопии в классе клеточных (разветвленных) накрытий, переводящих граф в граф, т.е. под накрытием будем понимать класс гомотопической эквивалентности накрытий.

Утверждение 3.2. Пусть Y — атом, X — связное топологическое пространство, и $f : X \to Y$ — конечнолистное разветвленное накрытие, точки ветвления которого находятся в центрах клеток атома Y. Тогда на X существует единственная структура атома, для которой $f : X \to Y$ — накрытие.

Если Y — ориентируемый атом, то накрывающий его атом X также будет ориентируем, поскольку ориентацию можно поднять на каждой клетке, и при этом на соседних клетках они будут согласованы. Однако если на X задать обратную ориентацию, то само накрытие ориентируемым не будет.

Каждое неориентируемое многообразие рода k можно получить факторизацией ориентируемого многообразия рода $2(k-1)$ по инволюции без неподвижных точек, меняющей ориентацию атома. Пусть Y — неориентируемый атом. Возьмем ориентируемое многообразие, двулистно его накрывающее — из утверждения 3.2 следует, что на нем можно ввести единственную структуру атома.

Определение 3.3. Такой атом мы назовем **оберткой** атома Y.

Следующее утверждение является очевидным следствием связности атома и “жесткости” клеточных отображений.

Утверждение 3.4. Пусть X, Y — атомы и $f, g\colon X \to Y$ — накрытия. Тогда если существует такое полуребро $e \in X$, что $f(e) = g(e)$, то $f = g$.

Определение 3.5. Накрытие $\pi\colon X \to X$ называется **симметрией** атома X. Группу симметрий атома обозначим $Aut(X)$.

Для ориентированных атомов симметрию, сохраняющую ориентацию, мы назовем **ориентируемой**, а меняющую — **отражающей**. Атом, у которого есть отражающая симметрия, будем называть **отражаемым**. Группу симметрий ориентированного атома, которая содержит, как ориентируемые, так и отражающие симметрии, а также группу симметрий неориентируемого атома, будем называть неориентируемой.

Замечание 3.6. В силу замечания 2.4 на двудольно ориентированных атомах можно также говорить о симметриях, сохраняющих или меняющих альтернирующую ориентацию. Для ориентируемых атомов эти понятия совпадают с ориентируемыми и отражающими симметриями.

Для ориентируемых атомов понятие ориентируемой максимальной симметричности строится в [1] на ориентируемых симметриях и использует возможность согласовать направления вращений на всех клетках. Чтобы построить его аналог для любых симметрий, введем понятие флага, приведенное в [7].

Отметим центры белых и черных клеток. Соединим центр каждой белой клетки с ее вершинами толстыми линиями, центр каждой черной клетки с ее вершинами — тонкими, а центры смежных по стороне черной и белой клетки — пунктирными линиями. Мы получили разбиение поверхности на треугольники — **флаги** — у каждого из которых одна сторона толстая, вторая тонкая, а третья пунктирная.

Будем говорить, что флаг **инцидентен** клетке, если одна из его сторон лежит в этой клетке. Каждый флаг инцидентен одной белой и одной смежной с ней черной клетке и полностью лежит в их объединении.

На множестве флагов введем операции x, y, z, ставящие в соответствие каждому флагу смежный с ним по толстой, тонкой и пунктирной стороне соответственно. Легко видеть, что эти операции инволютивны и образуют группу с соотношениями $x^2 = y^2 = z^2 = 1$, $xy = yx$. Композиции yz и zy, (соответственно xz и zx) отвечают элементарным поворотам — **вращениям** — вокруг центров черных (соответственно белых) клеток в разных направлениях, а xy — **полуобороту** вокруг вершины.

Определение 3.7. Атом X (соответственно ориентируемый атом) назовем **максимально симметричным** (соответственно **ориентируемо максимально симметричным**), если для любого его флага ξ существуют симметрии, действующие как отображения x, y и z на этом флаге (соответственно xz, yz, xy).

Замечание 3.8. Можно дать эквивалентное определение: атом максимально симметричен (соответственно ориентируемо максимально симметричен), если $Aut(X)$ транзитивно действует на множестве полуребер (соответственно ребер) этого атома.

Утверждение 3.9. Пусть X — атом, $\xi \subset X$ — его флаг. Если существуют симметрии x_ξ, y_ξ, z_ξ : $X \to X$, которые действуют как x, y и z на ξ, то X — максимально симметричный атом.

◀ Рассмотрим множество Ψ всех флагов, для которых существуют указанные выше отображения. Оно инвариантно относительно действия $Aut(X)$, следовательно, для любого флага из Ψ все смежные с ним флаги также лежат в Ψ. Из связности атома следует, что все флаги лежат в Ψ. ▶

Симметрии x_ξ, y_ξ, $z_\xi : X \to X$ являются образующими в группе $Aut(X)$. Будем называть систему образующих (x_ξ, y_ξ, z_ξ) **связанной** с флагом ξ. В дальнейшем мы будем обозначать их x, y, z, опуская индекс ξ, предполагая симметрии уже выбранными для некоторого флага.

Атом (ориентируемо) максимально симметричен, если группа его симметрий имеет максимально возможную мощность — $4n$ (соответственно $2n$).

Утверждение 3.10. Пусть X — неориентируемый атом, $e \in X$ — его белая клетка, A - вершина этой клетки. Если существуют симметрии a_e, $b_A : X \to X$, которые действуют как вращение клетки e и полуоборот вокруг вершины A соответственно, то X — максимально симметричный атом.

◀ Доказательство того, что симметрии, являющиеся полуоборотом и вращением, существуют для любой клетки и любой вершины аналогично доказательству для ориентируемых симметрий, следовательно этот набор симметрий позволяет перевести любое ребро в любое. Докажем, что также можно перевести любое полуребро в любое. Для этого достаточно доказать, что можно перевести клетку в собственное отражение, то есть поменять на ней ориентацию.

Рассмотрим некоторый замкнутый путь, начинающийся в клетке e, вдоль которого меняется ориентация. Можно считать, что он идет вдоль ребер $d_0 \subset e$, $d_1, ..., d_n = d_0$. Рассмотрим симметрию $\psi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n$, где φ_i переводит d_{i-1} в d_i, и является либо полуоборотом, либо вращением. Тогда ψ переводит e в себя с заменой ориентации. ▶

Следствие 3.11. Для неориентируемого атома четность длин элементов в разложении произвольной симметрии $g \in Aut(X)$ по образующим x, y, z определена неоднозначно.

◀ Для доказательства достаточно показать, что существует композиция нечетного числа образующих x, y, z группы $Aut(X)$, являющаяся тождественным преобразованием. Пусть система образующих связана с флагом, инцидентным белой клетке e. Если симметрия h сохраняет эту клетку вместе с ориентацией, то $h = (xz)^p$. Из утверждения 3.10 следует, что существует некоторая симметрия $g \in Aut(X)$, являющаяся композицией нескольких полуоборотов и вращений, а следовательно, четного числа образующих x, y, z, переводящая клетку e в ее отражение. Следовательно, симметрия $h = z \circ g$ переводит e в себя с сохранением ориентации, а значит $(xz)^{-p} \circ z \circ g$ является тождественным отображением, и при этом раскладывается в произведение нечетного числа образующих. ▶

Рассмотрим подгруппу $Par(X) \subset Aut(X)$, образованную вращением xz и полуоборотом xy.

Замечание 3.12. Для ориентируемого атома X группа $Par(X)$ совпадает с подгруппой всех ориентируемых симметрий атома, а для неориентируемого — со всей группой симметрий $Aut(X)$. При этом для ориентируемого атома отображение σ_z из множества всех ориентируемых симметрий $Par(X)$ в множество всех его отражающих симметрий $\sigma_z(g) = zg$, $g \in Par(X)$ задает биекцию между этими множествами.

Приведем полный список классов эквивалентности максимально симметричных атомов на поверхностях малого рода (см. [6]):

- на сфере есть две двойственные друг другу серии классов атомов C_n и D_n, $n \in \mathbb{N}$, причем атом класса C_n состоит из двух белых и n черных клеток; и пять выделенных атомов, отвечающих платоновым телам, причем усеченные куб P_2 и октаэдр P_3 и усеченные додекаэдр P_4 и икосаэдр P_5 образуют пары двойственных, а усеченный тетраэдр P_1 самодвойственный;

- на проективной плоскости существуют две двойственные друг другу серии $\tilde{C}_n$ и $\tilde{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, получаемые факторизацией по антиподальной инволюции сферических атомов C_{2n} и D_{2n}, причем атом класса $\tilde{C}_n$ состоит из одной белой и n черных клеток; и четыре выделенных атома $\tilde{P}_i$, $2 \leq i \leq 5$, получающихся факторизацией по антиподальной инволюции всех платоновых тел кроме тетраэдра, не обладающего центральной симметрией;

- на торе существуют три бесконечные серии, отвечающие разбиениям на квадраты (серия самодвойственных атомов), треугольники и шестиугольники (серии двойственных друг другу атомов);

- на бутылке Клейна максимально симметричных атомов нет.

Отметим следующие совпадения: среди сферических атомов $C_2 = D_2$, среди атомов на проективной плоскости $\tilde{C}_1 = \tilde{D}_1$. Остальные атомы попарно различны.

В дальнейшем для малых родов мы будем говорить только об атомах на сфере и проективной плоскости. Случаи торических атомов рассмотрены в [1] и ввиду отсутствия атомов на бутылке Клейна в этой работе не понадобятся.

Определение 3.13. Для ориентируемого атома X инволютивная симметрия без неподвижных точек, меняющая ориентацию и коммутирующая со всеми остальными симметриями называется **центральной**. Атом, допускающий центральную симметрию, также называется центральным.

Например, обертка неориентируемого атома является центральным атомом, а переставляющая листы инволюция — центральной симметрией. Ниже будет показано, что всякий центральный атом является оберткой некоторого неориентируемого атома.

Из определения сразу же следует, что центральная симметрия вместе с тождественным отображением образует нормальную подгруппу в $Aut(X)$.

Любой центральный атом является отражаемым. Обратное, вообще говоря, неверно — усеченный тетраэдр отражаем, но не обладает центральной симметрией.

4 Регулярные накрытия

Пусть $f : X \to Y$ — накрытие линейно связных топологических пространств, $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0)$. Говорят, что накрытие f **отвечает подгруппе** $\pi = f_\#(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(Y, y_0)$, где $f_\#$ — индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп.

Определение 4.1. Пусть $Aut(f^{-1}(y_0))$ — группа биекций множества $f^{-1}(y_0)$. Обозначим через $\Omega(Y, y_0)$ пространство замкнутых кривых (петель) в Y с концами в точке y_0. Рассмотрим множество $f^{-1}(y_0)$. Каждый гомотопический класс $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ петли $\gamma \in \Omega(Y, y_0)$ индуцирует следующую биекцию этого множества: каждой точке $x \in f^{-1}(y_0)$ ставится в соответствие конец кривой $\tilde{\gamma}$, являющейся поднятием γ на X при накрытии f. **Гомоморфизмом монодромии** накрытия f называется гомоморфизм $\rho\colon \pi_1(Y, y_0) \to Aut(f^{-1}(y_0))$, переводящий $[\gamma]$ в соответствующую ему биекцию множества $f^{-1}(y_0)$. Образ $H \subset Aut(f^{-1}(y_0))$ этого гомоморфизма называется **группой монодромии** накрытия f, образ элемента $[\gamma]$ — **монодромией** при обходе вдоль петли γ, а индуцированный эпиморфизм $\rho\colon \pi_1(Y, y_0) \to H$ — **эпиморфизмом монодромии**.

Накрытие называется **регулярным**, если подгруппа π нормальна. **Изоморфизмом** накрытий $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$ называется такой гомеоморфизм $h\colon X_1 \to X_2$, что $f_1 = f_2 \circ h$. **Автоморфизмом** накрытия f называется его изоморфизм с самим собой. Для регулярного накрытия f выполнено $\pi = \ker \rho$, и монодромия при обходе вдоль любой петли (однозначно) продолжается до автоморфизма накрытия, а потому группа монодромии допускает естественные изоморфизмы $H \simeq Aut(f) \simeq \pi_1(Y, y_0)/\pi$, где $Aut(f)$ – группа автоморфизмов накрытия f, называемая в этом случае **группой регулярного накрытия** f.

Замечание 4.2. Два накрытия $f_1 : X_1 \to Y$ и $f_2 : X_2 \to Y$ изоморфны тогда и только тогда, когда отвечающие им подгруппы $\pi_1, \pi_2 \subset \pi_1(Y, y_0)$ сопряжены. Поэтому для регулярных накрытий $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$ следующие утверждения равносильны:

- накрытия f_1 и f_2 изоморфны;
- накрытия f_1 и f_2 отвечают одной и той же подгруппе $\pi_1 = \pi_2 \subset \pi_1(Y, y_0)$;
- соответствующие эпиморфизмы монодромии $\rho_i : \pi_1(Y, y_0) \to H_i$, $i = 1, 2$, изоморфны, т.е. существует изоморфизм $\lambda\colon H_1 \to H_2$, такой что $\lambda\rho_1 = \rho_2$.

Следующее утверждение практически дословно повторяет аналогичное утверждение для ориентируемых симметрий. Доказательства пунктов 4, 5, 6, 7, 8 сохраняются при замене ребер на полуребра и в остальном приведены без изменений.

Утверждение 4.3. Пусть X — атом (как поверхность с краем) и $G = Aut(X)$ — группа его симметрий. Пусть $H \subset G$ — подгруппа, свободно действующая на вершинах и ребрах атома X. При указанных выше условиях справедливы следующие утверждения:

1. Факторпространство $Y = X/H$ имеет единственную структуру атома, для которой проекция $f\colon X \to Y$ является накрытием.

   ◀ Подгруппа H свободно действует на множестве вершин и ребер X, следовательно она свободно действует на всем X. Тогда на Y имеется граф, являющийся образом одномерного графа $\Gamma(X)$ при проекции f, а дополнение к этому графу распадается на проколотые двумерные клетки, на которых индуцирована раскраска. Это и задает структуру атома на Y. То, что f является накрытием, следует из построения структуры атома на Y.

   Более того, если атом X ориентируем, то атом Y ориентируем тогда и только тогда, когда H не содержит отражающих симметрий. В этом случае в одном смежном классе $[g] = gH \in X/H$ все симметрии будут либо сохранять, либо обращать ориентацию, и ее можно будет индуцировать на Y. ▶

2. Проекция f является регулярным накрытием $X \to Y$, и ее группа монодромии изоморфна H.

   ◀ Из того, что группа H свободно действует на X, следует, что проекция f является регулярным накрытием и что H изоморфна группе монодромии этого накрытия. ▶

3. Если $H \lhd G$ — нормальная подгруппа, то имеется мономорфизм $G/H \hookrightarrow Aut(Y)$.

   ◀ Когда подгруппа H нормальна, любая симметрия $g \in G = Aut(X)$ определяет корректное отображение $\bar{g}\colon X/H \to X/H$ по формуле $\bar{g}(Hx) = Hg(x)$, $x \in X$. Отображение $\bar{g}$ является симметрией атома Y. Поэтому задан гомоморфизм групп $G \to Aut(Y)$, ядром которого является подгруппа H. Значит, имеется мономорфизм $G/H \hookrightarrow Aut(Y)$. ▶

4. Если X является максимально симметричным, то $H \lhd G$ тогда и только тогда, когда Y является максимально симметричным.

   ◀ Пусть X максимально симметричен и $H \lhd G$. G действует транзитивно на множестве полуребер атома X, а потому образ мономорфизма $G/H \hookrightarrow Aut(Y)$ действует транзитивно на множестве полуребер атома Y. Значит, атом Y максимально симметричен.

   Пусть X и Y — максимально симметричные атомы. Пусть $g \in Aut(X)$ и e — полуребро в X. Тогда $f(e)$ и $f(g(e))$ — полуребра в Y. Так как Y максимально симметричен, то существует единственная симметрия $\bar{g}_e \in Aut(Y)$, такая что $\bar{g}_e(f(e)) = f(g(e))$. Имеет место равенство накрытий $\bar{g}_e \circ f = f \circ g$. Поскольку f сюръективно, то накрытие $\bar{g}_e$ не зависит от выбора полуребра e, обозначим его как $\bar{g}$. Пусть $g \in G$ и $h \in H$, покажем, что $g \circ h \circ g^{-1} \in H$. Для этого достаточно проверить, что $f \circ g \circ h \circ g^{-1} = f$. В самом деле,

   $$f \circ g \circ h \circ g^{-1} = \bar{g} \circ f \circ h \circ g^{-1} = \bar{g} \circ f \circ g^{-1} = \bar{g} \circ \overline{g^{-1}} \circ f = \bar{g} \circ \bar{g}^{-1} \circ f = f.$$

   Таким образом, H — нормальная подгруппа G. ▶

5. Если X и Y являются максимально симметричными атомами, то $Aut(Y) \simeq G/H$.

   ◀ По предыдущему пункту $H \lhd G$, а по пункту 3 имеется мономорфизм $G/H \hookrightarrow Aut(Y)$. Группа G транзитивно действует на полуребрах атома X, значит действие G/H на Y, индуцированное действием G на X, также транзитивно на полуребрах атома Y. Поэтому мономорфизм $G/H \hookrightarrow Aut(Y)$ является эпиморфизмом. ▶

6. Если X максимально симметричен, то любое накрытие $f' : X \to Y'$ является регулярным, причем его группой накрытия является некоторая подгруппа $H' \subset G$, свободно действующая на вершинах и ребрах X.

   ◀ Определим подмножество симметрий $H' = \{h \in Aut(X) \mid f' \circ h = f'\}$. Тогда H' является подгруппой в G: если $f' \circ h_1 = f'$ и $f' \circ h_2 = f'$, то $f' \circ h_1 \circ h_2 = f' \circ h_2 = f'$. Группа H' свободно действует на множестве вершин и ребер атома X, так как f' не имеет ветвлений в вершинах и центрах ребер атома. Пусть e — полуребро атома Y'. Группа H' транзитивно действует на множестве полуребер атома X, проектирующихся на e при накрытии f', поскольку для любой пары полуребер e', e'' атома X, таких что $f'(e') = f'(e'') = e$, имеется единственная симметрия $h \in Aut(X)$, переводящая e' в e'', а значит $f' \circ h(e') = f'(e') = e$, следовательно, $f' \circ h = f'$ по утверждению 3.4, т.е. $h \in H'$. ►

7. Если Y — максимально симметричный атом, то для любых двух накрытий $f_1, f_2 : X \to Y$ существует единственная симметрия $g \in Aut(Y)$, такая что $f_2 = g \circ f_1$.

   ◄ Пусть e — некоторое полуребро атома X. Так как атом Y максимально симметричен, существует симметрия $g \in Aut(Y)$, переводящая полуребро $f_1(e)$ в полуребро $f_2(e)$, т.е. $f_2(e) = g \circ f_1(e)$. Тогда $f_2 = g \circ f_1$ по утверждению 3.4. Симметрия g единственна, так как f_1 сюръективно. ►

8. Если $H \lhd G$ — нормальна, то X максимально симметричен тогда и только тогда, когда Y максимально симметричен и $Aut(Y) \simeq G/H$.

   ◄ Необходимость следует из пунктов 4 и 5. Докажем достаточность. Пусть атом Y максимально симметричен, $H \lhd G$ и $G/H = Aut(Y)$. Покажем, что атом X максимально симметричен. Пусть e_1, e_2 — два полуребра атома X. В силу максимальной симметричности атома Y существует симметрия $\bar{g} \in Aut(Y)$, переводящая полуребро $f(e_1)$ в полуребро $f(e_2)$. В группе симметрий G найдется элемент g, отображающийся в $\bar{g}$ при проекции $G \to G/H = Aut(Y)$, т.е. удовлетворяющий соотношению $f \circ g = \bar{g} \circ f$. Симметрия g переводит полуребро e_1 в полуребро e_2', при этом $f(e_2') = f(g(e_1)) = \bar{g}(f(e_1)) = f(e_2)$, т.е. полуребра e_2 и e_2' проектируются в одно полуребро атома Y. Так как накрытие f регулярно по пункту 2, существует симметрия $h \in H$, такая что $h(e_2') = e_2$. Тогда симметрия $h \circ g$ переводит полуребро e_1 в полуребро e_2. Таким образом, группа G транзитивно действует на множестве полуребер атома X, и атом X максимально симметричен. ►

Замечание 4.4. Для атома как поверхности без края утверждение 4.3 также верно, а в доказательствах пунктов 1 и 2 вместо X и Y надо рассматривать X_0, получаемый из X выкалыванием центров клеток, и $Y_0 = X_0/H$.

Рассмотрим некоторый центральный максимально симметричный атом X. По пунктам 1 и 4 утверждения 4.3 факторпростанство $Y = X/H$, где H — подгруппа, порожденная центральной симметрией, является неориентируемым максимально симметричным атомом, причем атом X является его оберткой. Наоборот, по пункту 8 для любого максимально симметричного неориентируемого атома Y его обертка X также является максимально симметричной.

Определение 4.5. Максимально симметричный атом X называется **приводимым**, если существует максимально симметричный атом Y и накрытие $X \to Y$, не являющееся изоморфизмом. Ориентируемый атом X называется **ориентируемо приводимым**, если Y ориентируем.

5 Симметричные накрытия

Пусть X — максимально симметричный атом и $H \lhd Aut(X)$ — нормальная подгруппа, свободно действующая на вершинах и ребрах атома X. Это равносильно тому, что подгруппа H нормальна и не содержит полуоборот xy и отражение z. Тогда X/H тоже является максимально симметричным атомом по пункту 4 утверждения 4.3.

Определение 5.1. Пусть Y — атом. Накрытие $f : X \to Y$, являющееся композицией проекции $X \to X/H$ и любого изоморфизма атомов $X/H \to Y$, назовем **симметричным накрытием**.

Если атомы и накрытие являются ориентируемыми, и изоморфизм сохраняет ориентацию, либо и накрытие, и изоморфизм меняют ориентацию, то симметричное накрытие также называется **ориентируемым**.

Симметричные накрытия регулярны по пункту 6 утверждения 4.3.

Утверждение 5.2. Если X и Y — максимально симметричные атомы, то:

1. любое накрытие $f\colon X \to Y$ является симметричным;
2. если $f_1, f_2\colon X \to Y$ — накрытия, то существует $g = Aut(Y)$, такой что $f_2 = g \circ f_1$

◀ Это непосредственно следует из пунктов 4, 6 и 7 утверждения 4.3. ▶

Отсюда следует, что накрытия максимально симметричных атомов в точности являются симметричными накрытиями.

Утверждение 5.3. (Единственность симметричного накрытия). Пусть $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$ — симметричные накрытия и атомы X_1 и X_2 изоморфны. Тогда накрытия f_1 и f_2 изоморфны, т.е. существует изоморфизм $g\colon X_1 \to X_2$, такой что $f_1 = f_2 \circ g$.

◀ Пусть $g_0\colon X_1 \to X_2$ — изоморфизм атомов X_1 и X_2. Фиксируем некоторое полуребро e атома X_1. Положим $e' = g_0(e)$ и пусть полуребро e'' атома X_2 проектируется в полуребро $f_1(e)$ при отображении f_2. Так как атом X_2 максимально симметричен, существует $h \in Aut(X_2)$, переводящее полуребро e' в полуребро e''. Композиция $g = h \circ g_0$ является изоморфизмом атомов X_1 и X_2, при этом $f_2 \circ g(e) = f_2(e'') = f_1(e)$, откуда в силу утверждения 3.4 $f_1 = f_2 \circ g$. ▶

Утверждение 5.4. Пусть Y — максимально симметричный атом, X — связное топологическое пространство и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1. f — конечнолистное разветвленное накрытие, точки ветвления которого находятся в центрах клеток атома Y;
2. разветвленное накрытие f регулярно;
3. (*свойство эквивариантности* f) для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$ (здесь x, y, z — образующие группы $Aut(Y)$ симметрий атома Y), а значит, для любого $g \in Aut(Y)$, существует непрерывное отображение $\tilde{g}\colon X \to X$, такое что $f \circ \tilde{g} = g \circ f$.

Тогда атом X максимально симметричен, а f — симметричное накрытие.

Как само утверждение, так и доказательство повторяют аналогичное утверждение и его доказательство для ориентируемых симметрий, приведенные в [1], с заменой стандартных образующих в группе автоморфизмов на неориентируемые.

Дальнейшие определения вводятся абсолютно аналогично случаю ориентируемых симметрий в [1]. Мы хотим определить гомоморфизм монодромии уже для симметричных накрытий.

Будем рассматривать атом как поверхность с краем. Возьмем атом Y, $y_0 \in Y$. В начале раздела 4 мы определяли $\Omega(Y, y_0)$ как пространство петель в Y с началом в y_0, и $\pi_1(Y, y_0)$ как группу классов гомотопической эквивалентности этих петель. Для любого $g \in Aut(Y)$ и любого пути γ, соединяющего в Y точку y_0 с $g(y_0)$, рассмотрим изоморфизм $g_\#\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, g(y_0))$, который индуцирован отображением g, и изоморфизм $\gamma_\# : \pi_1(Y, g(y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$, который определяется формулой $[\omega] \mapsto [\gamma \cdot \omega \cdot \gamma^{-1}]$, $\omega \in \Omega(Y, g(y_0))$. Получаем автоморфизм

$$\gamma_\# \circ g_\# \in Aut(\pi_1(Y, y_0)).$$

Рассмотрим класс $(\gamma_\# \circ g_\#) \cdot Inn(\pi_1(Y, y_0)) \in Out(\pi_1(Y, y_0))$ автоморфизма $\gamma_\# \circ g_\#$ в группе $Out(\pi_1(Y, y_0)) = Aut(\pi_1(Y, y_0))/Inn(\pi_1(Y, y_0))$ внешних автоморфизмов $\pi_1(Y, y_0)$, где для любой группы G $Inn(G) = \{i_g \in Aut(G) \,|\, i_g(h) = ghg^{-1}, g, h \in G\}$ — группа ее внутренних автоморфизмов. Заметим, что для любого другого пути γ', соединяющего y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma'_\# \circ g_\# = i_{[\gamma' \cdot \gamma^{-1}]} \circ \gamma_\# \circ g_\#$ — они отличаются действием внутреннего автоморфизма, так что класс $(\gamma_\# \circ g_\#) Inn(\pi_1(Y, y_0))$ не зависит от выбора пути γ. Таким образом, для любого атома Y мы получаем гомоморфизм

$$\psi\colon Aut(Y) \to Out(\pi_1(Y, y_0)), \quad g \mapsto (\gamma_\# \circ g_\#)\, Inn(\pi_1(Y, y_0)).$$

Из построения ψ вытекает, что это — гомоморфизм групп. Беря композицию ψ с естественным гомоморфизмом $Out(\pi_1(Y, y_0)) \to Aut(H_1(Y; \mathbb{Z}))$, получаем гомоморфизм

$$\tilde{\psi}\colon Aut(Y) \to Aut(H_1(Y; \mathbb{Z})).$$

Для атома Y как поверхности с краем атомом $\tilde{Y}$ будем называть соответствующий ему атом как поверхность без края. Следующее утверждение и следствия из него повторяют соответствующие утверждения для ориентируемых симметрий с заменой стандартных образующих в группе автоморфизмов; доказательства повторяются дословно и здесь приводиться не будут.

Утверждение 5.5. Пусть $\tilde{Y}$ — максимально симметричный атом, $\tilde{X}$ — связное топологическое пространство, $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$ — накрытие с ветвлениями в центрах клеток атома, и $f = \tilde{f}|_X : X \to Y$ — соответствующее неразветвленное накрытие, где $X = \tilde{f}^{-1}(Y)$. Обозначим $\pi = f_\#(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(Y, y_0)$, $f(x_0) = y_0$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- отображение f является симметричным накрытием;
- для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$, а значит, для любого $g \in Aut(Y)$, и для любого пути γ, соединяющего в Y точку y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma_\# \circ g_\#(\pi) = \pi$;
- для любого $g \in Aut(Y)$ и любого автоморфизма $\eta \in Aut(\pi_1(Y, y_0))$, такого, что $\psi(g) = \eta \cdot Inn(\pi_1(Y, y_0))$, выполнено $\eta(\pi) = \pi$;
- f регулярно (т.е. π нормальна) и для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$, а значит, для любого $g \in Aut(Y)$, существует путь γ, соединяющий в Y точку y_0 с $g(y_0)$, такой что $\gamma_\# \circ g_\#(\pi) = \pi$;
- f регулярно (т.е. π нормальна) и для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$, а значит, для любого $g \in Aut(Y)$, существует автоморфизм $\eta \in Aut(\pi_1(Y, y_0))$, такой что $\eta(\pi) = \pi$ и $\psi(g) = \eta \cdot Inn(\pi_1(Y, y_0))$.

Следствие 5.6. Пусть Y — максимально симметричный атом, $\rho : \pi_1(Y, y_0) \to H$ — некоторый эпиморфизм в конечную группу H и $f\colon X \to Y$ — отвечающее подгруппе $\ker\rho \lhd \pi_1(Y, y_0)$ регулярное накрытие. Тогда следующие условия равносильны:

1. f является симметричным накрытием;
2. (свойство эквивариантности ρ) для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$, а значит, для любого $g \in Aut(Y)$, и для некоторого (а значит, любого) пути γ, соединяющего в Y точку y_0 с $g(y_0)$, корректно определен автоморфизм $F(g, \gamma) \in Aut(H)$, такой что $\rho \circ \gamma_\# \circ g_\# = F(g, \gamma) \circ \rho$, где автоморфизм $\gamma_\# \circ g_\#$ определяется формулой $\gamma_\# \circ g_\#([\omega]) = [\gamma \cdot (g \circ \omega) \cdot \gamma^{-1}]$;
3. для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$, а значит, для любого $g \in Aut(Y)$, и для некоторого (а значит, любого) пути γ, соединяющего в Y точку y_0 с $g(y_0)$, выполнено $\gamma_\# \circ g_\#(\ker\rho) = \ker\rho$.

Определение 5.7. Группа H в этом следствии называется **группой монодромии** симметричного накрытия f, эпиморфизм $\rho\colon \pi_1(Y, y_0) \to H$ — **эпиморфизмом монодромии** этого накрытия, а элемент $\rho([\gamma]) \in H$ — **монодромией** при обходе вдоль петли $\gamma \in \Omega(Y, y_0)$.

Следствие 5.8. Пусть Y — максимально симметричный атом, H — конечная абелева группа, $\bar{\rho}: H_1(Y;\mathbb{Z}) \to H$ — некоторый эпиморфизм и $f: X \to Y$ — регулярное накрытие, отвечающее подгруппе $\ker\bar{\rho} \subset H_1(Y;\mathbb{Z})$. Тогда f является симметричным накрытием в том и только том случае, когда эпиморфизм $\bar{\rho}$ эквивариантен (относительно действия $\overline{\psi}: Aut(Y) \to Aut(H_1(Y;\mathbb{Z}))$ и некоторого действия группы $Aut(Y)$ на H), т.е. существует гомоморфизм групп

$$\overline{\psi}_\rho\colon Aut(Y) \to Aut(H),$$

такой что $\bar{\rho}\circ(\overline{\psi}(g)) = \overline{\psi}_\rho(g)\circ\bar{\rho}$ для любого элемента $g \in \{x, y, z\} \subset Aut(Y)$ (а значит, для любого $g \in Aut(Y)$). Гомоморфизм $\overline{\psi}_\rho$ назовем **сквозным (левым) действием** группы $Aut(Y)$ на группе монодромии H.

Пусть Y — максимально симметричный атом (теперь уже как поверхность без края) рода $g \geq 0$, имеющий S белых и S' черных клеток. Пусть $e \subset Y$ — некоторая белая клетка, e' — смежная с ней черная клетка, ξ — инцидентный им флаг, $A \in \xi$ — общая вершина этих клеток, x, y, $z \in Aut(Y)$ — связанные с ξ образующие группы $Aut(Y)$. Пусть $h_1, ..., h_S$, $h'_1, ..., h'_{S'} \in Par(Y)$ (см. замечание 3.12) — такой набор симметрий атома, что $h_i(e)$, $h'_j(e')$ — набор всех белых и всех черных клеток атома Y (с учетом введенной на них ориентации). Пусть Y_0 - пространство, полученное из Y выкалыванием центров клеток, $[\alpha] \in H_1(Y_0;\mathbb{Z})$ — класс гомологий положительно ориентированной петли α вокруг центра клетки e, $[\beta] \in H_1(Y_0;\mathbb{Z})$ — вокруг центра клетки e'. Пусть $\gamma_1, ..., \gamma_{2g}$ — набор замкнутых путей на атоме Y, не проходящих через центры двумерных клеток и задающих набор образующих группы $H_1(Y;\mathbb{Z})$.

Пусть H — конечная абелева группа. В теореме ниже мы докажем, что симметричные накрытия $f\colon X \to Y$ с группой монодромии H (по определению 5.7) классифицируются наборами

$$(k, l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g}), \qquad k, l, m \in Aut(H), \quad q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H,$$

и наборы рассматриваются с точностью до некоторого действия группы $Aut(H)$ (см. формулировку теоремы 5.10). При этом, во введенных выше обозначениях, $q = \bar{\rho}([\alpha])$ и $r = \bar{\rho}([\beta])$ — монодромии при обходе вокруг центров клеток e и e', $c_t = \bar{\rho}([\gamma_t])$ — монодромия при обходе вдоль кривой γ_t, $1 \leq t \leq 2g$, $k = \overline{\psi}_\rho(x)$, $l = \overline{\psi}_\rho(y)$ и $m = \overline{\psi}_\rho(z)$ — сквозные действия симметрий $x, y, z \in Aut(Y)$ на группе H.

Замечание 5.9. Можно показать, что гомоморфизм $\tau\colon \mathbb{Z}^{S+S'+2g} \to H_1(Y_0;\mathbb{Z})$, переводящий стандартный набор образующих группы $\mathbb{Z}^{S+S'+2g}$ в набор элементов

$$[h_i\circ\alpha], \quad 1 \leq i \leq S, \quad [h'_j\circ\beta], \quad 1 \leq j \leq S', \quad [\gamma_t], \quad 1 \leq t \leq 2g, \tag{1}$$

сюрьективен и его ядро $\ker\tau$ есть нетривиальная циклическая подгруппа в $\mathbb{Z}^{S+S'+2g}$. Рассмотрением образующей этого ядра получаем нетривиальное соотношение между элементами 1 в $H_1(Y_0;\mathbb{Z})$:

$$\sum_{i=1}^{S}\mu_i[h_i\circ\alpha] + \sum_{j=1}^{S'}\mu'_j[h'_j\circ\beta] + \sum_{t=1}^{2g}\nu_t[\gamma_t] = 0 \in H_1(Y_0;\mathbb{Z}),$$

где $\mu_i, \mu'_j, \nu_t \in \mathbb{Z}$ - ненулевой набор целых чисел. Если Y ориентируем, то $\mu_1 = \dots = \mu_S = \mu'_1 = \dots = \mu'_{S'} = \pm1$ и $\nu_1 = \dots = \nu_{2g} = 0$ (см. доказательство пункта 2 теоремы 4.15 в [1]), а если Y неориентируем, то элемент $\sum_{t=1}^{2g}\nu_t[\gamma_t]$ определяет соотношение в $H_1(Y;\mathbb{Z})$.

Сформулируем это утверждение строго.

Теорема 5.10. *В обозначениях, введенных выше, справедливы следующие утверждения.*

(А) *Пусть* $\bar{\rho} : H_1(Y_0;\mathbb{Z}) \to H$ *— эпиморфизм и* $f : X \to Y$ *— симметричное накрытие с эпиморфизмом монодромии* $\bar{\rho}$ *(см. определение 5.7). Пусть* $\overline{\psi}_\rho : Aut(Y) \to Aut(H)$ *— сквозное действие группы симметрий* $Aut(Y)$ *на группе* H*. Тогда автоморфизмы* $k = \overline{\psi}_\rho(x)$, $l = \overline{\psi}_\rho(y)$, $m = \overline{\psi}_\rho(z) \in Aut(H)$ *и элементы*

$$q = \bar{\rho}([\alpha]), \quad r = \bar{\rho}([\beta]), \quad c_1 = \bar{\rho}([\gamma_1]), \ldots, c_{2g} = \bar{\rho}([\gamma_{2g}]) \in H \tag{2}$$

удовлетворяют следующим условиям:

1. $k(q) = m(q) = q^{-1}$, $l(r) = m(r) = r^{-1}$, $k^2 = l^2 = (kl)^2 = m^2 = id_H$;
2. $\left(\prod_{i=1}^{S} \overline{\psi}_\rho(h_i)(q^{\mu_i})\right) \left(\prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r^{\mu'_j})\right) \prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = 1 \in H$;
3. $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) = \overline{\psi}_\rho(h_i)(q)$, $1 \le i \le S$,
   $\bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) = \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r)$, $1 \le j \le S'$,
   $\bar{\rho}([\gamma_t]) = c_t$, $1 \le t \le 2g$;
4. $S + S' + 2g$ *элементов* $\overline{\psi}_\rho(h_1)(q), \ldots, \overline{\psi}_\rho(h_S)(q)$, $\overline{\psi}_\rho(h'_1)(r), \ldots, \overline{\psi}_\rho(h'_{S'})(r)$, $c_1 \ldots, c_{2g} \in H$ *порождают группу* H;
5. $k(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([x \circ h_i \circ \alpha])$, $k(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([x \circ h'_j \circ \beta])$, $k(c_t) = \bar{\rho}([x \circ \gamma_t])$;
   $l(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([y \circ h_i \circ \alpha])$, $l(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([y \circ h'_j \circ \beta])$, $l(c_t) = \bar{\rho}([y \circ \gamma_t])$;
   $m(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([z \circ h_i \circ \alpha])$, $m(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([z \circ h'_j \circ \beta])$, $m(c_t) = \bar{\rho}([z \circ \gamma_t])$,
   $1 \le i \le S$, $1 \le j \le S'$, $1 \le t \le 2g$.

При этом набор

$$(k, l, m, q, r, c_1, \ldots, c_{2g}), \qquad k, l, m \in Aut(H), \quad q, r, c_1, \ldots, c_{2g} \in H, \tag{3}$$

определен симметричным накрытием f *(независимо от выбора эпиморфизма монодромии* $\bar{\rho}$*) с точностью до преобразований*

$$(k, l, m, q, r, c_1, \ldots, c_{2g}) \mapsto (uku^{-1}, ulu^{-1}, umu^{-1}, u(q), u(r), u(c_1), \ldots, u(c_{2g})), \tag{4}$$

где $u \in Aut(H)$*. Если два симметричных накрытия с группой монодромии* H *изоморфны, то отвечающие им наборы получаются друг из друга такими преобразованиями.*

(Б) *Пусть элементы* $q, r, c_1, \ldots, c_{2g} \in H$ *и автоморфизмы* $k, l, m \in Aut(H)$ *удовлетворяют следующему условию:*

6. существует гомоморфизм $\overline{\psi}_\rho : Aut(Y) \to Aut(H)$*, определенный на образующих* $x, y, z \in Aut(Y)$ *формулами* $\overline{\psi}_\rho(x) = k$, $\overline{\psi}_\rho(y) = l$, $\overline{\psi}_\rho(z) = m$ *(в частности,* $\overline{\psi}_\rho(\phi^2) = id_H$, $\phi = x, y, z$*).*

Пусть выполнены также условия 4,5 выше, где в условии 5 через $\bar{\rho}\colon H_1(Y_0;\mathbb{Z}) \to H$ *обозначен гомоморфизм групп, определенный на образующих* $[h_1 \circ \alpha], \ldots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \ldots, [h'_{S'} \circ \beta]$, $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_{2g}]$ *группы* $H_1(Y_0;\mathbb{Z})$ *формулами из свойства 3 выше. Такой гомоморфизм существует в силу свойства 2 и замечания 5.9. Тогда выполнено* (2) *и существует симметричное накрытие* $f\colon X \to Y$*, для которого гомоморфизмы* $\bar{\rho}, \overline{\psi}_\rho$ *являются эпиморфизмом монодромии и сквозным действием на группе монодромии, соответственно.*

Любые два таких накрытия изоморфны. Для любого $u \in Aut(H)$ *набор*

$$(uku^{-1}, ulu^{-1}, umu^{-1}, u(q), u(r), u(c_1), \ldots, u(c_{2g}))$$

также удовлетворяет условиям 4–6, а отвечающее этому набору симметричное накрытие изоморфно накрытию f.

Доказательство теоремы приводится полностью. Доказательства свойств 2, 3, 4 дословно повторяют аналогичные доказательства для ориентируемых симметрий в [1] и приведены без изменений. Разумеется, во всех пунктах используется расширенный набор элементов — k, l, m, состоящий из образов стандартных образующих x, y, z неориентируемой группы симметрий вместо образов ориентируемых образующих a, b ($a = (xz)^{\pm 1}, b = (xy)^{\pm 1}$).

$\square$ Пусть $f_1 \colon X_1 \to Y$ — симметричное накрытие, изоморфное f (возможно, совпадающее с f). Пусть $\rho_1 \colon \pi_1(Y_0, y_0) \to H_1$ — его эпиморфизм монодромии. Согласно определению 4.1 и замечанию 4.2, существует изоморфизм $\sigma : H \to H_1$, такой что $\sigma\rho = \rho_1$. В частности, группа монодромии H_1 абелева и изоморфна H, а потому эпиморфизм монодромии сводится к эпиморфизму $\bar{\rho}_1 : H_1(Y; \mathbb{Z}) \to H_1$, и выполнено $\sigma\bar{\rho} = \bar{\rho}_1$. Значит, $\overline{\psi}_{\rho_1}(g) \circ \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1 \circ (\overline{\psi}(g)) = (\sigma\bar{\rho}) \circ (\overline{\psi}(g)) = \sigma \circ (\overline{\psi}_\rho(g)) \circ \bar{\rho} = \sigma \circ (\overline{\psi}_\rho(g)) \circ \sigma^{-1} \circ \bar{\rho}_1$, $g \in Aut(Y)$. Из единственности сквозного действия получаем $\overline{\psi}_{\rho_1}(g) = \sigma \circ (\overline{\psi}_\rho(g)) \circ \sigma^{-1}$, $g \in Aut(Y)$. Отсюда следует, что при $H_1 = H$ набор, отвечающий согласно (А) накрытию f_1, получен преобразованием (4) из набора (3). Это доказывает последнее утверждение в (А). Так как автоморфизм $\sigma \in Aut(H)$ — любой, это доказывает также утверждение об изоморфности накрытий в (Б). Докажем остальные утверждения.

(А) Докажем свойства 1–5.

3) В силу эквивариантности эпиморфизма монодромии $\bar{\rho} \colon H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \to H$ (по следствию 5.8), для любой симметрии $h \in Aut(Y)$ и любой петли $\gamma \in \Omega(Y_0)$ выполнено $\overline{\psi}_\rho(h)(\bar{\rho}([\gamma])) = (\overline{\psi}_\rho(h)) \circ \bar{\rho}([\gamma]) = \bar{\rho} \circ (\overline{\psi}(h))([\gamma]) = \bar{\rho}([h \circ \gamma]) \in H$. Отсюда получаем свойство 3: $c_t = \bar{\rho}([\gamma_t]), 1 \leq t \leq 2g$,

$$\overline{\psi_\rho}(h_i)(q) = \overline{\psi_\rho}(h_i)(\bar{\rho}([\alpha])) = \bar{\rho}([h_i \circ \alpha]), \quad 1 \leq i \leq S,$$

$$\overline{\psi_\rho}(h'_j)(r) = \overline{\psi_\rho}(h'_j)(\bar{\rho}([\beta])) = \bar{\rho}([h'_j \circ \beta]), \quad 1 \leq j \leq S'.$$

1) Так как симметрии x и z переводят клетку e в ее отражение, т.е. переводят клетку в себя с заменой локальной ориентации, то индуцированные автоморфизмы гомологий $\overline{\psi}(x)$ и $\overline{\psi}(y) \in Aut(H_1(Y_0; \mathbb{Z}))$ переводят класс гомологий $[\alpha] \in H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ петли α в класс гомологий $[\alpha]^{-1}$ петли α^{-1}, т.е. $\overline{\psi}(x)([\alpha]) = [x \circ \alpha] = \overline{\psi}(z)([\alpha]) = [z \circ \alpha] = [\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1}$. Отсюда имеем

$$k(q) = \overline{\psi}_\rho(x)(\bar{\rho}([\alpha])) = \bar{\rho}([x \circ \alpha]) = \bar{\rho}([\alpha]^{-1}) = q^{-1}.$$

$$m(q) = \overline{\psi}_\rho(z)(\bar{\rho}([\alpha])) = \bar{\rho}([z \circ \alpha]) = \bar{\rho}([\alpha]^{-1}) = q^{-1}.$$

Второе соотношение доказывается аналогично, так как y и z переводят клетку e' в ее отражение.

Так как $x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = 1 \in Aut(Y)$, то и $k^2 = \overline{\psi}_\rho(x^2) = l^2 = \overline{\psi}_\rho(y^2) = m^2 = \overline{\psi}_\rho(z^2) = (kl)^2 = \overline{\psi}_\rho((xy)^2) = id_H$, что доказывает последнее соотношение свойства 1.

4) Так как группа $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ порождена элементами $[h_i \circ \alpha]$, $[h'_j \circ \beta]$, $[\gamma_t]$ ($1 \leq i \leq S$, $1 \leq j \leq S'$, $1 \leq t \leq 2g$), а $\bar{\rho} \colon H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \to H$ — эпиморфизм, то группа H порождена элементами $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) = \overline{\psi}_\rho(h_i)(q)$, $\bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) = \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r)$, $\bar{\rho}([\gamma_t]) = c_t$. Последние равенства следуют из доказанного выше свойства 3.

2) Из свойства 3 и замечания 5.9 имеем

$$\left(\prod_{i=1}^{S} \overline{\psi}_\rho(h_i)(q^{\mu_i})\right) \left(\prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r^{\mu'_j})\right) \prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = \bar{\rho}\left(\sum_{i=1}^{S} \mu_i[h_i \circ \alpha] + \sum_{j=1}^{S'} \mu'_j[h'_j \circ \beta] + \sum_{t=1}^{2g} \nu_t[\gamma_t]\right) = \bar{\rho}(0) = 1 \in H.$$

Здесь $[\gamma]$ обозначает класс гомологий петли $\gamma \in \Omega(Y_0)$.

5) Имеем:

$$k(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \overline{\psi}_\rho(x)(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha])) = \bar{\rho}([x \circ h_i \circ \alpha]),$$

$$k(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \overline{\psi}_\rho(x)(\bar{\rho}([h'_j \circ \beta])) = \bar{\rho}([x \circ h'_j \circ \beta]),$$

$$k(c_t) = \overline{\psi}_\rho(x)(\bar{\rho}([\gamma_t])) = \bar{\rho}([x \circ \gamma_t])$$

и аналогично для l и m, с заменой x на y и z соответственно, $1 \le i \le S$, $1 \le j \le S'$, $1 \le t \le 2g$.

(Б) Доказательство этой части теоремы также приводится без изменений.

Шаг 1. В силу свойства 2 и замечания 5.9, гомоморфизм $\bar\rho\colon H_1(Y_0;\mathbb{Z}) \to H$ корректно определен, а в силу свойств 3 и 4 он является эпиморфизмом. Пусть $f : X \to Y$ — симметричное накрытие с эпиморфизмом монодромии $\bar\rho$. Пусть $\tilde\psi_\rho : Aut(Y) \to Aut(H)$ — сквозное действие группы симметрий атома Y на группе монодромии H. Осталось проверить, что гомоморфизмы $\overline{\psi}_\rho, \tilde\psi_\rho\colon Aut(Y) \to Aut(H)$ совпадают. Так как группа $Aut(Y)$ порождена симметриями x, y, z, то достаточно проверить, что $k := \overline{\psi}_\rho(x) = \tilde\psi_\rho(x) =: \tilde k$ и аналогично для l и m. В силу свойств 3 и 4, достаточно показать, что автоморфизмы k и $\tilde k$ (соотв. для l и m) одинаково действуют на каждом из элементов $\bar\rho([h_i \circ \alpha])$, $\bar\rho([h'_j \circ \beta])$, $c_t \in H$.

Шаг 2. Из свойства 3 для $h_i = id_Y = h'_j$, имеем (2). Поэтому, в силу (А), выполнены аналоги свойств 1–5 для $\tilde k, \tilde l, \tilde m, \tilde\psi_\rho$.

Шаг 3. По свойству 5 для k, l, m, и его аналогу для $\tilde k$, $\tilde l$, $\tilde m$ (см. шаг 2), имеем

$$k(\bar\rho([h_i \circ \alpha])) = \bar\rho([x \circ h_i \circ \alpha]) = \tilde k(\bar\rho([h_i \circ \alpha])),$$

$$k(\bar\rho([h'_j \circ \beta])) = \bar\rho([x \circ h'_j \circ \beta]) = \tilde k(\bar\rho([h'_j \circ \beta])),$$

$$k(c_t) = \bar\rho([x \circ \gamma_t]) = \tilde k(c_t)$$

и аналогичные равенства для l и m. ■

Следствие 5.11. Пусть Y — сферический максимально симметричный атом и H — конечная абелева группа. Тогда симметричные накрытия $f\colon X \to Y$ с группой монодромии H классифицируются наборами (k, l, m, q, r), состоящими из автоморфизмов $k, l, m \in Aut(H)$ и элементов $q, r \in H$, удовлетворяющими условиям 2, 4–6 из теоремы 5.10, где в условии 5 через $\bar\rho\colon H_1(Y_0;\mathbb{Z}) \to H$ обозначен гомоморфизм групп, определенный на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$ группы $H_1(Y_0;\mathbb{Z})$ формулами из свойства 3 выше, причем в условиях 3–5 $2g = 0$, а элементы $c_1, \dots, c_{2g}$ и кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ отсутствуют. При этом выполнено свойство 1, причем $k = \overline{\psi}_\rho(x)$, $l = \overline{\psi}_\rho(y)$, $m = \overline{\psi}_\rho(z) \in Aut(H)$ — сквозные действия симметрий x, y, z на группе H, $q = \bar\rho([\alpha])$, $r = \bar\rho([\beta]) \in H$ — монодромии при обходе вокруг центров клеток e, e'.

Набор, классифицирующий накрытия сферических атомов, расширен по сравнению со случаем ориентируемых накрытий, чтобы включить накрытия, меняющие ориентацию.

Следствие 5.12. Пусть Y — максимально симметричный атом на проективной плоскости и H — конечная абелева группа. Тогда симметричные накрытия $f : X \to Y$ с группой монодромии H классифицируются наборами (k, l, m, q, r, c), состоящими из автоморфизмов $k, l, m \in Aut(H)$ элементов $q, r, c \in H$, удовлетворяющими условиям 2, 4–6 из теоремы 5.10, причем в условиях 3–5 $2g = 1$, $\gamma = \gamma_1$ — нестягиваемая кривая на замкнутой поверхности Y, а в условии 2 $\nu = \nu_1 = 2$. При этом выполнены свойства 1 и 2 и k, l, m, q, r заданы аналогично.

Утверждение 5.13. Пусть Y — максимально симметричный атом и H — конечная абелева группа. Симметричные накрытия $f\colon X \to Y$ над Y с группой монодромии H, для которых группа H порождена элементами $\bar\rho([h_i \circ \alpha])$, $\bar\rho([h'_j \circ \beta])$, $1 \le i \le S$, $1 \le j \le S'$, а сквозное действие симметрии $xz \in Aut(Y)$ на H является тождественным преобразованием $km := \overline{\psi}_\rho(xz) = id_H$, классифицируются наборами $(k, l, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$, состоящими из автоморфизмов $k, l \in Aut(H)$ и элементов $q, r, c_1, \dots, c_{2g} \in H$, удовлетворяющими следующим условиям:

1. $k^2 = l^2 = (kl)^2 = id_H$, $k(r) = l(r) = r^{-1}$, $k(q) = q^{-1}$;
2. если атом Y ориентируем, то $r^{S'} q^{S/2} (kl(q))^{S/2} = 1 \in H$ при четном S, $r^{S'} q^S = 1 \in H$ при нечетном S; если атом Y неориентируем, то $q^{(\sum_{i=1}^{S} \mu_i)} r^{(\sum_{j=1}^{S'} \mu'_j)} \prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = 1 \in H$;

3. элементы $r, q, kl(q)$ порождают группу H;

4. если атом Y не допускает альтернирующей ориентации (см. определение 2.3), то $kl = id_H$;

5. $k(c_t) = \bar\rho([x \circ \gamma_t]) = \bar\rho([z \circ \gamma_t])$, $l(c_t) = \bar\rho([y \circ \gamma_t])$, $1 \le t \le 2g$,

где в последнем условии через $\bar\rho\colon H_1(Y_0;\mathbb{Z}) \to H$ обозначен гомоморфизм, определенный на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$, $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0;\mathbb{Z})$ формулами

$$\bar\rho([h_i \circ \alpha]) := (kl)^{n_i}(q), \quad \bar\rho([h'_j \circ \beta]) := r, \quad \bar\rho([\gamma_t]) := c_t,$$

и n_i — сумма показателей степеней элемента xy в каком-либо разложении $h_i \in Par(Y)$ по образующим $xy, xz \in Par(Y)$.

При этом $k = \overline{\psi}_\rho(x), l = \overline{\psi}_\rho(y) \in Aut(H)$ — сквозные действия симметрий x, y на группе H, $q = \bar\rho([\alpha])$ и $kl(q) = \bar\rho([b \circ \alpha])$ — монодромии при обходе вокруг центров белых клеток, $r = \bar\rho([\beta])$ — монодромия при обходе вокруг центров черных клеток, $c_t = \bar\rho([\gamma_t])$ — монодромии при обходе вдоль кривых γ_t, $1 \le t \le 2g$.

Всюду в тексте доказательства, где указана ссылка на теорему без указания ее номера, предполагается теорема 5.10, следствием которой является данное утверждение.

◄ Шаг 1. Покажем сначала, что для любых $k, l \in Aut(H)$, удовлетворяющих $k^2 = l^2 = id_H$, $kl = lk$ и условию 4 настоящего утверждения, существует гомоморфизм $\overline{\psi}_\rho\colon Aut(Y) \to Aut(H)$, определенный на образующих x, y, z группы $Aut(Y)$ формулами $\overline{\psi}_\rho(x) = \overline{\psi}_\rho(z) = k$, $\overline{\psi}_\rho(y) = l$. Отсюда будет, в частности, следовать, что для любой симметрии $g \in Par(Y)$ и любого разложения g в композицию образующих xy, xz группы $Par(Y)$, выполнено $\overline{\psi}_\rho(g) = (kl)^n(k^2)^{n'} = (kl)^n \in \{id_H, kl\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ — сумма показателей степеней образующей xy, $n' \in \mathbb{Z}$ — сумма показателей степеней xz в данном разложении; если Y ориентируем, то для любой отражающей симметрии $h = zg$ (см. замечание 3.12) $\overline{\psi}_\rho(h) = k(kl)^n(k^2)^{n'} = k(kl)^n \in \{k, l\}$.

Пусть атом Y не допускает альтернирующей ориентации, значит по условию 4 $kl = id_H$, т.е. $k = l$.

Если Y ориентируем, то отображение можно задать формулами $\overline{\psi}_\rho(x) = \overline{\psi}_\rho(y) = \overline{\psi}_\rho(z) = k$. Так как четность разложения g однозначно определена сохранением или заменой ориентации, отображение $\overline{\psi}_\rho$ задано корректно.

Для неориентируемого атома Y в силу следствия 3.11 это неверно. Однако из утверждения 3.10 следует, что существует нечетное разложение тождественного отображения, следовательно, $id_H = \overline{\psi}_\rho(id_Y) = k^n l^{n'} = k^{n-n'}(kl)^{n'} := k, k = l = id_H$, так как $n + n'$, а значит и $n - n'$ нечетно, и отображение $\overline{\psi}_\rho(w) = id_h$, $w \in \{x, y, z\}$ задано корректно. Здесь n (соответственно n') — сумма степеней показателей при образующих x и z (соответственно y) в разложении id_Y.

Пусть $kl \ne id_H$, а потому атом допускает альтернирующую ориентацию белых клеток по условию 4.

Пусть Y ориентируем, тогда он двудолен по замечанию 2.4. Рассмотрим граф смежности белых клеток атома — он очевидно будет двудольным. Любая симметрия $g \in Aut(Y)$ переводит каждую долю либо в себя, либо в другую долю. Определим отображение $\overline{\phi}\colon Aut(Y) \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ формулой $\overline{\phi}(g) := (\zeta, \eta)$, причем $\zeta + \eta = 1$, если ориентация меняется, и 0, если сохраняется; $\zeta = 0$, если симметрия сохраняет доли, и 1, если меняет. Очевидно, $\overline{\phi}$ — гомоморфизм, причем $\overline{\phi}(x) = \overline{\phi}(z) = (0,1)$, $\overline{\phi}(y) = (1,0)$. Определим отображение $I\colon \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to Aut(H)$ формулами

$$I(1,0) := k,\ I(0,1) := l,\ I(0,0) := id_H,\ I(1,1) := kl,$$

оно является гомоморфизмом в силу условия $k^2 = l^2 = (kl)^2 = id_H$.

Пусть Y неориентируем. В силу замечания 3.6 любая симметрия сохраняет или обращает альтернирующую ориентацию. Определим отображение $\overline{\phi}\colon Aut(Y) \to \mathbb{Z}_2$ формулами $\overline{\phi}(g) = 0$ в первом случае и $\overline{\phi}(g) = 1$ во втором случае. Очевидно, что $\overline{\phi}$ — гомоморфизм, причем $\overline{\phi}(x) = \overline{\phi}(z) = 1$, $\overline{\phi}(y) = 0$.

Определим отображение $I : \mathbb{Z}_2 \to Aut(H)$ формулой $I(0) = l = id_H$, $I(1) = k$, оно является гомоморфизмом в силу условия $k^2 = id_H$.

Для любого атома Y положим $\overline{\psi}_\rho := I \circ \overline{\phi}$. Тогда

$$\overline{\psi}_\rho(x) = \overline{\psi}_\rho(z) = I(\overline{\phi}(x)) = k,$$

$$\overline{\psi}_\rho(y) = I(\overline{\phi}(y)) = l,$$

$$\overline{\psi}_\rho(Aut(Y)) = \{id_H, k, l, kl\}.$$

Шаг 2. Для любой белой клетки $h_i(e)$ (соотв. черной клетки $h'_j(e')$) атома Y фиксируем разложение симметрии $h_i \in Par(Y)$ (соотв. $h'_j \in Par(Y)$) по образующим xy, xz. Пусть n_i (соотв. n'_j) — сумма показателей степеней образующей xy, $\hat{n}_i$ (соотв. $\hat{n}'_j$) - сумма показателей степеней образующей xz в данном разложении, $1 \le i \le S$, $1 \le j \le S'$. Заметим, что $\overline{\psi}_\rho(xz) = k^2 = id_H$, следовательно $\overline{\psi}_\rho(h_i) = (kl)^{n_i}$ (соотв. $\overline{\psi}_\rho(h'_j) = (kl)^{n'_j}$).

Пусть $(k, l, m, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 2, 4–6 из теоремы 5.10. Тогда выполнены и остальные свойства из этой теоремы. Покажем, что $(k, l, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 1–5 настоящего утверждения.

1) Имеем $k^2 = l^2 = m^2 = id_H, kl = lk$ из свойства 6 теоремы. Так как $km = id_H$, то $k = m^{-1} = m$. Из свойства 1 теоремы $l(r) = m(r) = r^{-1}$, следовательно $k(r) = l(r) = r^{-1}$.

5) Из свойства 5 теоремы получаем условие 5 настоящего утверждения.

3) По свойству 6 теоремы имеется гомоморфизм $\overline{\psi}_\rho \colon Aut(Y) \to Aut(H)$ со свойствами $\overline{\psi}_\rho(x) = k$, $\overline{\psi}_\rho(y) = l$ и $\overline{\psi}_\rho(xz) = id_H$. Пусть $\bar{\rho} \colon H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \to H$ — гомоморфизм, определенный на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$, $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами из свойства 3 теоремы. По предположению настоящего утверждения группа H порождена элементами $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q)$, $\overline{\psi}_\rho(h'_j)(r)$, $1 \le i \le S$, $1 \le j \le S'$. Из h_i, $h'_j \in Par(Y)$ следует, что $\overline{\psi}_\rho(h_i) = \overline{\psi}_\rho(h'_j))$ являются степенями элемента $\overline{\psi}_\rho(xy) = kl$. Вместе с доказанным выше условием 1 это показывает, что элементы $q, r, kl(q) \in H$ порождают группу H.

4) Предположим, что $k(q) = l(q)$, т.е. $kl(q) = q$. Тогда группа H порождена элементами q, r в силу доказанного выше условия 3. Рассмотрим действие kl на образующих: $kl(r) = r$ по свойству 1, $kl(q) = q$ по предположению, следовательно $kl = id_H$. Если атом Y неориентируем, то $k = l = id_H$ (см. шаг 1).

Предположим теперь, что $k(q) \ne l(q)$, а значит $kl \ne id_H$.

Пусть Y ориентируем. Так как вершины клетки e имеют вид $A_t = (xz)^t(A)$, $t \in \mathbb{Z}$, то вершины клетки $h_i(e)$ имеют вид $A'_t = h_i((xz)^t(A))$, $t \in \mathbb{Z}$. Так как A — общая вершина белых клеток $e, xy(e)$, то $A'_t = h_i((xz)^t(A))$ — общая вершина белых клеток $h_i((xz)^t(e)) = h_i(e)$ и $h_i((xz)^t(xy(e)) =: h_{i'}(e)$ (для некоторого $i' \in [1; S]$). Отметим, что $h_{i'}^{-1} \circ h_i \circ (xz)^t \circ xy(e) = e$ с сохранением ориентации e, а потому $h_{i'}^{-1} \circ h_i \circ (xz)^t \circ xy = (xz)^p$, где $p \in \mathbb{Z}$, откуда $h_{i'} = h_i \circ (xz)^t \circ xy \circ (xz)^{-p}$. Поэтому $\overline{\psi}_\rho(h_{i'}) = (\overline{\psi}_\rho(h_i)) \circ kl = kl \circ (\overline{\psi}_\rho(h_i))$ (в силу абелевости подгруппы $\{id_H, k, l, kl\} \supseteq \overline{\psi}_\rho(Aut(Y))$). Отсюда и из условия $(kl)^2 = id_H$ следует, что элементы $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q)$ и $\overline{\psi}_\rho(h_{i'})(q) = kl(\overline{\psi}_\rho(h_i)(q)) = kl((kl)^{n_i}(q))$ оба принадлежат множеству $\{q, kl(q)\}$ и различны в силу $l(q) \ne k(q)$. Поэтому сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ элемента $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q) \in \{q, kl(q)\} \subset H$ определяет двудольное разбиение белых клеток атома Y. При этом $\overline{\psi}_\rho = I \circ \phi$, где ϕ, I — гомоморфизмы из шага 1.

Пусть Y неориентируем. Так как $Par(Y) = Aut(Y)$, $\overline{\psi}_\rho(Aut(Y)) = \{id_H, kl\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Так как $Aut(Y)$ действует свободно и транзитивно на множестве полуребер Y, то орбита полуребра при действии $\ker \overline{\psi}_\rho$ определяет ориентацию всех ребер. Эта ориентация сохраняется при вращениях белых клеток и меняется при полуоборотах, а потому определяет альтернирующую ориентацию белых клеток. Так как отражение $x \in Aut(Y)$, $x \notin \ker \overline{\psi}_\rho$, откуда $\overline{\psi}_\rho(x) = kl$, т.е. $l = id_H$.

2) В силу свойства 2 теоремы и доказанного выше условия 1 имеем:

$$\left(\prod_{i=1}^{S} \overline{\psi}_\rho(h_i)(q^{\mu_i})\right)\left(\prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r^{\mu'_j})\right)\prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = \left(\prod_{i=1}^{S}(kl)^{n_i}(q^{\mu_i})\right)\left(\prod_{j=1}^{S'}(kl)^{n'_j}(r^{\mu'_j})\right)\prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{S}(kl)^{n_i}(q^{\mu_i})\right)\left(\prod_{j=1}^{S'}(r^{\mu'_j})\right)\prod_{j=1}^{S'} r = 1 \in H.$$

Пусть Y ориентируем, тогда по замечанию 5.9 $\mu_1 = \dots = \mu_S = \mu'_1 = \dots = \mu'_{S'} = \pm 1$ и $\nu_1 = \dots = \nu_{2g} = 0$.

Если $kl = id_H$, то последнее равенство дает $q^S r^{S'} = 1 \in H$. Если при этом S четно, то последнее равенство равносильно равенству $q^{S/2}(kl(q))^{S/2} r^{S'} = 1 \in H$. Пусть $kl \neq id_H$. Тогда, по доказательству условия 4 выше, сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ элемента $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q) \in \{q, kl(q)\}$ дает двудольное разбиение белых клеток атома Y, $1 \le i \le S$. Значит, по доказанному на шаге 1, симметрия xy осуществляет биекцию между множеством белых клеток $h_i(e)$ со свойством $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q) = q$ и множеством белых клеток $h_{i'}(e)$ со свойством $\overline{\psi_\rho}(h_{i'})(q) = k^{n_{i'}} l^{\hat{n}_{i'}}(q) = kl(q)$, $1 \le i \le S$, откуда S четно и указанные множества состоят из одинакового количества $\frac{S}{2}$ белых клеток. Поэтому приведенное выше равенство дает $q^{S/2}(kl(q))^{S/2} r^{S'} = 1 \in H$.

Пусть Y неориентируем. Если $kl = id_H$, то

$$q^{(\sum_{i=1}^{S}\mu_i)} r^{(\sum_{j=1}^{S'}\mu'_j)} \prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = 1 \in H.$$

Пусть $kl \neq id_H$. Тогда имеется альтернирующая ориентация белых клеток (см. доказательство условия 4 выше). Можно считать, что все $h_i \in Par(Y)$ сохраняют альтернирующую ориентацию белых клеток, т.е. принадлежат $\ker \overline{\psi}_\rho$. Поэтому $(kl)^{n_i} = id_H$, и верно то же равенство, как и в случае $kl = id_h$.

Шаг 3. Пусть теперь набор $(k, l, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 1–5 настоящего утверждения. Докажем, что набор $(k, l, m = k, q, r, c_1, \dots, c_{2g})$ удовлетворяет условиям 2, 4–6 теоремы 5.10. Отсюда, в силу пункта (Б) теоремы, будут автоматически следовать остальные свойства из этой теоремы.

6) Условие 6 теоремы вытекает из условий 1 и 4 настоящего утверждения, как показано на шаге 1. Поэтому существует гомоморфизм $\overline{\psi}_\rho \colon Aut(Y) \to Aut(H)$, такой, что для любой симметрии $g \in Par(Y)$ и любого разложения элемента g по образующим xy, xz группы $Par(Y)$ выполнено $\overline{\psi}_\rho(g) = (kl)^n$, где $n \in \mathbb{Z}$ равно сумме показателей степеней образующей xy в данном разложении; если атом ориентируем, то для любой отражающей симметрии $g' = zg$ (см. замечание 3.12) выполнено $\overline{\psi}_\rho(g') = k(kl)^n$. При этом из $k^2 = l^2 = (kl)^2 = id_H$ и $\overline{\psi}_\rho(x) = \overline{\psi}_\rho(z) = k$, $\overline{\psi}_\rho(y) = l$ имеем $\overline{\psi}_\rho(Aut(Y)) = \{id_H, k, l, kl\} \subset Aut(H)$.

5) Пусть $\bar{\rho} \colon H_1(Y_0; \mathbb{Z}) \to H$ — гомоморфизм, определенный на образующих $[h_1 \circ \alpha], \dots, [h_S \circ \alpha]$, $[h'_1 \circ \beta], \dots, [h'_{S'} \circ \beta]$, $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ группы $H_1(Y_0; \mathbb{Z})$ формулами из условия. Он определен корректно в силу условия настоящего утверждения и замечания 5.9. Тогда выполнены формулы из свойства 3 теоремы, в силу доказанных выше формул $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q)$ и $\overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = (kl)^{n'_j}(r)$ и условия $kl(r) = r$ (по условию 1). Требуемое условие эквивариантности для $c_1, \dots, c_{2g}$ следует из условия 5. Заметим, что если симметрия, являющаяся произведением нечетного числа образующих x, y, z и сохраняющая клетку e', не меняет ее ориентации, то $r^2 = 1$. В силу этого, а также того, что $m = k$

и $\bar{\rho}([h'_j \circ \beta]) := \overline{\psi_\rho}(h'_j)(r) = r = (k(r))^{-1} = (l(r))^{-1} = (m(r))^{-1}$, см. выше, получаем требуемые условия эквивариантности для $1 \le j \le S'$. Если $kl = id_H$, то $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) := \overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q) = q = (k(q))^{-1} = (l(q))^{-1} = (m(q))^{-1}$, откуда получаем требуемые условия эквивариантности для $1 \le i \le S$. Пусть теперь $kl \ne id_H$, а потому $l(q) \ne k(q)$ (см. доказательство свойства 4 на шаге 2). На шаге 1 мы показали, что сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ атома Y автоморфизма $\overline{\psi}_\rho(h_i) \in \{id_H, kl\} \subset Aut(H)$ задает двудольное разбиение белых клеток. Поэтому сопоставление любой белой клетке $h_i(e)$ элемента $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) := \overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^{n_i}(q) \in \{q, kl(q)\} \subset H$ тоже задает двудольное разбиение белых клеток. При этом симметрии x, z переводят множество всех белых клеток $h_i(e)$ со свойством $\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]) = q$ в себя, а множество всех белых клеток $h_{i'}(e)$ со свойством $\bar{\rho}([h_{i'} \circ \alpha]) = kl(q)$ в себя (см. шаг 1). Поэтому $\bar{\rho}([x \circ h_i \circ \alpha]) = \bar{\rho}([z \circ h_i \circ \alpha]) = \bar{\rho}([h_i \circ \alpha])$, $1 \le i \le S$. На шаге 1 мы также показали, что симметрия y переставляет эти два множества, откуда $\bar{\rho}([y \circ h_i \circ \alpha]) = kl(\bar{\rho}([h_i \circ \alpha]))$, $1 \le i \le S$.

4) По построению гомоморфизма $\overline{\psi}_\rho$ (см. доказанное выше условие 6 теоремы) и условию $l(r) = k(r)$, имеем $\overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = r$, $1 \le j \le S'$. По доказанному в предыдущем пункте, множество элементов $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) \in \{q, kl(q)\}$, $1 \le i \le S$, совпадает с $\{q, kl(q)\}$. По условию 3 настоящего утверждения, элементы $q, kl(q), r$ порождают группу H. Это дает требуемое свойство 4 теоремы.

2) Как показано в доказательстве условия 4, $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) \in \{q, kl(q)\}$, $\overline{\psi}_\rho(h'_j)(r) = r$. Если $kl = id_H$, то

$$\left(\prod_{i=1}^{S} \overline{\psi}_\rho(h_i)(q^{\mu_i})\right)\left(\prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r^{\mu'_j})\right)\prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = q^{\sum_{i=1}^{S}\mu_i} r^{\sum_{j=1}^{S'}\mu'_j}\prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = 1 \in H.$$

по условию 2 настоящего утверждения и потому, что $\overline{\psi}_\rho$ — гомоморфизм. Условие 2 теоремы для ориентируемого атома является частным случаем этого условия по замечанию 5.9.

Если $kl \ne id_H$, то по условию 4 атом допускает альтернирующую ориентацию.

Пусть Y ориентируем. Тогда он двудолен по замечанию 2.4, следовательно число его белых клеток S четно, и альтернирующая ориентация на половине из них ($e_i, i \in \Lambda, \#\Lambda = S/2$) совпадает с глобальной, а на половине ($e_j, j \in \Lambda'$) отличается. Следовательно, $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = q$ при $i \in \Lambda$ и $kl(q)$ при $i \in \Lambda'$,

$$\left(\prod_{i=1}^{S} \overline{\psi}_\rho(h_i)(q^{\mu_i})\right)\left(\prod_{j=1}^{S'} \overline{\psi}_\rho(h'_j)(r^{\mu'_j})\right)\prod_{t=1}^{2g} c_t^{\nu_t} = r^{S'} q^{S/2}(kl(q))^{S/2} = 1 \in H$$

по условию 2 настоящего утверждения.

Если атом неориентируем, то можно считать, что на нем задана альтернирующая ориентация, тогда симметрии $h_1, \ldots, h_S, h'_1, \ldots, h'_{S'}$ сохраняют эту ориентацию. Тогда $\overline{\psi}_\rho(h_i)(q) = (kl)^n(q) = q$ по доказанному выше условию 6 и потому, что симметрия kl меняет альтернирующую ориентацию, и условие 2 теоремы выполняется аналогично случаю $kl = id_H$. ►

6 Примитивные атомы. Отображение примитивизации.

Пусть X — максимально симметричный атом. Фиксируем некоторый тип клеток, для определенности белый.

Определение 6.1. Максимально симметричный ориентированный атом X назовем **примитивным**, если выполнено одно из двух условий:

1. атом содержит не менее двух белых клеток, и любые две его различных белых клетки имеют не более одной общей вершины;

2. в атоме есть лишь одна белая клетка, и атом неприводим (см. определение 4.5).

Атом называется **ориентируемо примитивным**, если в нем лишь одна белая клетка и атом ориентируемо неприводим.

Пример 6.2. Все сферические атомы, отвечающие платоновым телам, а также атомы C_1, D_1 и D_n при $n > 2$ примитивны; атомы $C_2 = D_2$ и C_n при $n > 2$ непримитивны. Среди них нет атомов с одной белой клеткой кроме C_1, потому понятие приводимости для них совпадает с понятием ориентируемой приводимости.

Пример 6.3. На проективной плоскости примитивны следующие атомы:

- $\tilde{C}_1 = \tilde{D}_1$ — в них ровно одна белая и одна черная клетка и они неприводимы;
- $\tilde{D}_n$ при $n > 2$ — в них n двуугольных клеток, любые две имеют не более одной общей вершины;
- $\tilde{P}_i$, $i = 3, 4, 5$.

Остальные атомы непримитивны:

- $\tilde{C}_n$ при $n > 1$ — в них одна белая клетка и они все приводимы над $\tilde{C}_1$;
- $\tilde{D}_2$ — в ней две белые клетки, имеющие две общие вершины;
- $\tilde{P}_2$ — проекция усеченного куба имеет три белых четырехугольника, любые два из которых имеют общую вершину.

Следующие рассуждения повторяют аналогичные рассуждения для ориентируемых симметрий.

Пусть атом X не является примитивным и содержит не менее двух белых клеток. В силу максимальной симметричности любые две смежные белые клетки X имеют $k > 1$ общих вершин. Возьмем некоторую белую клетку — d-угольник $e \subset X$ и пусть $a = xy \in Aut(X)$ — вращение клетки e. Занумеруем вершины клетки e в циклическом порядке: $A_0, \ldots, A_{d-1}$, тогда $a(A_i) = A_{i+1}$. Пусть e_i — белая клетка, примыкающая к клетке e в i-ой вершине. $e_0 = e_q$ для некоторого $0 < q \leq d-1$ — можно считать, что q — наименьший положительный период, и $d = kq$. В силу симметричности, $e_i = e_{i+q}$ для всех i.

Рассмотрим преобразование $a^q \in Aut(X)$. Так как $a^q(e) = e$ и $a^q(e_i) = e_i$, то a^q есть вращение клетки e_i: $a^q = (a_i^q)^{l_i}$, где $a_i = x_i y_i \in Aut(X)$ — вращение клетки e_i. Порядок элемента a^q равен k, следовательно l_i взаимно просто с k. Из-за симметричности $l_0 \equiv \ldots \equiv l_{q-1} \equiv l \pmod k$. Аналогично, $a_i^q = (a^q)^l$, откуда $l^2 \equiv 1 \pmod k$.

Заметим, что равенство $(a')^q = (a'')^{ql}$ выполнено для любых двух смежных белых клеток e' и e''. Поскольку X связно, рассуждая по индукции, мы получаем, что $(a')^q = a^q$ либо $(a')^q = a^{ql}$ для любой клетки $e' \subset X$.

Рассмотрим циклическую подгруппу $H = \langle a^q \rangle \subset Aut(X)$. Пусть $g \in Aut(X)$ и $g(e) = e'$. Тогда $gag^{-1} = a'$ и $ga^q g^{-1} = (a')^q$, что равно a^q либо $(a^q)^l$. Следовательно, $gHg^{-1} = H$, т.е. H — нормальная подгруппа. Так как элементы подгруппы H действуют как вращения на каждой белой клетке и поэтому не оставляют никакую вершину неподвижной, то H действует свободно на вершинах. Таким образом, мы можем рассмотреть симметричное накрытие

$$p_X \colon X \to X/H.$$

Для любого разложения $k = k_1 k_2$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, рассмотрим циклическую подгруппу $H_1 = \langle a^{k_2 q} \rangle \subset H$ порядка k_1. Аналогично рассуждению выше получаем, что подгруппа H_1 нормальна в $Aut(X)$. Следовательно, мы можем рассмотреть симметричное накрытие $p_{X,k_1} \colon X \to X/H_1$.

Определение 6.4. Назовем накрытие $X \to Y$ **отображением примитивизации**, если оно является композицией накрытия p_X и изоморфизма $X/H \to Y$, а атом $X_{prim} = Y$ назовем **примитивизацией** атома X. Назовем накрытие $X \to Y$ **отображением типа примитивизации**, если оно является композицией накрытия $p_{X,\,k_1}$ и изоморфизма $X/H_1 \to Y$.

Отображение примитивизации называется **ориентируемым**, если оно является композицией ориентируемого накрытия и ориентируемого изоморфизма.

Пример 6.5. Примитивизациями сферических непримитивных атомов (см. пример 6.2) будут следующие атомы: $(B_2)_{prim} = (C_2)_{prim} = (D_2)_{prim} = (C_n)_{prim} = B_1 = C_1$ при $n > 2$;

Пример 6.6. Примитивизациями непримитивных атомов на проективной плоскости (см. пример 6.3) будут следующие атомы:

- $\tilde{C}_1 = (\tilde{C}_n)_{prim} = (\tilde{D}_2)_{prim}$ при $n > 2$;
- $\tilde{D}_3 = (\tilde{P}_2)_{prim}$.

Следующие утверждения полностью повторяют соответствующие утверждения для ориентируемых примитивизаций и приведены без изменений; их доказательства приводиться не будут.

Утверждение 6.7. Пусть X — максимально симметричный атом, содержащий не менее двух белых клеток. Тогда

1. X_{prim} — примитивный максимально симметричный атом;
2. если $f : X \to Y$ — симметричное накрытие и Y примитивен, то существует единственное накрытие $\bar{f}\colon X_{prim} \to Y$, такое что $f = \bar{f} \circ p_X$;
3. накрытие $f\colon X \to Y$ является отображением примитивизации тогда и только тогда, когда f является отображением типа примитивизации и Y примитивен.

Следствие 6.8. Максимально симметричные атомы X и Y, содержащие не менее двух белых клеток, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны атомы X_{prim} и Y_{prim} и изоморфны отображения примитивизации p_X и p_Y.

Утверждение 6.9. Пусть X — примитивный максимально симметричный атом. Тогда

1. любые его белая и черная клетки имеют не более одного общего ребра;
2. если две белые клетки $e_1, e_2 \subset X$ являются смежными и инвариантны при некоторой симметрии $g \in Aut(X)$, т.е. $g(e_1) = e_1$ и $g(e_2) = e_2$, то $g = id_X$.

7 Заключение

Данная работа не исчерпывает тему классификации максимально симметричных атомов в неориентируемом случае. Открытыми остаются вопросы классификации атомов с данной примитивизацией и отыскания примитивных атомов; описание максимально симметричных атомов в частных случаях.

Тем не менее начало исследований в этой области положено — введены необходимые определения и доказаны базовые факты, касающиеся накрытий максимально симметричных атомов, описаны основные отличия неориентируемых симметрий от ориентируемых и пути их решения.

Список литературы

[1] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия, Матем. сб., 199:9 (2008)

[2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1,2. Ижевск, Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.

[3] H.R. Brahana, Regular maps and their groups. Amer. J. Math. **49** (1927

[4] M.D.E. Conder, P. Dobcsányi, Determination of all regular maps of small genus, J. Combinat. Theory, Ser. B, **81** (2001),

[5] H.S.M. Coxeter, Self-dual configurations and regular graphs, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 413–455.

[6] Коровина Н.В., Максимально симметричные бифуркации функций Морса на двумерных поверхностях, Вестник МГУ, Серия матем., 1998.

[7] J. Širáň, Regular maps on a given surface, in: Topics in discrete mathematics, 591–609, Algorithms Combin. **26** (2006), Springer, Berlin.