МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И
ПРИЛОЖЕНИЙ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Студента 505 группы Пермякова Дмитрия Алексеевича

"ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СКРУЧИВАНИЙ ДЭНА"

Научный руководители - академик РАН Фоменко А.Т.,
доцент Кудрявцева Е.А.

1 Введение

В данной работе изучается пространство диффеоморфизмов, порожденное скручиваниями Дэна вокруг простых попарно непересекающихся кривых. Основными результатами данной работы являются теоремы 2.1 и 3.2.

Теорема 2.1 утверждает, что при некоторых общих условиях скручивания Дэна вдоль простых попарно непересекающихся кривых линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Эта теорема, по видимому, является известным фактом. К сожалению, автору не удалось найти ссылку на ее доказательство в литературе. В [1], лемма 2.1(1) эта теорема упоминается без доказательства и без ссылок. Автор также встречал пару статей, в которых эта теорема упоминается со ссылкой на [1].

Теорема 3.2 утверждает, что элементы некоторого широкого класса диффеоморфизмов гомотопны композициям скручиваний Дэна вдоль семейства попарно непересекающихся кривых.

Автор благодарен Е.А. Кудрявцевой за постановку задач и полезные обсуждения при написании работы.

2 Линейная независимость скручиваний Дэна

Пусть M – компактная ориентируемая поверхность (с краем или без), внутри которой задано конечное (возможно, пустое) множество точек $\{y_j\}$. Обозначим через $\mathrm{Diff}(M;\{y_j\}\cup\partial M)$ пространство диффеоморфизмов поверхности M, тождественных на ∂M и сохраняющих каждую точку y_j, а через $\mathrm{Diff}^0(M;\{y_j\}\cup\partial M)\subset\mathrm{Diff}(M;\{y_j\}\cup\partial M)$ – компоненту связности тождественного диффеоморфизма в $\mathrm{Diff}(M;\{y_j\}\cup\partial M)$. Следующая теорема, видимомо, является известной, но автору не удалось найти ее опубликованного доказательства.

Теорема 2.1. *Пусть M – компактная ориентируемая поверхность (с краем или без), внутри которой задано конечное (возможно, пустое) множество точек $\{y_j\}$. Пусть $\{\gamma_\ell\}$ – конечный набор простых замкнутых попарно непересекающихся кривых в $\mathrm{int}\,(M)\setminus\{y_j\}$, что любая компонента связности множества $\mathrm{int}\,(M\setminus(\cup\gamma_\ell\cup\{y_j\}))$ не является ни открытым диском, ни открытым цилиндром. Пусть $h_\ell\in\mathrm{Diff}(M;\{y_j\}\cup\partial M)$ – скручивания Дэна вокруг кривых γ_ℓ. Тогда классы $[h_\ell]\in\mathrm{Diff}(M;\{y_j\}\cup\partial M)/\mathrm{Diff}^0(M;\{y_j\}\cup\partial M)$ этих диффеоморфизмов попарно коммутируют и линейно независимы над $\mathbb{Z}$.*

Если есть точки y_j, то прокалывая в них поверхность M, а затем компактифицируя, можно получить замкнутую поверхность, в которой вместо точек y_j выкинуты диски. Достаточно доказать теорему для полученной поверхности, поэтому можно сразу считать, что множество $\{y_j\}$ пусто.

Если M – сфера или цилиндр, то лемма тривиальна. Можем считать, что каждая кривая γ_i, гомотопная компоненте связности края, вся проходит по краю. Набор кривых γ_i можно дополнить до такого набора, что каждая компонента связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ является сферой с тремя выкинутыми замкнутыми дисками. Лемму достаточно доказать для пополненного набора.

Построим граф $\Theta = \Theta_{M,\{\gamma_i\}}$. Каждой компоненте связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ будет отвечать вершина степени 3, каждой компоненте связности множества ∂M будет отвечать вершина степени 1. Две вершины соединим ребром, если отвечающие вершинам множества имеют пересекающиеся множества граничных точек. Заметим, что указанные выше пересечения множеств граничных точек будут совпадать с какой-нибудь окружностью γ_i. Тем самым окружности γ_i находятся во взаимно-однозначном соответствии с ребрами графа Θ. Построим проекцию $\xi\colon\ M \to \Theta$. В каждой компоненте связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ можно выделить по графу, дополнение до которого является несвязным объединением трех открытых цилиндров. Отображение ξ переводит такой граф в соответствующую вершину степени 3, а каждую компоненту связности ∂M в отвечающую ей вершину степени 1, больше прообразов у вершин нет. Поверхность M без прообразов всех вершин является несвязным объединением открытых цилиндров, замыкание каждого из которых содержит ровно по одной окружности γ_i. Отображение ξ переводит цилиндр в ребро, отвечающее окружности γ_i, содержащейся в его замыкании, чтобы прообраз каждой точки являлся окружностью. Если γ_i содержится в цилиндре, то потребуем, чтобы ξ отображало γ_i в точку.

Граф $\Theta_{M,\{\gamma_i\}}$ и проекция $\xi\colon\ M \to \Theta$ определяется аналогично для произвольного набора окружностей $\{\gamma_i\}$, дополнение до которого является объединением открытых сфер с дырками. В общем случае степени вершин могут отличаться от 1 и 3.

Если взять границу трехмерной окрестности графа Θ и выкинуть из нее по диску в окрестности каждой вершины степени 1, то полученная поверхность снова будет гомеоморфна M.

Далее будем считать, что все вершины степени 1 графа Θ окрашены в белый цвет. Для каждого графа Θ' (например, подграфа графа Θ), у которого часть вершин степени 1 окрашены в белый цвет, обозначим через $M_{\Theta'}$ поверхность, являющуюся границей трехмерного утолщения графа Θ', из которой выкинуто по диску в окрестности каждой белой вершины. Ясно, что $M_{\Theta_{M,\{\gamma_i\}}} = M$.

Пусть Θ_0 – связный подграф в Θ. В $\xi^{-1}(\Theta_0)$ стянем в точку каждую компоненту связности множества граничных точек подмножества $\xi^{-1}(\Theta_0) \subset M$, не являющуюся компонентой связности границы для M. Полученная поверхность будет совпадать с M_{Θ_0}. Обозначим $\tilde{M}_{\Theta_0}$ поверхность, полученную из $\xi^{-1}(\Theta_0)$ выкидыванием всех компонент связности множества граничных точек, не являющихся компонентами границы для M. Ясно, что $\tilde{M}_{\Theta_0} \subset M_{\Theta_0}$, и $\tilde{M}_{\Theta_0}$ получается из M_{Θ_0} выкалыванием конечного числа точек. На M_{Θ_0} определена проекция ξ_{Θ_0}, совпадающая на $\tilde{M}_{\Theta_0}$ с проекцией $\xi|_{\tilde{M}_{\Theta_0}} = \xi_\Theta|_{\tilde{M}_{\Theta_0}}$.

Лемма 2.2. *Существует отображение* $\lambda_{\Theta_0} \colon M \to M_{\Theta_0}$, *что*

1. *отображение* $\lambda_{\Theta_0}|_{\tilde{M}_{\Theta_0}}$ *совпадает с естественным вложением* $\tilde{M}_{\Theta_0} \subset M_{\Theta_0}$;
2. *если точки* $x, y \in M \setminus \tilde{M}_{\Theta_0}$ *и* $\xi(x) = \xi(y)$, *то* $\lambda_{\Theta_0}(x) = \lambda_{\Theta_0}(y)$.

Заметим, что из Леммы 2.2 следует, в частности, согласованность отображения λ_{Θ_0} с проекцией на приведенный граф Риба: $\xi|_{\xi_M^{-1}(\Theta_0)} = \xi_{\Theta_0} \circ \left(\lambda_{\Theta_0}|_{\xi_M^{-1}(\Theta_0)}\right) \colon \xi^{-1}(\Theta_0) \to \Theta_0$.

Пусть Θ_0 – связный подграф графа Θ. Пусть $h_{\gamma_1}^{a_1} \circ \ldots \circ h_{\gamma_n}^{a_n} \sim \mathrm{id}$. Рассмотрим диффеоморфизм поверхности M_{Θ_0}, являющийся композицией скручиваний Дэна $h_{M_{\Theta_0},i}^{a_i}$ вдоль всех кривых $\lambda_{\Theta_0}(\gamma_i)$, для которых $\xi(\gamma_i) \in \Theta_0$ и $\lambda_{\Theta_0}(\gamma_i)$ отлично от точки. Из Леммы 2.2, с учетом коммутирования скручиваний Дэна и отображения λ_{Θ_0}, следует, что этот диффеоморфизм изотопен тождественному.

Для доказательства Леммы 2.2 нам понадобится

Утверждение 2.3. *Пусть* Θ_0 *– связный подграф связного графа* Θ, *отличный от всего* Θ. *Тогда найдется открытое ребро* e *в* $\Theta \setminus \Theta_0$, *что либо* e *– не мост, т.е. граф* $\Theta \setminus e$ *связен, либо* e *ведет в вершину степени 1 графа* Θ. *Здесь и далее под ребром понимается открытое ребро.*

Расстоянием от вершины графа Θ до подграфа Θ_0 назовем минимальное количество ребер, нужное чтобы добраться от вершины до Θ_0. Если связный подграф Θ_0 содержит все вершины графа Θ, то ребро вне Θ_0 не может быть мостом. Далее считаем, что найдется вершина вне Θ_0. Пусть v – любая из наиболее далеких от Θ_0 вершин графа Θ, e – любое из выходящих из v ребер. Предположим, что e мост. Если вершина v лежит в той же компоненте связности графа $\Theta \setminus e$, что и подграф Θ_0, то в графе Θ расстояние от второй вершины v' ребра e до графа Θ_0 на один больше, чем от вершины v, так как любой путь от v' до Θ_0 проходит через ребро e. Значит, вершина v лежит в компоненте связности графа $\Theta \setminus e$, не содержащей подграф Θ_0. Если вершина v имеет степень больше 1, то она соединена с некоторой вершиной v'' ребром, отличным от e. Любой путь от v'' до Θ_0 проходит через вершину v, поэтому v'' дальше от Θ_0, чем v, что противоречит выбору вершины v. □

Теперь докажем Лемму 2.2. Из Утверждения 2.3 следует, что достаточно доказывать для случаев

1. $\Theta_0 = \Theta \setminus e$, где e не является мостом,

2. $\Theta_0 = \Theta \setminus \{e, v\}$, где v – вершина степени 1, ребро e выходит из v.

Разберем сначала первый случай. Введем на e произвольно параметр $t \in (0;1)$. Поверхность $\xi^{-1}(e)$ гомеоморфна открытому цилиндру $S^1 \times (0;1)$. Стянем в точку каждую окружность $\xi^{-1}(e(t))$, а также каждую из двух окружностей в $\partial(\xi^{-1}(e))$. Получим поверхность $M_{\Theta\setminus e}$ с приклеенным за концы отрезком $\bar{e}$. Поскольку есть путь между вершинами ребра e по графу $\Theta \setminus e$, то найдется и путь между точками $\partial\bar{e}$ по поверхности $M_{\Theta\setminus e}$. Значит, существует отображение всего отрезка $\bar{e}$ в поверхность $M_{\Theta\setminus e}$, сохраняющее концы отрезка. Таким образом, мы получили требуемое отображение $\lambda_{\Theta\setminus e}\colon M \to M_{\Theta\setminus e}$.

Теперь разберем второй случай. В этом случае $\xi^{-1}(e \cup v)$ – либо цилиндр, либо диск. Поэтому $M_{\Theta\setminus(e\cup v)} = M/\xi^{-1}(e\cup v)$. Значит, отображение $\lambda_{\Theta\setminus\{e,v\}}$ можно взять равным естественному отображению $M \to M/\xi^{-1}(e\cup v)$. $\square$

Далее через h_{γ_i} обозначается скручивание Дэна вокруг кривой γ_i.

Лемма 2.4. *Пусть найдется путь $\alpha\colon [0;1] \to M$, что $\alpha(0), \alpha(1) \in \partial M$ и путь $\xi\alpha$ в Θ несамопересекающийся и проходит через точки $\xi(\gamma_i)$, $1 \le i \le m$. Тогда замкнутый путь $\beta := (h_{\gamma_1}^{a_1} \dots h_{\gamma_m}^{a_m}\alpha) \cdot \alpha^{-1}$ с закрепленными концами стягиваем тогда и только тогда, когда все $a_i = 0$, $1 \le i \le m$.*

Если все a_i равны нулю, то $\beta = \alpha^{-1} \cdot \alpha$ очевидно стягиваем. Значит, нужно доказать только обратное утверждение. Считаем, что все a_i отличны от нуля. Пусть γ_1 – первая вдоль пути α окружность среди γ_i. Если a_1 – единственное ненулевое число среди a_i, $1 \le i \le m$, то $\beta \sim \gamma_1^{a_1}$, и потому путь β нестягиваем. Далее считаем, что есть еще ненулевые числа среди a_i, а потому γ_1 – не последняя вдоль пути α окружность среди γ_i, и найдется окружность γ_2, следующая за γ_1 вдоль пути α. Из неэквивалентности кривых γ_1 и γ_2 следует, что на интервале пути $\xi\alpha$ между точками $\xi(\gamma_1)$ и $\xi(\gamma_2)$ найдется вершина графа Θ. Выйдем из этой вершины по ребру, не принадлежащему пути $\xi(\alpha)$, и будем идти произвольно, пока не произойдет одно из следующих событий: а) придем в вершину степени 1, б) придем в вершину пути $\xi(\alpha)$, в) придем в уже пройденную вершину. Полученный путь обозначим $\tilde{\delta}'$.

Сначала разберем случай (а) и часть случая (б). Пусть путь $\tilde{\delta}'$ не проходит через точку $\xi(\gamma_1)$ и, если он пересекает путь $\xi\alpha$ в момент, отличный от начального, то вторая вдоль пути $\tilde{\delta}'$ точка пересечения лежит выше, вдоль пути $\xi\alpha$, точки $\xi(\gamma_1)$. Обозначим через $\tilde{\delta}''$ несамопересекающийся путь в графе Θ от $\xi(\alpha(0))$ до начала пути $\tilde{\delta}'$, идущий вдоль пути $\xi\alpha$. Если $\tilde{\delta}'$ и $\tilde{\delta}''$ имеют ровно одну общую точку, являющуюся началом пути $\tilde\delta'$, то положим $\tilde\delta := \tilde\delta''\cdot\tilde\delta'$. В противном случае положим $\tilde\delta$ равным замкнутому пути, идущему сначала вдоль пути $\tilde\delta'$ от его начала до первой точки пересечения с путем $\tilde\delta''$, а затем возвращающимся вдоль пути $\tilde\delta''$.

Несамопересекающемуся пути $\tilde\delta$ в графе Θ соответствует некоторый несамопересекающийся путь δ на поверхности M, что $\xi\delta = \tilde\delta$, причем если $\tilde\delta$ замкнут, то δ тоже можно выбрать замкнутым. Индекс пересечения путей δ и β равен $\pm a_1$. Но путь β стягиваем, значит $a_1 = 0$.

Доразберем случай (б). Пусть теперь вторая вдоль пути $\tilde\delta'$ точка пересечения путей $\tilde\delta'$ и $\xi\alpha$ ниже, вдоль пути $\xi\alpha$, точки $\xi(\gamma_1)$. Рассмотрим подграф $\Theta_0 \subset \Theta$, состоящий из отрезка пути $\tilde\delta'$ до второй точки пересечения с путем $\xi\alpha$ и отрезка пути $\xi\alpha$ от начала, до нижней из упомянутой выше точки и точки $\tilde\delta'(0)$. В графе Θ_0 на отрезке от $\xi\alpha(0)$ до единственного цикла лежит единственная точка $\xi(\gamma_i)$ – сама $\xi(\gamma_1)$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что множеству точек $\xi(\gamma_i)$, лежащих на цикле в графе Θ_0, соответствует набор чисел a_i, сумма которых равна 0. Поверхность M_{Θ_0} гомеоморфна тору с дыркой. Рассмотрим отображение λ_{Θ_0}, построенное в Лемме 2.2. Из Леммы 2.2 следует, что путь $\lambda_{\Theta_0}\beta$ гомотопен $\lambda_{\Theta_0}\gamma_1^{a_1}$, т.е. краю дырки в торе, пройденному a_1 раз. Значит, путь $\lambda_{\Theta_0}\beta$ нестягиваем, а потому и путь β нестягиваем.

Случай (в) аналогичен предыдущему, только подграф Θ_0 теперь состоит из пути $\tilde\delta'$ и части пути $\xi(\alpha)$ от $\xi(\alpha(0))$ до $\tilde\delta'(0)$. $\square$

Следствие 2.5. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – набор целых чисел, что $h_{\gamma_1}^{a_1}\ldots h_{\gamma_n}^{a_n} \sim \mathrm{id}$. Если найдется путь $\alpha\colon [0;1] \to M$, что $\alpha(0), \alpha(1) \in \partial M$ и путь $\xi\alpha$ в Θ несамопересекающийся и проходит через точки $\xi(\gamma_i)$, $1 \le i \le m \le n$, то все $a_i = 0$, $1 \le i \le m$.*

Пусть дан связный граф $\bar\Theta$, все вершины которого имеют степень 1 или 3, и все вершины степени 1 которого окрашены в белый цвет. Пусть на каждом его ребре e стоит целочисленная метка $m(e) \in \mathbb{Z}$. Такой граф будем называть *графом с метками.* Определим *соотношения* на графе с метками $\bar\Theta$:

1 Если в графе $\bar\Theta$ найдется подграф $\bar\Theta'$, гомеоморфный графе Θ_1 изображенному на рис. 1, при помощи гомеоморфизма $\varrho\colon \bar\Theta' \to \Theta_j$, то все метки $m(e)$ тех ребер $e \subset \bar\Theta$, что $\varrho(e)$ является частью выделенного ребра, равна нулю.

2,3,4 Если в графе $\bar\Theta$ найдется подграф $\bar\Theta'$, гомеоморфный одному из одному из графов Θ_j, $j = 2, 3, 4$, изображенных на рис. 1, при помощи гомеоморфизма $\varrho\colon \bar\Theta' \to \Theta_j$, то сумма меток $m(e)$ тех ребер $e \subset \bar\Theta$, что $\varrho(e)$ является частью выделенного ребра, равна нулю.

Утверждение 2.6. *Пусть* $a_1, \dots, a_n$ *– набор целых чисел, что* $h_{\gamma_1}^{a_1} \dots h_{\gamma_n}^{a_n} \sim \mathrm{id}$. *В графе* Θ *на каждом ребре* e, *соответствующему окружности* γ_i, *поставим метку* $m(e) := a_i$. *Тогда полученный граф с метками удовлетворяет соотношениям.*

Замечание 2.7. Для задания скручивания Дэна h_{γ_i} не нужно знать ориентацию окружности γ_i, достаточно зафиксировать ориентацию всей поверхности. Выберем некоторую ориентацию окружности γ_i. Будем проводить скручивание Дэна правее окружности (если смотреть вдоль направления), направление скручивания выберем совпадающим с направлением на окружности. Теперь если изменить ориентацию окружности, получится такое же скручивание, сдвинутое параллельно вдоль цилиндра - окрестности γ_i. Поэтому эти сручивания гомотопны. Отсюда следует, что метки $m(e)$ на ребрах заданы независимо от ориентаций окружностей и по ним однозначно с точностью до гомотопии восстанавливается гомеоморфизм.

Пусть в графе Θ нашелся подграф Θ', гомеоморфный одному из изображенных на рис. 1. Будем использовать изотопность композиции всех скручиваний Дэна вдоль окружностей $\lambda_{\Theta'}(\gamma_i)$ в степенях a_i тождественному диффеоморфизму поверхности $M_{\Theta'}$, см. замечание к Лемме 2.2.

Пусть подграф Θ' гомеоморфен графу Θ_1. Равенство нулю суммы соответствующих a_i следует из Следствия 2.5.

Пусть подграф Θ' гомеоморфен графу Θ_2. Тогда поверхность $M_{\Theta'}$ является тором. Рассмотрим на торе кривую β с ненулевым индексом пересечения с кривой $\lambda_{\Theta'}(\gamma_1)$. Тогда индекс пересечения кривых β и $h^{a_1}_{\lambda_{\Theta'}(\gamma_1)} \dots h^{a_n}_{\lambda_{\Theta'}(\gamma_n)} \cdot \beta$ равен (с точностью до знака) сумме тех чисел a_i, что точка $\xi(\gamma_i)$ лежит в подграфе Θ' и точка $\xi_{\Theta'}(\lambda_{\Theta'}(\gamma_i))$ лежит на замкнутом ребре, отмеченном на рисунке жирным. Но $h^{a_1}_{\lambda_{\Theta'}(\gamma_1)} \sim \mathrm{id}$, откуда $h^{a_1}_{\lambda_{\Theta'}(\gamma_1)} \cdot \beta \sim \beta$. Индекс пересечения кривой β с собой равен нулю, что доказывает утверждение.

Пусть подграф Θ' гомеоморфен графу Θ_3. Если сумма a_i отлична от нуля, то неизотопность композиции скручиваний Дэна вдоль окружностей $\lambda_{\Theta'}(\gamma_i)$ в степенях a_i тождественному диффеоморфизму поверхности $M_{\Theta'}$ следует из негомотопности кривых, изображенных на рис. 2.

Пусть подграф Θ' гомеоморфен графу Θ_4. Если сумма a_i отлична от нуля, то неизотопность композиции скручиваний Дэна вдоль окружностей $\lambda_{\Theta'}(\gamma_i)$ в степенях a_i тождественному диффеоморфизму поверхности $M_{\Theta'}$ следует из негомотопности кривых, изображенных на рис. 3.

Покажем негомотопность кривых на рис. 2. Относительная фундаментальная группа поверхности $\pi_1(M; \partial M) = < a_1, a_2 >$. Кривые задают различные элементы $[a_2, a_1^{-1}]^k a_2 [a_2, a_1^{-1}]^{-k}$ и a_2.

Покажем негомотопность кривых на рис. 3. Фундаментальная группа поверхности $\pi_1(M) = < a_1, a_2, a_3, a_4 \mid [a_1, a_2] = [a_4, a_3^{-1}]^{-1} >$. Кривые задают элементы $a_2 a_4$ и $[a_1, a_2]^k a_2^2 [a_1, a_2]^{-k} a_4$. Если эти элементы сопряжены, то из утверждения **??** следует $a_2 = u_1^{-1}[a_1,a_2]^k a_2^2 [a_1,a_2]^{-k} u_2$ и $a_4 = u_2^{-1} a_4 u_1$, где $u_1 = [a_1,a_2]^m = [a_4, a_3^{-1}]^{-m}$ и $u_2 = [a_1,a_2]^n = [a_4, a_3^{-1}]^{-n}$. Отсюда и из теоремы 2.6 из [2] получаем $m = k$, $n = k$, $m = 0$, $n = 0$, откуда $k = 0$. □

В силу Утверждения 2.6, для доказательства Теоремы 2.1 осталось доказать следующую Лемму.

Лемма 2.8. *Если граф с метками* $\bar\Theta$ *удовлетворяет соотношениям, то все метки равны нулю.*

Случай 1. Предположим, что в графе $\bar\Theta$ есть хотя бы одна вершина степени 1. Покажем, что в графе $\bar\Theta$ найдется подграф Θ', гомеоморфный одному из графов $\Theta_j \subset \Theta$, $j = 1,2,3,5,6,7$ см. рис. 1, при помощи гомеоморфизма $\varrho\colon\ \Theta' \to \Theta_j$. От каждого из подграфов Θ_j, $j = 2,3,5,6,7$, потребуем, чтобы ребро e было единственным ребром с ненулевой меткой, для которого множество $\varrho(e)$ является подмножеством выделенного ребра графа Θ_j. От графа Θ_1 потребуем, чтобы множество $\varrho(e)$ являлось подмножеством выделенного ребра графа Θ_1.

Если найдется несамопересекающийся путь $\alpha\colon\ [0;1] \to \bar\Theta$, что точки $\alpha(0)$ и $\alpha(1)$ являются белыми вершинами, и путь α проходит через ребро e, то находим подграф Θ_1. Далее считаем, что такого пути не найдется.

Пусть x – произвольная вершина степени 1. Пусть ребро e на графе $\bar\Theta$ – ближайшее к вершине x среди ребер с ненулевой меткой. Рассмотрим кратчайший путь из вершины x, содержащий ребро e. Обозначим этот путь $\tilde\delta''\colon\ [0;1] \to \bar\Theta$, $A := \tilde\delta''(1)$.

Если $A \in \tilde\delta''(0;1)$, то отрезок пути $\tilde\delta''$ между двумя прохождениями точки A образует подграф Θ_2. Пусть далее $A \notin \tilde\delta''(0;1)$.

Из вершины A выходит хотя бы 2 открытых ребра e_1 и e_2, не содержащихся в $\tilde\delta''$. Если между этими ребрами есть путь, не пересекающий $\tilde\delta''$, в том числе вершину A, то мы нашли подграф Θ_3. Пусть такого пути нет, т.е. в $\bar\Theta \setminus \tilde\delta''[0;1]$ ребра e_1 и e_2 лежат в разных компонентах связности. Если между ребрами e_1 и e_2 есть путь, пересекающийся с $\tilde\delta''(0;1)$, то мы находим подграф Θ_5. Если ни от e_1, ни от e_2 нельзя дойти до $\tilde\delta''(0;1)$ кроме как через вершину A, то найдется подграф Θ_6. Если от ребра e_1 можно добраться до $\tilde\delta''(0;1)$ не проходя через вершину A, от ребра e_2 нельзя, то найдется подграф Θ_7.

В каждом из случаев равенство нулю метки на ребре e следует из соотношений.

Случай 2. Теперь докажем лемму в случае, когда в графе $\bar\Theta$ нет вершин степени 1. Пусть e – некоторое ребро графа $\bar\Theta$ с ненулевой меткой. Покажем, что в графе $\bar\Theta$ найдется подграф Θ', гомеоморфный одному из графов $\Theta_j \subset \Theta$, $j = 2,4,5,8,9,10,11$ см. рис. 1, при помощи гомеоморфизма $\varrho\colon\ \Theta' \to \Theta_j$. От каждого из подграфов Θ_j, $j = 2,4,5,8,9,10,11$, потребуем, чтобы ребро e было единственным ребром с ненулевой меткой, для которого множество $\varrho(e)$ является подмножеством выделенного ребра графа Θ_j (более того, для $j \neq 2$ множество $\varrho(e)$ совпадает с выделенным ребром).

Обозначим через v_1 и v_2 концы ребра e. Если $v_1 = v_2$, т.е. ребро e является петлей, то нашелся подграф Θ_2. Пусть далее $v_1 \neq v_2$. Обозначим через v_i' и v_i'', $i = 1, 2$, – вершины смежные с вершиной v_i по ребрам, отличным от e.

Предположим, что найдется путь ℓ между вершинами v_1' и v_1'', не проходящий через вершины v_1 и v_2. Если найдется аналогичный путь для вершин v_2' и v_2'', то мы находим подграф Θ_4 или Θ_5, если указанные пути не пересекаются или пересекаются соответственно. Пусть такого пути между v_2' и v_2'' не найдется. Если от каждой из вершин v_2' и v_2'' можно добраться до вершины v_1, не проходя через вершину v_2, то находим подграф Θ_5. Если от v_2' можно добраться до v_1, не проходя через вершину v_2, а от v_2'' так добраться нельзя, то находим подграф Θ_8. Если добраться до v_1, не проходя через вершину v_2, нельзя ни от v_2', ни от v_2'', то находим подграф Θ_9.

Предположим теперь, что нет пути между вершинами v_i' и v_i'', не проходящего через вершины v_1 и v_2, для каждого $i = 1, 2$. Более того, можем предположить, что вовсе нет циклов в $\bar{\Theta}$, содержащих одну из вершин v_i, $i = 1, 2$, и не содержащих другую. Если от v_1 невозможно добраться до v_2 кроме как по ребру e, то находим подграф Θ_{10}. Пусть найдется несамопересекающийся путь ℓ, идущий от v_1' до v_2' и не проходящий через v_1 и v_2. От каждой из вершин v_1'' и v_2'' невозможно добраться до l, не проходя через v_1 и v_2. Если есть путь от v_1'' до v_2'', не проходящий через v_1 и v_2, то мы находим подграф Θ_5. Если такого пути нет, то найдется подграф Θ_{11}.

В каждом из случаев равенство нулю метки на ребре e следует из соотношений. □

Теорема 2.1 доказана.

3 Гомотопность диффеоморфизмов скручиваниям Дэна

Пусть снова M – компактная ориентируемая поверхность. Обозначим через F пространство функций Морса на поверхности M, у которых p локальных минимумов, q седловых критических точек и r локальных максимумов.

Определение 3.1. Пусть $\bar{M}$ – замкнутая поверхность, полученная из M стягиванием в точку каждой граничной окружности. Любой диффеоморфизм поверхности M индуцирует гомеоморфизм поверхности $\bar{M}$, а потому индуцирует автоморфизм группы гомологий $H_1(\bar{M})$. Рассмотрим в группе

$\mathrm{Diff}(M)$ нормальную подгруппу $\mathcal{T} \subset \mathrm{Diff}(M)$, состоящую из диффеоморфизмов $h \in \mathrm{Diff}(M)$, индуцирующих тождественный автоморфизм группы $H_1(\bar{M})$. Подгруппу $\mathcal{T}$ назовем *группой Торелли* поверхности M.

Для каждой функции $f \in F$ обозначим через G_f подграф критического графа функции f, состоящий из компонент связности, содержащих седловые критические точки. Дополнение $M \backslash G_f$ состоит из открытых цилиндров Z_ℓ, $1 \le \ell \le k$, полуоткрытых цилиндров и открытых дисков. В каждом цилиндре Z_ℓ выберем простую кривую γ_ℓ, гомотопную основанию цилиндра. Обозначим через h_{γ_ℓ} скручивание Дэна вокруг кривой γ_ℓ.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in F$ – функция Морса, $\{x_i\}$, $\{y_j\}$, $\{z_k\}$ – множества ее точек локального минимума, седловых критических точек и точек локального максимума соответственно, а диффеоморфизм $h \in \mathcal{T}$, причем $f \circ h = f$ и $h|_{\{x_i\}\cup\{z_k\}} = \mathrm{id}_{\{x_i\}\cup\{z_k\}}$. Тогда $h|_{\{y_j\}} = \mathrm{id}_{\{y_j\}}$ и h гомотопен в пространстве гомеоморфизмов $(M \setminus (\{x_i\} \cup \{z_k\}), \{y_k\}) \to (M \setminus (\{x_i\} \cup \{z_k\}), \{y_k\})$ элементу решетки $< h_{\gamma_1}, \ldots, h_{\gamma_k} >$.*

Доказательство. Обозначим через $p_f \colon M \to W_f$ естественную проекцию поверхности M на граф Риба W_f. Покажем сначала, что индуцированный диффеоморфизмом h автоморфизм $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ графа Риба W_f сохраняет все вершины и все ребра графа W_f. Все вершины степени 1 сохраняются, так как h сохраняет все компоненты края и критические точки локального минимума и максимума. Предположим, что найдутся вершины графа W_f, не сохраняемые отображением $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Среди всех таких вершин обозначим через v' ту, расстояние от которой до ближайшей к ней вершине степени 1 минимально, а через v'' ее образ при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Рассмотрим кратчайший путь от вершины v' до ближайшей к ней вершины степени 1 и обозначим через v вершину, следующую за v' вдоль этого пути. Тогда v переходит в себя при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$, а ребро $v'v$ переходит в ребро $v''v$.

Покажем, что найдется простой путь между вершинами v' и v'', не проходящий через v. Рассмотрим граф $W_f \backslash v$, полученный из W_f удалением вершины v и всех выходящих из нее ребер, и связную компоненту $W_f \backslash v(v')$ вершины v' в $W_f \backslash v$. Если связная компонента $W_f \backslash v(v')$ состоит только из вершины v', то v' при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ переходит в себя, так как в графе W_f она либо является вершиной степени 1, либо соединена с v хотя бы двумя ребрами, образующими простой цикл. Если $W_f \backslash v(v')$ содержит цикл или вершину степени 1 графа W_f, то связная компонента $W_f \backslash v(v')$ переходит в себя при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$, и потому между v' и v'' есть путь, не проходящий через v. В противном случае $W_f \backslash v(v')$ является деревом, и потому в ней найдется вершина v''', отличная от v' и смежная только с одной вершиной из $W_f \backslash v(v')$. Тогда v''' смежна с вершиной v. Цикл, состоящий из пути от v' до v''' по связной компоненте $W_f \backslash v(v')$ и ребер $v'''v$ и vv', переходит в себя при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Поэтому связная компонента $W_f \backslash v(v')$ переходит в себя при $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$, и потому между v' и v'' есть путь, не проходящий через v .

Простой путь между вершинами v' и v'' , не проходящий через вершину v , вместе с ребрами $v''v$ и vv' образует простой цикл. В силу $h \in \mathcal{T}$ каждый простой цикл на графе W_f переходит при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ в себя с сохранением ориентации. Это противоречит тому, что ребро vv' простого цикла переходит в ребро vv'' , и вершина v переходит в себя. Таким образом, все вершины графа W_f сохраняются оторбажением $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$. Если некоторое ребро не сохраняется этим отображением, то оно переходит в ребро, соединяющее ту же пару вершин. Тогда ребро и его образ образуют цикл, переходящий при отображении $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ в себя со сменой ориентации, что противоречит $h \in \mathcal{T}$.

Теперь покажем, что диффеоморфизм h сохраняет все вершины и ребра графа G_f . Из того, что отображение $p_f \circ h \circ p_f^{-1}$ сохраняет все вершины графа W_f следует, что h переводит каждую связную компоненту графа G_f в себя. Если диффеоморфизм h переводит в себя некоторую вершину графа G_f , т.е. седловую критическую точку функции f , то он либо переводит все инцидентные ей полуребра в себя, либо переставляет каждое полуребро с противоположным ему полуребром. Значит, если диффеоморфизм h сохраняет некоторое ориентированное ребро графа G_f , то он сохраняет все вершины и ребра связной компоненты.

Предположим, что найдется связная компонента G'_f графа G_f , в которой диффеоморфизм h переставляет все ребра. Покажем, что в поверхности M есть некоторая окрестность этой компоненты, в которой нет неподвижных точек диффеоморфизма h , отличных от вершин графа G_f . Зафиксируем на поверхности M некоторую риманову метрику. Пусть число ε меньше всех расстояний между различными связными компонентами графа G_f и длин всех ребер графа G_f . Существует такое число $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$, что образ ε' -окрестности V'_j каждой вершины y_j связной компоненты G'_f содержится в $\frac{\varepsilon}{3}$ -окрестности V_k вершины $y_k = h(y_j)$ той же компоненты. Если вершина y_j связной компоненты G'_f переходит в себя, то h переставляет каждое инцидентное ей полуребро с противоположным ему полуребром, а потому в V'_j нет неподвижных точек, отличных от самой вершины y_j . Если вершина y_j переходит в другую вершину y_k , то V'_j не пересекается со своим образом, содержащимся в V_k , а потому в V'_j нет неподвижных точек. Рассмотрим на M непрерывную функцию $\rho(x) := \rho(x, h(x))\colon M \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке расстояние до ее образа при действии h . На части каждого ребра $y_{j_1}y_{j_2}$ связной компоненты G'_f вне окрестностей V'_{j_1} и V'_{j_2} концов ребра функция $\rho(x)$ положительна. Поэтому можно выбрать число ε'' , что на ε'' -окрестности такой части каждого ребра в поверхности M функция $\rho(x)$ будет положительна, а потому в этой окрестности не будет неподвижных точек диффеоморфизма h . Выберем теперь ε''', что связная компонента M' поверхности $f^{-1}[f(G'_f)-\varepsilon'''; f(G'_f)+\varepsilon''']$, содержащая G'_f, содержится в объединении окрестностей V'_j вершин и ε''-окрестностей частей ребер, лежащих вне V'_j.

Отображение $h|_{M'}$ является диффеоморфизмом поверхности M' и не имеет неподвижных точек отличных от вершин графа G_f. Пусть $\bar{M}'$ – поверхность, полученная из M' стягиванием каждой граничной окружности в точку. Функция f постоянна на каждой граничной окружности поверхности M', поэтому определена функция $\bar{f}\colon \bar{M}' \to \mathbb{R}$, совпадающая с f во внутренних точках поверхности M'. Так как h действует тождественно на графе Риба W_f, то $h|_{M'}$ переводит в себя все граничные окружности поверхности M'. Поэтому определен гомеоморфизм $\bar{h}$ поверхности $\bar{M}'$ в себя, сохраняющий функцию $\bar{f}$ и переводящий каждую точку минимума или максимума функции $\bar{f}$ в себя. По выбору поверхности M', у этого гомеоморфизма нет неподвижных точек отличных от критических точек функции $\bar{f}$.

Вычислим индексы неподвижных точек гомеоморфизма $\bar{h}$. Пусть $x \in \bar{M}'$ – точка минимума или максимума функции $\bar{f}$. Рассмотрим в некоторой окрестности точки x метрику и евклидовы координаты, в которых некоторая линию уровня функции $\bar{f}$ является окружностью с центром в точке x. Для каждой точки x' этой окружности вектор из точки x' в точку $\bar{h}(x')$ этой окружности не может быть сонаправлен с вектором из точки x в точку x'. Поэтому $\mathrm{ind}_x\bar{h} = 1$.

Пусть y – седловая критическая точка функции $\bar{f}$. В координатах Морса имеем $d^2\bar{f}|_y = (1,0,0,-1)$. Так как гомеоморфизм $\bar{h}$ сохраняет функцию $\bar{f}$, то $\bar{h}^*|_y d^2\bar{f}|_y = d^2\bar{f}|_y$. Пусть в координатах Морса $d\bar{h}|_y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =: A$. Тогда $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}A^T = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & ac-bd \\ ac-bd & c^2-d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда $A = \pm\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi \end{pmatrix}$. Так как $\bar{h}$ переставляет инцидентные вершине y полуребра графа G_f, то у $d\bar{h}|_y$ оба собственных значения отрицательны, откуда $A = -\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi \end{pmatrix}$. Значит

$$\mathrm{ind}_y\bar{h} = \mathrm{sgn}\ \det(\mathrm{A}-\mathrm{E}) = \mathrm{sgn}\ \det\begin{pmatrix} -\mathrm{ch}\,\chi-1 & -\mathrm{sh}\,\chi \\ -\mathrm{sh}\,\chi & -\mathrm{ch}\,\chi-1 \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\,(2+2\,\mathrm{ch}\,\chi) = 1.$$

Следовательно количество неподвижных точек гомеоморфизма $\bar{h}$ равняется сумме индексов неподвижных точек, и по теореме Лефшица равняется $\sum_{k=0}^{2}(-1)^k \mathrm{tr}\,\bar{h}_k$, где $\bar{h}_k\colon H_k(\bar{M}';\mathbb{R}) \to H_k(\bar{M}';\mathbb{R})$ – индуцированный гомеоморфизмом $\bar{h}$ гомоморфизм гомологий. В силу $\bar{h}_0 = \mathrm{id}$ имеем $\mathrm{tr}\,\bar{h}_0 = 1$. Так как $\bar{h}$ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом, то $\bar{h}_2 = 1$. Существует непрерывное сюръективное отображение $\mu\colon M \to \bar{M}'$, что $\mu\circ h = \bar{h}\circ\mu$, причем $h \in \mathcal{T}$, поэтому $\bar{h}$ лежит в группе Торелли для $\bar M'$. Значит, $\operatorname{tr}\bar h_1 = \dim H_1(\bar M';\mathbb{R})$. Получаем, что

$$0 \le |\operatorname{Fix}\bar h| = \sum_{x\in \operatorname{Fix}\bar h} \operatorname{ind}_x \bar h = \chi(\bar M') = 2-2g'.$$

Если $g'=0$, то $\bar M'$ – сфера, и у гомеоморфизма $\bar h$ ровно две неподвижные точки. Так как $\bar h$ сохраняет все точки минимума и максимума функции $\bar f$, то у функции $\bar f$ на сфере ровно один максимум и ровно один минимум, а значит нет седловых критических точек, что противоречит выбору поверхности M' . Если $g'=1$, то у гомеоморфизма $\bar h$ нет неподвижных критических точек, что противоречит сохранению гомеоморфизмом h всех точек минимума и максимума функции $\bar f$. Полученное противоречие показывает, что диффеоморфизм h сохраняет все вершины и ребра графа G_f .

Теперь покажем гомотопность диффеоморфизма h в пространстве гомеоморфизмов, сохраняющих функцию f , элементу решетки $< h_{\gamma_1},\dots,h_{\gamma_1} >$. Будем строить гомотопию отдельно в каждом диске Q_j , являющимся компонентой связности точки w_j локального минимума или максимума в множестве $M\backslash G_f$, полуоткрытом цилиндре $\hat Q_j$, являющемся компонентой связности граничной окружности $\delta_j\subset\partial M$ в множестве $M\setminus G_f$, и каждом цилиндре Z_ℓ , являющемся компонентой связности множества множества $M\backslash G_f$. В цилиндре Z_ℓ выберем путь γ из седловой точки на нижнем основании цилиндра в седловую точку на верхнем основании, вдоль которого функция f монотонна. Замкнутый путь $\gamma^{-1}\cdot(h\circ\gamma)$ гомотопен некоторой степени $k\in\mathbb{Z}$ пути γ_ℓ . Нам достаточно построить гомотопию диффеоморфизма $h' := h_{\gamma_\ell}^{-k}\circ h|_{Z_\ell}$ в тождественный id_{Z_ℓ} . Рассмотрим универсальное накрытие $\tilde Z_\ell \cong [f(\gamma(0)); f(\gamma(1))]\times\mathbb{R}$ цилиндра Z_ℓ и координаты (f,φ) на нем, чтобы поднятие $\tilde\gamma$ пути γ совпадало с $(f,0)$. Поднимем диффеоморфизм h' до диффеоморфизма $\tilde h'\colon \tilde Z_\ell\to \tilde Z_\ell$ и будем гомотопировать его в тождественный. Диффеоморфизм h' , а значит и диффеоморфизм $\tilde h'$, сохранает функцию f . Рассмотрим гомотопию, переводящую $\tilde h'$ в $\mathrm{id}_{\tilde Z_\ell}$, в процессе которой у каждой точки с постоянной скоростью меняется координата φ . Композиция этой гомотопии с проекцией $\tilde Z_\ell\to Z_\ell$ и диффеоморфизмом $h_{\gamma_\ell}^k$ дает гомотопию, переводящую $h|_{Z_\ell}$ в $h_{\gamma_\ell}^k$. Построенные гомотопии на цилиндрах Z_ℓ совпадают на границах цилиндров, т.к. строятся в пересечениях цилиндров по единому правилу. Осталось произвольно продолжить построенную гомотопию до гомотопии в дисках Q_j и цилиндрах $\hat Q_j$, переводящей диффеоморфизмы $h|_{Q_j}$ и $h|_{\hat Q_j}$ в тождественные. $\square$

[1] J.S. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy, Abelian and solvable subgroups of the mapping class group, Duke Math. J. **50**, No.4 (1983) 1107-1120

[2] Lyndon, R.; Schupp, P.E., Combinatorial group theory, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag 1977.

Рис. 1

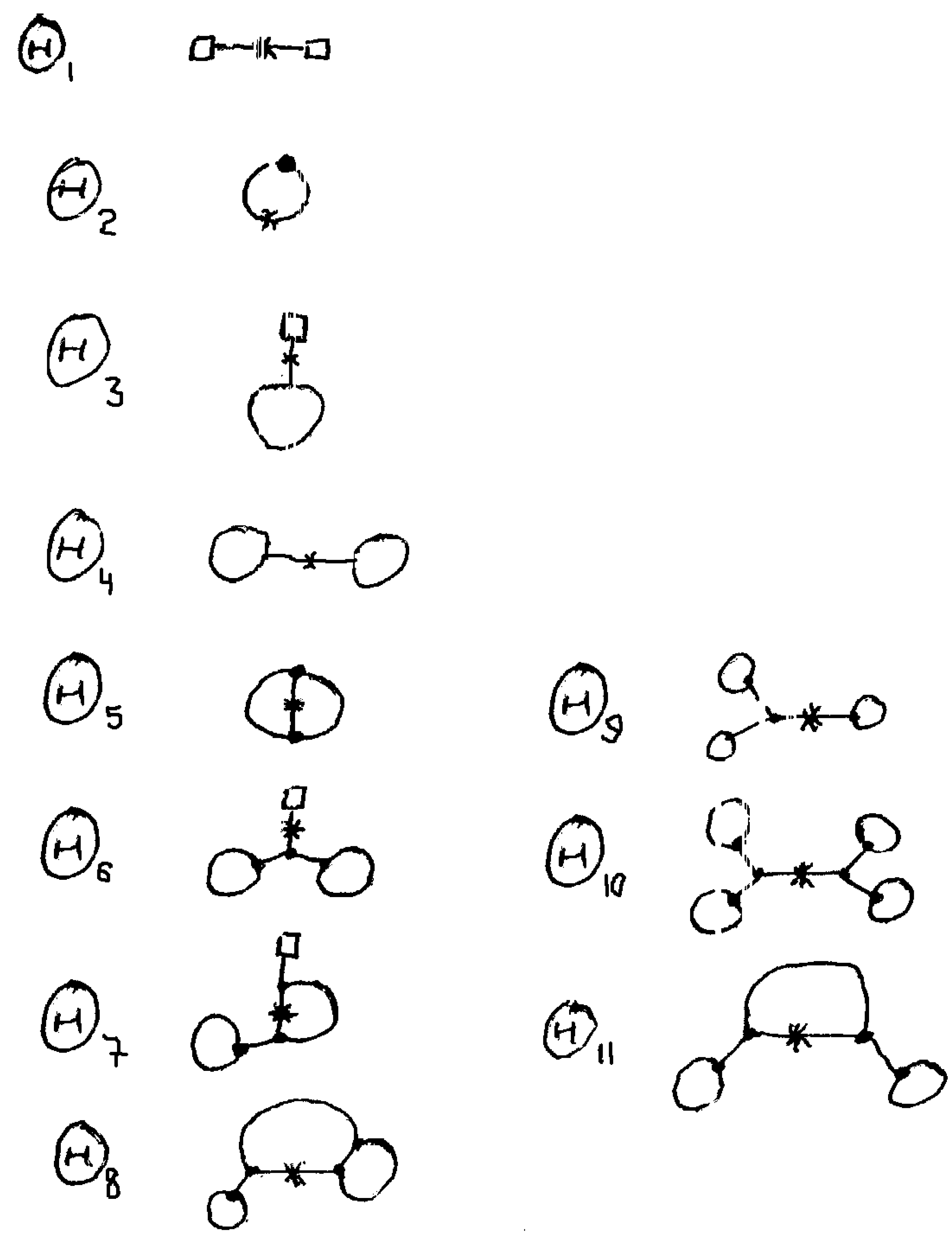

рис. 2

рис. 3