МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Дипломная Работа

Интегрируемый случай Ковалевской-Яхьи.

студентки 5 курса Н.С.Логачёвой

Научный руководитель: академик РАН А.Т. Фоменко

Москва 2009

Содержание

1 Введение

Мы будем рассматривать задачу о движении тяжёлого гиростата с постоянным гиростатическим моментом, в постановке которой важные результаты принадлежат Н.Е.Жуковскому, П.В.Харламову и другим классикам отечественной и мировой механики. В настоящее время по-прежнему не ослабевает интерес к этой проблеме. Прежде всего это связано с современными методами явного интегрирования уравнений, с качественными исследованиями динамических систем, с интегрируемостью по Лиувиллю.

Гиростату С.В.Ковалевской посвящено не так много работ. П.В.Харламов предложил рассмотреть гиростат, распределение масс которого подчинено условиям С.В.Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Им указано инвариантное соотношение, позволяющее в эллиптических функциях проинтегрировать этот частный случай. Как показал Х.М.Яхья, интеграл С.В.Ковалевской может быть обобщён на гиростат при условиях, указанных П.В.Харламовым. П.Е.Рябовым были вычислены бифуркационные множества интегралов энергии и площадей, и дана их классификация. Также им были построены диаграммы случая Яхьи (нулевая постоянная площадей) с помощью методов компьютерного моделирования. П.В.Морозов в своей работе исследовал глобальные топологические инварианты слоений Лиувилля (инварианты Фоменко-Цишанга) интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи (для случая нулевой постоянной площадей).

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям - академику А.Т.Фоменко, доценту А.А.Ошемкову, кандидату ф/м наук П.Е.Рябову, кандидату ф/м наук П.В.Морозову за постоянное внимание к работе, множество ценных замечаний и консультаций.

2 Постановка задачи Ковалевской-Яхьи

Случай интегрируемости Ковалевской-Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Приведем конкретный вид уравнений и первых интегралов этой системы.

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций f и g:

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[,]$ - коммутатор в алгебре Ли $e(3)$.

В канонических координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ на линейном пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \tag{1}$$

где

$$1 \leqslant i, j, k \leqslant 3, \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{1}(i-j)(j-k)(k-i).$$

А матрица $\Omega_{(s,r)}$ скобки Ли-Пуассона выглядит так:

$$\Omega_{(s,r)} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 & 0 & r_3 & -r_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & 0 & r_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 & r_2 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть на $e(3)^*$ задана некоторая функция Гамильтона $H(s, r)$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{s_i} = \{s_i, H\}, \quad \dot{r_i} = \{r_i, H\} \tag{2}$$

Функции $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ лежат в ядре скобки Ли-Пуассона и поэтому являются первыми интегралами уравнений (2). На совместных четырехмерных поверхностях уровня функций f_1 и f_2:

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = g\},$$

ограничение системы (2) представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности M_g^4 являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2. Симплектическая структура задается ограничением скобки Ли-Пуассона из объемлющего пространства $e(3)^*$. Система будет интегрируемой на поверхности M_g^4, если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $K(s, r)$, такая что $\{H, K\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(3)^*$, то на каждом M_g^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы. Параметр g имеет физический смысл постоянной площадей.

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана Ковалевской:

$$H = \frac{s_1^2}{A_1} + \frac{s_2^2}{A_2} + \frac{(s_3+\lambda)^2}{A_3} + a_1 r_1 + a_2 r_2$$

Как впервые указал Х.М.Яхья [1, 2] для него существует дополнительный интеграл четвертой степени:

$$K = (\frac{s_1^2 - s_2^2}{2A} + a_2 r_2 - a_1 r_1)^2 + (\frac{s_1 s_2}{A} - a_1 r_2 - a_2 r_1)^2 -$$

$$\frac{2\lambda}{A^2}(s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) - \frac{4\lambda r_3}{A}(a_1 s_1 + a_2 s_2)$$

В нашем случае, гиростат подчинён следующим условиям: главные моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 2A_3 := 2A \quad (*)$, гиростатический момент постоянен и направлен по оси динамической симметрии волчка $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda := \lambda_3 \neq 0 \quad (**)$, параметры a_1 и a_2 задают положение точки подвеса волчка в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, центр масс находится также в этой плоскости. При $\lambda = 0$ получаем классический случай Ковалевской.

Линейной заменой координат на $e(3)^*$

$$\begin{cases} s_1 = \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_1\tilde{s_1} + a_2\tilde{s_2}), \\ s_2 = \sqrt{\frac{A}{2\zeta}}(-a_2\tilde{s_1} - a_1\tilde{s_2}), \\ s_3 = \sqrt{\frac{A}{2}}\tilde{s_3}, \\ r_1 = -\frac{a_1}{\zeta}\tilde{r_1} + \frac{a_2}{\zeta}\tilde{r_2}, \\ r_2 = -\frac{a_2}{\zeta}\tilde{r_1} - \frac{a_1}{\zeta}\tilde{r_2}, \\ r_3 = \tilde{r_3}, \\ \lambda = \sqrt{\frac{A}{2}}\tilde{\lambda} \end{cases} \tag{3}$$

где $\zeta = a_1^2 + a_2^2$, добиваются исключения параметров A, a_1, a_2. В новых переменных $(\tilde{s_1}, \tilde{s_2}, \tilde{s_3}, \tilde{r_1}, \tilde{r_2}, \tilde{r_3})$, скобка Ли-Пуассона, будет пропорциональна исходной:

$$\Omega_{(\tilde{s},\tilde{r})} = \sqrt{\frac{2}{A}}\Omega_{(s,r)}$$

Интегралы $f_1,\ f_2$ останутся точно такими же, а гамильтониан и дополнительный интеграл K примут упрощенный вид:

$$H = \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4} + \frac{(s_3+\lambda)^2}{2} - r_1,$$

$$K = (\frac{s_1^2 - s_2^2}{4} + r_1)^2 + (\frac{s_1 s_2}{2} + r_2)^2 - \frac{\lambda}{2}(s_3 + 2\lambda)(s_1^2 + s_2^2) - 2\lambda r_3 s_1.$$

Здесь и далее мы для простоты используем старые обозначения для новых переменных.

Уравнения (2) в координатах записываются в виде:

$$\dot{s}_1 = -\frac{s_2}{2}(s_3 + 2\lambda), \qquad \dot{r}_1 = \frac{s_2 r_3}{2} - r_2(s_3 + \lambda),$$
$$\dot{s}_2 = -\frac{s_1}{2}(s_3 + 2\lambda) + r_3, \qquad \dot{r}_2 = -\frac{s_1 r_3}{2} + r_1(s_3 + \lambda),$$
$$\dot{s}_3 = -r_2, \qquad \dot{r}_3 = \frac{s_1 r_2}{2} - \frac{s_2 r_1}{2}.$$

Для дальнейших исследований нам будет также удобно пользоваться координатами (ω, ν), в которых уравнения Эйлера-Пуассона (движения произвольного твердого тела с закрепленной точкой) имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 + \omega_2\lambda_3 - \omega_3\lambda_2 = (e_2\nu_3 - e_3\nu_2)\gamma, \\ \frac{d\nu_1}{dt} = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3. \\ \frac{d\omega_3}{dt} + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + \omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1 = (e_1\nu_2 - e_2\nu_1)\gamma, \\ \frac{d\nu_3}{dt} = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \\ \frac{d\omega_2}{dt} + (A_1 - A_3)\omega_3\omega_1 + \omega_3\lambda_1 - \omega_1\lambda_3 = (e_3\nu_1 - e_1\nu_3)\gamma, \\ \frac{d\nu_2}{dt} = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь ω - вектор угловой скорости тела-носителя; e - единичный вектор, который направлен из неподвижной точки к центру масс; γ - параметр Пуанкаре, равный произведению веса гиростата на расстояние от его центра масс до неподвижной точки.

Связь между координатами (s, r) и (ω, ν) устанавливает следующая лемма:

Лемма. *(А.О.Ошемков [3]) Отображение* $\varphi : \mathbb{R}^6(s, r) \to \mathbb{R}^6(\omega, \nu)$ *задаваемое формулами*

$$\begin{cases} s_i = -(A_i\omega_i + \lambda_i), \\ r_i = \nu_i, \end{cases} \tag{5}$$

устанавливает изоморфизм системы (2) *и системы* (4).

При этом гамильтониан и функции f_1 и f_2 в координатах (ω, ν) с учетом соотношений $(*), (**)$ примут вид:

$$H = A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + \frac{A\omega_3^2}{2} + a_1\nu_1 + a_2\nu_2,$$

$$f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \quad f_2 = 2A\omega_1\nu_1 + 2A\omega_2\nu_2 + (A\omega_3 + \lambda)\nu_3.$$

А матрица $\Omega_{(\omega,\nu)}$ скобки Ли-Пуассона будет выглядеть так:

$$\Omega_{(\omega,\nu)} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-A\omega_3-\lambda}{4A} & \omega_2 & 0 & -\frac{\nu_3}{2} & \frac{\nu_2}{2} \\ \frac{A\omega_3+\lambda}{4A} & 0 & -\omega_1 & \frac{\nu_3}{2} & 0 & -\frac{\nu_1}{2} \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & -\nu_2 & \nu_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu_3}{2} & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_3}{2} & 0 & -\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_2}{2} & \frac{\nu_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выберем подвижные оси так, чтобы центр масс находился на первой из них: $(e_1, e_2, e_3) := (1, 0, 0)$ и сделаем замену (он позволяет избавиться от параметров A, a_1, a_2):

$$\begin{cases} \omega_i = \sqrt{\frac{\gamma}{A}}(\tilde{\omega_i}), \\ \nu_i = \tilde{\nu_i}, \\ \lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{\gamma A}, \\ \tau = t\sqrt{\frac{\gamma}{A}}, \end{cases} \tag{6}$$

здесь $\sqrt{\frac{\gamma}{A}}$ - единица измерения угловой скорости. Обратная величина $\sqrt{\frac{A}{\gamma}}$ - единица измерения времени.

Матрица формы $\Omega_{(\tilde{\omega},\tilde{\nu})}$ имеет вид:

$$\Omega_{(\tilde{\omega},\tilde{\nu})} = \frac{1}{\sqrt{\gamma A}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\tilde{\omega_3}-\tilde{\lambda}}{4} & \tilde{\omega_2} & 0 & -\frac{\tilde{\nu_3}}{2} & \frac{\tilde{\nu_2}}{2} \\ \frac{\tilde{\omega_3}+\tilde{\lambda}}{4} & 0 & -\tilde{\omega_1} & \frac{\tilde{\nu_3}}{2} & 0 & -\frac{\tilde{\nu_1}}{2} \\ -\tilde{\omega_2} & \tilde{\omega_1} & 0 & -\tilde{\nu_2} & \tilde{\nu_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{\nu_3}}{2} & \tilde{\nu_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\nu_3}}{2} & 0 & -\tilde{\nu_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{\nu_2}}{2} & \frac{\tilde{\nu_1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем уравнения движения гиростата в безразмерных величинах $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$, и вернем для новых переменных прежние обозначения (уберем тильдочки):

$$\begin{cases} 2\dot{\omega}_1 = (\omega_3 - \lambda)\omega_2, \\ 2\dot{\omega}_2 = -(\omega_3 - \lambda)\omega_1 - \nu_3, \\ \dot{\omega}_3 = \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 = \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, \\ \dot{\nu}_2 = \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, \\ \dot{\nu}_3 = \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1, \end{cases} \tag{7}$$

где точка - дифференцирование по безразмерному параметру $\tau = \sqrt{\frac{\gamma}{A}}t$.

Первые интегралы системы перейдут в следующие функции:

$$f_1 \equiv {\nu_1}^2 + {\nu_2}^2 + {\nu_3}^2 = 1.$$

$$f_2 \equiv \omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2 + \frac{(\omega_3 + \lambda)\nu_3}{2} = g,$$

$$H \equiv {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 + \frac{{\omega_3}^2}{2} - \nu_1 = h,$$

$$K \equiv ({\omega_1}^2 - {\omega_2}^2 + \nu_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \nu_2)^2 +$$

$$+2\lambda(\omega_3 - \lambda)({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) + 4\lambda\omega_1\nu_3 = k,$$

Таким образом у нас есть четыре системы координат, между которыми мы можем свободно перемещаться, пользуясь приведенными выше заменами:

$$
\begin{array}{ccc}
(s, r) & \xrightarrow{(5)} & (\omega, \nu) \\
\downarrow{\scriptstyle (3)} & & \downarrow{\scriptstyle (6)} \\
(\tilde{s}, \tilde{r}) & & (\tilde{\omega}, \tilde{\nu})
\end{array}
$$

На всяком четырехмерном симплектическом многообразии M_g^4 для заданных значений λ, g мы получаем интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы, задаваемую парой $(H_{g,\lambda}, K_{g,\lambda})$.По теореме Лиувилля, которая подробно обсуждается, например, в [4, т.1. 1.5], всякая неособая компактная совместная поверхность уровня интегралов является объединением некоторого числа двумерных торов.

Определение. *Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M_g^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов H, K.*

3 Вычисление бифуркационных диаграмм

В этом пункте мы излагаем результаты М.П.Харламова и П.Е.Рябова, которые будут использованы нами в дальнейшем, а также вводим необходимые понятия и обозначения.

Введём отображение момента, которое определяется следующим образом:

$$H \times K : M_g^4 \to \mathbb{R}^2(h, k) \tag{8}$$

Определение. *Образ критических точек при отображении момента называется бифуркуционной диаграммой $\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}$.*

Заметим, что здесь параметры λ и g зафиксированы.

Бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата.

В [5] указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм. А также найден явный вид бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Обозначим через $\Theta(g, \lambda)$ множество, которое состоит из тех значений $(g, \lambda) \in R^2(g, \lambda)$, при переходе через которые меняется вид сечения $\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}$ плоскостью $\{g = const, \lambda = const\}$. Тогда это множество устроено следующим образом:

Теорема 1. *(П.Е.Рябов)* $\Theta(g,\lambda)=\bigcup_{i=1}^{5}\Gamma_i$, *где*

$$\Gamma_1(g,\lambda)=1-4\lambda g=0,$$
$$\Gamma_2(t)=\left\{-2t^3,\sqrt{-\frac{4t^4-1}{4t^2}}\right\},t\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right],$$
$$\Gamma_3(s)=\left\{\sqrt{\frac{s^2-1}{4s}},\sqrt{-s^3}\right\},s\in[-1,0),\ ,$$
$$\Gamma_4(t)=\left\{\sqrt{-\frac{(3t^2-1)^2}{4t^3}},\sqrt{\frac{(t^2-1)^3}{t^3}}\right\},$$
$$\Gamma_5(t)=\left\{\sqrt{\frac{(t^2-1)^3}{2t^3}},\sqrt{-\frac{(3t^2-1)^2}{2t^3}}\right\},t\in[-1,0).$$

Это множество изображено на рисунке 1. Видим, что следует различать 18 типов диаграмм.

Бифуркационное множество $\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}$, согласно следующим утверждениям, выглядит так:

Теорема 2. *(П.Е.Рябов) Все критические значения отображения момента (8) в задаче С.В.Ковалевской-Х.М.Яхъи принадлежат* $\chi_1\cup\chi_2$, *т.е.*

$$\Sigma_{h,k}^{\lambda,g}\subset\chi_1\cup\chi_2,$$

где

$$\chi_1:\begin{cases}k=1,\\ h\geq -1,\end{cases}\quad \begin{cases}k=1+(h-\frac{\lambda^2}{2})^2,\\ h\geq\frac{\lambda^2}{2},\end{cases}\quad g=0;\quad \begin{cases}h=\omega_1^2+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{g}{\omega_1},\\ k=1+\omega_1^4+2g\omega_1,\end{cases}\quad g\neq 0,$$

$$\chi_2:\begin{cases}h\geq 0,\\ k=0,\end{cases}\quad \lambda=0;\quad \begin{cases}h=2g^2-\frac{\lambda^2}{2}-s+\frac{\lambda^2}{2s^2},\\ k=-4\lambda^2g^2+(s+\lambda^2)^2-\frac{\lambda^2(\lambda^2+2s^2)}{s^2},\end{cases}\quad \lambda\neq 0.$$

Теорема 3. *(П.Е.Рябов) В случае* $1-4\lambda g\geqslant 0$ *для* $s\in(-\infty,s_1)$ *на кривой* χ_2 *отсутствуют критические движения. В случае* $1-4\lambda g<0$ *для* $s\in(-\infty,s_*)$ *на кривой* χ_2 *отсутствуют критические движения. Через* s_* *обозначается одно из значений параметра на кривой* χ_2*, для которого* χ_i *пересекаются,* $s_1=\frac{-1-\sqrt{1-16\lambda^2g^2}}{8g^2}$.

Теорема 4. *(П.Е.Рябов) Все критические окружности пересекают плоскость* $\Pi=\{\omega_2=\nu_2=0\}$.

4 Классификация невырожденных положений равновесия

Итак, $M_g^4 = \{f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, f_2 = 2(\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2) + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g\}$, где f_1 и f_2 - функции, лежащие в ядре скобки Ли-Пуассона и являющиеся первыми интегралами уравнений:

$$\dot{\omega}_i = \{\omega_i, H\}, \dot{\nu}_i = \{\nu_i, H\}$$

Определение. *Точка $x \in M_g^4$ называется точкой положения равновесия, если $dH(x) = dF(x) = 0$.*

Теорема 5. *В случае Ковалевской-Яхьи точки положения равновесия на фазовом пространстве системы имеют следующие координаты:*

$$\omega_1 = \pm\sqrt{z^2-1}\frac{2gz-\lambda}{2z^2-1}, \omega_2 = 0, \omega_3 = \frac{2gz-\lambda}{2z^2-1}, \nu_1 = \pm\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}, \nu_2 = 0, \nu_3 = \frac{1}{z},$$

где z - действительный корень уравнения:

$$z(z^2-1)\frac{(2gz-\lambda)^2}{(2z^2-1)^2} - \lambda z(z^2-1)\frac{2gz-\lambda}{2z^2-1} \pm \sqrt{z^2-1} = 0.$$

Других критических точек у гамильтонианов $H_{g\lambda}$ на M_g^4 нет.

Доказательство. Координаты точек положений равновесия на фазовом пространстве системы будем искать из условия $dH|_{M^4}(x) = 0$.Тогда $sgradH(x) = 0$, а значит правые части уравнений (7) обнулятся.

$$\begin{cases} (\omega_3-\lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3-\lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_2 = 0, \\ \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_3-\lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3-\lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_2 = 0, \\ \nu_3\omega_2 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1\omega_2 = 0. \end{cases}$$

Если предположить, что $\omega_2 \neq 0$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \nu_2 = 0, \\ (\omega_3-\lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3-\lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_3 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1 = 0. \end{cases}$$

Этот вариант невозможен в силу соотношения $\Gamma = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. Таким образом необходимо $\nu_2 = \omega_2 = 0$. И система имеет вид:

$$\begin{cases} \nu_2 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, \\ 2\omega_1\nu_1 + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g. \end{cases}$$

Если $\nu_3 = 0$, тогда:

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ -\nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1^2 = 1, \\ 2\omega_1\nu_1 = 2g, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ 2\omega_1\nu_1 = 2g, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ \omega_1 = \pm g, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_3 - \lambda = 0, \\ \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ \omega_1 = \pm g, \end{cases}$$

Таким образом, если $\nu_3 = 0$, то $\lambda = 0$. И точки положений равновесия имеют координаты на M^4:

$$\omega_1 = \pm g; \omega_2 = 0; \omega_3 = 0; \nu_1 = \pm 1; \nu_2 = 0; \nu_3 = 0.$$

Пусть теперь $\nu_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, | \cdot \nu_1 \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, | \cdot \omega_1 \\ \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, | : \nu_3^2 (\nu_3 \neq 0) \\ 2\omega_1\nu_1 + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g. | : \nu_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_3\omega_1\nu_1 - \lambda\omega_1\nu_1 + \nu_3\nu_1 = 0, \\ \nu_3\omega_1^2 - \nu_1\omega_3\omega_1 = 0, \\ (\dfrac{\nu_1}{\nu_3})^2 + 1 = \dfrac{1}{\nu_3^2}, \\ 2\omega_1\dfrac{\nu_1}{\nu_3} + \omega_3 + \lambda = \dfrac{2g}{\nu_3}, \end{cases}$$

Сделаем замену переменных. Пусть $\dfrac{1}{\nu_3} = z, \dfrac{\nu_1}{\nu_3} = s$. Заметим,что $z \neq \pm 1$. Так как если $z = \pm 1 \Longrightarrow \nu_3 = \pm 1$, и из третьего уравнения системы следовало бы, что $\nu_1 = 0$, а система имела бы вид:

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 \pm 1 = 0, \\ \omega_1 = 0, \\ \nu_3 = \pm 1, \\ (\omega_3 + \lambda) = \pm 2g, \end{cases} \Longleftrightarrow \varnothing$$

(так как несовместны первые два уравнения системы)

Итак, вернёмся к замене. Сложим первые два уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} \nu_3\omega_1^2 - \lambda\omega_1\nu_1 + \nu_3\nu_1 = 0, | : \nu_3^2 \\ \nu_3\omega_1 = \nu_1\omega_3, | : \nu_3 \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2\omega_1 s + \omega_3 + \lambda = 2gz, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2\omega_1 s + \omega_3 + \lambda = 2gz, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2s^2\omega_3 + \omega_3 + \lambda = 2gz, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2+1 = z^2, \\ \omega_3 = \dfrac{2gz-\lambda}{2s^2+1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\dfrac{2gz-\lambda}{2s^2+1}, \\ s = \pm\sqrt{z^2-1}, \\ \omega_3 = \dfrac{2gz-\lambda}{2s^2+1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\omega_1^2 - \lambda\omega_1 sz + s = 0, \\ \omega_1 = \pm\sqrt{z^2-1}\dfrac{2gz-\lambda}{2z^2-1}, \\ s = \pm\sqrt{z^2-1}, \\ \omega_3 = \dfrac{2gz-\lambda}{2z^2-1}, \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение системы $s(z)$ и $\omega_1(z)$:

$$(z^2-1)z\frac{(2gz-\lambda)^2}{(2z^2-1)^2} - \lambda z(z^2-1)\frac{2gz-\lambda}{2z^2-1} \pm \sqrt{z^2-1} = 0.$$

□

Пусть на (M^4, ω) задана система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом K. Пусть точка $x \in M^4$ такова, что $dH(x) = dF(x) = 0$. Тогда на T_xM корректно определены два симплектических оператора $A_H = \Omega^{-1}d^2H$ и $A_F = \Omega^{-1}d^2F$, порождающие в алгебре Ли $sp(4,\mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $K(H,F)$.

Определение. *Положение равновесия x называется невырожленным, если подалгебра $K(H,F)$ является картановской подалгеброй в* $\mathrm{sp}(4,\mathbb{R})$.

Определение. *Коммутативная подалгебра в* $\mathrm{sp}(4,\mathbb{R})$ *является картановской если и только если она двумерна и среди её элементов найдётся линейный оператор с попарно различными собственными значениями.*

Таким образом, чтобы проверить невырожденность найденных точек положений равновесия, нужно проверить картановость подалгебры $K(H,F)$.

Для начала заметим, что операторы A_H и A_F совпадают с линеаризациями векторных полей $sgradH$ и $sgradF$ соответственно, что позволяет легко вычислять матрицы, которыми они задаются в локальных координатах. Действетельно,

$$\frac{\partial(sgradH)^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\omega^{ik}\frac{\partial H}{\partial x^k}) = \omega^{ik}\frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^k} = (\Omega^{-1}d^2H)^i_j.$$

Итак, сначала нужно убедиться, что операторы A_H и A_F линейно независимы, и затем проверить, что **некоторая** линейная комбинация

$$\lambda A_H + \mu A_F$$

имеет попарно различные собственные значения.

Невырожденные положения равновесия обладают многими замечательными свойствами. В частности их окрестности в M^4 представимы в виде почти прямого произведения 2-атомов. Это, а также другие важные свойства этого класса особенностей подробно обсуждаются в [3, т.1, гл.9].

Теорема 6. *В случае Ковалевской-Яхъи при ненулевых значения параметров g и λ точки бифуркационных диаграмм $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F, G_1, G_2, H, M, N_1, N_2, N_3, N_4$ соответствуют невырожденным положениям равновесия. Их типы указаны ниже.*

точка	*тип*
$C_1, D_2, E_1, G_2, M, N_3$	*центр-центр*
C_2, D_1, E_2, G_1	*центр-седло*
F, H, N_1, N_2, N_4	*седло-седло*

Доказательство. Будем вести доказательство теоремы в координатах (s, r), так как в этих координатах скобка Ли-Пуассона записывается проще, чем в координатах (ω, ν).

1. Проверим, что при $\lambda = 1, \mu = 0$ линейная комбинация будет иметь попарно различные собственные значения.

Рассмотрим линеаризацию векторного потока (2) на $e(3)^*$. Дифференцируя правые части уравнений (7), получаем матрицу оператора $2A_H$:

$$2A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(s_3+2\lambda) & -s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda+s_3 & 0 & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3+\lambda) & s_3 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3+\lambda) & 0 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

В точке положения равновесия ($r_2 = s_2 = 0$):

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(s_3+2\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3+2\lambda & 0 & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3+\lambda) & 0 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3+\lambda) & 0 & -s_1 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$grad f_1 = (0, 0, 0, 2r_1, 0, 2r_3)$$

$$grad f_2 = (r_1, 0, r_3, s_1, 0, s_3)$$

В качестве базиса касательного пространства к M^4 в этих точках можно взять вектора:

$$TM^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_3 & -s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \end{pmatrix}$$

Под действием оператора $2A_H$ они переходят в вектора:

$$A_H \cdot TM^4 = \begin{pmatrix} -2\lambda - s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 s_1 - r_3(2\lambda + s_3) & 2r_1 + s_1^2 - s_3(2\lambda + s_3) \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ r_3 & -2(\lambda + s_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + r_1^2 & r_1 s_1 - r_3(s_3 + 2\lambda) \\ -r_1 & s_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит матрица искомого оператора $2A_H$ в выбранном базисе на TM^4:

$$A_H|_{TM^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1 s_1 - r_3(2\lambda + s_3) & 2r_1 + s_1^2 - s_3(2\lambda + s_3) \\ 0 & 0 & r_1^2 + 1 & r_1 s_1 - r_3(s_3 + 2\lambda) \\ \frac{s_1}{r_1} & -\frac{s_1 s_3}{r_1 r_3} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{s_1}{r_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь ищем её собственные значения. Сделаем замену $a = r_1 s_1 - r_3(2\lambda + s_3), b = 2r_1 + s_1^2 - s_3(2\lambda + s_3), c = r_1^2 + 1, d = \frac{s_1}{r_1}, f = -\frac{s_1 s_3}{r_1 r_3}$.

Тогда

$$2A_H|_{TM^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & a \\ d & f & 0 & 0 \\ -1 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2A_H - tE = \begin{pmatrix} -t & 0 & a & b \\ 0 & -t & c & a \\ d & f & -t & 0 \\ -1 & d & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(t) = t^4 + (b - 2ad - cf)t^2 + (a^2 - bc)(d^2 + f),$$

Пусть $\alpha = (b - 2ad - cf), \beta = (a^2 - bc)(d^2 + f)$:

$t^4 + \alpha t^2 + \beta = 0,$

$D = \alpha^2 - 4\beta.$

Если

1. $D = 0$: корни совпадают $\Longrightarrow$ надо брать другие константы в линейной комбинации $\lambda A_H + \mu A_K$.

2. $D < 0$: четыре комплексно-сопряжённых корня $\Longrightarrow$ тип точки `Фокус-Фокус`.

3. $D > 0$:

$\beta > 0, \alpha < 0$: 4 действительных корня $\Longrightarrow$ тип точки `Седло-Седло`.

$\beta > 0, \alpha > 0$: 4 чисто мнимых корня $\Longrightarrow$ тип точки `Центр-Центр`.

$\beta < 0$: одна пара действительных и одна пара мнимых корней $\Longrightarrow$ тип точки `Центр-Седло`.

Лемма. *Знак дискриминанта D совпадает со знаком выражения:*

$$\frac{s_3(4g + s_1^3)}{r_1 r_3}. \tag{9}$$

Доказательство. $D = (b - 2ad - cf)^2 - 4(d^2 + f)(a^2 - bc)$, где

$a = r_1 s_1 - r_3(2\lambda + s_3)$,

$b = 2r_1 + s_1^2 - s_3(2\lambda + s_3)$,

$c = r_1^2 + 1$,

$d = \frac{s_1}{r_1}$,

$f = -\frac{s_1 s_3}{r_1 r_3}$.

После подстановки и упрощения получим:

$$D = \frac{16(***)^2 4 s_1 s_3 4(1 + r_1^2)(2r_1 + s_1^2 - s_3(2\lambda + s_3))}{r_1 r_3} = \frac{256(\star\star\star)^2 s_3 (1 + r_1^2)(4g + s_1^3)}{r_1 r_3}.$$

Выражения $(***)$ и $(\star\star\star)$ не приводятся в силу ненадобности и громоздкости.

□

Отметим что при проведении промежуточных выкладок мы активно пользовались пакетом символьных вычислений Wolfram Mathematica 6.0.

2. Осталось проверить, что в каждой точке положения равновесия операторы A_H и A_K линейно независимы. Из-за того, что интеграл K является сложным полиномом 4-степени сделать это не так легко. Поэтому будем вычислять лишь часть коэффициентов матрицы $A_K = (grad(\Omega \cdot gradK))^T$.

Рассмотрим точку положения равновесия x, вектор $v = (0,1,0,0,0,0) \in T_x M^4$.

Под действием оператора A_H он перейдёт в вектор $(-2\lambda - s_3, 0, 0, r_3, 0, -r_1)$, а под действием оператора A_K в вектор с координатами $(*, 0, a_{32}, *, 0, *)$. Для доказательства независимости достаточно проверить, что $a_{32} \neq 0$.

$$a_{32}(x) = \frac{\partial (sgradK)^3}{\partial s_2}(x).$$

$$dK = \begin{pmatrix} s_1^3 - \dfrac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1(s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 \\ s_2^3 - \dfrac{s_1^2 s_2}{2} - 4 s_2 r_1 + s_1 r_2 - \lambda s_2(s_3 + 2\lambda) \\ \dfrac{\lambda}{2}(s_1^2 + s_2^2) \\ \dfrac{s_1^2 - s_2^2}{2} + 2r_1 \\ s_1 s_2 + 2r_2 \\ -2\lambda s_1 \end{pmatrix}$$

$(sgradK)^3 = s_2(s_1^3 - \dfrac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1(s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3) - s_1(s_2^3 - \dfrac{s_1^2 s_2}{2} - 4 s_2 r_1 + s_1 r_2 - \lambda s_2(s_3 + 2\lambda)) + r_2(\dfrac{s_1^2 - s_2^2}{2} + 2r_1) - r_1(s_1 s_2 + 2r_2)$.

$a_{32}(x) = s_1^3 - \dfrac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1(s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 - s_1(-s_1^2 - 4r_1 + \dfrac{s_1^2}{2} - \lambda(s_3 + 2\lambda)) = 1{,}5 s_1^3 + 7 r_1 s_1 - 2\lambda r_3$.

В силу **теоремы 1** бифуркационные диаграммы внутри каждой из 18 камер гомеоморфны, а значит мы можем взять такие значения параметров g и λ внутри каждой камеры, что найденные координаты точек положений равновесия удовлетворяли соотношению : $a_{32}(x) \neq 0$.

□

5 Рисунки

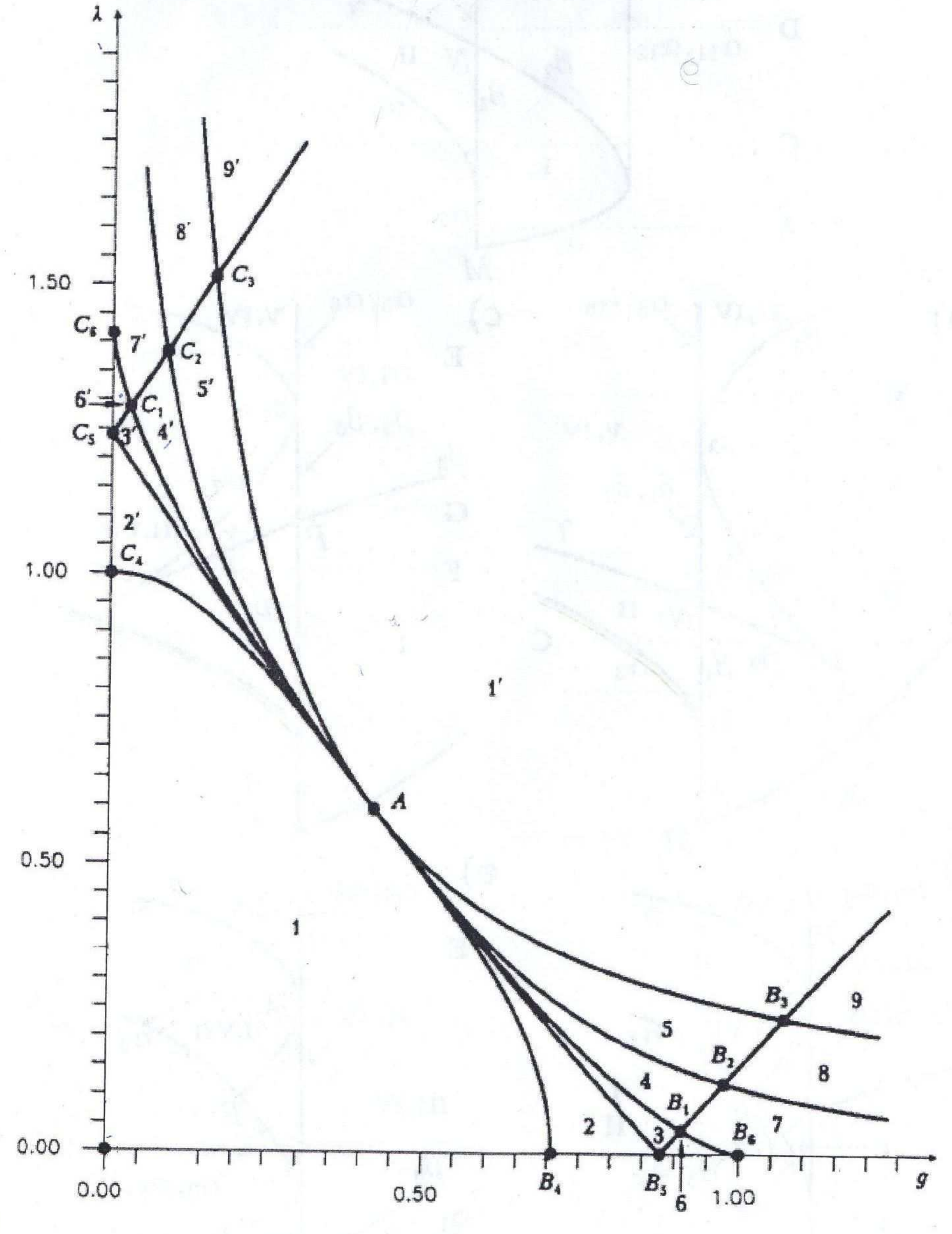
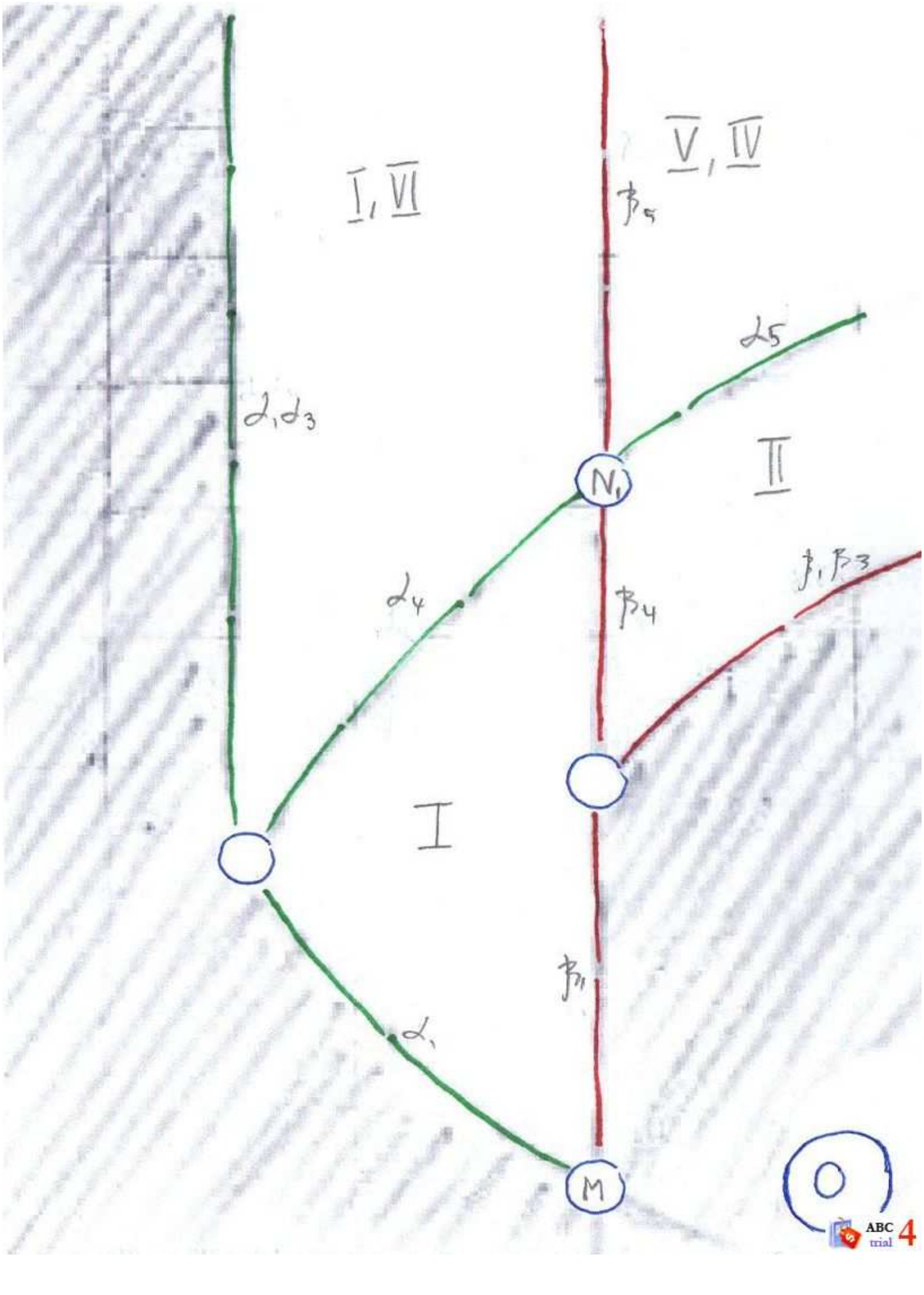
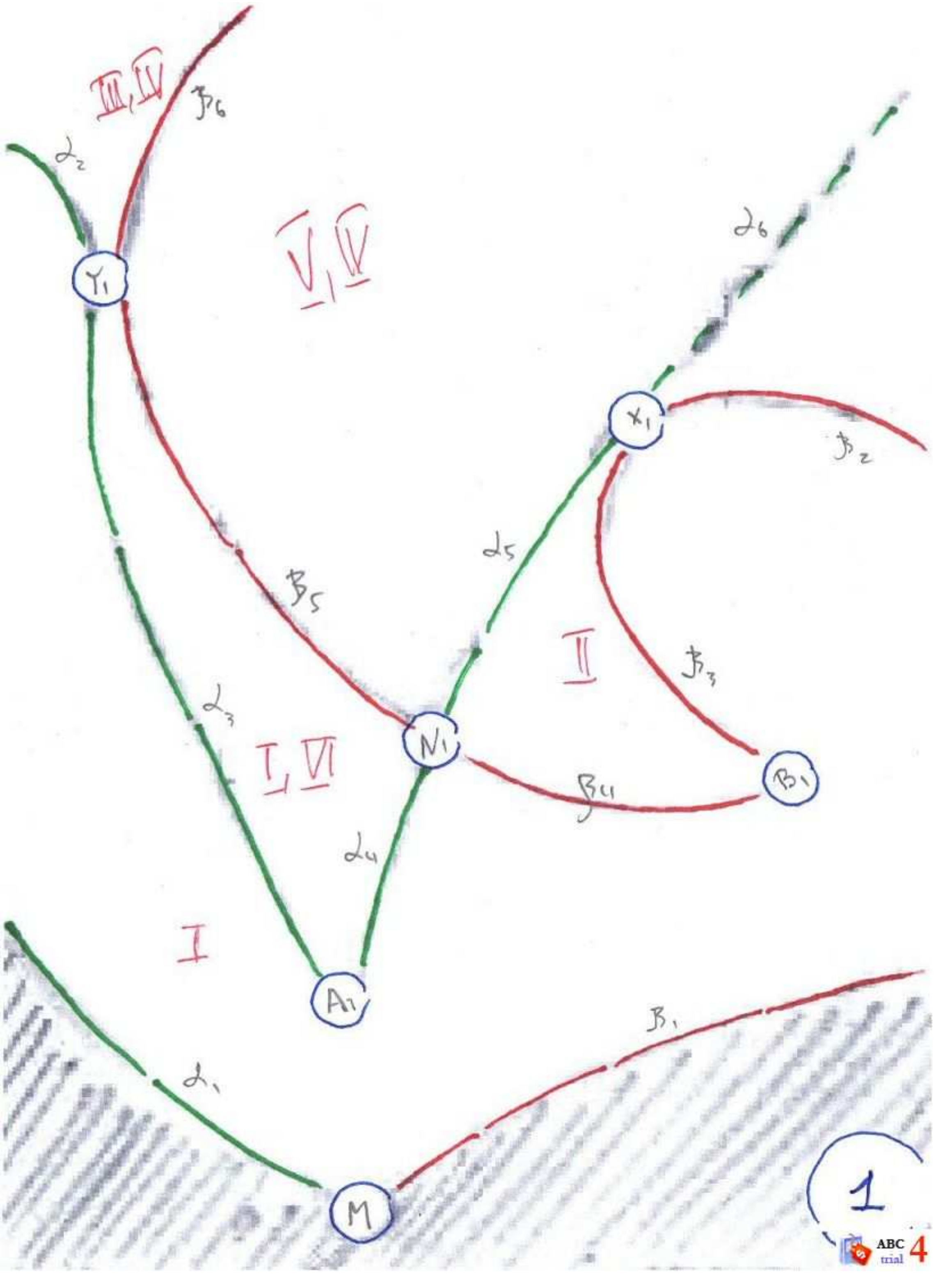
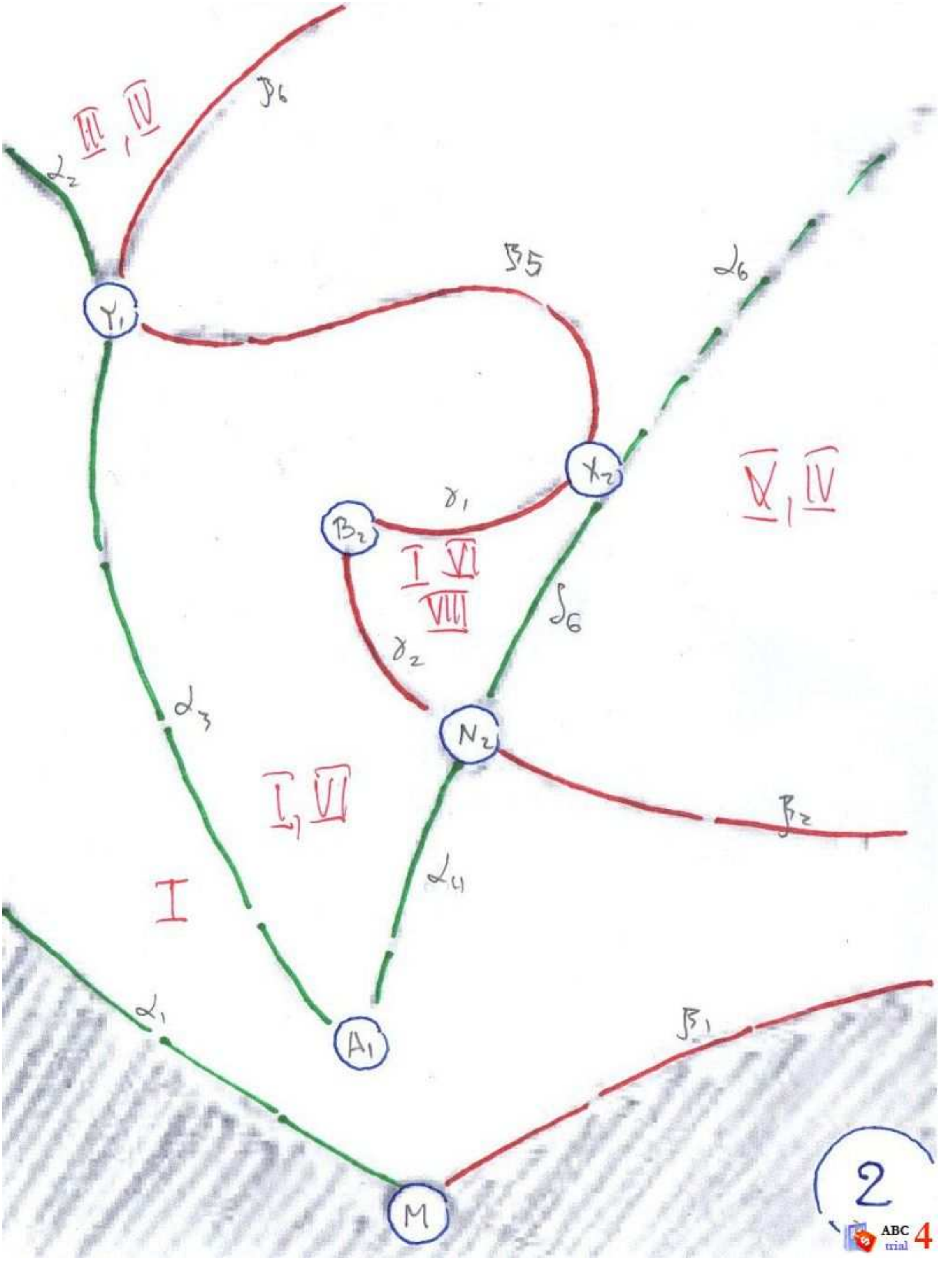


рис. 15

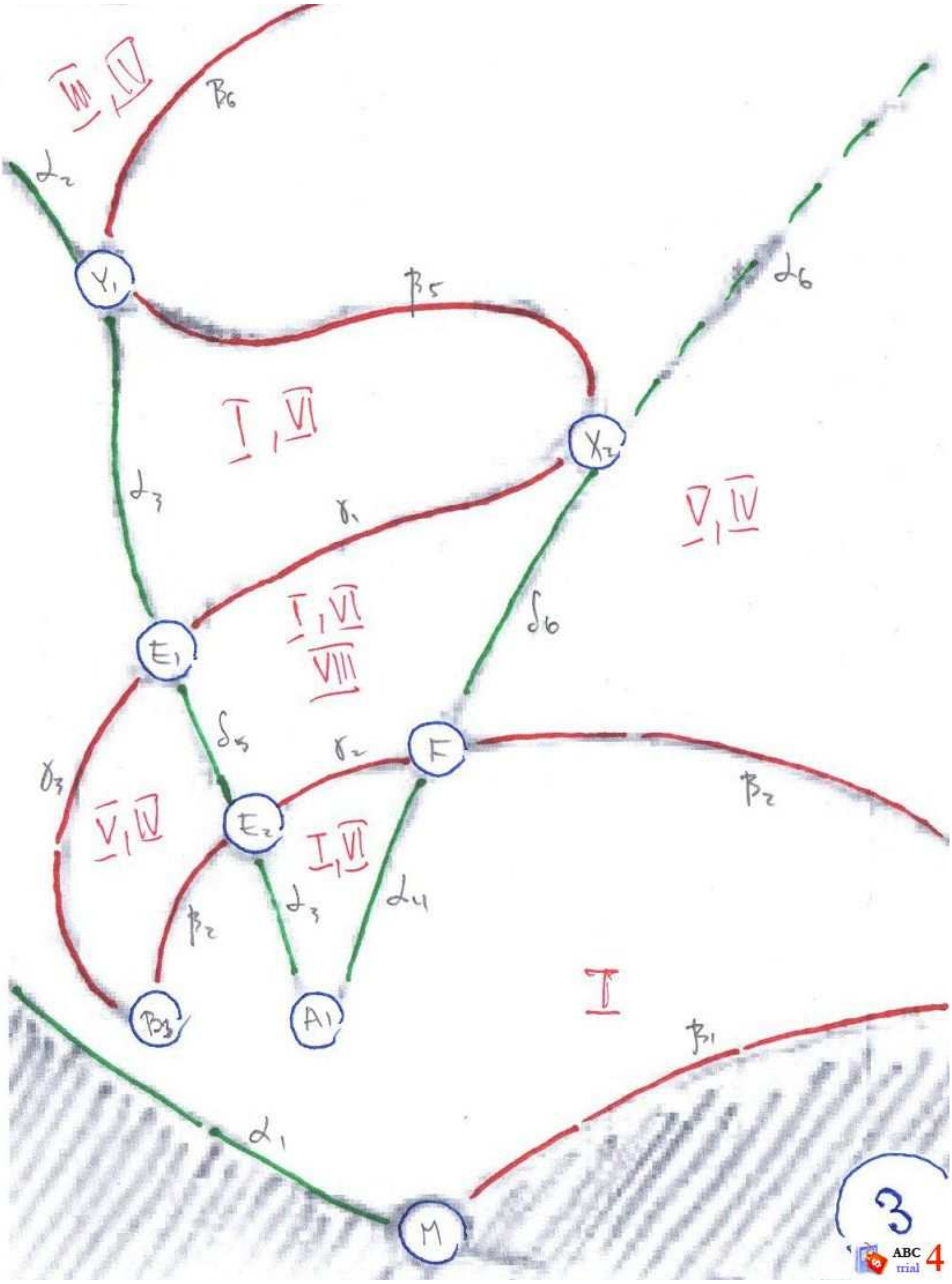


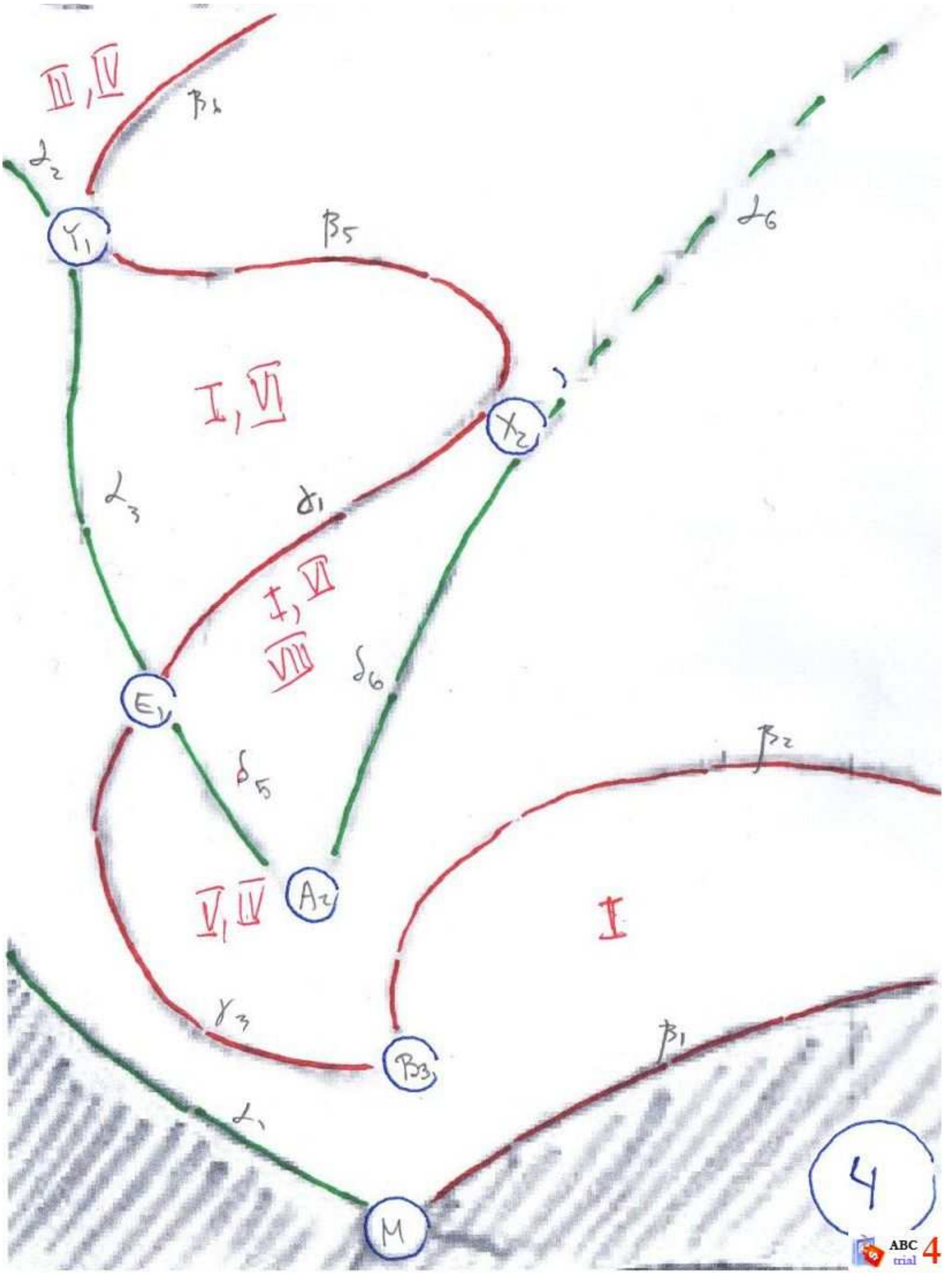
I, VI
V, IV
II
I
N₁
M
O

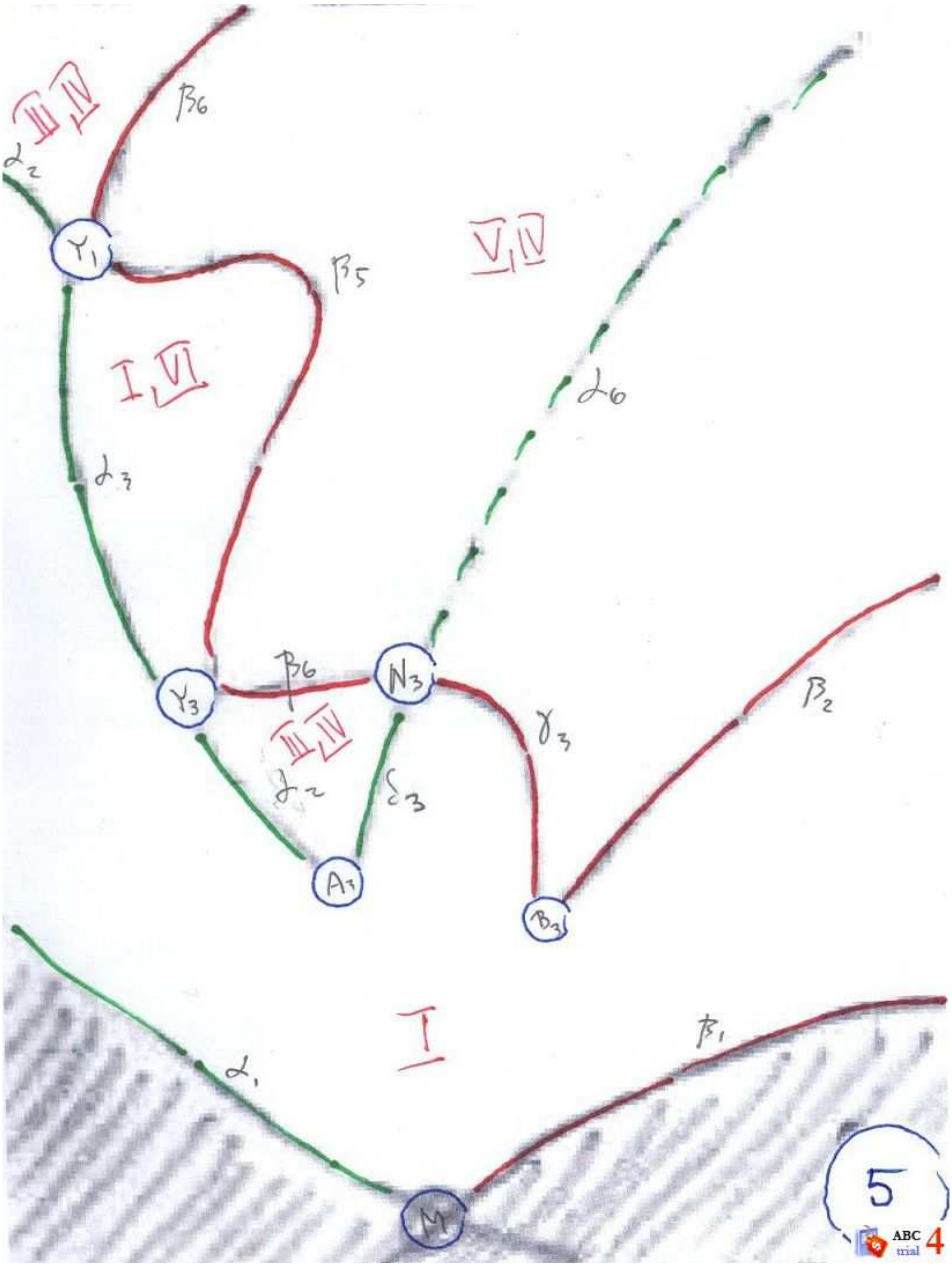

III, IV
β_6
α_2
α_6
Y_1
X_1
β_2
α_5
β_5
II
β_3
α_3
N_1
I, VI
B_1
β_4
α_4
I
A_1
β_1
α_1
M
1



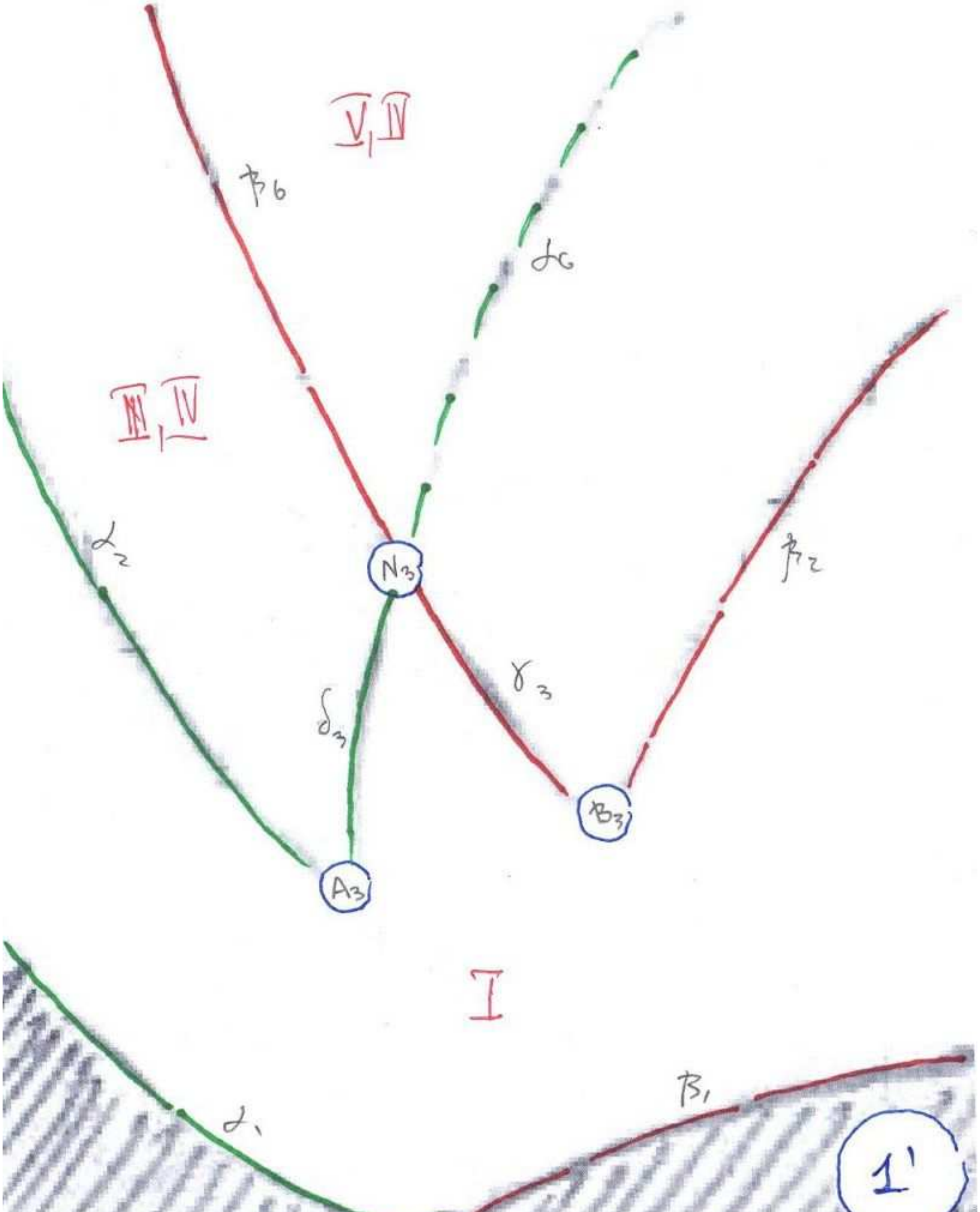
α_2
III, IV
β_6
β_5
α_6
Y_1
X_2
γ_1
B_2
V, IV
I VI
VIII
δ_6
γ_2
α_3
N_2
I, VI
β_2
α_4
I
α_1
A_1
β_1
M
2

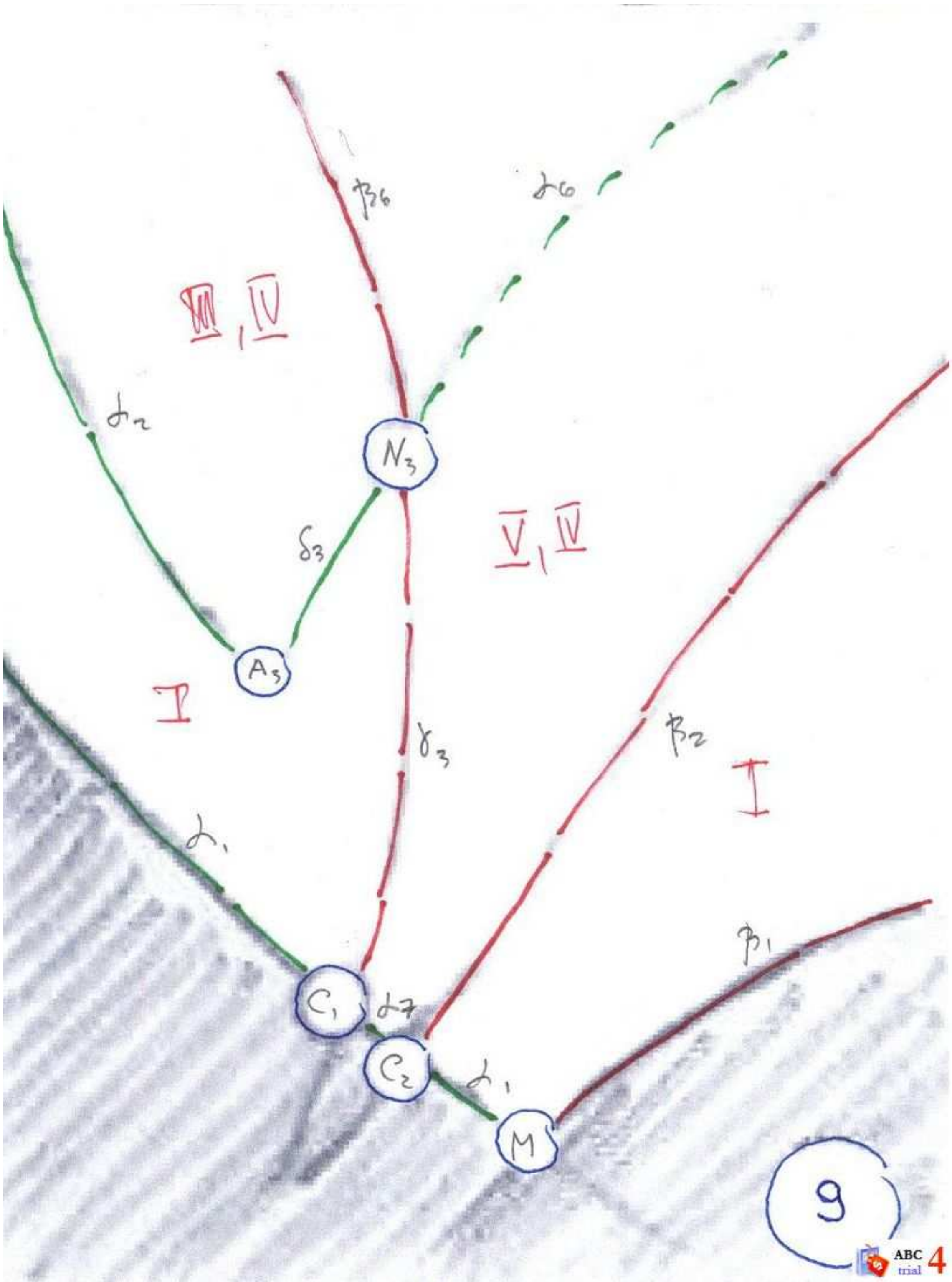

III, IV
β_6
α_2
Y_1
β_5
α_6
I, VI
X_2
α_3
γ_1
V, IV
E_1
I, VI
VIII
δ_6
δ_5
γ_2
F
β_2
γ_3
V, IV
E_2
I, VI
β_2
α_3
α_4
B_3
A_1
I
β_1
α_1
M
3

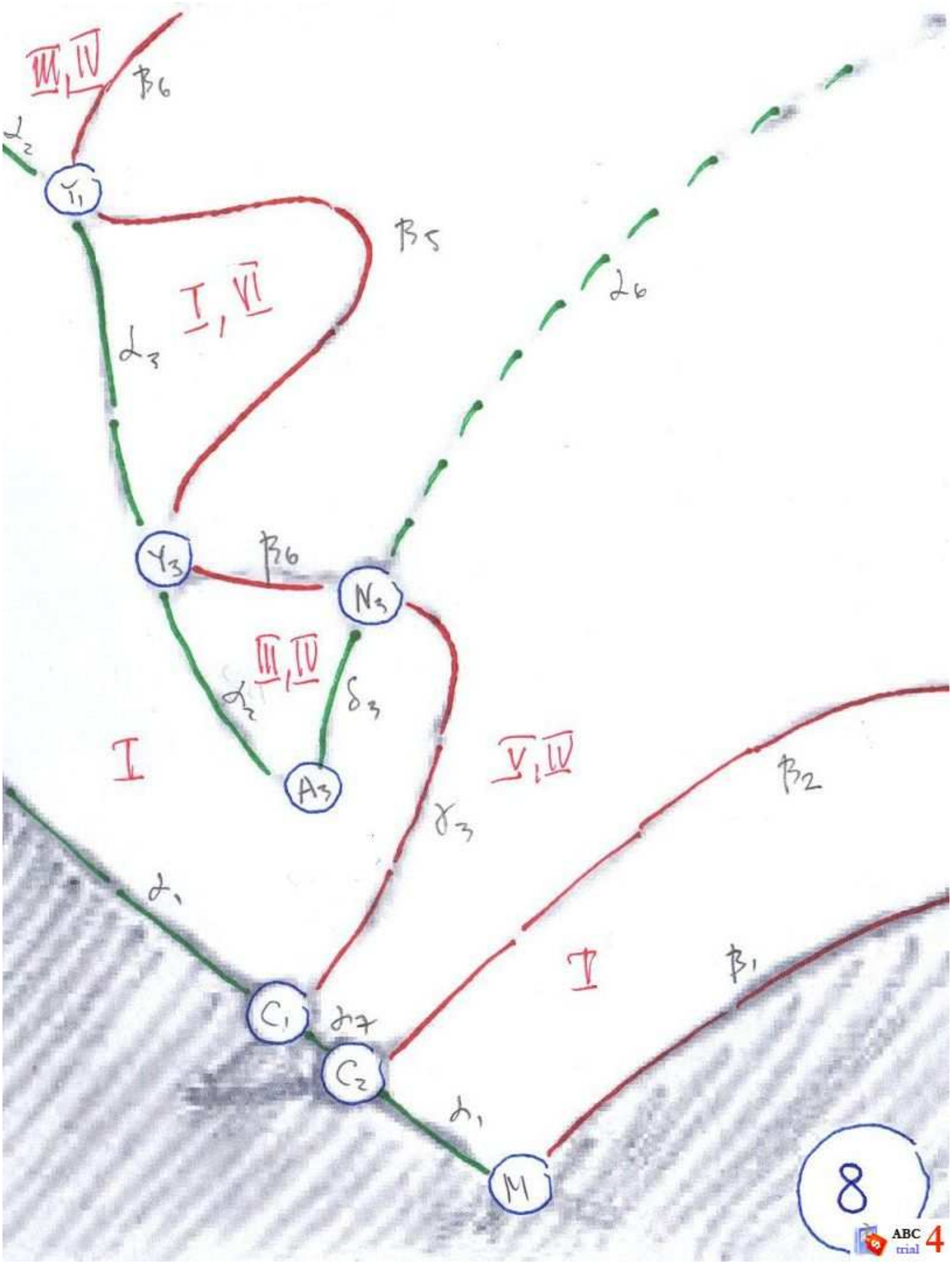

III, IV
Y1
X2
E1
A2
B3
M
I, VI
I, VI
VIII
V, IV
I
4
ABC trial 4



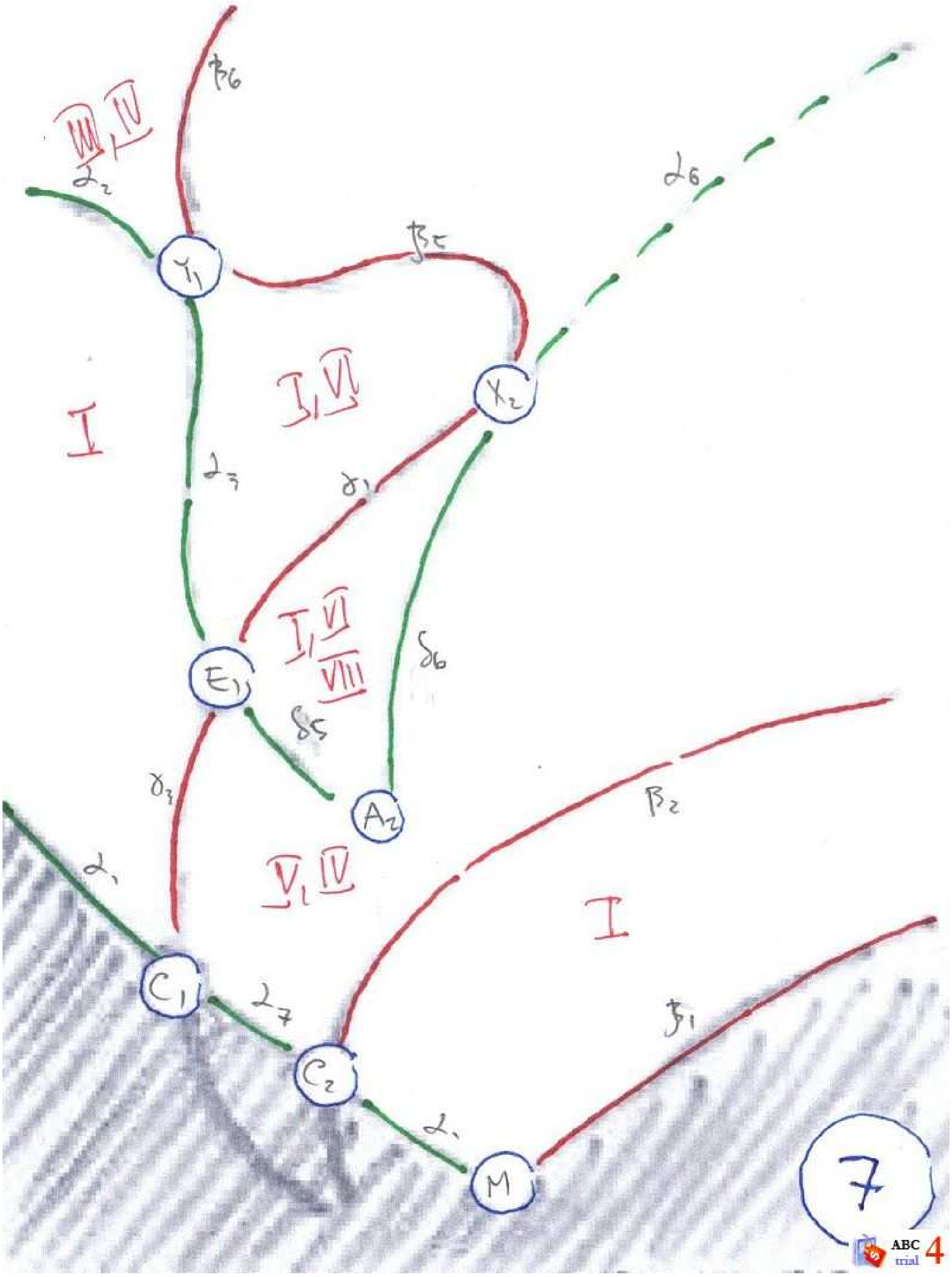
III, IV
β_6
α_2
Y_1
β_5
V, IV
I, VI
α_6
α_3
β_6
N_3
Y_3
III, IV
γ_3
β_2
γ_2
δ_3
A_3
B_3
I
β_1
α_1
M
5


V, IV
III, IV
I
N3
A3
B3
M
1'

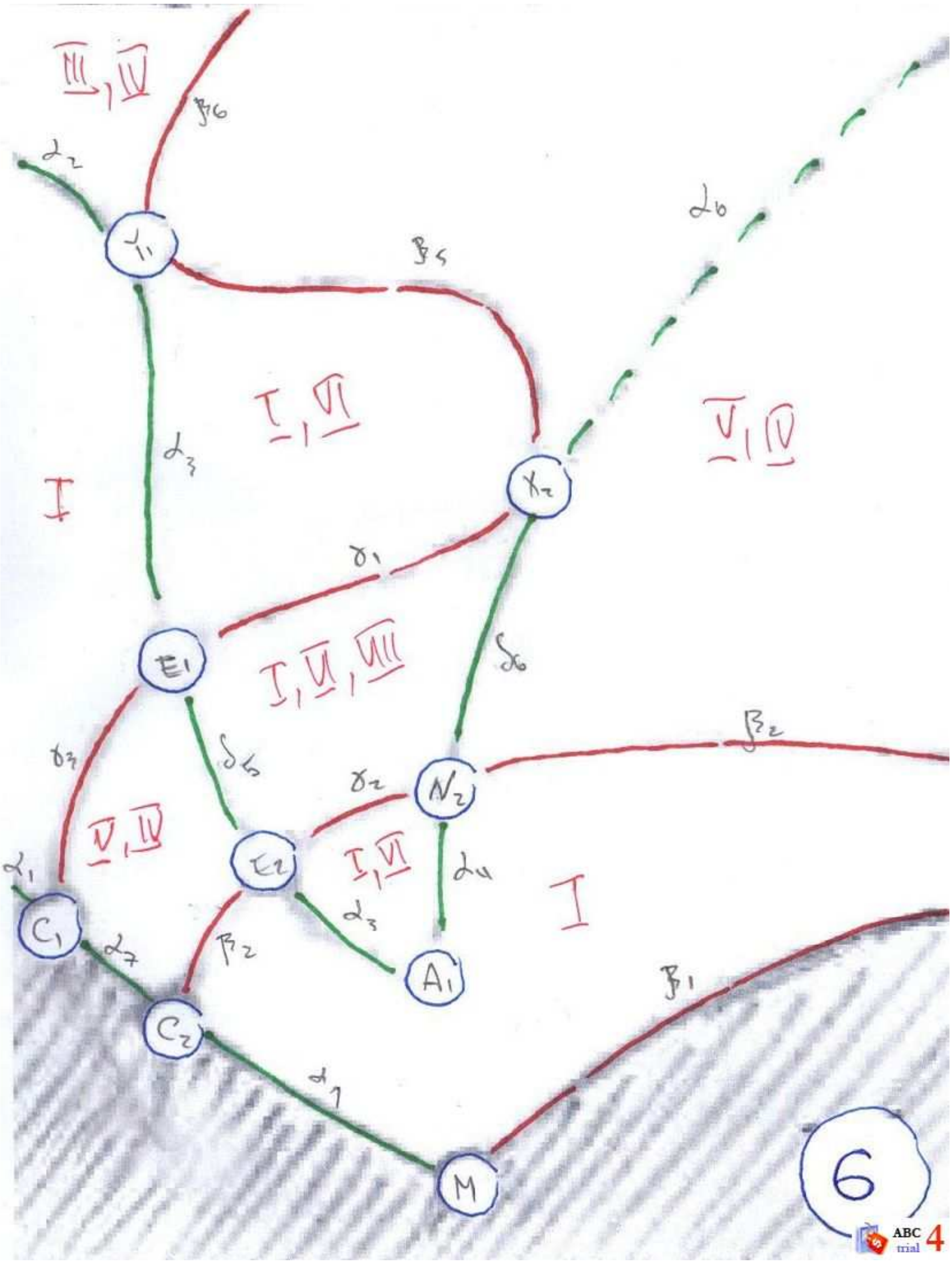

β6
α6
III, IV
α2
N3
δ3
V, IV
A3
I
γ3
β2
I
α1
β1
C1
α7
C2
α1
M
9



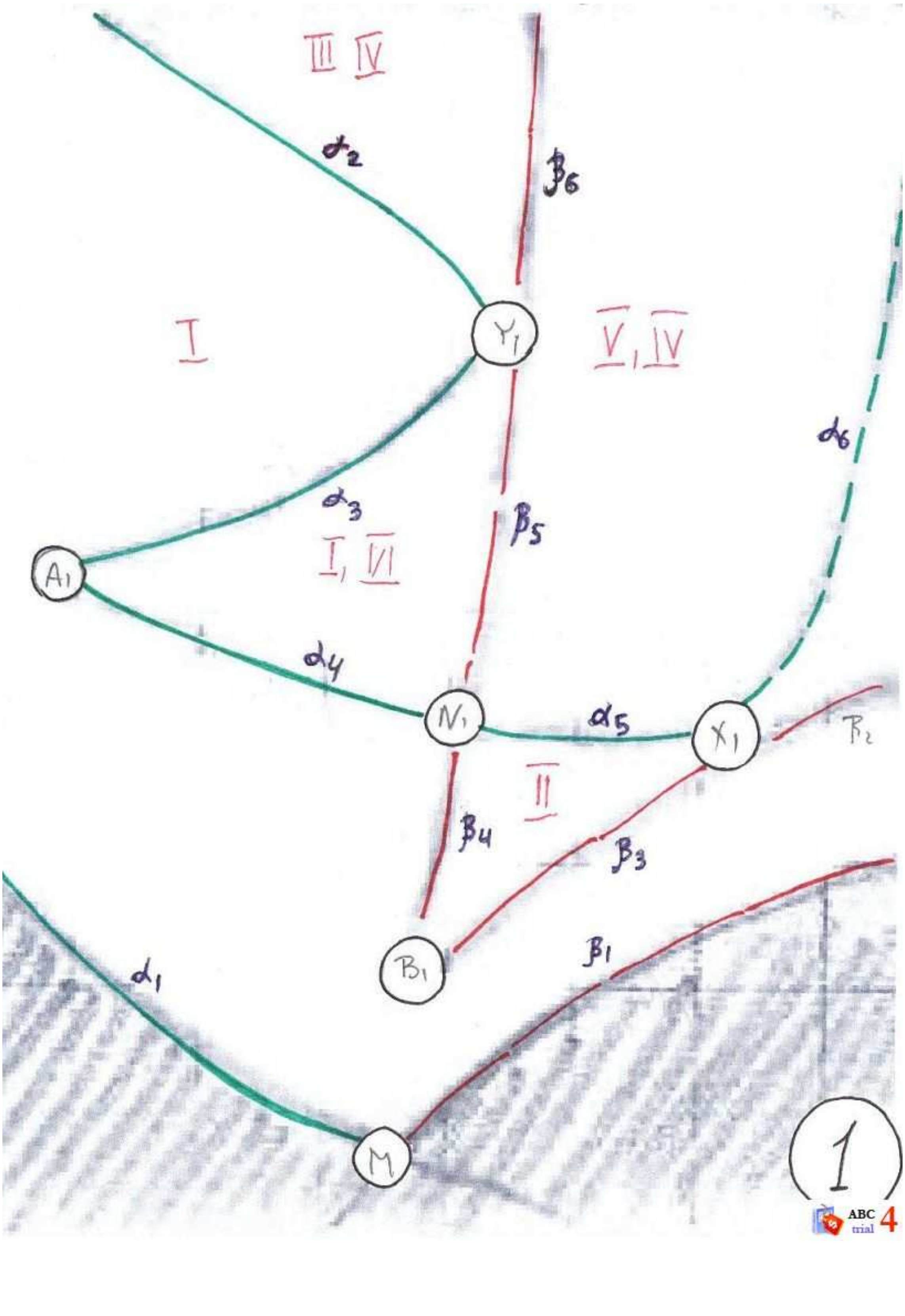
III, IV
β6
α2
γ1
β5
I, VI
α3
α6
γ3
β6
N3
III, IV
α2
δ3
I
A3
V, IV
γ3
β2
α1
V
β1
C1
α7
C2
α1
M
8

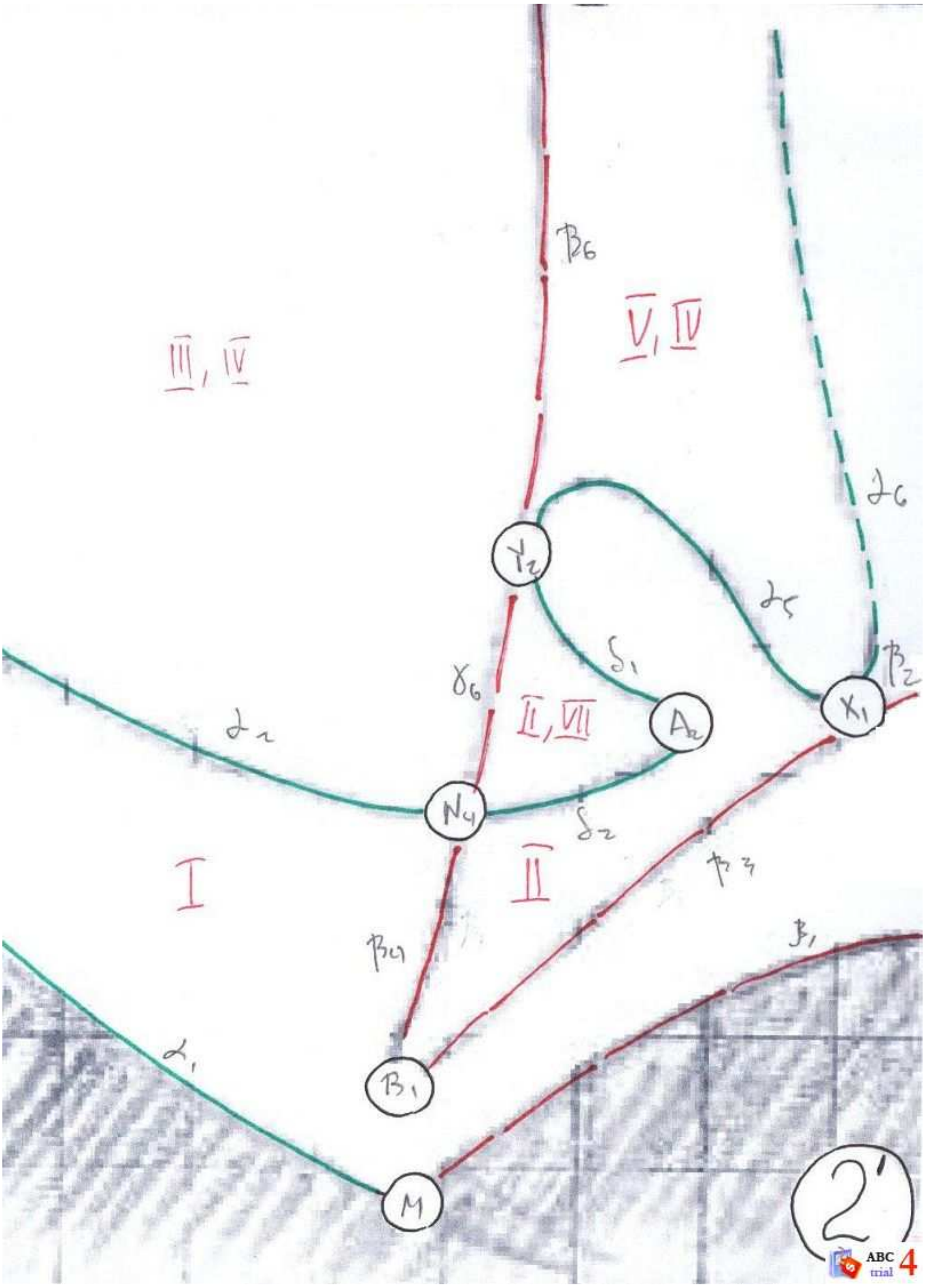


III, IV
I
I, VI
I, VI
VIII
V, IV
I
Y1
X2
E1
A2
C1
C2
M
7

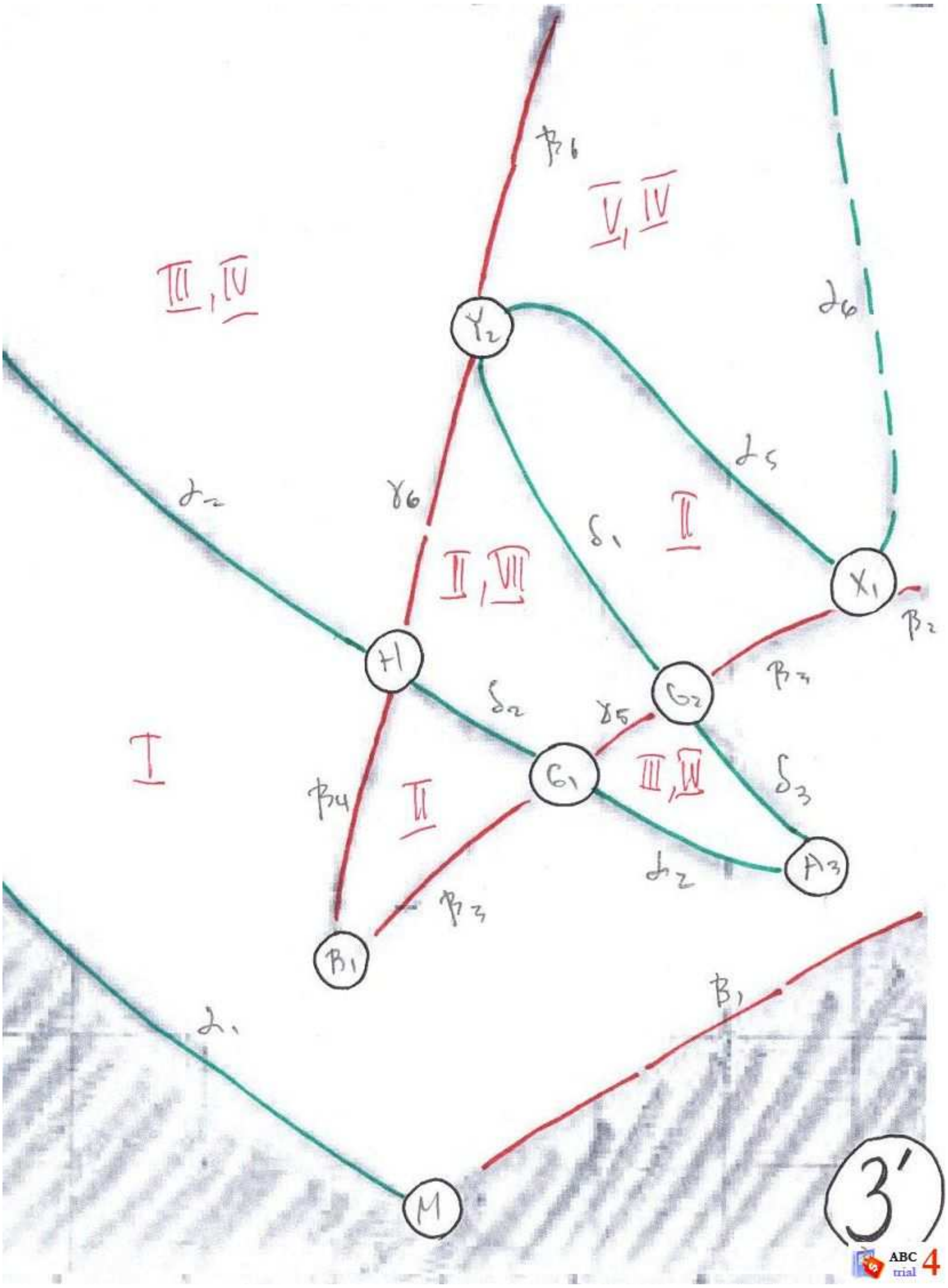


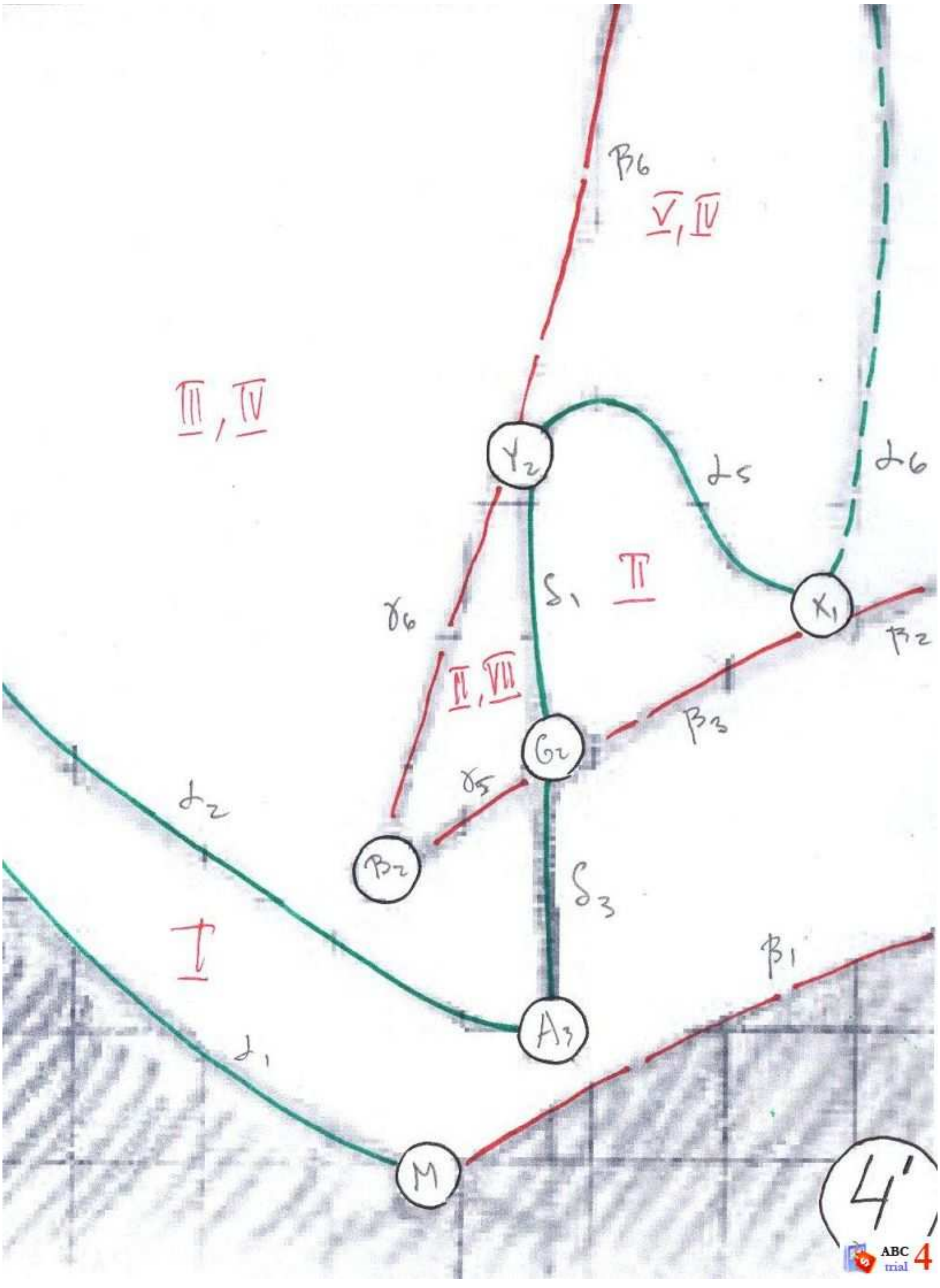
Y1
X2
E1
E2
N2
C1
C2
A1
M
6


III IV
α2
β6
I
Y1
V, IV
α6
α3
β5
I, VI
A1
α4
N1
α5
X1
β2
II
β4
β3
B1
β1
α1
M
1
ABC trial 4

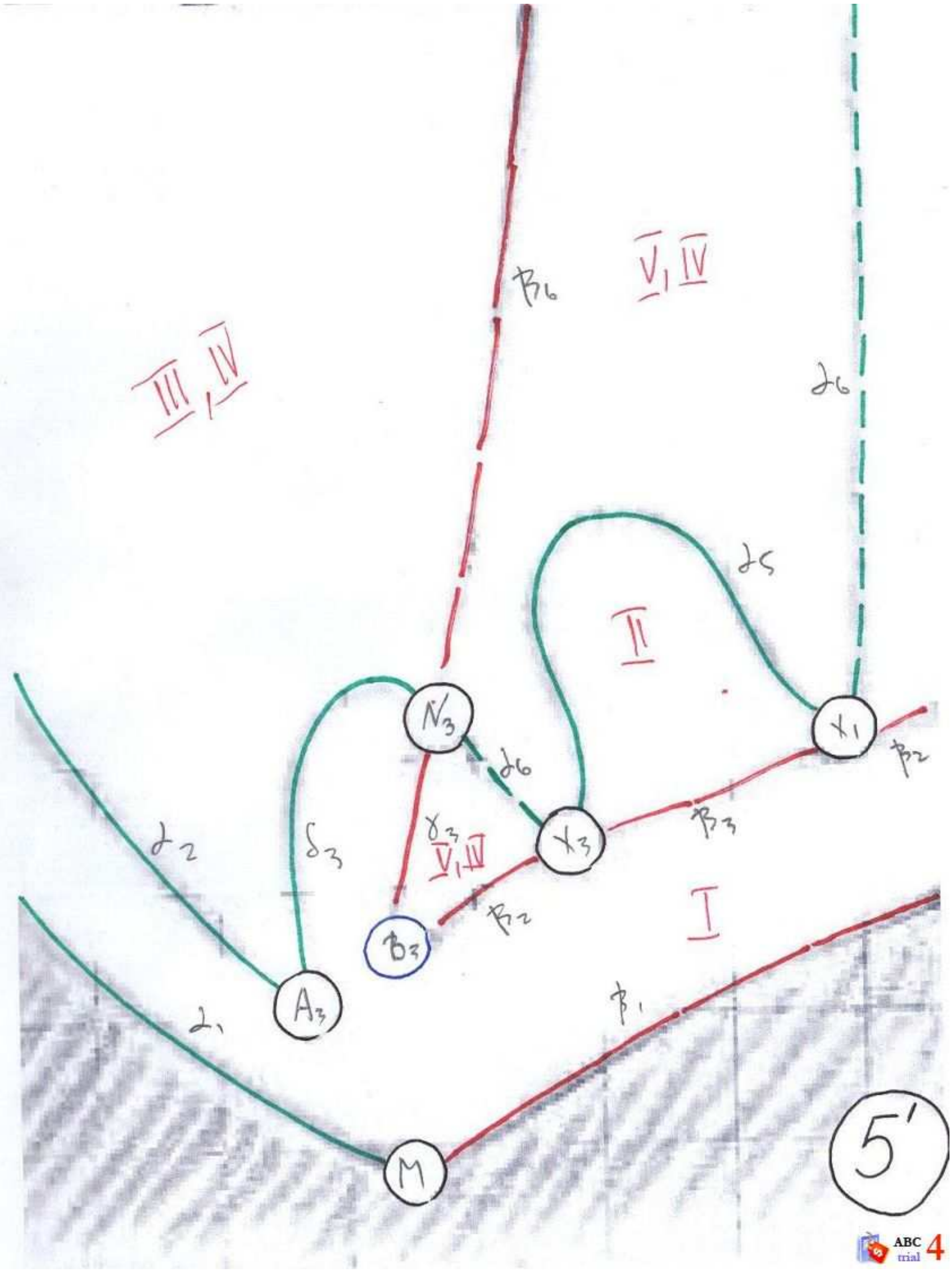


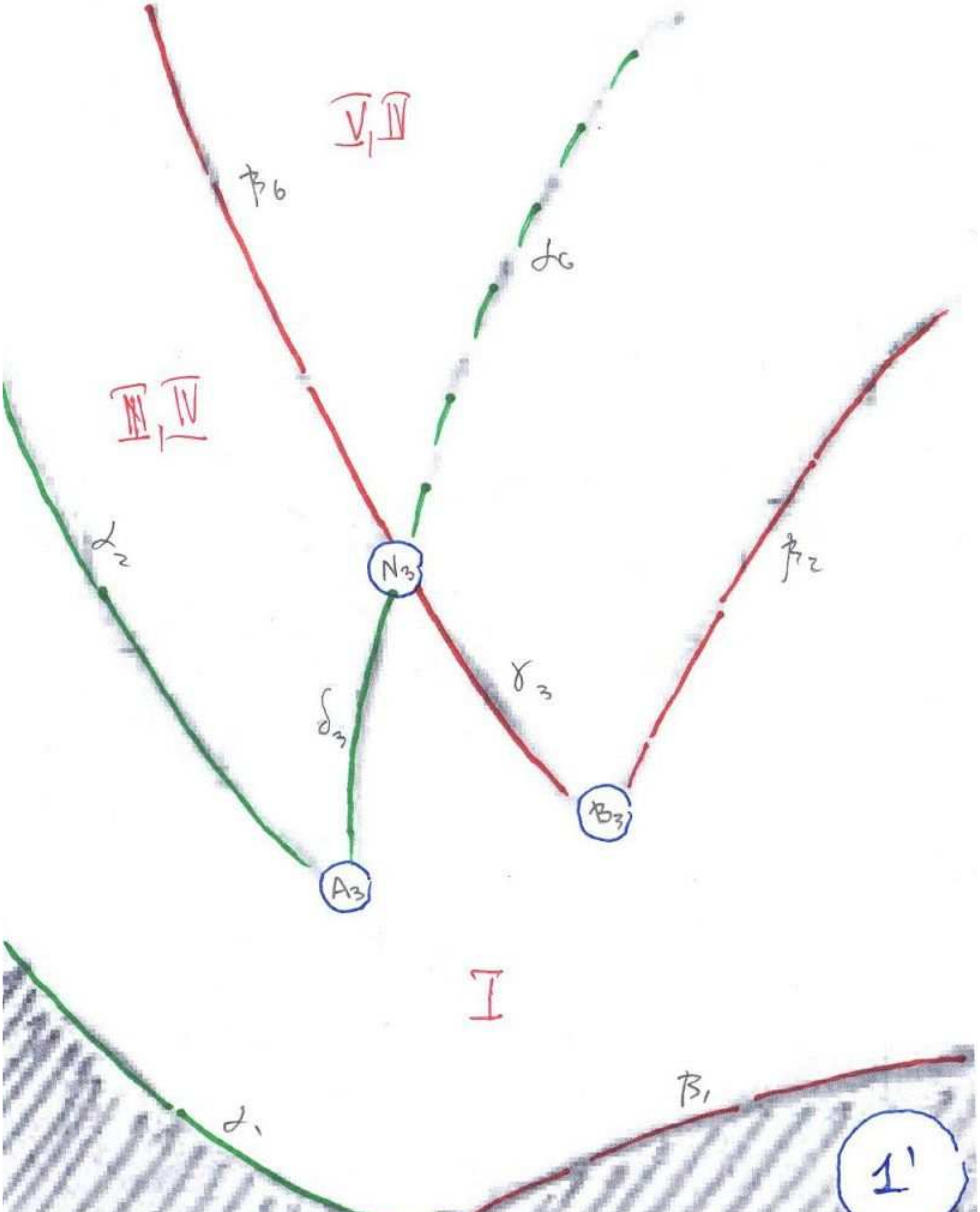
β6
V, IV
III, IV
α6
Y2
α5
δ1
β2
γ6
II, VII
A2
X1
α2
N4
δ2
I
II
β3
β4
β1
α1
B1
M
2'

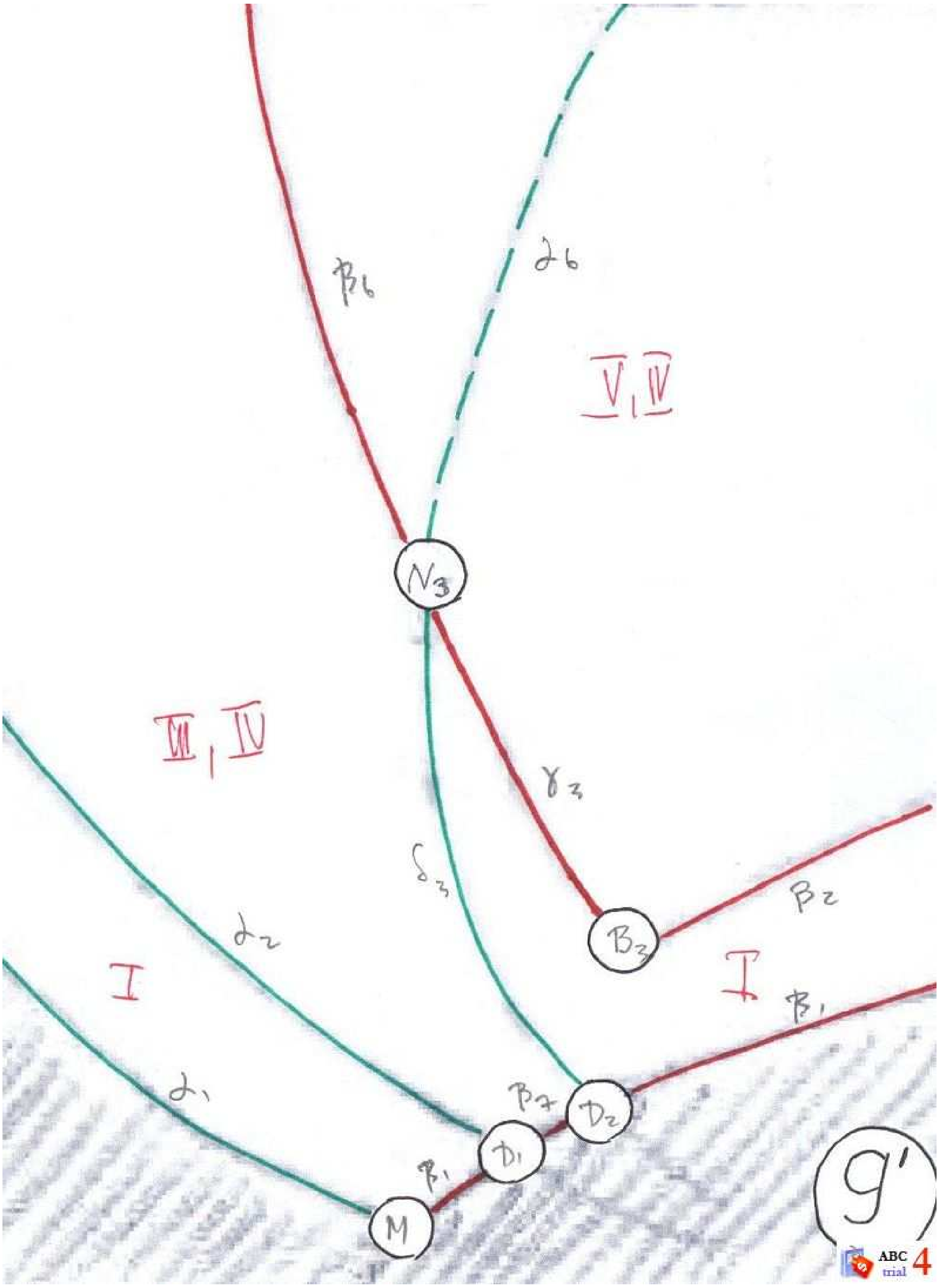




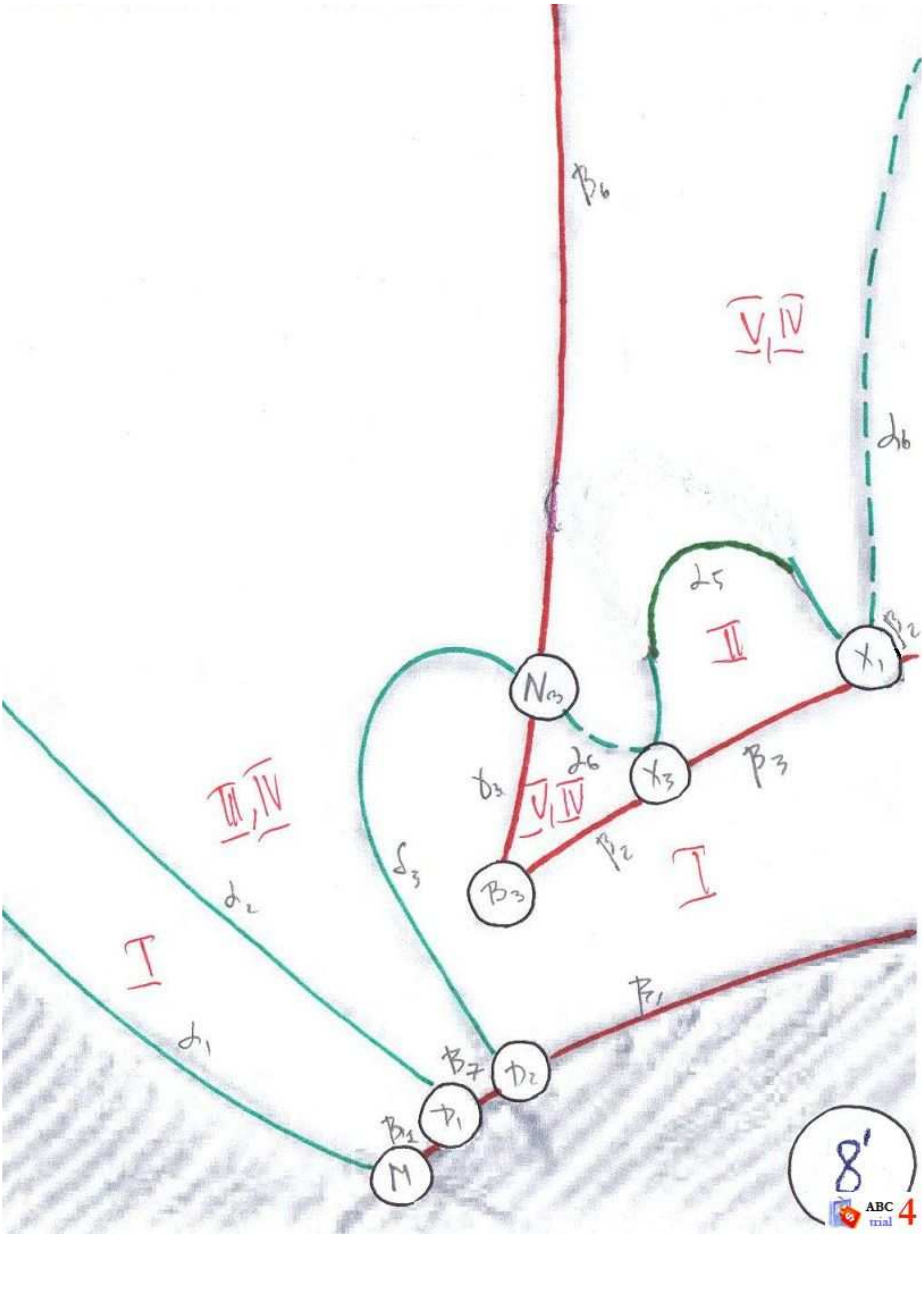
β6
V, IV
III, IV
Y2
α5
α6
δ1
II
X1
β2
γ6
II, VII
G2
β3
γ5
α2
B2
δ3
I
β1
A3
α1
M
4'

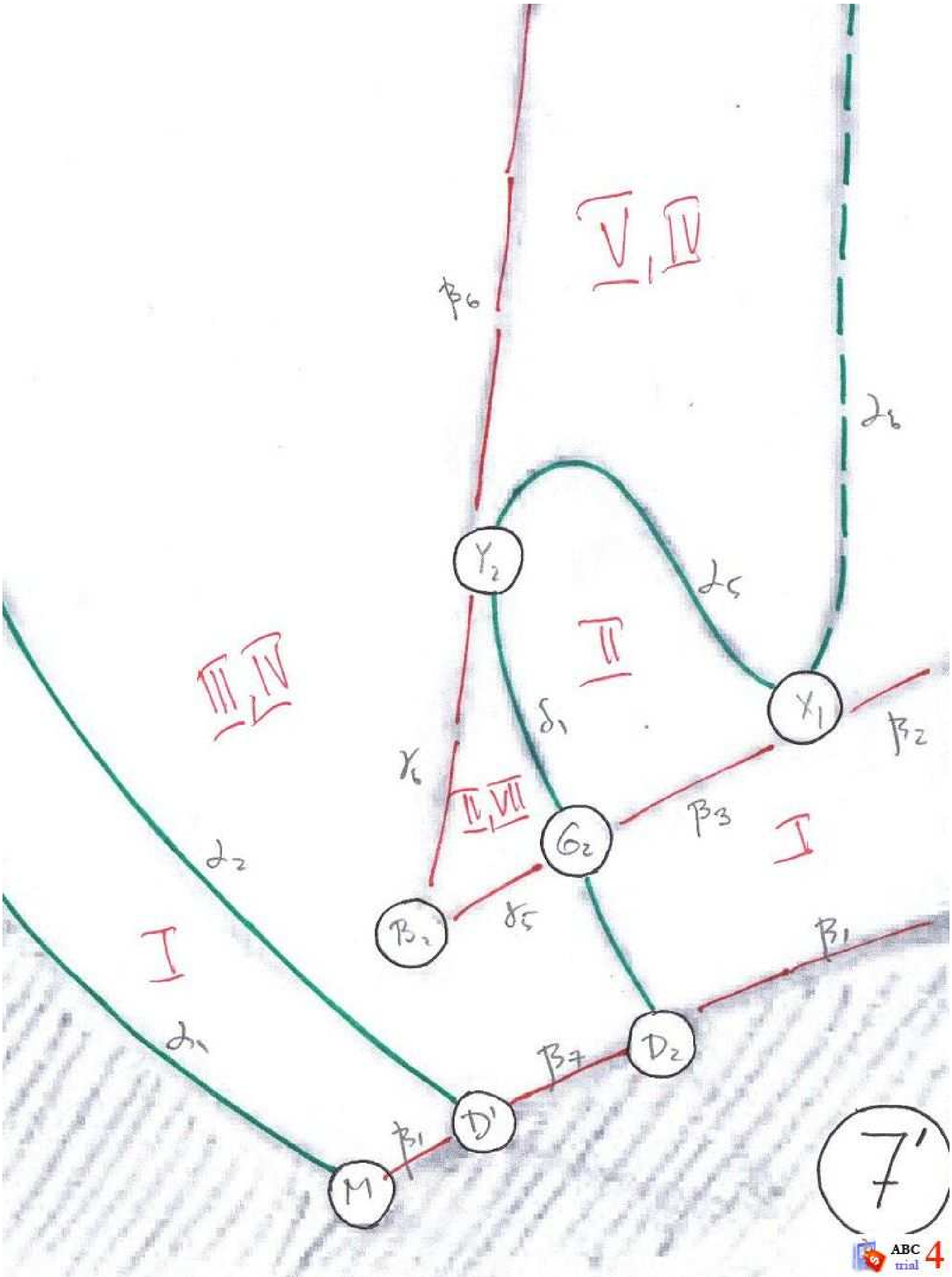

III, IV
V, IV
II
I
V, IV
N_3
X_1
X_3
A_3
M
5'


V, IV
β6
α6
III, IV
α2
N3
β2
δ3
γ3
B3
A3
I
β1
α1
M
1'
ABC trial 4

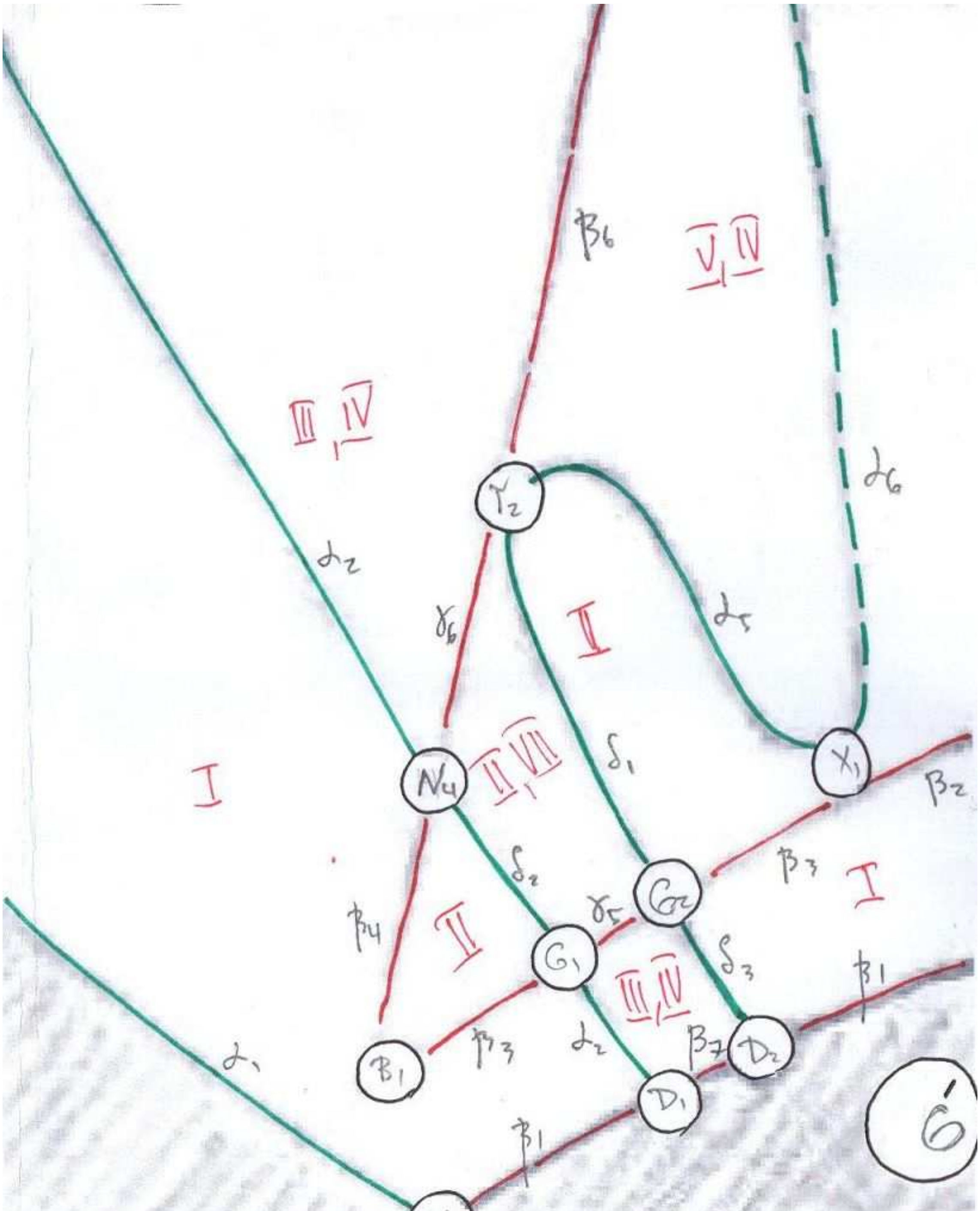


N3
B3
D1
D2
M
g'
V, IV
III, IV
I
I





V, IV
β6
α6
Y2
α5
II
III, IV
X1
δ1
β2
γ6
II, VII
β3
G2
I
α2
β2
γ5
β1
I
D2
α1
β7
D'
β1
M
7'


β6
V, IV
III, IV
Y2
α6
α2
γ6
II
α5
δ1
X1
I
N4
II, VII
β2
δ2
β3
I
β4
II
γ5
G2
G1
δ3
β1
III, IV
β7
D2
α1
B1
β3
α2
D1
6
β1
M

Список литературы

[1] Yehia H.M. New integrable cases in dynamics of rigid bodies. - Mech. Res. Com., 1986, Vol. 13(3), pp.169-172.

[2] Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата. Вестник МГУ сер. матем., механ., 1987, №4, с. 88-90

[3] А.А.Ошемков “Труды Семинара по векторному и тензорному анализу вып. 25 часть 2.” Издательство Московского Ун-та, 1993.

[4] Болсинов А.В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. - Изд-во УдГУ 1999.

[5] П.Е.Рябов “Бифуркационное множество задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхьи”.Дисс.Волгоград 1997.

[6] Харламов М.П, Рябов ПЕ. Бифуркации первых иnнегралов в случае Ковалевскоq-Яхьи. - Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т.2, №2.

[7] Г.Г.Аппельрот “Не вполне симметричные тяжёлые гироскопы // Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки.” М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940.С.61-155.

[8] М.П.Харламов “Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела”. Л.:Изд-во Ленинградского ун-та, 1980.

[9] П.В.Морозов “Лиувиллева классификация некоторых интегрируемых систем механики твердого тела” Москва - 2006.

[10] Болсинов А.В., Рихтер П, Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. - Матем. сборник, 2000, т. 191, N 2, с. 3-42.

[11] Морозов ПВ. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша. - Матем. сборник, 2002, т. 193, N 10, с. 113-138.

[12] Морозов ПВ. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа - Матем. сборник, 2004, т. 195, N 3, с. 69-114.

[13] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела. - Матем. сборник, 1996, т. 187, И3, с. 143-160.